

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

**Projeto de Iniciação Científica**

**Um Estudo Computacional para o Problema do Ciclo Dominante com Coleta de Prêmios**

**Candidato:** Luis Henrique Pauleti Mendes

**Orientador:** Prof. Dr. Fábio Luiz Usberti

Campinas 2016

## **Resumo**

Este projeto de pesquisa propõe metodologias para resolver o Problema do Ciclo Dominante com Coleta de Prêmios (PCDCP). Este problema consiste na composição de dois problemas NP-difíceis: o Problema do Conjunto Dominante e o Problema do Caixeiro Viajante. Brevemente, o objetivo do PCDCP consiste em encontrar um ciclo de custo mínimo em um grafo não-direcionado. O ciclo é trafegado por um viajante que necessita visitar um conjunto de clientes (vértices dominantes). A motivação do PCDCP consiste em sua aplicação prática para empresas de transporte, distribuição e coleta de produtos; em particular, no processo de definição de rotas para realização desses serviços. Neste projeto de pesquisa, pretende-se estudar metodologias metaheurísticas para a solução do PCDCP, considerando-se a complexidade da solução exata do PCDCP.

*Palavras-chave:* Caixeiro Viajante, Conjunto Dominante em Grafos, Otimização Combinatória, Metaheurística.

## **Abstract**

This research project proposes methodologies to solve the Prize Collecting Dominating Cycle Problem (PCDCP). This problem is the composition of two NP-hard problems: the Dominating Set Problem and the Traveling Salesman Problem. Briefly, the aim of the PCDCP is to find a minimum cost cycle in an undirected graph. The cycle is traversed by a traveler who needs to visit a set of customers (dominant vertices). The motivation of the PCDCP consists in its practical application to companies that deal with transportation, distribution and collection of products; particularly, in the process of definition of the routes to carry out these services. In this research project, we will study methodologies to solve the PCDCP, considering the complexity of the exact solution of the PCDCP.

*Keywords:* Traveling Salesman, Dominant Set in Graphs, Combinatorial Optimization, Metaheuristic.

## 1. Introdução

Dominação em teoria dos grafos é um modelo natural para vários problemas do mundo real. Haynes, Hedetniemi e Slater [1], ilustram vários problemas interessantes, incluindo roteamento de ônibus escolares, redes de computadores e estações de rádio.

Também existem diversos tipos de aplicações no mundo real referente a problemas de distribuição, como coleta de lixo, serviços de correio postal, operações de frete, entrega de mercadorias, coleta de consumo de energia residencial, dentre outros.

As soluções para esses problemas são focadas em minimizar os custos logísticos, o que possibilita uma economia significativa para as entidades provedoras desses serviços. Porém, grande parte desses problemas são de difícil solução, o que motiva o interesse na pesquisa de algoritmos heurísticos que obtenham soluções de boa qualidade na prática.

Em teoria dos grafos, em particular nos ramos de problemas de dominação e problemas de roteamento, existem dois problemas representativos na literatura que já foram amplamente investigados: o Problema do Conjunto Dominante, do inglês *Dominating Set Problem* (DSP) e o Problema do Caixeiro Viajante, do inglês *Traveling Salesman Problem* (TSP).

Dado um grafo não-direcionado  $G = (V, E)$ , o DSP consiste em encontrar um subconjunto  $D \subseteq V$  tal que cada vértice que não está em  $D$  é adjacente a algum vértice em  $D$ . Uma extensão do DSP, denominado k-DSP, generaliza a definição de conjunto dominante a partir do conceito de vizinhança entre vértices. No DSP um vértice  $u$  é vizinho de um vértice  $v$  se e somente se  $u$  é adjacente a  $v$ . Já no k-DSP, um vértice  $u$  é vizinho de um vértice  $v$  se e somente se  $d(u, v) \leq k$ , onde  $d(u, v)$  é a distância (ou custo) de um caminho mínimo entre os vértices  $u$  e  $v$ , enquanto  $k$  é um parâmetro denominado raio de vizinhança.

O TSP é um problema que consiste em encontrar um ciclo  $C$  em um grafo não-direcionado  $G = (V, E)$  que passa por todos os vértices em  $V$ , tal que a distância (ou custo) total percorrida seja mínima. O TSP pode ser informalmente descrito como o problema de um vendedor ambulante que, partindo de uma cidade origem, precisa visitar um conjunto de cidades para comercializar seus produtos percorrendo a distância mínima. Existem estradas que ligam todas as cidades e cada cidade deve ser visitada somente uma vez. Após o término da viagem, o vendedor ambulante precisa retornar para a cidade de origem.

