Übung 3: Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Teil A: Kontrollfragen

1. Wofür benötigt man das Konzept der mehrdimensionalen Zufallsvariablen?
2. Was gibt die gemeinsame Massenfunktion und was die gemeinsame Dichefunktion an?
3. "Aus den beiden Randverteilungen einer zweidimensionalen Zufallsvariablen lässt sich die gemeinsame Verteilung berechnen." Unter welchen Voraussetzungen ist dieser Satz richtig?
4. Was ist der Unterschied zwischen einer Randverteilung und einer bedingten Verteilung?
5. Womit berechnet man den Erwartungswert und die Varianz der Komponenten einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen? Mit der Randverteilung oder der gemeinsamen Verteilung?
6. Was bedeutet "stochastische Unabhängigkeit"?
7. Weshalb folgt aus $V(X)+V(Y)=V(X+Y)$ nicht die stochastische Unabhängigkeit von X und Y?
8. Warum verwendet man den Korrelationskoeffizienten und nicht nur die Kovarianz?
9. Wie kann eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen entstehen?
10. Wie kann man empirisch oder experimentell auf die unbekannte Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen schliessen?

Teil B: Multiple Choice

In Übung voraussichtlich besprochen: 1,2,4,6,8,12

Kreuzen Sie bitte in den folgenden Mehrfachwahl-Aufgaben die richtigen Aussagen an. Dabei kann es sein, dass von den zu einer Aufgabe vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten keine, eine, mehrere oder alle richtig sind.

1. Die Kovarianz
   (a) misst nur die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.
   (b) misst nur die Richtung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.
   (c) misst die Stärke und die Richtung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.
   (d) hat keinerlei Aussagekraft über den Zusammenhang zwischen zwei Variablen.
   (e) nimmt immer Werte zwischen -1 und $+1$ an.
2. Der Korrelationskoeffizient ρ
   (a) misst nur die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.
   (b) misst nur die Richtung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.
   (c) misst die Stärke und die Richtung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.
   (d) hat keinerlei Aussagekreft über den Zusammenhang zwischen zwei Variablen.

   (e) nimmt immer Werte zwischen -1 und $+1$ an.

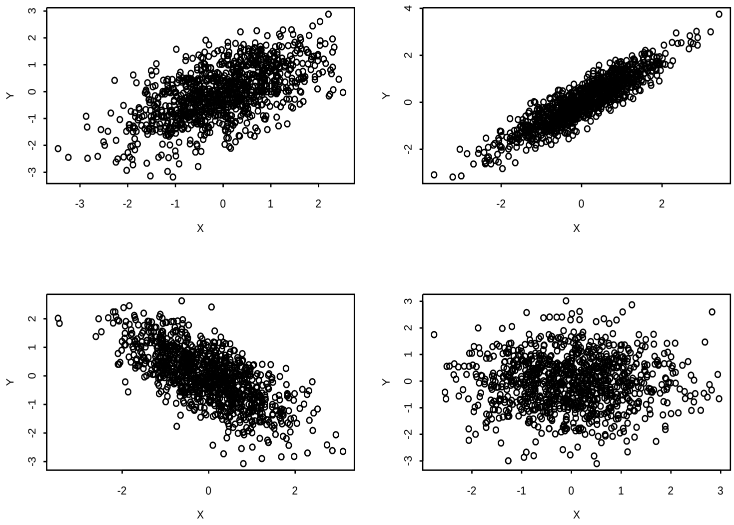
3. Zwei Variablen sind unabhängig, wenn
   (a) der Korrelationskoeffizient $\rho = 0$ ist.
   (b) das Produkt der Randverteilungen und die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung übereinstimmen.
   (c) die Summe der Randverteilungen und die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung übereinstimmen.
   (d) die Kovarianz $\text{Cov} = 1$ und der Korrelationskoeffizient $\rho = 0$ ist.
   (e) die Kovarianz $\text{Cov} = 0$ ist.

