HSG, VWL
Prof. Tobias Sutter

HS 2025
Statistik 3,220

Musterlösungen

Übung 1: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Teil A: Kontrollfragen

1. Man bezeichnet mit S die Menge der Elementarereignisse (Ereignisraum) und mit $E(S)$ die Menge aller Teilmengen von S, welche auch Ereignismenge genannt wird.
Für den einfachen Würfelwurf gilt $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Ereignismenge hingegen enthält alle Ereignisse (z.B. das Ereignis $A = \{1, 3, 5\} \in E(S)$).
Bemerke:
    - Jedes Elementarereignis ist auch ein Ereignis, aber nicht jedes Ereignis ist gleichzeitig ein Elementarereignis
    - Der Ereignisraum S ist ein Element der Ereignismenge $E(S)$ ($S \in E(S)$)

2. komplementär$\Rightarrow$ disjunkt
disjunkt $\not\Rightarrow$ komplementär

3. klassische (Laplace), statistische (frequent.), subjektive Wahrscheinlichkeit

4. Eine Zufallsvariable heisst diskret, wenn die Wertemenge der Abbildung abzähbar viele Werte enthält.

5. $A \Rightarrow B$, d.h. $A \subseteq B$
$P(A \cap B) \overset{A\subseteq B}{=} P(A) \overset{unabh.}{=} P(A)P(B)$
ja, falls $P(B) = 1$

6. Man nehme an A und B seien unabhängig, i.e., $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.
Für disjunkte Ereignisse muss nun zusätzlich gelten: $P(A \cap B) = 0$.
$\Rightarrow P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$
A, B disjunkt falls $0 = P(A \cap B)$. Diese sind gleichzeititg unabhängig falls $0 = P(A\cap B) = P(A)P(B)$, i.e., nur falls $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$.

7. Wir definieren die folgenden Ereignisse: L: steigende Löhne, K: steigende Konjunktur, A: sinkende Arbeitslosigkeit. Es gilt

   $$\left.\begin{array}{r} P(K|L) > P(K) \\ P(A|K) < P(A) \end{array}\right\} \text{abhängig}$$

8. K: "Prämie", S: "Jahre ohne Schaden"
   Ereignisse: $K|S = x \to P(S|K)$!

9. Satz von Bayes: Umkehrung von Ursache und Wirkung. Die durch die Beobachtung modifizierte Wahrscheinlichkeit ist die sogenannte a posteriori-Wahrscheinlichkeit.

Teil B: Multiple Choice

Kreuzen Sie bitte in den folgenden Mehrfachwahl-Aufgaben die richtigen Aussagen an. Dabei kann es sein, dass von den zu einer Aufgabe vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten keine, eine, mehrere oder alle richtig sind.

1. A und B sind zwei unabhängige Ereignisse. Dann gilt

   O $P[B \mid A] = 0$

   X $P[B \mid A] = P[B]$

   O $P[B \mid A] = P[A]$

   O Wir haben nicht genügend Informationen um $P[B \mid A]$ anzugeben

2. A und B sind zwei disjunkte Ereignisse. Dann gilt

   X $P[B \mid A] = 0$

   O $P[B \mid A] = P[B]$

   O $P[B \mid A] = P[A]$

   O Wir haben nicht genügend Informationen um $P[B \mid A]$ anzugeben

3. A und B sind zwei Ereignisse mit $P[A] = 0.5$ und $P[B \mid A] = 0.6$. Dann gilt

   X $P[B \cap A] = 0.3$

   O $P[B \cap A] = 0.83$

   O $P[B \cap A] = 0.5$

O $P[B \cap A] = 0.6$

4. A und B sind zwei Ereignisse mit $P[B \mid A] = 0$. Dann gilt

   X $P[B \cap A] = 0$

   O $P[B \cap A] = P[A] \cdot P[B]$

   O $P[B \cap A] = 1$

   O $P[B \cup A] = 1$

5. A und B seien zwei Ereignisse und A eine Teilmenge von B. Dann gilt

   O $P[A \mid B] = 1$

   X $P[A \mid B] = P[A]/P[B]$

   O $P[A \mid B] = 0$

   O Wir haben nicht genügend Informationen um $P[A \mid B]$ anzugeben

6. A und B sind zwei Ereignisse, wobei B eine Teilmenge von A ist. Dann gilt

   X $P[A \mid B] = 1$

   O $P[A \mid B] = P[A]/P[B]$

   O $P[A \mid B] = 0$

   O Wir haben nicht genügend Informationen um $P[A \mid B]$ anzugeben

7. A und B sind zwei Ereignisse, wobei A und B sich gegenseitig ausschliessen. Dann gilt

   O $P[A \mid B] = 1$

   O $P[A \mid B] = P[A]/P[B]$

   X $P[A \mid B] = 0$

   O Wir haben nicht genügend Informationen um $P[A \mid B]$ anzugeben

8. A und B sind zwei unvereinbare Ereignisse, für deren Wahrscheinlichkeiten wir $P[A] > 0$ und $P[B] > 0$ voraussetzen. Dann gilt

