Übung 4a: Zentraler Grenzwertsatz

Teil B: Multiple Choice

In Übung voraussichtlich besprochen: 2

Kreuzen Sie bitte in den folgenden Mehrfachwahl-Aufgaben die richtigen Aussagen an. Dabei kann es sein, dass von den zu einer Aufgabe vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten keine, eine, mehrere oder alle richtig sind.

1. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit endlichen Werten sowohl für den Erwartungswert als auch für die Varianz und $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Dann besagt der Zentrale Grenzwertsatz, dass

   (a) S_n approximativ standardnormalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n > 30$.

   (b) die standardisierte Zufallsvariable S_n approximativ standardnormalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n > 30$.

   (c) S_n approximativ normalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n > 30$.

   (d) die standardisierte Zufallsvariable S_n approximativ normalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n > 30$.

   (e) die standardisierte Zufallsvariable S_n approximativ standardnormalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n \leq 30$.

2. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit der Zentrale Grenzwertsatz angewendet werden kann?

   (a) $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

   (b) $S_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$.

   (c) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind identisch verteilt.

   (d) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind gleichverteilt.

   (e) $n > 30$.

3. X und Y seien unabhängig. Die Summe $Z = X + Y$ ist

   (a) binomialverteilt, wenn X und Y binomialverteilt sind mit demselben p.

   (b) normalverteilt, wenn X und Y normalverteilt sind mit denselben Parametern.

   (c) standardnormalverteilt, wenn X und Y standardnormalverteilt sind.

   (d) normalverteilt, wenn X und Y standardnormalverteilt sind.

Teil C: Aufgaben

In Übung voraussichtlich besprochen: 3

1. Eine Zulieferung von $100'000$ Speicherchips wird mit Hilfe des folgenden statistischen Prüfplans geprüft. Man zieht eine Zufallsstichprobe vom Umfang $n = 400$ und handelt wie folgt:

   1) Befinden sich 44 oder weniger schlechte Stücke in der Stichprobe, so wird die Lieferung angenommen.
   2) Befinden sich 51 oder mehr schlechte Stücke in der Stichprobe, so wird die ganze Lieferung abgelehnt und zurückgesandt.
   3) Liegt die Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe zwischen 45 einschliesslich und 50 einschliesslich, so wird die ganze Lieferung überprüft (Totalkontrolle)

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten jeder dieser drei Fälle für eine Lieferung, die genau 10% defekte Chips enthält.

   [1) 0.7434; 2) 0.040; 3) 0.1866]

2. Das mittlere Jahreseinkommen aller Haushalte in einer Grossstadt beträgt 32600 Euro bei einer Standardabweichung von 6200 Euro. Eine Zufallsstichprobe mit 400 Haushalten wird entnommen.

   (a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, in der Stichprobe ein mittleres Jahreseinkommen von über 32000 Euro vorzufinden?
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Stichprobenmittelwert zwischen 32100 und 33100 Euro?
   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Stichprobenmittelwert zwischen 32350 und 32950 Euro?
   (d) Geben Sie an, ohne zu rechnen oder statistiche Tafeln zu benutzen, in welchem der folgenden drei Intervalle (in Euro)

   $$(1)\ 32100 - 32300 \quad (2)\ 32300 - 32500 \quad (3)\ 32500 - 32700$$

   der Stichprobenmittelwert mit grösster Wahrscheinlichkeit liegen wird.

   [(a) 0.973; (b) 0.893; (c) 0.662; (d) im Intervall (3)]

3. Eine Maschine produziert defekte Teile mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit p. Der Verkauf erfolgt in Serien zu 2000 Stück. Ein bestimmter Käufer kontrolliert die gesamte Serie und weist sie zurück, falls mehr als 200 defekte Teile darin enthalten sind. Wie gross darf p höchstens sein, damit die Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht zurückgewiesen wird?

   [0.090]

4. Ein symmetrischer Würfel wird 180 Mal geworfen. X sei die Anzahl geworfener 6er. Bestimmen Sie:

   $$\text{(a) } P[28 < X \leq 32] \quad \text{(b) } P[31 \leq X < 36] \quad \text{(c) } P[X = 30].$$

[(a) 0.3094; (b) 0.3245; (c) 0.0796]

5. Die Dividendenerträge (Dividende/Kurs) der Aktiengesellschaften in DAX folgten im vergangenen Jahr recht gut einer Normalverteilung mit einer Standardabweichung von 2.5%. Eine Zufallsstichprobe von 16 Gesellschaften wurde entnommen, um den Mittelwert der Dividendenerträge zu schätzen.

   (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Stichprobenmittelwert den mittleren Dividendenertrag im DAX um mehr als 1% übersteigt?
   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit unterscheidet sich der Stichprobenmittelwert vom mittleren Dividendenertrag im DAX um mehr als 1.2%?
   (c) Unabhängig von der ersten Stichprobe werde nun eine zweite Stichprobe vom Umfang 40 entnommen. Entscheiden Sie ohne erneute Berechnungen, ob die Wahrscheinlichkeiten von (a) und (b) kleiner oder grösser sind als bei der ersten Stichprobe.

[(a) 0.0548; (b) 0.0548; (c) kleiner]

6. Ein Funkgerät besteht aus 1000 Elementen. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall eines Elementes beträgt 0.001 und hängt nicht vom Zustand der anderen Elemente ab.

   (a) Geben Sie mit einer Formel die exakte Wahrscheinlichkeit an, dass genau 2 Elemente ausfallen
   (b) Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Verteilung approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 aber weniger als 6 Elemente ausfallen.
   (c) Das Funkgerät ist nicht mehr funktionstüchtig, falls von den 1000 Elementen mindestens eines ausfällt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall des Funkgerätes exakt und approximativ.

[(b) 0.0668; (c) 0.6323 (exakt); 0.6321 (approximativ)]

7. Eine Seilbahn, die 50 Personen fasst, darf mit maximal 4200 kg belastet werden. Das Gewicht der Benützer (inkl. Skiausrüstung) ist im Mittel 80 kg mit einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ kg (nicht notwendigerweise normalverteilt). Mit welcher Wahrscheinlichkeit übersteigt das Gesamtgewicht einer Zufallsgruppe von 50 Personen das zulässige Gewicht?

[0.0023]