

MO824A/MC859A – Tópicos em Otimização Combinatória
Primeiro semestre de 2017

Atividade 3 (extra-classe)
Entrega: 10 de abril até meio-dia

Prof. Fábio Luiz Usberti (fusberty@ic.unicamp.br)
Prof. Celso Cavellucci (celsocv@ic.unicamp.br)

1 Objetivo

O objetivo desta atividade consiste na implementação (em grupos de **dois** ou **três** alunos) de uma metaheurística “GRASP” (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) para a solução do problema de maximização de uma função binária quadrática (“quadratic binary function” – QBF).

2 Problema MAX-QBF

Uma função binária quadrática (QBF) é uma função $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que pode ser expressa como uma soma de termos quadráticos:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

Onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) são os coeficientes da função f . Em notação matricial, uma QBF pode ser expressa como:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Por exemplo:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & x_1 & (2x_1 + 3x_2 + 4x_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 + 4x_3^2 \end{aligned}$$

O problema de maximização de uma função binária quadrática (MAX-QBF) pode ser expresso como:

$$Z = \max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) ,$$

O MAX-QBF é um problema NP-difícil [1], mesmo que nenhuma restrição adicional seja imposta sobre as variáveis binárias \mathbf{x} . No entanto, se os coeficientes a_{ij} forem todos não-negativos, o problema torna-se trivial, uma vez que $x_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) é uma solução ótima.

3 Problema MAX-QBF com restrições de adjacência

Uma variante do problema MAX-QBF é definida a seguir:

Problema MAX-QBFAC (“Maximum quadratic binary function with adjacency constraints”): Maximizar uma função binária quadrática tal que nenhum par de variáveis consecutivas x_i e x_{i+1} sejam iguais a 1 simultaneamente. Este problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \\ \text{s.a.} \quad & x_i + x_{i+1} \leq 1 \quad i = 1, \dots, n-1 \\ & x_i \in \mathbb{B} \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, \dots, n$) são parâmetros do problema.

4 Requisitos da atividade

Esta atividade envolve a implementação de uma metaheurística GRASP como um método de solução para o MAX-QBFAC. Para esta atividade você pode utilizar como base o Framework GRASP em Java, disponível no ensino aberto, desenvolvido pelos docentes desta disciplina.

A atividade exige a entrega do código fonte e de um relatório (até 5 páginas) descrevendo brevemente as seguintes informações sobre a metaheurística desenvolvida:

- Variáveis de decisão.
- Descrição da lista restrita de candidatos (RCL – “restricted candidate list”).
- Heurística construtiva.
- Operador de busca local e o método de busca (*first-improving* e *best-improving*).
- Critérios de parada.
- Método de construção alternativo (veja baixo).

Para esta atividade é necessário a implementação de pelo menos um *método de construção alternativo* discutido no artigo de referência do GRASP [2], por exemplo:

1. *Random plus greedy*
2. *Sampled greedy construction*
3. *Reactive GRASP*
4. *Cost perturbations*
5. *Bias functions*
6. *Intelligent construction*
7. *POP in construction*

O relatório também deve apresentar os resultados de testes computacionais da metaheurística GRASP com um conjunto de instâncias pré-definidas (veja próxima seção). O tempo de execução para cada instância deve ser limitado em 30 minutos. Devem ser avaliados dois métodos de busca (*first-improving* e *best-improving*), dois valores para o parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ da lista RCL e dois métodos de construção (padrão e alternativo). Procure organizar os resultados em uma tabela, avaliando qual a estratégia obteve o melhor desempenho. Para isso, a tabela deve conter as seguintes informações para cada estratégia avaliada:

- Nome da instância.
- Melhor custo obtido pela heurística construtiva do GRASP.
- Melhor custo obtido pelo GRASP.

5 Instâncias

Testes computacionais devem ser realizados com um conjunto de cinco instâncias disponíveis no ambiente ensino aberto. Os nomes das instâncias, suas dimensões e os valores das soluções ótimas (quando conhecidos) são fornecidos a seguir:

Instância	$ x $	MAX-QBF (Z^*)	MAX-QBFAC (Z^*)
qbf020	20	151	104
qbf040	40	429	251
qbf060	60	≥ 572	≥ 396
qbf090	80	≥ 965	≥ 586
qbf100	100	≥ 1451	≥ 862

6 Referências

1. Kochenberger, et al. The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey. **J Comb Optim** (2014). 28:58–81. DOI:10.1007/s10878-014-9734-0.
2. Resende, M. G. C. e Ribeiro, C. Greedy Randomized Adaptive Search Procedures: Advances, Hybridizations, and Applications. In: M. Gendreau, J.-Y. Potvin (eds.), **Handbook of Metaheuristics**, International Series in Operations Research & Management Science 146, DOI: 10.1007/978-1-4419-1665-5.