Formulação em Programação Linear do PCDCP

Luis H. P. Mendes

March 30, 2016

PCDCP:

Seja k um número não-negativo e $G = (V, E)$ um grafo onde V representa o conjunto de vértices e E representa o conjunto de arestas. Associado a cada aresta $e \in E$ há um custo não-negativo c_e e a cada vértice $v \in V$ uma penalidade não negativa π_v. Um subconjunto de vértices $D \subset V$ é um conjunto k-dominante de G se para cada $v \in V \backslash D$ existe um vértice $u \in D$ tal que $d(u, v) \leq k$, onde $d(u, v)$ é a distância (ou custo) de um caminho mínimo entre os vértices u e v, enquanto k é o raio de vizinhança. O PCDCP tem por objetivo encontrar um ciclo de custo mínimo que também seja um conjunto k-dominante de G. O custo do ciclo é composto pela soma dos custos de suas arestas e pela soma das penalidades dos nós não visitados pelo ciclo.

Seja Z^* a solução ótima do PCDCP.

É conveniente formular o PCDCP da seguinte maneira: seja $Z*(u)$ a solução ótima do PCDCP quando o vértice u tem de estar no ciclo. Claramente,

$$Z^* = \min \left\{ \sum_{vV} \pi_v, \min_{u \in V} \left\{ Z^*(u) \right\} \right\} \tag{1}$$

Nós utilizamos os programa linear inteiro descrito abaixo, cujas soluções são $Z^*(u)$. Seja y_v igual a um se o vértice $v \in V$ estiver no ciclo e zero caso contrário. Seja x_e igual a um se a aresta $e \in E$ estiver no ciclo e zero caso contrário. Para cada subconjunto de vértices $S \subset V$, $\delta(S)$ é o conjunto de arestar com uma ponta em S e outra em $V \backslash S$. Para cada vértice $v \in V$, $N_k(v)$ é a k-vizinhança de v, ou seja, o conjunto de vértices que estão a uma distância de v menor ou igual a k. Então, o PCDCP, quando o vértice u tem de estar no ciclo, pode ser formulado das seguintes maneiras:

$PCDCP_1(u)$:

$$Z^*(u) = \min \left\{ \sum_{e \in E} c_e x_e + \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y_v) \right\} \tag{2}$$

sujeito a:

$$y_u = 1 \tag{3}$$

$$\sum_{w \in N_k(v)} y_w \geq 1 \quad \forall v \in V \tag{4}$$

$$\sum_{e \in \delta(\{v\})} x_e = 2y_v \quad \forall v \in V \tag{5}$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset V \backslash \{u\} \tag{6}$$

$PCDCP_2(u)$:

$$Z^*(u) = \min \left\{ \sum_{e \in E} c_e x_e + \sum_{v \in V} \pi_v (1 - y_v) \right\} \tag{7}$$

sujeito a:

$$y_u = 1 \tag{8}$$

$$\sum_{w \in N_k(v)} y_w \geq 1 \quad \forall v \in V \tag{9}$$

$$\sum_{e \in \delta(\{v\})} x_e = 2y_v \quad \forall v \in V \tag{10}$$

$$\sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq 2y_v \quad \forall v \in V, S \subset V \text{ tal que } |S \cap \{u, v\}| = 1 \tag{11}$$