4. Die Kovarianz wird errechnet mit:
   (a) $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.
   (b) $\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X^2]E[Y^2]$.
   (c) $\text{Cov}(X, Y) = E[X^2Y^2] - E[X]E[Y]$.
   (d) $\text{Cov}(X, Y) = E[X^2Y^2] - E[X^2]E[Y^2]$.
   (e) $\text{Cov}(X, Y) = E[XY]^2 - E[X]E[Y]$.

5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
   (a) X, Y unabhängig $\Longrightarrow X, Y$ unkorreliert.
   (b) X, Y unkorreliert $\Longrightarrow X, Y$ unabhängig.
   (c) $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
   (d) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
   (e) $\rho_{XY} = -1$ bedeutet: Je grösser X desto kleiner Y.
   (f) Falls $Y = cX, c > 0$, ist $\rho_{XY} = 1$.

6. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? $E[XY] = E[X]E[Y]$
   (a) immer,
   (b) nie,
   (c) falls X und Y unkorreliert sind,
   (d) falls X und Y unabhängig sind,
   (e) falls $E[X] = E[Y] = 0$.

7. Gegeben sind die folgende Streudiagramme von zweidimensionalen Stichproben.



Ordnen Sie die Korrelationskoeffizienten $\rho = 0, \rho = -0.7, \rho = 0.6$ und $\rho = 0.9$ den entsprechenden Abbildungen zu.

8. Sei X die Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Würfels und Y das Ergebnis eines einmaligen Münzwurf. Dann ist $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}]$:

   (a) $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 1/3$
   (b) $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 1/2$
   (c) $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 2/3$
   (d) $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 0$
   (e) $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 1$

9. In einem Experiment werden aus einer Urne mit 5 unterschiedlichen Kugeln (numeriert von 1-5) zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Dabei gelte: $X =$“Kugelnummer der ersten Ziehung” und $Y =$“Kugelnummer der zweiten Ziehung”. Das Experiment wird eine Million Mal wiederholt. Es gilt:

   (a) X und Y sind unabhängig.
   (b) Die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
   (c) Der Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = 0$.
   (d) Der Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = -0.25$.
   (e) Der Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = -0.5$.

10. Folgende Dichtefunktion sei gegeben: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2}x + y$ für $0 \leq x \leq a$ und $0 \leq y \leq 1$. Berechnen Sie den Parameter a.

   (a) $a = 1.236068$
   (b) $a = 2$
   (c) $a = 3.236068$

(d) $a = 3$

(e) $a = 1$

11. Folgende Dichtefunktion sei gegeben: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}y$ für $0 \leq x, y \leq 2$. Berechnen Sie die bedingte Dichte $f_{Y|X}(y)$ für $0 \leq x, y \leq 2$.

    (a) $f_{Y|X}(y) = \frac{x+2y}{2+4y}$

    (b) $f_{Y|X}(y) = \frac{x+2y}{2x+4}$

    (c) $f_{Y|X}(y) = \frac{2+4y}{x+2y}$

    (d) $f_{Y|X}(y) = \frac{2x+4}{x+2y}$

    (e) $f_{Y|X}(y) = \frac{x+2}{1+2y}$

12. Folgende Dichtefunktion sei gegeben: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}y$ für $0 \leq x, y \leq 2$. Berechnen Sie $E[X + 2Y]$.

    (a) $E[X + 2Y] = 33$

    (b) $E[X + 2Y] = \frac{34}{9}$

    (c) $E[X + 2Y] = \frac{10}{3}$

    (d) $E[X + 2Y] = \frac{32}{9}$

    (e) $E[X + 2Y] = \frac{3}{10}$

13. Folgende Dichtefunktion sei gegeben: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}y$ für $0 \leq x, y \leq 2$. Berechnen Sie $V(Y)$.

    (a) $V(Y) = \frac{23}{81}$

    (b) $V(Y) = \frac{25}{81}$

    (c) $V(Y) = \frac{26}{81}$

    (d) $V(Y) = \frac{28}{81}$

    (e) $V(Y) = \frac{29}{81}$

Teil C: Aufgaben

In Übung voraussichtlich besprochen: 1,2,5

1. Die Massenfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) ist in der Tabelle

		Y		
		2	3	4
	10	1/9	1/9	1/9
X	20	1/6	0	1/6
	30	1/18	2/9	1/18

dargestellt. In der Kopfzeile stehen die möglichen Ausprägungen von Y, in der Kopfspalte diejenigen von X, im Innern der Tabelle die Wahrscheinlichkeitsmassen.

