Übung 5: Punkt- und Intervallschätzungen

Teil A: Multiple Choice

In Übung voraussichtlich besprochen: 3,6,8,11,12,16,17

1. Eine Schätzfunktion heisst erwartungstreu, wenn sie symmetrisch um ihren Erwartungswert verteilt ist.

   a) richtig
   b) falsch

2. Effiziente Schätzungen sind immer auch erwartungstreu.

   a) richtig
   b) falsch

3. Erwartungstreue Schätzfunktionen sind konsistent.

   a) richtig
   b) falsch

4. Schätzer werden gewöhnlich als von der Stichprobe abhängige Funktionen (Statistiken) aufgefasst und sind damit selbst wiederum Zufallsvariablen.

   a) richtig
   b) falsch

5. Ein erwartungstreuer Schätzer hat stets einen kleineren MSE als ein verzerrter Schätzer.

   a) richtig
   b) falsch

6. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Wiederholungen einer Zufallsvariablen X mit Erwartungswert $E[X] = \mu$ und Varianz $Var[X] = \sigma^2$. Es sei $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ das arithmetische Mittel. Welche Aussagen sind richtig?

   a) $Var\left[\overline{X}\right] = \frac{\sigma^2}{n}$.
   b) $\overline{X}$ ist ein konsistenter Schätzer für μ .
   c) $\overline{X}$ ist für grosse n approximativ standardnormalverteilt.

7. Erwartungstreue Schätzer sind trivialerweise auch asymptotisch erwartungstreu.

   a) richtig
   b) falsch

8. Ein verzerrter Schätzer führt stets zu einer Schätzung, die sich vom zu schätzenden Wert unterscheidet.

   a) richtig
   b) falsch

9. Wichtigstes Ziel beim Schätzen ist es, Schätzer mit kleinen Varianzen zu finden
   a) richtig
   b) falsch

10. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_5$ seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit (unbekanntem) Erwartungswert $E[X] = \mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $Var[X] = \sigma^2 < \infty$. Betrachten Sie die folgenden Schätzfunktionen für den Parameter μ:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_1 &= X_1 + \frac{3}{5}X_2 - \frac{1}{5}X_3 - \frac{1}{5}X_4 - \frac{1}{5}X_5 \qquad (1)\\
\hat{\mu}_2 &= \frac{(X_1 + X_2)}{2}\\
\hat{\mu}_3 &= \frac{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2)}{5}\\
\hat{\mu}_4 &= X_1 X_2 X_3 X_4 X_5\\
\hat{\mu}_5 &= 1 + \frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)}{5}\\
\hat{\mu}_6 &= \frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)}{5}
\end{aligned}$$

Welche der Schätzer sind erwartungstreu für μ?

   a) Nur Schätzer $\hat{\mu}_1$ und $\hat{\mu}_2$,
   b) alle ausser $\hat{\mu}_3$ und $\hat{\mu}_4$,
   c) nur die Schätzer $\hat{\mu}_2$ und $\hat{\mu}_6$,
   d) nur die Schätzer $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ und $\hat{\mu}_6$.

11. Sei Y eine Zufallsvariable, deren Verteilung nur vom Parameter λ abhängt und für die $E(Y) = \frac{1}{3+\lambda}$ gilt. Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n unabhängige Realisationen der Zufallsvariablen Y. Welcher Schätzer entspricht einem Momentenmethodenschätzer für λ? Methode der Momente
   a) $\hat{\lambda}_{MM} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
   b) $\hat{\lambda}_{MM} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} + 3$
   c) $\hat{\lambda}_{MM} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} - 3$
   d) $\hat{\lambda}_{MM} = \frac{1}{3 + \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}$

12. Obwohl sich der Rechenweg aufgrund der unterschiedlichen Ansätze unter Umständen stark unterscheidet, liefern die Momentenmethode und die Maximum-Likelihood-Methode stets die gleichen Schätzfunktionen.
   a) richtig
   b) falsch

13. Maximum-Likelihood-Schätzungen sind nie erwartungstreu.
   a) richtig

b) falsch

14. Maximierung der Loglikelihoodfunktion und der Likelihoodfunktion führt stets zu demselben Ergebnis, da diese Funktionen immer gleiche Werte annehmen.

    a) richtig
    b) falsch

15. Der Parameter $a > 0$ einer exponentialverteilten Zufallsvariable Y soll mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden. Eine einfache Stichprobe vom Umfang 4 ist $(1, 2, 3, 1)$. Die für die ML-Methode zu maximierende Likelihoodfunktion lautet dann:

    a) $L(\theta) = (1 \cdot e^{-1\cdot\theta})^2(2 \cdot e^{-2\cdot\theta})^1(3 \cdot e^{-3\cdot\theta})^1$
    b) $L(\theta) = (\theta \cdot e^{-\theta})^1(\theta \cdot e^{-\theta})^2(\theta \cdot e^{-\theta})^3(\theta \cdot e^{-\theta})^1$
    c) $L(\theta) = (\theta \cdot e^{-1\cdot\theta})^2(\theta \cdot e^{-2\cdot\theta})^1(\theta \cdot e^{-3\cdot\theta})^1$
    d) $L(\theta) = (1 \cdot e^{-1\cdot x})^2(2 \cdot e^{-2\cdot x})^1(3 \cdot e^{-3\cdot x})^1$

16. Welche Aussage ist richtig?

    a) Wenn die Überdeckungswahrscheinlichkeit (auch Konfidenzniveau genannt) eines Konfidenzintervalls grösser wird, so wird das Konfidenzintervall kleiner.
    b) Wenn die Überdeckungswahrscheinlichkeit (auch Konfidenzniveau genannt) eines Konfidenzintervalls grösser wird, so wird das Konfidenzintervall grösser.
    c) Das Konfidenzniveau und die Grösse des Konfidenzintervalls haben keine direkte Beziehung zueinander.