O DSP já foi intensivamente estudado na literatura. Chang [2] investigou diferentes abordagens de dominação em diversos tipos de grafos e Chen et al. [3] estudaram o Problema do Conjunto Dominante com funções de medida e estenderam os resultados para grafos ponderados.

O TSP também já foi muito estudado na literatura. Chatterjee et al. [4] e Laporte et al. [5] mostram que o TSP pode ser aplicado em muitos problemas reais de diversas áreas do conhecimento, como logística, genética, manufatura e telecomunicações. Muitas metodologias exatas, aproximadas e heurísticas já foram propostas para o TSP, algumas das quais são exploradas por Applegate et al [6].

Neste trabalho será estudado o Problema do Ciclo Dominante com Coleta de Prêmios, do inglês *Prize Collecting Dominating Cycle Problem* (PCDCP). Trata-se de um problema NP-difícil que generaliza o DSP e o TSP. Problemas similares ao PCDCP já foram estudados na literatura. Bienstock et al. [7] estudaram o Problema do Caixeiro Viajante com Coleta de Prêmios, do inglês *Prize Collecting Travelling Salesman Problem* (PCTSP), apresentando um algoritmo aproximado baseado no algoritmo de Christofides para o TSP, Snyder e Daskin[10] estudaram o Problema do Caixeiro Viajante Generalizado, do inglês, *Generalized Travelling*

*Salesman Problem* (GTSP), apresentando uma heurística eficaz que combina um algoritmo genético com uma busca local, enquanto Current e Schilling [8] e Maziero et al. [9] estudaram o Problema do Ciclo Dominante, do inglês *Dominating Cycle Problem* (DCP), apresentando procedimentos heurísticos e metodologias para resolvê-lo.

Este documento está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 são apresentados os objetivos gerais e específicos do projeto. Na Seção 3 o PCDCP é apresentado formalmente. A Seção 4 descreve as metodologias propostas neste projeto para solução do PCDCP. A Seção 5 descreve as formas de análise dos resultados. A Seção 6 traz o cronograma de atividades desta proposta. Finalmente, a Seção 7 apresenta os comentários finais.

## **2. Objetivos**

Nesta seção são apresentados os objetivos gerais e específicos deste projeto de iniciação científica:

### **2.1 Objetivos Gerais**

- Propor metodologias de solução heurística e exata para o PCDCP;
- Avaliar e comparar o desempenho das metodologias com as instâncias geradas.

### **2.2 Objetivos Específicos**

- Pesquisar na literatura sobre as melhores técnicas desenvolvidas para os problemas DSP, TSP e outros problemas relacionados ao PCDCP;
- Propor modelos matemáticos e heurísticas específicas para o problema PCDCP;
- Elaborar um conjunto de instâncias suficientemente diversificadas para os experimentos computacionais.

### 3. Definição do Problema

A definição do PCDCP é fornecida a seguir. Seja  $k$  um número não-negativo e  $G = (V, E)$  um grafo onde  $V$  representa o conjunto de vértices e  $E$  o conjunto de arestas. Associado a cada aresta  $e \in E$  há um custo não-negativo  $c_e$  e a cada vértice  $v \in V$  uma penalidade não-negativa  $\pi_v$ . Um subconjunto de vértices  $D \subseteq V$  é um conjunto  $k$ -dominante de  $G$  se para cada vértice  $v \in V \setminus D$  existe um vértice  $u \in D$  tal que  $d(u, v) \leq k$ , onde  $d(u, v)$  é a distância (ou custo) de um caminho mínimo entre os vértices  $u$  e  $v$ , enquanto  $k$  é o raio de vizinhança. O PCDCP tem por objetivo encontrar um ciclo de custo mínimo que também seja um conjunto  $k$ -dominante de  $G$ . O custo do ciclo é composto pela soma dos custos de suas arestas e pela soma das penalidades dos nós não visitados pelo ciclo.

A Figura 1 ilustra uma solução viável para uma instância do PCDCP. Os pontos em cor vermelha representam o subconjunto de nós que dominam o grafo; o traçado da rota encontra-se em cor preta; a vizinhança de um nó dominante é demonstrada pelas circunferências em verde.

