Multiple Choice (48 Punkte)

Markieren Sie bei folgenden Multiple-Choice-Aufgaben die korrekte Aussage.

- In jedem Block von Aussagen ist **genau eine** Antwort korrekt.
- Die eindeutig markierte korrekte Aussage wird mit 4 Punkten (pro MC-Aufgabe) bewertet.
- Eine Markierung der falschen Aussage, eine Mehrfachmarkierung oder keine Markierung wird mit 0 Punkten bewertet.

1. (4 Punkte) Folgende Informationen sind gegeben: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$, $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

   (a) A und B sind disjunkt.
   (b) A und B sind unabhängig.
   (c) A und B sind nicht unabhängig.
   (d) Nicht genügend Informationen gegeben.

   Lösung: (c)
   Wenn $P[A|B] \neq P[A]$, dann sind A und B abhängig

   $$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{0.5 + 0.3 - 0.6}{0.3} = \frac{2}{3} \neq 0.5$$

2. (4 Punkte) Zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind zwischen -1 und 1 stetig gleichverteilt.
   Welche Aussage über den Mittelwert $\bar{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$ ist falsch?

   (a) $P[\bar{X} = 0] = 0$
   (b) $P[|\bar{X}| > 1] = 0$
   (c) $P[\bar{X} < -0,5] = 0,25$
   (d) $P[\bar{X} < 0] = 0,5$

   Lösung: (c)
   $P[\bar{x} < -0.5] = P[(x_1 + x_2)/2 < -0.5] = \frac{1}{8} = 0.125 \neq 0.25$.
   $P[\bar{x} = 0] = 0$ weil X stetig ist, $P[|\bar{x}| > 1] = 0$ auf Grund der Schranken und $P[\bar{x} < 0] = 0.5$ wegen der Symmetrie der Verteilung von X und damit seines Mittelwerts.

3. (4 Punkte) Der vollbeladene Öltanker “Ever Given II“ mit einer Gesamtkapazität von 30.000 m^3 will den Kiel Kanal in Deutschland passieren. Hat der Tanker mehr als 27.040 Tonnen Rohöl geladen so würde er auf Grund laufen. Das Gewicht von 1 m^3 Rohöl ist unabhängig und identisch mit Mittelwert $\mu = 0,9$ und unbekannter Varianz σ^2 verteilt. Mit Hilfe seiner Statistikkenntnisse schätzt der Kapitän die Wahrscheinlichkeit auf Grund zu laufen auf 0,2%. Welche Varianz σ^2 hat der Kapitän für das Gewicht von 1 m^3 angenommen?

   (a) 0,0064
   (b) 0,0802
   (c) 193,1477
   (d) Nicht genügend Informationen gegeben.

Lösung: (a)
Unter Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes und Umformung auf die Varianz folgt:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\mu - 27,040}{\phi^{-1}(0.002)\cdot\sqrt{N}} \\ &= \frac{30,000\cdot 0.9 - 27,040}{-2.8782\cdot\sqrt{30,000}} \\ \sigma^2 &= 0.0064\end{aligned}$$

4. (4 Punkte) Gegeben sei eine Zufallsvariable Y mit einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{for } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie gross ist die Varianz von Y?

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{1}{18}$
(c) $\frac{2}{3}$
(d) $\frac{1}{14}$

Lösung: (b)
Die Lösung kann geschrieben werden als:

$$E[Y] = \int_0^1 2y^2 dy = \frac{2}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \tag{1}$$

$$E[Y^2] = \int_0^1 2y^3 dy = \frac{1}{2}y^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \tag{2}$$

$$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \tag{3}$$

5. (4 Punkte) Im Auftrag eines Grosshändlers müssen Konfidenzintervalle für die durchschnittliche Füllmenge eines Abfüllsystems für 500 ml Bierflaschen bestimmt werden. Die Abfüllmenge X ist mit einer Varianz von 10 ml Normalverteilt. Zehn auf dieser Anlage abgefüllte Bierflaschen werden zufällig ausgewählt und deren Füllmenge wird überprüft. Die Stichprobe ergibt folgende Werte in ml:

501	495	503	498	500	498	497	503	497	501

Wie lautet das korrekte (symmetrische) 95% Konfidenzinterval für die durchschnittliche Abfüllmenge?

(a) $[493,10\,;\ 505,50]$
(b) $[497,66\,;\ 500,95]$
(c) $[494,08\,;\ 504,52]$
(d) $[497,34\,;\ 501,26]$

Lösung: (d)
Die Lösung kann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}&\left[\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2} \;;\; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\alpha/2}\right]\\&\left[499.3 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} q_{0.975} \;;\; 499.3 + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} q_{0.975}\right]\\&[499.3 - 1.960 \;;\; 499.3 + 1.960]\\&[497.34 \;;\; 501.26]\end{aligned}$$

6. (4 Punkte) Für welche Konstante c ist die Funktion

$$p(x) = \begin{cases} \frac{c}{x!} & \text{for } x = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsmassefunktion?

(a) $c = \frac{1}{\pi}$
(b) $c = 1$
(c) $c = \frac{1}{e}$
(d) jedes beliebige c

Lösung: (c)
Die Lösung kann unter Verwendung der Definition von e als Potenzreihe hergeleitet werden: Erstens, $p(x) \geq 0$ für alle $c \geq 0$, und zweitens

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c}{x!} = c \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} = ce \stackrel{!}{=} 1\\c = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

7. (4 Punkte) Die ausführliche Analyse von Prüfungsergebnissen eines Statistik Kurses an einer Schweizer Universität hat ergeben, dass Studenten durchschnittlich 20 Punkte erreichen. Die Punkte sind mit einer Varianz von neun Punkten Normalverteilt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student weniger als 25 Punkte erreicht?

(a) $0,952$
(b) $0,048$
(c) $0,726$
(d) $0,274$

Lösung: (a)
Man beachte, dass $X \sim N(20, 9)$, deshalb:

$$P[X \leq 25] = P\left[\frac{X - 20}{3} \leq \frac{25 - 20}{3}\right] = P\left[Z \leq \frac{5}{3}\right] = 0.952.$$

8. (4 Punkte) Seien A, B und C drei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$ und $\mathbb{P}(C) > 0$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Falls A unabhängig von B, und B unabhängig von C ist, dann ist A auch unabhängig von C.