   O A und B sind unabhängig

   X A und B sind abhängig

O Wir haben nicht genügend Elemente um etwas über die Abhängigkeit von A und B zu sagen

9. Aus "A impliziert B" folgt, $P[A] > 0$ vorausgesetzt,

   X $P[A \mid B] \geq P[A]$

   O $P[A \mid B] < P[A]$

   O $P[A \mid B] \geq P[B]$

   X $P[B \mid A] > 0$

10. Aus "A und B sind unvereinbar" folgt, $P[A] > 0$ vorausgesetzt,

   O $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$

   X $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

   X $P[A \cap B] = 0$

   O $P[A \mid B] = P[A]$

11. Von zwei Ereignissen A und B sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt: $P[A] = 0.5, P[B] = 0.4$ und die Wahrscheinlichkeit, dass weder A noch B eintritt, sei 0.2. Dann gilt

   O A und B sind unvereinbar

   X A und B sind nicht unvereinbar

   O A und B sind unabhängig

   X A und B sind nicht unabhängig

12. A, B und C seien Ereignisse mit den Eigenschaften: $P[A] = 0.6, P[B] = 0.8, P[A \cap B] = 0.4, P[C] = 0.3$ und $C \subset A$. Dann gilt

   O A und B sind unvereinbar

   X A und B sind abhängig

   X $A \cup B = S$, wobei S den Ereignisraum bezeichnet

   O $P[C \mid A] = 2/3$

   X $P[C \mid A] = 1/2$

   X $P[A \mid C] = 1$

13. A und B sind zwei unabhängige Ereignisse mit $P[A] = 0.9$ und $P\left[\overline{\overline{A} \cup B}\right] = 0.5$. Dann gilt

   O $P[B] = 0.05$

   X $P[B] = 0.44$

   O $P[B] = 0.55$

   O Wir haben nicht genügend Informationen um $P[B]$ zu berechnen

14. A und B sind zwei Ereignisse mit $P[A] = 0.1$ und $P[B] = 0.5$. Dann gilt

   O $P[A \cap B] = 0.1 \cdot 0.5$

   O $P[A \cap B] = 0.1 + 0.5$

   O $P[A \cap B] = P[A \mid B]$

   X Wir haben nicht genügend Informationen um $P[A \cap B]$ anzugeben

15. A und B sind zwei Ereignisse mit $P[A] = 1/3, P[B] = 1/2$ und $P[B \mid A] = 1/3$. Dann gilt

   O $P[A \mid B] = 1/6$

   O $P[A \mid B] = 1/9$

   X $P[A \mid B] = 2/9$

   O $P[A \mid B] = 1/2$

16. A, B und C sind drei Ereignisse mit $P[A \cap B \cap C] = P[A] \cdot P[B] \cdot P[C]$. Dann gilt

   O A, B und C sind unabhängig

   O A und C sind unabhängig

   O A, B und C sind nicht unabhängig

   X Wir haben nicht genügend Elemente um etwas über die Abhängigkeit von A, B und C zu sagen

Teil C: Aufgaben

1. (a) $\{11, 12, ..., 16, 21, ..., 66\}$

(b) $\frac{\#\text{günstige Fälle}}{\#\text{mögliche Fälle}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(c) $\frac{\#\text{günstige Fälle}}{\#\text{mögliche Fälle}} = \frac{3}{11}$

2. (a) $X = \#$ Würfe bis erstmals 6: $P[X = 4] = (\frac{5}{6})^3 \cdot \frac{1}{6} = 0.0964$

   (b) $P[X \geq 2] = 1 - P[X = 1] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

   (c) $P[X \leq 4] = \sum_{i=1}^{4} P[X = i] = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^3 \cdot \frac{1}{6} = 0.518$

3. (a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0.6$

   (b) $P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{2}{3}$

   (c) $P[\overline{A \cap B}] = 1 - P[A \cap B] = 0.8$

   (d) $P[\overline{A} \cap \overline{B}] = 1 - P[A \cup B] = 0.4$

   (e) $P[\overline{A \cup B}] = 1 - P[A \cup B] = 0.4$

   (f) $P[\overline{A} \cup \overline{B}] = 1 - P[A \cap B] = 0.8$

4. Inkonsistent!
   P[“Annahme durch A oder B”] =
   $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0.3 + 0.4 - 0.2 = 0.5$
   Aber: P[“keine”] $= 1 - P[A \cup B] = 0.3$ Widerspruch!