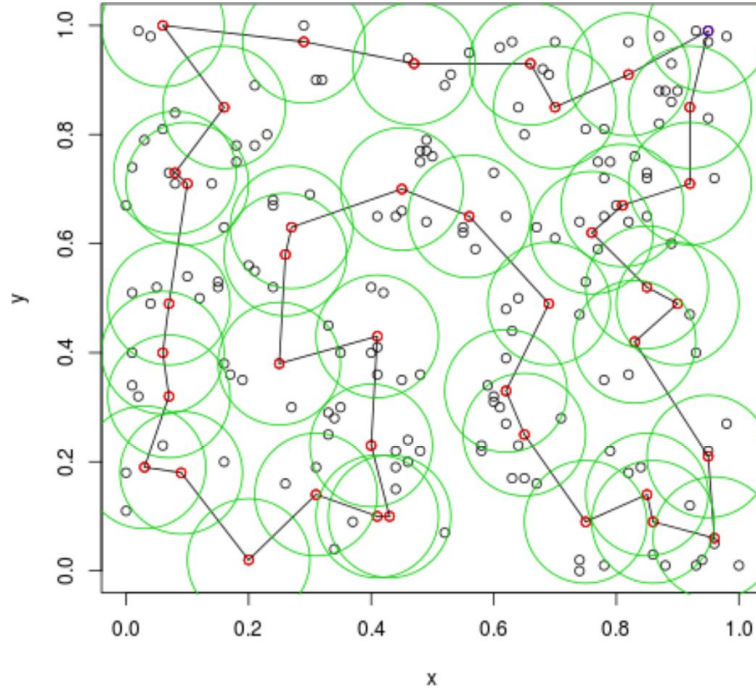


Figura 1: Solução factível para o PCDCP, com 200 vértices e raio de vizinhança  $k = 0.10$ .

Fonte: Maziero et al. [9]

## 4. Metodologia

Nesta seção são apresentadas três metodologias de solução para o PCDCP. A primeira é denominada "metodologia de duas fases", uma para resolver o k-DSP com Coleta de Prêmios e outra para resolver o TSP. A segunda metodologia proposta consiste na implementação de uma meta-heurística GRASP, tendo em vista que métodos exatos para o PCDCP podem ser computacionalmente inviáveis para instâncias de maior porte. A terceira metodologia consiste em uma abordagem evolutiva, baseada em algoritmos genéticos.

### 4.1. Metodologia de Duas Fases

A primeira metodologia de solução proposta para o PCDCP é baseada na heurística para o DCP proposta por Current e Schilling [8], que consiste em um método de duas fases: a



primeira fase resolve o k-DSP, resultando em um subconjunto de vértices que dominam o grafo com penalidade mínima. A segunda fase busca resolver o TSP sobre os vértices pertencentes ao conjunto dominante obtido na primeira fase. Cabe observar que o ciclo obtido na segunda fase trata-se de uma solução viável (não necessariamente ótima) para o PCDCP, uma vez que seus vértices dominam o grafo.

#### **4.2. Metodologia GRASP**

A segunda metodologia proposta para o PCDCP é baseada na metodologia para o DCP proposta por Maziero et al [9].

Considerando que a solução exata para o PCDCP requer tempo exponencial, exceto se  $P=NP$ , propõe-se uma metodologia de solução para o PCDCP através da implementação da meta-heurística GRASP. Nesse sentido, para as instâncias onde a aplicação de uma metodologia exata se torna computacionalmente inviável, a meta-heurística torna-se uma alternativa para a obtenção de soluções de boa qualidade (sem garantias de otimalidade), em tempo computacional adequado.

Resende [11] apresenta o GRASP (*Greedy Randomized Adaptive Search Procedure*) como uma meta-heurística de dois estágios: o primeiro é responsável pela construção de uma solução inicial a partir de uma heurística construtiva aleatória gulosa. O segundo estágio realiza uma busca local no intuito de explorar a vizinhança da solução inicial até atingir um mínimo local do espaço de soluções. Após certo número de iterações, a melhor solução encontrada é retornada como solução final da meta-heurística.

No estágio de construção da solução inicial, os elementos candidatos a participarem da solução inicial são escolhidos de modo aleatório e guloso. Este processo se realiza a partir de uma lista restrita de candidatos (*restricted candidate list*, RCL) que recebe os melhores candidatos a entrar na solução. Por exemplo, no caso do DSP os melhores candidatos poderiam ser os nós de maior grau por serem mais promissores a fazerem parte de um conjunto dominante ótimo. A partir da lista RCL, os candidatos que efetivamente entram na solução são escolhidos aleatoriamente com distribuição uniforme.

As soluções encontradas no primeiro estágio do GRASP não são necessariamente ótimos locais, logo o segundo estágio passa a explorar a vizinhança dessas soluções. Uma vizinhança é definida como um conjunto de soluções que são alcançáveis a partir de uma solução inicial após a aplicação de um operador de busca local. Uma solução é ótima local quando em sua vizinhança não existe uma solução de melhor custo.