(b) $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(A|\overline{B}) < \mathbb{P}(A)$

(c) Wenn sich A und B gegenseitig ausschliessen, dann sind sie auch unabhängig.

(d) Keine der obigen Angaben ist richtig.

Lösung: (b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|B) &> \mathbb{P}(A) \\
\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} &> \mathbb{P}(A) \\
\mathbb{P}(A \cap B) &> \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\
\mathbb{P}(A \cap B) &> \mathbb{P}(A) \cdot (1 - \mathbb{P}(\overline{B})) \\
\mathbb{P}(A \cap B) &> \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) \\
\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\overline{B}) &> \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
\mathbb{P}(A) &> \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(\overline{B})} = \mathbb{P}(A|B^c)
\end{aligned}
$$

9. (4 Punkte) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit Verteilungen $X \sim \mathcal{N}(\mu = 4, \sigma^2 = 2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 3)$. Des Weiteren gilt $E[XY] = E[X]E[Y]$. Sei Z eine Zufallsvariable welche als $Z = 3 - 2X + 3Y$ definiert ist. Wie lautet die Kovarianz $\text{Cov}(Y, Z)$?

   (a) 27.
   (b) 9.
   (c) 12.
   (d) Keine der obigen Angaben ist richtig.

   Lösung: (b)

$$\text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Y, 3) - 2 \cdot \text{Cov}(Y, X) + 3 \cdot \text{Cov}(Y, Y) = 3 \cdot \text{Var}(Y) = 3 \cdot 3 = 9$$

10. (4 Punkte) Sei $x_1, x_2, ..., x_n$ eine Stichprobe unabhängiger und identischer (I.I.D) Zufallsvariablen X.
    Welcher der folgenden Schätzer des Erwartungswerts von X ist erwartungstreu?

    (a) $\hat{\mu} = x_1$
    (b) $\hat{\mu} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$
    (c) $\hat{\mu} = \frac{x_1 + x_3 + x_n}{4}$
    (d) Keiner der obigen Schätzer ist erwartungstreu.

    Lösung: (a) $E[x_1] = \mu$, alle anderen Schätzer sind nicht erwartungstreu.

11. (4 Punkte) Angenommen Sie würfeln. Für jeden Wurf erhalten Sie die Augenzahl als Auszahlung. Erscheint die 4, 5 oder 6 so können Sie erneut würfeln. Sobald Sie 1, 2, oder 3 würfeln, endet das Spiel. Wie hoch ist der zu erwartende Gewinn dieses Spiels?

    (a) 3.5
    (b) 5
    (c) 6
    (d) 7

    Solution: (d)
    Ein Spiel ohne Wiederholung hat den Erwartungswert $E[X_1] = \frac{1}{6} \cdot (1+2+3+4+5+6) = 3.5$. Mit erneutem Wurf ergibt sich die Möglichkeit dieselbe Wette noch einmal zu spielen. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^j}$, wobei j die Anzahl der zusätzlichen Spielrunden ist.

$$\begin{aligned} E[\text{Payoff}] &= \sum_{j=0}^{\infty} 3.5 \cdot \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{3.5}{\frac{1}{2}} = 7 \end{aligned}$$

12. (4 Punkte) Jacob möchte sein Wissen, das er während des Statistikunterrichts erworben hat, nutzen, um im Casino etwas Geld zu gewinnen. In seinem Lieblingscasino in Paris gibt es 100 Spielautomaten. Das Casino kann die Gewinnwahrscheinlichkeit an einem Spielautomaten beeinflussen und fixiert diese bei 20%. Jacob möchte wissen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an mindestens 4 der 100 Spielautomaten mehr als zweimal zu gewinnen, wenn er an jedem Automaten fünf Spiele spielt?

    (a) 0.0579

(b) 0.8372

(c) 0.9421

(d) 0.1628

Lösung: (b)
Die Lösung kann wie folgt geschrieben werden: Für einen Spielautomaten ist die Wahrscheinlichkeit für k Siege

$$P[X = k] = \binom{5}{k} 0.2^k 0.8^{5-k}.$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als zwei Siege

$$\begin{aligned} P[X > 2] &= 1 - (P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2]) \\ &= 1 - (0.8^5 + 5 * 0.2 * 0.8^4 + 10 * 0.2^2 * 0.8^3) \\ &= 0.05792. \end{aligned}$$

und die Wahrscheinlichkeit für mehr als 2 Siege an m Automaten

$$\begin{aligned} P[Y \geq 4] &= 1 - (P[Y = 0] + P[Y = 1] + P[Y = 2] + P[Y = 3]) \\ &= 1 - \sum_{m=0}^{3} \binom{100}{m} P[X > 2]^m (1 - P[X > 2])^{100-m} \\ &= 0.8374. \end{aligned}$$

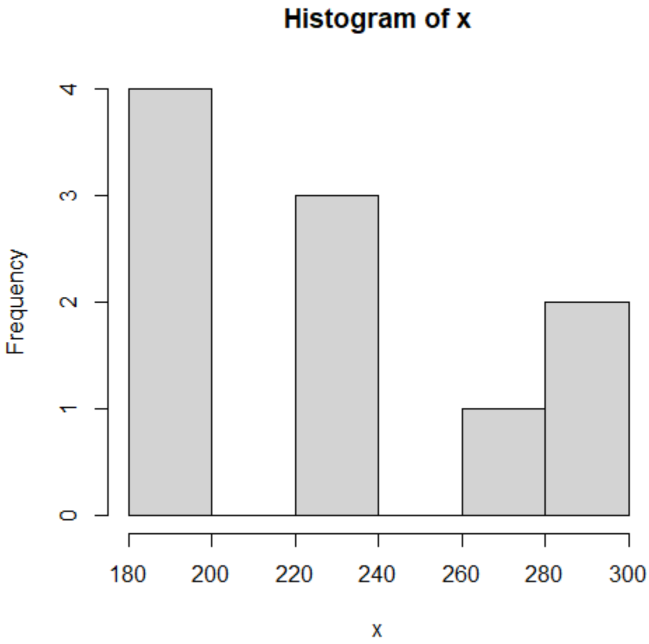
Problem 1 (12 Punkte)

Teil 1A (4 Punkte)

(F1:d);(F2:b);(F3:a);(F4:c)

Teil 1B (8 Punkte)