5. A: “Maschine A”; $P[A] = 0.7$
   B: “Maschine B”; $P[B] = 0.3$
   SF: “Stück fehlerhaft”; $P[SF|A] = 0.08$; $P[SF|B] = 0.06$
   $\rightsquigarrow P[A|SF] = \frac{P[SF|A] \cdot P[A]}{P[SF|A] \cdot P[A] + P[SF|B] \cdot P[B]} = 0.7568$ (Bayes)

6. M: “Matura bestanden”; $P[M] = 0.6$
   NM: “Matura nicht bestanden”; $P[NM] = 0.4$
   TP: “Aufnahmetest bestanden”;
   TN: “Aufnahmetest nicht bestanden”;
   $P[TN|NM] = 0.9 \Rightarrow P[TP|NM] = 0.1$;
   $P[TN|M] = 0.01 \Rightarrow P[TP|M] = 0.99$

(a) Baumdiagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & TP \\
 & M \arrow[ur, "0.99"] \arrow[r, "0.01"] & TN \\
Sch\ddot{u}ler \arrow[ur, "0.6"] \arrow[dr, "0.4"] & & \\
 & NM \arrow[r, "0.1"] \arrow[dr, "0.9"] & TP \\
 & & TN
\end{tikzcd}$$

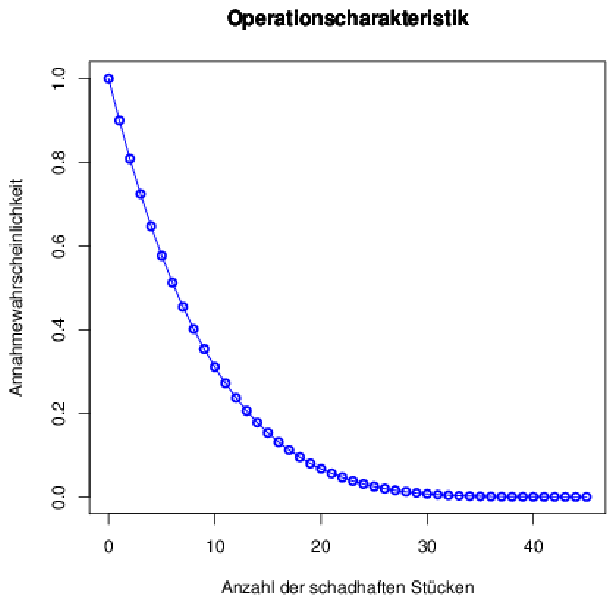
(b) $P[TN] = P[TN|M] \cdot P[M] + P[TN|NM] \cdot P[NM] = 0.366$

(c) $P[NM|TN] = \frac{P[TN|NM] \cdot P[NM]}{P[TN]} = 0.9836$

7. A: “Werk A”; $P[A] = 0.7$
B: “Werk B”; $P[B] = 0.3$
N: “Lampe normgerecht”; $P[N|A] = 0.83$, $P[N|B] = 0.63$
$\Longrightarrow P[B|N] = \frac{P[N|B] \cdot P[B]}{P[N|B] \cdot P[B] + P[N|A] \cdot P[A]} = 0.24545$

8. (a) 0: $P[A] = 1$;
2: $P[A] = \frac{\binom{2}{0}\binom{50-2}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.8082$;
5: $P[A] = \frac{\binom{5}{0}\binom{50-5}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.5766$;
10: $P[A] = \frac{\binom{10}{0}\binom{50-10}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.3106$

(b) $P[A] = \frac{(50-k)!45!}{(50-k-5)!50!}$, $k \geq 1$



9. (a) $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
   (b) $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
   (c) $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
   (d) $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$
   (e) $$\begin{array}{cc} JJMM & MJJM \\ JMJM & MJMJ \\ JMMJ & MMJJ \end{array} = \frac{\#\text{günstige Fälle}}{\#\text{mögliche Fälle}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$
   (f) $$\begin{array}{cc} JJMM & MJJM \\ JMJM & MJMJ \\ JMMJ & MMJJ \\ JJJM & JMJJ \\ MJJJ & JJMJ \\ JJJJ & \end{array} = \frac{\#\text{günstige Fälle}}{\#\text{mögliche Fälle}} = \frac{6}{11}$$

10. (a) 0.2
    (b) 0.8
    (c) $0.8^3 = 0.512$

(d) $0.2^3 = 0.008$

(e) SWW, WSW, WWS: $3 \cdot 0.8^2 \cdot 0.2 = 0.384$

11. (a) Arbeitslosenquote: $0.8 \cdot 0.033 + 0.2 \cdot 0.093 = 0.045$

    (b) $P[\text{Schw.}|\text{Arbeitslos}] = \frac{P[\text{Arbeitslos}|\text{Schw.}] \cdot P[\text{Schw.}]}{0.045} = \frac{0.033 \cdot 0.8}{0.045} = 0.586667$

12. HIV; $P[\text{HIV}] = 0.01\%$
    TP: "Test positiv"; $P[\text{TP}|\text{HIV}] = 0.9995$; $P[\text{TN}|\text{nicht HIV}] = 0.998$

    (a) $P[\text{HIV}|\text{TP}] = \frac{P[\text{TP}|\text{HIV}] \cdot P[\text{HIV}]}{P[\text{TP}|\text{HIV}] \cdot P[\text{HIV}] + P[\text{TP}|\text{nicht HIV}] \cdot P[\text{nicht HIV}]} = 0.0474$

    (b) $P[\text{nicht HIV}|\text{TN}] = \cdots \approx 1$

13. (a) $P[\text{"Gewinn"}] = \frac{11}{36}$

    (b) $E[\text{"Gewinn"}] = \frac{11}{36} \cdot 1 + \frac{25}{36} \cdot 0 = \frac{11}{36} \cong 30$ Rappen