Para a meta-heurística GRASP proposta, as variáveis de decisão representam o conjunto de vértices e de arestas da instância. O custo final da solução é dado pela somatória de todos os pesos das arestas que estão sendo utilizadas no ciclo mais a somatória de todas as penalidades dos vértices que não estão sendo utilizados no ciclo.

#### **4.3. Metodologia Genética**

A terceira metodologia proposta é baseada em um algoritmo genético proposto por Snyder e Daskin[10] para o GTSP.

Um Algoritmo Genético, do inglês *Genetic Algorithm* (GA), é uma meta-heurística inspirada pelo processo de seleção natural na evolução biológica. Ao contrário das heurísticas

que geram uma única solução e atuam exaustivamente para melhorá-la, GAs mantêm uma população de soluções que evolui ao longo de muitas gerações a partir de cruzamentos e mutações entre seus indivíduos. Cada indivíduo corresponde a uma versão codificada (cromossomo) de uma solução. A estratégia de codificação é distinta para cada problema de otimização, e além disso, uma solução pode ter mais de uma codificação possível. O objetivo de uma codificação é representar computacionalmente a solução em uma cadeia de genes que compõe o cromossomo, análogo ao que ocorre na genética biológica.

Cada iteração de um GA consiste em vários operadores (cruzamento, mutação, busca local) que constroem uma nova geração de soluções a partir da geração anterior em uma maneira projetada para preservar o material genético das melhores soluções (sobrevivência do mais apto).

## **5. Análise dos Resultados**

Para analisar os resultados, será criado um benchmark de instâncias geradas aleatoriamente. Cada instância será resolvida utilizando-se as metodologias propostas e os resultados serão comparados por meio dos limitantes primal e dual, além do gap de otimalidade.

## **6. Cronograma de Execução**

A Tabela 1 apresenta o cronograma geral desta proposta, onde se encontram listadas as principais atividades que serão realizadas durante o projeto.

Tabela 1: Cronograma do Projeto

	Duração do Projeto em Meses											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Revisão Bibliográfica												
Estudo de metodologias para o TSP												
Estudo de metodologias para o DSP												
Propor formulações matemáticas para o PCDCP												
Propor metodologias para o PCDCP												
Experimentos Computacionais												
Redação do artigo												
Submissão dos resultados para publicação												

## 7. Comentários Finais

Este projeto de iniciação científica contempla o estudo de novas metodologias para o Problema do Ciclo Dominante com Coleta de Prêmios (PCDCP). O objetivo central deste projeto consiste na criação de um algoritmo para obter soluções de boa qualidade do PCDCP.

O avanço na pesquisa científica de problemas de otimização combinatória pode contribuir para novas técnicas na indústria, em especial para uma melhor alocação estratégica de recursos escassos, criando assim um aumento na competitividade das empresas. Contudo, a natureza desses problemas exige técnicas computacionais eficientes de solução. Uma das aplicações práticas do PCDCP é o problema do roteamento de ônibus escolares. Portanto, as metodologias de solução proposta ao longo deste projeto de iniciação científica têm o potencial de otimizar os recursos investidos pelas empresas de transporte escolar atualmente em operação no país.

## Referências

- [1] Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., Slater, P. J.. Fundamentals of Domination in Graphs. Marcel Dekker, Inc., New York, 1997.
- [2] Chang, G. J.. Algorithmic Aspects of Domination in Graphs
- [3] Chen, N., Meng, J., Rong, J., Zhu, H.. Approximation for Dominating Set Problem with Measure Functions. Computing and Informatics, Vol. 23, 2004, 37–49
- [4] Chatterjee, S., Carrera, C., Lynch, L.A.. Genetic algorithms and traveling salesman problems. European journal of operational research 1996;93(3):490–510.
- [5] Laporte, G., Gendreau, M., Potvin, J.Y., Semet, F.. Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem. International transactions in operational research 2000;7(4-5):285–300
- [6] Applegate, D.. The Traveling Salesman Problem: A Computational Study. Princeton Series in Applied Mathematics; Princeton University Press; 2006
- [7] Bienstock, D., Goemans, M. X., Simchi-Levi, D., Williamson, D.. A note on the prize collecting traveling salesman problem. Mathematical Programming 59 (1993) 413-420. North-Holland.
- [8] Current, J. R., Schilling D. A.. The Covering Salesman Problem. Transportation Science, Vol. 23, No. 3, August 1989, 208-213
- [9] Maziero, L. P., Usberti, F. L., Cavellucci, C.. O Problema do Ciclo Dominante
- [10] Snyder, L. V., Daskin, M. S.. A Random-Key Genetic Algorithm for the Generalized Travelling Salesman Problem
- [11] Resende, M. G.. Greedy Randomized Adaptative Search Procedures (GRASP). Encyclopedia of optimization, 2:373-382