$Mean = 231.5$, $Mode = 180$, $IQR = Q_3 - Q_1 = 280 - 185 = 95$



Problem 2 (15 Punkte)

1. Da $P(A|B) = 0.8$ folgt $P(A \cap B) = 0.4$. Dies ergibt folgende Tabelle:

	B	**nicht B**	**B ∪ nicht B**
A	0.4	0.3	0.7
nicht A	0.1	0.2	0.3
A ∪ nicht A	0.5	0.5	1

2.
   - $P(A \cap \overline{B}) = 0.3$
   - $P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$
   - $P(\overline{A} \cup B) = 0.3 + 0.5 - 0.1 = 0.7$

3. Da $P(A \cap B) = 0.4 \neq P(A)P(B) = 0.35$ sind Ereignisse A und B abhängig.

4. Es gibt $2^8 = 256$ mögliche Kombinationen.
   - $\frac{1}{256}$
   - $\frac{8!}{4!4!} = 70$, $\frac{70}{256} = 0.2734$

Problem 3 (15 Punkte)

Lösung:

1. Sei Y die Zufallsvariable für die Rennzeit.
   Für ein Schwein ist die Wahrscheinlichkeit, dass es langsamer als *Max V.* ist $\mathbb{P}(Y > 10)$, mit $Y \sim \mathcal{N}(\mu = 13, \sigma^2 = 2.5^2)$. Um $\mathbb{P}(Y > 10)$ zu berechnen, standardisieren wir Y und finden den Wert der Standardnormalen Verteilungsfunktion ϕ in der Tabelle.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y > 10\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} > \frac{10-\mu}{\sigma}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Z > \frac{-3}{2.5}\right)\\ &= \phi(1.2)\\ &= 0.8849\end{aligned}$$

   Da die Rennzeiten unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit dass 0 von 4 Schweine schneller laufen als *Max V.* $\mathbb{P}\left(Y > 10\right)^4 = 0.6132$.

2. Bezeichnen Sie die Rennplatzierung von *Max V.* als Zufallsvariable X.
   Wir suchen $\mathbb{P}(X \leq 3) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)$.

   Für ein Schwein ist die Wahrscheinlichkeit, dass es schneller als *Max V.* ist gegeben durch $\mathbb{P}(Y < 10) = 0.1151$. Diese Bernoulli Experiment wird für jedes Schwein wiederholt und die Summe von Bernoulli Zufallsvariablen ist Binomial verteilt. Sei $C = X - 1$ die Anzahl der Schweine die das Rennen vor *Max V.* beenden. Dann:
   $(X-1) = C \sim \text{Bin}(n = 4, p = 1 - \mathbb{P}\left(Y > 10\right) = 0.1151)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(C = 0) &= \binom{4}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^4\\ &= 0.8849^4 = 0.6132\\ \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(C = 1) &= \binom{4}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^3\\ &= 4 \cdot 0.1151 \cdot 0.8849^3 = 0.3190\\ \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(C = 2) &= \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^2\\ &= 6 \cdot 0.1151^2 \cdot 0.8849^2 = 0.0622\\ \mathbb{P}(X \leq 3) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)\\ &= 0.6132 + 0.3190 + 0.0622\\ &= 0.9944\end{aligned}$$

3. Sei $n = 4$ die Anzahl der zusätzlichen Schweine pro Rennen (ohne *Max V.*), N die Anzahl der Rennen und beachten Sie, dass der Mittelwert und die Varianz der binomialen Zufallsvariablen C durch $\mu_C = nsind{\cdot}p\ \sigma_C^2 = n{\cdot}p{\cdot}(1-p)$ gegeben sind. Der zentrale Grenzwertsatz nähert die Verteilung dem Mittelwert unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen $C = (X-1)$ unter Verwendung einer Normalverteilung an mit $\mathcal{N}(\mu_{\bar{C}_N} = n \cdot p, \sigma^2_{\bar{C}_N} = \frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{N})$. WIr fixieren die Wahrscheinlichkeit $0.999 \leq \mathbb{P}(\bar{X}_N \leq 2) = \mathbb{P}(\bar{C}_N \leq 1)$ und lösen für das kleinste N das die Ungleichung erfüllt. Beachten Sie, dass wir die Kontinuitätskorrektur anwenden müssen, da wir eine diskrete Zufallsvariable mithilfe der CLT approximieren – daher msuchen wir

$0.999 \leq \mathbb{P}(\bar{X}_N \leq 2 + 0.5) = \mathbb{P}(\bar{C}_N \leq 1 + 0.5)$ [1].

$$\begin{aligned}
0.999 &\leq \mathbb{P}(\bar{C}_N \leq 1.5) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{C}_N - n \cdot p}{\sqrt{\frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{N}}} \leq \frac{1.5 - n \cdot p}{\sqrt{\frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{N}}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1.5 - n \cdot p}{\sqrt{\frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{N}}}\right) \\
&= \phi\left(\frac{1.5 - n \cdot p}{\sqrt{\frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{N}}}\right) \\
\Leftrightarrow \phi^{-1}(0.999) = 3.0902 &\leq \frac{1.5 - n \cdot p}{\sqrt{\frac{n \cdot p \cdot (1-p)}{N}}} \\
\Leftrightarrow N &\geq \frac{n \cdot p \cdot (1-p) \cdot 3.0902^2}{(1.5 - n \cdot p)^2} \\
&= \frac{4 \cdot 0.1151 \cdot (1 - 0.1151) \cdot 3.0902^2}{(1.5 - 4 \cdot 0.1151)^2} \\
&= 3.5981
\end{aligned}$$

Daher ist $N = 4$ das kleinste N, sodass *Max V.* in mindestens 99,9% der Fälle an zweiter Stelle steht.

Beachten Sie bitte, dass die Näherung des CLT für diese sehr geringe Stichprobengröße nicht präzise ist.
Die Aufgabe könnte auch dadurch gelöst werden, dass man herausfindet/erkennt, dass eine Summe unabhängiger Binome mit demselben p selbst binomial ist. Dann könnte man mit der Binomialverteilung oder dem Grenzwertsatz von De Moivre und Laplace fortfahren.