17. Die Grenzen von Konfidenzintervallen sind zufällig, da sie von der Stichprobenrealisation abhängen.

    a) richtig
    b) falsch

18. Die Länge eines Konfidenzintervalls ist umso grösser, je grösser der zu schätzende Parameter ist.

    a) richtig
    b) falsch

Teil B1: Aufgaben: Punkt- und Intervallschätzung

In Übung voraussichtlich besprochen: 1,3,6ab,7,9

1. Eine Stichprobe besteht aus zwei unabhängigen Beobachtungen X_1 und X_2. Um den Mittelwert der Grundgesamtheit zu schätzen, verwenden wir

$$\mu_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \quad \text{bzw.} \quad \mu_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2$$

.

    a) Sind die Schätzungen erwartungstreu?

b) Welche Schätzfunktion ist effizienter? Um wie viel?

2. Ein Statistiker hat 500 Beobachtungen vorgenommen, aber die Aufzeichnungen der letzten 180 Beobachtungen verloren. So benützt er für die Schätzung des Mittelwertes μ nur die verbleibenden 320 Werte. Welchen Effizienzverlust muss er hinnehmen?

3. Die n unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ stellen eine Zufallsstichprobe aus einer über dem Intervall $[\theta,\ \theta+1]$ rechteckverteilten Grundgesamtheit mit der Dichte f dar.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } \theta \leq x \leq \theta + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

   a) Zeigen Sie, dass für Zufallsvariablen X mit der obigen Dichte gilt:

$$E[X] = \theta + 0.5, \quad Var[X] = 1/12$$

   b) Sei $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Ist $\overline{X}$ eine erwartungstreue Schätzfunktion für θ? Wenn nein, bestimmen Sie eine erwartungstreue Schätzung für θ?

   c) Bestimmen Sie die Varianz der obigen Schätzfunktion $\overline{X}$.

4. Eine Grundgesamtheit besitze den Mittelwert μ und die Varianz σ^2. Die Stichprobenvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_5$ seien unabhängige Ziehungen aus dieser Grundgesamtheit. Man betrachtet als Schätzfunktionen für μ die Stichprobenfunktionen

$$\begin{aligned} T_1 &= \overline{X} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} X_i \qquad (3) \\ T_2 &= \frac{(X_1 + X_2 + X_3)}{3} \\ T_3 &= \frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{8} + \frac{1}{2}X_5 \\ T_4 &= \frac{(X_1 + X_2)}{2} \\ T_5 &= X_1 \end{aligned}$$

   a) Berechnen Sie den Erwartungwert und die Varianz jedes Schätzers.

   b) Berechnen Sie den MSE jedes Schätzers. Welche Schätzfunktion ist am effizientesten?

5. $X_1, X_2, \ldots, X_5$ seien unabhängige Wiederholungen der Zufallsvariablen X mit $P(X = 1) = \pi$ und $P(X = 0) = 1 - \pi$.

   $\hat{\pi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ bezeichne den Schätzer, der den Parameter π durch die relative Häufigkeit schätzt.

   a) Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz und den MSE von $\hat{\pi}$ fur $\pi = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$

   b) Ein alternativer Schätzer sei gegeben durch

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i + 1}{n + 2}$$

Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und MSE von T.
Ist T erwartungstreu? Ist T asymptotisch erwartungstreu? Ist der Schätzer T konsistent?

c) Bestimmen Sie für $n = 12$, welcher der beiden Schätzer besser ist.

6. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ seien unabhängige Wiederholungen der Zufallsvariablen X. Leiten Sie jeweils Momenten-Schätzer für die Verteilungsparameter her, falls

   a) X exponentialverteilt ist mit Parameter λ ($X \sim Exp(\lambda)$).

   b) X gleichförmigverteilt ist auf dem Intervall $[\theta - 0.5\ \theta + 0.5]$ (Rechtecksverteilung).

   c) X normalverteilt ist mit Parametern μ und σ^2 ($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).

7. In einer Telefonzentrale wird zu zehn zufällig ausgewählten Zeitpunkten jeweils festgestellt, wie viele Verbindungen innerhalb der nächsten Minute hergestellt werden. Dabei ergibt sich folgende Stichprobe:

1	0	2	1	1	0	2	3	1	0

X sei die Zufallsgrösse „Anzahl Anrufe innerhalb einer Minute“. Man nimmt an, dass X poissonveteilt ist mit unbekanntem Erwartungswert μ. Die Dichte von X ist dann gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, & \text{für} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4}$$

   a) Bestimmen Sie eine Maximum-Likelihood Schätzung für μ.

   b) Ist diese Schätzung erwartungstreu?

8. $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sei eine Stichprobe der Grösse m einer Zufallsvariablen X mit einer Binomialverteilung $B(n, p)$ und $p \in (0, 1)$. Der Parameter n sei bekannt.

   a) Leiten Sie Momentenschätzer für p her.

   b) Ändern sich die Momentenschätzer, falls der Parameterraum von p auf [0.25, 0.75] eingeschränkt wird?

   c) Wie lautet der Momentenschätzer für p und n, falls auch n unbekannt ist?

9. Damit der Dozent einer Vorlesung die geeignete Länge der Abschlussklausur besser abschätzen kann, wirft er einen Blick auf die Ergebnisse der vergangenen Jahre. Zur Lösung der Klausur benötigten die 300 Bachelor-Studenten im Durchschnitt 50 Minuten mit einer Standardabweichung von 5 Minuten. Berechnen Sie ein 95% Konfidenzintervall für die mittlere Lösungszeit aller Studenten des Semesters unter der Annahme, dass die Lösungszeit normalverteilt ist.