(a) Berechnen Sie die beiden Randverteilungen.

(b) Berechnen Sie die Verteilungen für X unter der Bedingung, dass $Y = 4$ ist.

(c) Berechnen Sie $V(X)$ und $V(Y)$.

(d) Berechnen Sie die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten.

(e) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

[(c) 66.67; 0.6667; (d) 0; 0]

2. Gegeben sei die folgende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion einer zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y):

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.01	0.05	0
x_2	0	0	0.17
x_3	0.40	0	0.12
x_4	0	0.25	0

Berechnen Sie

(a) $f_X(x_3)$ und $f_Y(y_2)$;

(b) $f_{Y|X=x_2}(y_3), f_{X|Y=y_3}(x_3)$ und $f_{Y|X=x_4}(y_1)$.

[(a) 0.52; 0.3; (b) 1; 0.4138; 0]

3. Gegeben sei die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) mit der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion

		Y		
		0	1/2	1
	0	3/24	1/12	7/24
X	1	1/12	1/6	1/4

(a) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig voneinander?

(b) Man berechne die Kovarianz zwischen X und Y.

(c) Man bestimme die Varianz von X und Y sowie von $X - Y$.

[(a) abhängig; (b) 0; (c) 0.25; 0.1597; 0.4097]

4. Gegeben sei die Funktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{für } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: $f_{X,Y}(x,y)$ ist die gemeinsame Dichtefuntion zweier Zufallsvariablen X und Y.

(b) Sind X und Y unabhängig?

[(b) abhängig]

5. Gegeben sei die Funktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x \exp(-y) & \text{für } 0 \leq x \leq 1, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: $f_{X,Y}(x,y)$ ist die gemeinsame Dichtefuntion zweier Zufallsvariablen X und Y.

(b) Sind X und Y unabhängig?

[(b) unabhängig]

6. Im Rahmen einer umfangreichen Studie an Mittelschulen wurde folgende Verteilung der Mathematik- und Englischnoten gefunden:

X : Mathematiknoten $\quad x_i = 1, 2, 3, 4$

Y : Englischnoten $\quad y_i = 1, 2, 3, 4$

mit der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsfunktion

		Y 1	2	3	4
X	1	0.05	0.1	0.05	0
	2	0.03	0.1	0.2	0.07
	3	0.02	0.08	0.1	0.1
	4	0	0.02	0.05	0.03

(a) Man zeige: $\mu_X = 2.3, \sigma_X = 0.9, \mu_Y = 2.7, \sigma_Y = 0.9$.

(b) Bestimmen Sie $\text{Cov}(X,Y)$ und ρ_{XY}. Interpretieren Sie dieses Resultat.

(c) Ferner sei $Z = \frac{1}{2}(X + Y)$. Bestimmen Sie $E[Z]$ und $V(Z)$. Vergleichen Sie σ_Z mit σ_X und σ_Y. Wie interpretieren Sie dieses Resultat?

[(b) 0.29; 0.36; (c) 2.5; 0.55]

7. X, Y und Z seien unabhängige Zufallsvariablen mit folgenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen:

X	0	1
f_X	1/4	3/4

Y	-1	0	1
f_Y	1/3	1/3	1/3

Z	1	2	3	4
f_Z	0.3	0.4	0.2	0.1

(a) Bestimmen Sie den Mittelwert und die Varianz von X, Y und $X - Y$.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktionen von $U = X + Y$ und $V = X + Y + Z$. Es ist eine Tabelle in derselben Form wie oben für X, Y und Z anzugeben.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten: $P[X = 0, Y = -1, Z = 4], P[X = 0 \mid Y = 1]$ und $P[X = 1 \mid X + Y = 2]$.

[(a) $E[X] = 0.75$; $E[Y] = 0$; $E[X - Y] = 0.75$; $V(X) = 0.1875$; $V(Y) = 0.6667$; $V(X - Y) = 0.8542$; (c) 1/120; 0.25; 1]