[1] Lösung ohne Kontinuitätskorrektur: $N = 13.3528$, gerundet: $N = 14$

Problem 4 (15 Punkte)

1.

$$
\begin{aligned}
1 &\overset{!}{=} \int_0^\infty \frac{1}{4a} e^{-ax}\, dx \\
4a &\overset{!}{=} \int_0^\infty e^{-ax}\, dx \\
4a &\overset{!}{=} -\frac{1}{a} e^{-ax} \Big|_0^\infty \\
4a^2 &\overset{!}{=} -\left(e^{-\frac{\infty}{a}} - e^{-\frac{0}{a}}\right) \\
4a^2 &\overset{!}{=} 1 \\
a &\overset{!}{=} \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Damit $f_X(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist, benötigen wir daher $a = \frac{1}{2}$.

2.

$$
\begin{aligned}
F_Y(1) &= 0 \\
1 + b\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\
b\left(\frac{2}{6} - \frac{3}{6}\right) &= -1 \\
b\left(-\frac{1}{6}\right) &= -1 \\
b &= 6
\end{aligned}
$$

Damit $F_Y(y)$ eine kumulierte Verteilungsfunktion ist, benötigen wir also $b = 6$.

3. Man beginne mit der Berechnung der Dichtefunktion von Y:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} &= \frac{d}{dy}\left(1 + b\left(\frac{1}{3y^3} - \frac{1}{2y^2}\right)\right) \\
&= b\left(y^{-3} - y^{-4}\right)
\end{aligned}
$$

Da X und Y unabhängig sind folgt:

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= f_X(x) \cdot f_Y(y) \\
&= (4ae^{ax})^{-1} \cdot b\left(y^{-3} - y^{-4}\right) \\
&= \frac{b}{4a} e^{-ax}\left(y^{-3} - y^{-4}\right) \\
&= 3e^{-\frac{x}{2}}\left(y^{-3} - y^{-4}\right)
\end{aligned}
$$

4. Man berechne die individuellen Erwartungswerte und nutzt die Unabhängigkeit

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty x \cdot f_X(x)\ dx \\
&= \frac{1}{4a} \int_0^\infty x \cdot e^{-ax}\ dx \\
&= \frac{1}{4a} \left(\left[x \cdot \frac{-1}{a} e^{-ax} \right]_0^\infty + \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-ax}\ dx \right) \\
&= \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{a^2} e^{-ax} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{1}{4a^3} = 2 \\
\mathbb{E}[Y] &= \int_1^\infty y \cdot f_Y(y)\ dy \\
&= \int_1^\infty y \cdot b \left(y^{-3} - y^{-4} \right)\ dy \\
&= b \int_1^\infty \left(y^{-2} - y^{-3} \right)\ dy \\
&= b \left(\int_1^\infty y^{-2}\ dy - \int_1^\infty y^{-3}\ dy \right) \\
&= b \left(-\frac{1}{y} \Big|_1^\infty + \frac{1}{2y^2} \Big|_1^\infty \right) \\
&= 6 \cdot \left(0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} \right) = 3 \\
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 6
\end{aligned}
$$

Problem 5 (15 Punkte)

Teil 5A

Der MLE kann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
LF(x_i, \lambda) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\lambda^2} e^{-(\frac{x_i}{\lambda})^2} \\
LLF(x_i, \lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \log(2x_i) - 2n\log(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
\frac{\partial LLF(x_i, \lambda)}{\partial \lambda} \overset{!}{=} 0 &\Leftrightarrow -2n\frac{1}{\hat{\lambda}_{MLE}} + 2\frac{1}{\hat{\lambda}^3_{MLE}}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \overset{!}{=} 0 \\
\frac{1}{\hat{\lambda}^2_{MLE}}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= n \\
\hat{\lambda}_{MLE} &= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}
\end{aligned}$$

Teil 5B

1. The expected value of Y is given by

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \sum_{i=1}^{\theta} i\frac{1}{\theta} \\
&= \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{\theta} i \\
&= \frac{1}{\theta}\frac{\theta(\theta+1)}{2} \\
&= \frac{\theta+1}{2}.
\end{aligned}$$

   Hence, the MME is given by

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\theta}_{MME}+1}{2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\
\hat{\theta}_{MME} &= \left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - 1
\end{aligned}$$

2. Die likelihood Funktion ist gegeben durch

$$LF(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta}\mathbb{I}(x_i \in \{1, \ldots, \theta\}),$$

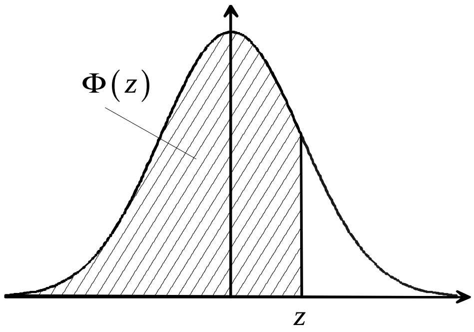
   was gleich $\frac{1}{\theta^n}$ ist falls alle $x_i \in \{1, \ldots, \theta\}$, und 0 falls dies nicht der Fall ist. Da $\frac{1}{\theta^n}$ fallend in θ ist der MLE durch das kleinste θ sodass $x_i \in \{1, \ldots, \theta\}$ gegeben,d.h.,

$$\hat{\theta}_{MLE} = max(x_1, \ldots, x_n).$$

3.

$$\hat{\theta}_{MME} = \frac{2}{5}(1+4+3+4+2) - 1 = \frac{23}{5}$$
$$\hat{\theta}_{MLE} = max(1,4,3,4,2) = 4$$

Standardnormalverteilung
($z \geq 0$)
Verteilungsfunktion



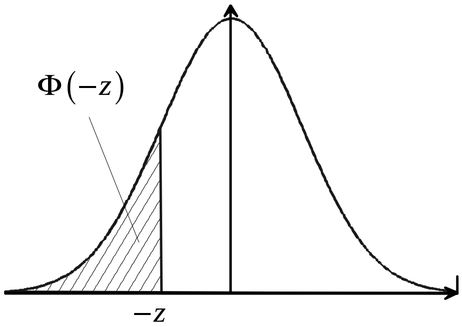
Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen $Z \sim N(0, 1)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Standardnormalverteilung

($z \leq 0$)

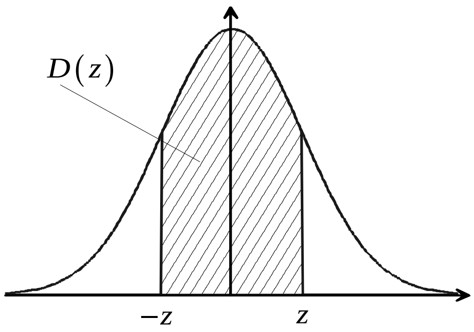
Verteilungsfunktion



Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen $Z \sim N(0, 1)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.00	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.10	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.20	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.30	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.40	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.50	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.60	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.70	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.80	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.90	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.00	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.10	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.20	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.30	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.40	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.50	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.60	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.70	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.80	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.90	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.00	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.10	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.20	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.30	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.40	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.50	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.60	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.70	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.80	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.90	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.00	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.10	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.20	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.30	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.40	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002

Standardnormalverteilung
Zentrierte Wahrscheinlichkeiten



Zentrierte Wahrscheinlichkeiten einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen $Z \sim N(0, 1)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.00	0.0000	0.0080	0.0160	0.0239	0.0319	0.0399	0.0478	0.0558	0.0638	0.0717
0.10	0.0797	0.0876	0.0955	0.1034	0.1113	0.1192	0.1271	0.1350	0.1428	0.1507
0.20	0.1585	0.1663	0.1741	0.1819	0.1897	0.1974	0.2051	0.2128	0.2205	0.2282
0.30	0.2358	0.2434	0.2510	0.2586	0.2661	0.2737	0.2812	0.2886	0.2961	0.3035
0.40	0.3108	0.3182	0.3255	0.3328	0.3401	0.3473	0.3545	0.3616	0.3688	0.3759
0.50	0.3829	0.3899	0.3969	0.4039	0.4108	0.4177	0.4245	0.4313	0.4381	0.4448
0.60	0.4515	0.4581	0.4647	0.4713	0.4778	0.4843	0.4907	0.4971	0.5035	0.5098
0.70	0.5161	0.5223	0.5285	0.5346	0.5407	0.5467	0.5527	0.5587	0.5646	0.5705
0.80	0.5763	0.5821	0.5878	0.5935	0.5991	0.6047	0.6102	0.6157	0.6211	0.6265
0.90	0.6319	0.6372	0.6424	0.6476	0.6528	0.6579	0.6629	0.6680	0.6729	0.6778
1.00	0.6827	0.6875	0.6923	0.6970	0.7017	0.7063	0.7109	0.7154	0.7199	0.7243
1.10	0.7287	0.7330	0.7373	0.7415	0.7457	0.7499	0.7540	0.7580	0.7620	0.7660
1.20	0.7699	0.7737	0.7775	0.7813	0.7850	0.7887	0.7923	0.7959	0.7995	0.8029
1.30	0.8064	0.8098	0.8132	0.8165	0.8198	0.8230	0.8262	0.8293	0.8324	0.8355
1.40	0.8385	0.8415	0.8444	0.8473	0.8501	0.8529	0.8557	0.8584	0.8611	0.8638
1.50	0.8664	0.8690	0.8715	0.8740	0.8764	0.8789	0.8812	0.8836	0.8859	0.8882
1.60	0.8904	0.8926	0.8948	0.8969	0.8990	0.9011	0.9031	0.9051	0.9070	0.9090
1.70	0.9109	0.9127	0.9146	0.9164	0.9181	0.9199	0.9216	0.9233	0.9249	0.9265
1.80	0.9281	0.9297	0.9312	0.9328	0.9342	0.9357	0.9371	0.9385	0.9399	0.9412
1.90	0.9426	0.9439	0.9451	0.9464	0.9476	0.9488	0.9500	0.9512	0.9523	0.9534
2.00	0.9545	0.9556	0.9566	0.9576	0.9586	0.9596	0.9606	0.9615	0.9625	0.9634
2.10	0.9643	0.9651	0.9660	0.9668	0.9676	0.9684	0.9692	0.9700	0.9707	0.9715
2.20	0.9722	0.9729	0.9736	0.9743	0.9749	0.9756	0.9762	0.9768	0.9774	0.9780
2.30	0.9786	0.9791	0.9797	0.9802	0.9807	0.9812	0.9817	0.9822	0.9827	0.9832
2.40	0.9836	0.9840	0.9845	0.9849	0.9853	0.9857	0.9861	0.9865	0.9869	0.9872
2.50	0.9876	0.9879	0.9883	0.9886	0.9889	0.9892	0.9895	0.9898	0.9901	0.9904
2.60	0.9907	0.9909	0.9912	0.9915	0.9917	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9929
2.70	0.9931	0.9933	0.9935	0.9937	0.9939	0.9940	0.9942	0.9944	0.9946	0.9947
2.80	0.9949	0.9950	0.9952	0.9953	0.9955	0.9956	0.9958	0.9959	0.9960	0.9961
2.90	0.9963	0.9964	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972
3.00	0.9973	0.9974	0.9975	0.9976	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980
3.10	0.9981	0.9981	0.9982	0.9983	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986
3.20	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.30	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.40	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995	0.9995

Binomialverteilung

$0.25 \leq p \leq 0.5$

$1 \leq n \leq 9$

n	x	$p = 0.25$		$p = 0.30$		$p = 1/3$		$p = 0.40$		$p = 0.50$	
		$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$
1	*0*	0.7500	0.7500	0.7000	0.7000	0.6667	0.6667	0.6000	0.6000	0.5000	0.5000
	1	0.2500	1.0000	0.3000	1.0000	0.3333	1.0000	0.4000	1.0000	0.5000	1.0000
2	*0*	0.5625	0.5625	0.4900	0.4900	0.4444	0.4444	0.3600	0.3600	0.2500	0.2500
	1	0.3750	0.9375	0.4200	0.9100	0.4444	0.8889	0.4800	0.8400	0.5000	0.7500
	2	0.0625	1.0000	0.0900	1.0000	0.1111	1.0000	0.1600	1.0000	0.2500	1.0000
3	*0*	0.4219	0.4219	0.3430	0.3430	0.2963	0.2963	0.2160	0.2160	0.1250	0.1250
	1	0.4219	0.8438	0.4410	0.7840	0.4444	0.7407	0.4320	0.6480	0.3750	0.5000
	2	0.1406	0.9844	0.1890	0.9730	0.2222	0.9630	0.2880	0.9360	0.3750	0.8750
	3	0.0000	0.9844	0.0270	1.0000	0.0370	1.0000	0.0640	1.0000	0.1250	1.0000
4	*0*	0.3164	0.3164	0.2401	0.2401	0.1975	0.1975	0.1296	0.1296	0.0625	0.0625
	1	0.4219	0.7383	0.4116	0.6517	0.3951	0.5926	0.3456	0.4752	0.2500	0.3125
	2	0.2109	0.9492	0.2646	0.9163	0.2963	0.8889	0.3456	0.8208	0.3750	0.6875
	3	0.0469	0.9961	0.0756	0.9919	0.0988	0.9877	0.1536	0.9744	0.2500	0.9375
	4	0.0039	1.0000	0.0081	1.0000	0.0123	1.0000	0.0256	1.0000	0.0625	1.0000
5	*0*	0.2373	0.2373	0.1681	0.1681	0.1317	0.1317	0.0778	0.0778	0.0313	0.0313
	1	0.3955	0.6328	0.3602	0.5282	0.3292	0.4609	0.2592	0.3370	0.1563	0.1875
	2	0.2637	0.8965	0.3087	0.8369	0.3292	0.7901	0.3456	0.6826	0.3125	0.5000
	3	0.0879	0.9844	0.1323	0.9692	0.1646	0.9547	0.2304	0.9130	0.3125	0.8125
	4	0.0146	0.9990	0.0284	0.9976	0.0412	0.9959	0.0768	0.9898	0.1563	0.9688
	5	0.0010	1.0000	0.0024	1.0000	0.0041	1.0000	0.0102	1.0000	0.0313	1.0000
6	*0*	0.1780	0.1780	0.1176	0.1176	0.0878	0.0878	0.0467	0.0467	0.0156	0.0156
	1	0.3560	0.5339	0.3025	0.4202	0.2634	0.3512	0.1866	0.2333	0.0938	0.1094
	2	0.2966	0.8306	0.3241	0.7443	0.3292	0.6804	0.3110	0.5443	0.2344	0.3438
	3	0.1318	0.9624	0.1852	0.9295	0.2195	0.8999	0.2765	0.8208	0.3125	0.6563
	4	0.0330	0.9954	0.0595	0.9891	0.0823	0.9822	0.1382	0.9590	0.2344	0.8906
	5	0.0044	0.9998	0.0102	0.9993	0.0165	0.9986	0.0369	0.9959	0.0938	0.9844
	6	0.0002	1.0000	0.0007	1.0000	0.0014	1.0000	0.0041	1.0000	0.0156	1.0000
7	*0*	0.1335	0.1335	0.0824	0.0824	0.0585	0.0585	0.0280	0.0280	0.0078	0.0078
	1	0.3115	0.4449	0.2471	0.3294	0.2048	0.2634	0.1306	0.1586	0.0547	0.0625
	2	0.3115	0.7564	0.3177	0.6471	0.3073	0.5706	0.2613	0.4199	0.1641	0.2266
	3	0.1730	0.9294	0.2269	0.8740	0.2561	0.8267	0.2903	0.7102	0.2734	0.5000
	4	0.0577	0.9871	0.0972	0.9712	0.1280	0.9547	0.1935	0.9037	0.2734	0.7734
	5	0.0115	0.9987	0.0250	0.9962	0.0384	0.9931	0.0774	0.9812	0.1641	0.9375
	6	0.0013	0.9999	0.0036	0.9998	0.0064	0.9995	0.0172	0.9984	0.0547	0.9922
	7	0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0005	1.0000	0.0016	1.0000	0.0078	1.0000
8	*0*	0.1001	0.1001	0.0576	0.0576	0.0390	0.0390	0.0168	0.0168	0.0039	0.0039
	1	0.2670	0.3671	0.1977	0.2553	0.1561	0.1951	0.0896	0.1064	0.0313	0.0352
	2	0.3115	0.6785	0.2965	0.5518	0.2731	0.4682	0.2090	0.3154	0.1094	0.1445
	3	0.2076	0.8862	0.2541	0.8059	0.2731	0.7414	0.2787	0.5941	0.2188	0.3633
	4	0.0865	0.9727	0.1361	0.9420	0.1707	0.9121	0.2322	0.8263	0.2734	0.6367
	5	0.0231	0.9958	0.0467	0.9887	0.0683	0.9803	0.1239	0.9502	0.2188	0.8555
	6	0.0038	0.9996	0.0100	0.9987	0.0171	0.9974	0.0413	0.9915	0.1094	0.9648
	7	0.0004	1.0000	0.0012	0.9999	0.0024	0.9998	0.0079	0.9993	0.0313	0.9961
	8	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0007	1.0000	0.0039	1.0000
9	*0*	0.0751	0.0751	0.0404	0.0404	0.0260	0.0260	0.0101	0.0101	0.0020	0.0020
	1	0.2253	0.3003	0.1556	0.1960	0.1171	0.1431	0.0605	0.0705	0.0176	0.0195
	2	0.3003	0.6007	0.2668	0.4628	0.2341	0.3772	0.1612	0.2318	0.0703	0.0898
	3	0.2336	0.8343	0.2668	0.7297	0.2731	0.6503	0.2508	0.4826	0.1641	0.2539
	4	0.1168	0.9511	0.1715	0.9012	0.2048	0.8552	0.2508	0.7334	0.2461	0.5000
	5	0.0389	0.9900	0.0735	0.9747	0.1024	0.9576	0.1672	0.9006	0.2461	0.7461
	6	0.0087	0.9987	0.0210	0.9957	0.0341	0.9917	0.0743	0.9750	0.1641	0.9102
	7	0.0012	0.9999	0.0039	0.9996	0.0073	0.9990	0.0212	0.9962	0.0703	0.9805
	8	0.0001	1.0000	0.0004	1.0000	0.0009	0.9999	0.0035	0.9997	0.0176	0.9980
	9	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0020	1.0000

Binomialverteilung

$0.25 \leq p \leq 0.5$

$10 \leq n \leq 13$

n	x	p = 0.25		p = 0.30		p = 1/3		p = 0.40		p = 0.50	
		$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$
10	0	0.0563	0.0563	0.0282	0.0282	0.0173	0.0173	0.0060	0.0060	0.0010	0.0010
	1	0.1877	0.2440	0.1211	0.1493	0.0867	0.1040	0.0403	0.0464	0.0098	0.0107
	2	0.2816	0.5256	0.2335	0.3828	0.1951	0.2991	0.1209	0.1673	0.0439	0.0547
	3	0.2503	0.7759	0.2668	0.6496	0.2601	0.5593	0.2150	0.3823	0.1172	0.1719
	4	0.1460	0.9219	0.2001	0.8497	0.2276	0.7869	0.2508	0.6331	0.2051	0.3770
	5	0.0584	0.9803	0.1029	0.9527	0.1366	0.9234	0.2007	0.8338	0.2461	0.6230
	6	0.0162	0.9965	0.0368	0.9894	0.0569	0.9803	0.1115	0.9452	0.2051	0.8281
	7	0.0031	0.9996	0.0090	0.9984	0.0163	0.9966	0.0425	0.9877	0.1172	0.9453
	8	0.0004	1.0000	0.0014	0.9999	0.0030	0.9996	0.0106	0.9983	0.0439	0.9893
	9	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0016	0.9999	0.0098	0.9990
	10			0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0010	1.0000
11	0	0.0422	0.0422	0.0198	0.0198	0.0116	0.0116	0.0036	0.0036	0.0005	0.0005
	1	0.1549	0.1971	0.0932	0.1130	0.0636	0.0751	0.0266	0.0302	0.0054	0.0059
	2	0.2581	0.4552	0.1998	0.3127	0.1590	0.2341	0.0887	0.1189	0.0269	0.0327
	3	0.2581	0.7133	0.2568	0.5696	0.2384	0.4726	0.1774	0.2963	0.0806	0.1133
	4	0.1721	0.8854	0.2201	0.7897	0.2384	0.7110	0.2365	0.5328	0.1611	0.2744
	5	0.0803	0.9657	0.1321	0.9218	0.1669	0.8779	0.2207	0.7535	0.2256	0.5000
	6	0.0268	0.9924	0.0566	0.9784	0.0835	0.9614	0.1471	0.9006	0.2256	0.7256
	7	0.0064	0.9988	0.0173	0.9957	0.0298	0.9912	0.0701	0.9707	0.1611	0.8867
	8	0.0011	0.9999	0.0037	0.9994	0.0075	0.9986	0.0234	0.9941	0.0806	0.9673
	9	0.0001	1.0000	0.0005	1.0000	0.0012	0.9999	0.0052	0.9993	0.0269	0.9941
	10	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0007	1.0000	0.0054	0.9995
	11					0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0005	1.0000
12	0	0.0317	0.0317	0.0138	0.0138	0.0077	0.0077	0.0022	0.0022	0.0002	0.0002
	1	0.1267	0.1584	0.0712	0.0850	0.0462	0.0540	0.0174	0.0196	0.0029	0.0032
	2	0.2323	0.3907	0.1678	0.2528	0.1272	0.1811	0.0639	0.0834	0.0161	0.0193
	3	0.2581	0.6488	0.2397	0.4925	0.2120	0.3931	0.1419	0.2253	0.0537	0.0730
	4	0.1936	0.8424	0.2311	0.7237	0.2384	0.6315	0.2128	0.4382	0.1208	0.1938
	5	0.1032	0.9456	0.1585	0.8822	0.1908	0.8223	0.2270	0.6652	0.1934	0.3872
	6	0.0401	0.9857	0.0792	0.9614	0.1113	0.9336	0.1766	0.8418	0.2256	0.6128
	7	0.0115	0.9972	0.0291	0.9905	0.0477	0.9812	0.1009	0.9427	0.1934	0.8062
	8	0.0024	0.9996	0.0078	0.9983	0.0149	0.9961	0.0420	0.9847	0.1208	0.9270
	9	0.0004	1.0000	0.0015	0.9998	0.0033	0.9995	0.0125	0.9972	0.0537	0.9807
	10	0.0000	1.0000	0.0002	1.0000	0.0005	1.0000	0.0025	0.9997	0.0161	0.9968
	11			0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0029	0.9998
	12							0.0000	1.0000	0.0002	1.0000
13	0	0.0238	0.0238	0.0097	0.0097	0.0051	0.0051	0.0013	0.0013	0.0001	0.0001
	1	0.1029	0.1267	0.0540	0.0637	0.0334	0.0385	0.0113	0.0126	0.0016	0.0017
	2	0.2059	0.3326	0.1388	0.2025	0.1002	0.1387	0.0453	0.0579	0.0095	0.0112
	3	0.2517	0.5843	0.2181	0.4206	0.1837	0.3224	0.1107	0.1686	0.0349	0.0461
	4	0.2097	0.7940	0.2337	0.6543	0.2296	0.5520	0.1845	0.3530	0.0873	0.1334
	5	0.1258	0.9198	0.1803	0.8346	0.2067	0.7587	0.2214	0.5744	0.1571	0.2905
	6	0.0559	0.9757	0.1030	0.9376	0.1378	0.8965	0.1968	0.7712	0.2095	0.5000
	7	0.0186	0.9944	0.0442	0.9818	0.0689	0.9653	0.1312	0.9023	0.2095	0.7095
	8	0.0047	0.9990	0.0142	0.9960	0.0258	0.9912	0.0656	0.9679	0.1571	0.8666
	9	0.0009	0.9999	0.0034	0.9993	0.0072	0.9984	0.0243	0.9922	0.0873	0.9539
	10	0.0001	1.0000	0.0006	0.9999	0.0014	0.9998	0.0065	0.9987	0.0349	0.9888
	11	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0012	0.9999	0.0095	0.9983
	12			0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0016	0.9999
	13							0.0000	1.0000	0.0001	1.0000

Binomialverteilung

$0.25 \leq p \leq 0.5$

$15 \leq n \leq 30$

n	x	$p = 0.25$		$p = 0.30$		$p = 1/3$		$p = 0.40$		$p = 0.50$	
		$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$
15	0	0.0134	0.0134	0.0047	0.0047	0.0023	0.0023	0.0005	0.0005	0.0000	0.0000
	1	0.0668	0.0802	0.0305	0.0353	0.0171	0.0194	0.0047	0.0052	0.0005	0.0005
	2	0.1559	0.2361	0.0916	0.1268	0.0599	0.0794	0.0219	0.0271	0.0032	0.0037
	3	0.2252	0.4613	0.1700	0.2969	0.1299	0.2092	0.0634	0.0905	0.0139	0.0176
	4	0.2252	0.6865	0.2186	0.5155	0.1948	0.4041	0.1268	0.2173	0.0417	0.0592
	5	0.1651	0.8516	0.2061	0.7216	0.2143	0.6184	0.1859	0.4032	0.0916	0.1509
	6	0.0917	0.9434	0.1472	0.8689	0.1786	0.7970	0.2066	0.6098	0.1527	0.3036
	7	0.0393	0.9827	0.0811	0.9500	0.1148	0.9118	0.1771	0.7869	0.1964	0.5000
	8	0.0131	0.9958	0.0348	0.9848	0.0574	0.9692	0.1181	0.9050	0.1964	0.6964
	9	0.0034	0.9992	0.0116	0.9963	0.0223	0.9915	0.0612	0.9662	0.1527	0.8491
	10	0.0007	0.9999	0.0030	0.9993	0.0067	0.9982	0.0245	0.9907	0.0916	0.9408
	11	0.0001	1.0000	0.0006	0.9999	0.0015	0.9997	0.0074	0.9981	0.0417	0.9824
	12	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0016	0.9997	0.0139	0.9963
	13			0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0032	0.9995
	14							0.0000	1.0000	0.0005	1.0000
	15									0.0000	1.0000
20	0	0.0032	0.0032	0.0008	0.0008	0.0003	0.0003	0.0000	0.0000		
	1	0.0211	0.0243	0.0068	0.0076	0.0030	0.0033	0.0005	0.0005	0.0000	0.0000
	2	0.0669	0.0913	0.0278	0.0355	0.0143	0.0176	0.0031	0.0036	0.0002	0.0002
	3	0.1339	0.2252	0.0716	0.1071	0.0429	0.0604	0.0123	0.0160	0.0011	0.0013
	4	0.1897	0.4148	0.1304	0.2375	0.0911	0.1515	0.0350	0.0510	0.0046	0.0059
	5	0.2023	0.6172	0.1789	0.4164	0.1457	0.2972	0.0746	0.1256	0.0148	0.0207
	6	0.1686	0.7858	0.1916	0.6080	0.1821	0.4793	0.1244	0.2500	0.0370	0.0577
	7	0.1124	0.8982	0.1643	0.7723	0.1821	0.6615	0.1659	0.4159	0.0739	0.1316
	8	0.0609	0.9591	0.1144	0.8867	0.1480	0.8095	0.1797	0.5956	0.1201	0.2517
	9	0.0271	0.9861	0.0654	0.9520	0.0987	0.9081	0.1597	0.7553	0.1602	0.4119
	10	0.0099	0.9961	0.0308	0.9829	0.0543	0.9624	0.1171	0.8725	0.1762	0.5881
	11	0.0030	0.9991	0.0120	0.9949	0.0247	0.9870	0.0710	0.9435	0.1602	0.7483
	12	0.0008	0.9998	0.0039	0.9987	0.0092	0.9963	0.0355	0.9790	0.1201	0.8684
	13	0.0002	1.0000	0.0010	0.9997	0.0028	0.9991	0.0146	0.9935	0.0739	0.9423
	14	0.0000	1.0000	0.0002	1.0000	0.0007	0.9998	0.0049	0.9984	0.0370	0.9793
	15			0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0013	0.9997	0.0148	0.9941
	16					0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0046	0.9987
	17							0.0000	1.0000	0.0011	0.9998
	18									0.0002	1.0000
	19									0.0000	1.0000
30	0	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				
	1	0.0018	0.0020	0.0003	0.0003	0.0001	0.0001				
	2	0.0086	0.0106	0.0018	0.0021	0.0006	0.0007	0.0000	0.0000		
	3	0.0269	0.0374	0.0072	0.0093	0.0026	0.0033	0.0003	0.0003		
	4	0.0604	0.0979	0.0208	0.0302	0.0089	0.0122	0.0012	0.0015	0.0000	0.0000
	5	0.1047	0.2026	0.0464	0.0766	0.0232	0.0355	0.0041	0.0057	0.0001	0.0002
	6	0.1455	0.3481	0.0829	0.1595	0.0484	0.0838	0.0115	0.0172	0.0006	0.0007
	7	0.1662	0.5143	0.1219	0.2814	0.0829	0.1668	0.0263	0.0435	0.0019	0.0026
	8	0.1593	0.6736	0.1501	0.4315	0.1192	0.2860	0.0505	0.0940	0.0055	0.0081
	9	0.1298	0.8034	0.1573	0.5888	0.1457	0.4317	0.0823	0.1763	0.0133	0.0214
	10	0.0909	0.8943	0.1416	0.7304	0.1530	0.5848	0.1152	0.2915	0.0280	0.0494
	11	0.0551	0.9493	0.1103	0.8407	0.1391	0.7239	0.1396	0.4311	0.0509	0.1002
	12	0.0291	0.9784	0.0749	0.9155	0.1101	0.8340	0.1474	0.5785	0.0806	0.1808
	13	0.0134	0.9918	0.0444	0.9599	0.0762	0.9102	0.1360	0.7145	0.1115	0.2923
	14	0.0054	0.9973	0.0231	0.9831	0.0463	0.9565	0.1101	0.8246	0.1354	0.4278
	15	0.0019	0.9992	0.0106	0.9936	0.0247	0.9812	0.0783	0.9029	0.1445	0.5722
	16	0.0006	0.9998	0.0042	0.9979	0.0116	0.9928	0.0489	0.9519	0.1354	0.7077
	17	0.0002	0.9999	0.0015	0.9994	0.0048	0.9975	0.0269	0.9788	0.1115	0.8192
	18	0.0000	1.0000	0.0005	0.9998	0.0017	0.9993	0.0129	0.9917	0.0806	0.8998
	19			0.0001	1.0000	0.0005	0.9998	0.0054	0.9971	0.0509	0.9506
	20			0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0020	0.9991	0.0280	0.9786
	21					0.0000	1.0000	0.0006	0.9998	0.0133	0.9919
	22							0.0002	0.9999	0.0055	0.9974
	23							0.0000	1.0000	0.0019	0.9993
	24									0.0006	0.9998
	25									0.0001	1.0000
	26									0.0000	1.0000