Übung 1: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

Teil A: Kontrollfragen

1. Was ist der Unterschied zwischen einem Elementarereignis und einem Ereignis? Was ist der Unterschied zwischen dem Ereignisraum und der Ereignismenge?
2. Sind komplementäre Ereignisse disjunkt? Sind disjunkte Ereignisse komplementär?
3. Welche drei Wahrscheinlichkeitsbegriffe kennen Sie? Auf welchem Wahrscheinlichkeitsbegriff basieren die Kolmogorovschen Axiome?
4. Was ist der Unterschied zwischen stetig und diskret?
5. Ereignis A impliziere Ereignis B. Kann dann B von A unabhängig sein?
6. Können unabhängige Ereignisse disjunkt sein? Können disjunkte Ereignisse unabhängig sein?
7. Manche Ökonomen glauben, dass höhere Löhne die Konjunktur beleben und somit die Arbeitslosigkeit verringern. Wenn sie recht haben, sind dann diese drei Ereignisse abhängig oder unabhängig?
8. In der Kfz-Haftpflichtversicherung gibt es Schadenfreiheitsklassen. Was hat das mit bedingten Wahrscheinlichkeiten zu tun?
9. Verwendet man das Bayes-Theorem, um von den Wahrscheinlichkeiten der Ursachen auf die Beobachtungen zu schliessen oder umgekehrt? Was bedeutet „a posteriori“?

Teil B: Multiple Choice

In Übung voraussichtlich besprochen: 1,2,3,4,6,8,11,13,14,16

Kreuzen Sie bitte in den folgenden Mehrfachwahl-Aufgaben die richtigen Aussagen an. Dabei kann es sein, dass von den zu einer Aufgabe vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten keine, eine, mehrere oder alle richtig sind.

1. A und B sind zwei unabhängige Ereignisse. Dann gilt
   (a) $P[B \mid A] = 0$
   (b) $P[B \mid A] = P[B]$
   (c) $P[B \mid A] = P[A]$
   (d) Wir haben nicht genügend Informationen um $P[B \mid A]$ anzugeben
2. A und B sind zwei disjunkte Ereignisse. Dann gilt
   (a) $P[B \mid A] = 0$
   (b) $P[B \mid A] = P[B]$
   (c) $P[B \mid A] = P[A]$
   (d) Wir haben nicht genügend Informationen um $P[B \mid A]$ anzugeben

3. A und B sind zwei Ereignisse mit $P[A] = 0.5$ und $P[B \mid A] = 0.6$. Dann gilt
   (a) $P[B \cap A] = 0.3$
   (b) $P[B \cap A] = 0.83$
   (c) $P[B \cap A] = 0.5$
   (d) $P[B \cap A] = 0.6$
4. A und B sind zwei Ereignisse mit $P[B \mid A] = 0$. Dann gilt
   (a) $P[B \cap A] = 0$
   (b) $P[B \cap A] = P[A] \cdot P[B]$
   (c) $P[B \cap A] = 1$
   (d) $P[B \cup A] = 1$
5. A und B seien zwei Ereignisse und A eine Teilmenge von B. Dann gilt
   (a) $P[A \mid B] = 1$
   (b) $P[A \mid B] = P[A]/P[B]$
   (c) $P[A \mid B] = 0$
   (d) Wir haben nicht genügend Informationen um $P[A \mid B]$ anzugeben
6. A und B sind zwei Ereignisse, wobei B eine Teilmenge von A ist. Dann gilt
   (a) $P[A \mid B] = 1$
   (b) $P[A \mid B] = P[A]/P[B]$
   (c) $P[A \mid B] = 0$
   (d) Wir haben nicht genügend Informationen um $P[A \mid B]$ anzugeben
7. A und B sind zwei Ereignisse, wobei A und B sich gegenseitig ausschliessen. Dann gilt
   (a) $P[A \mid B] = 1$
   (b) $P[A \mid B] = P[A]/P[B]$
   (c) $P[A \mid B] = 0$
   (d) Wir haben nicht genügend Informationen um $P[A \mid B]$ anzugeben
8. A und B sind zwei unvereinbare Ereignisse, für deren Wahrscheinlichkeiten wir $P[A] > 0$ und $P[B] > 0$ voraussetzen. Dann gilt
   (a) A und B sind unabhängig
   (b) A und B sind abhängig
   (c) Wir haben nicht genügend Elemente um etwas über die Abhängigkeit von A und B zu sagen

9. Aus „A impliziert B“ folgt, $P[A] > 0$ vorausgesetzt,
   (a) $P[A \mid B] \geq P[A]$
   (b) $P[A \mid B] < P[A]$
   (c) $P[A \mid B] \geq P[B]$
   (d) $P[B \mid A] > 0$

10. Aus „A und B sind unvereinbar“ folgt, $P[A] > 0$ vorausgesetzt,
    (a) $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$
    (b) $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$
    (c) $P[A \cap B] = 0$
    (d) $P[A \mid B] = P[A]$

11. Von zwei Ereignissen A und B sind folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt: $P[A] = 0.5, P[B] = 0.4$ und die Wahrscheinlichkeit, dass weder A noch B eintritt, sei 0.2. Dann gilt
    (a) A und B sind unvereinbar
    (b) A und B sind nicht unvereinbar
    (c) A und B sind unabhängig
    (d) A und B sind nicht unabhängig

12. A, B und C seien Ereignisse mit den Eigenschaften: $P[A] = 0.6, P[B] = 0.8, P[A \cap B] = 0.4, P[C] = 0.3$ und $C \subset A$. Dann gilt
    (a) A und B sind unvereinbar
    (b) A und B sind abhängig
    (c) $A \cup B = S$, wobei S den Ereignisraum bezeichnet
    (d) $P[C \mid A] = 2/3$
    (e) $P[C \mid A] = 1/2$
    (f) $P[A \mid C] = 1$

13. A und B sind zwei unabhängige Ereignisse mit $P[A] = 0.9$ und $P\left[\overline{\overline{A} \cup B}\right] = 0.5$. Dann gilt
    (a) $P[B] = 0.05$
    (b) $P[B] = 0.44$
    (c) $P[B] = 0.55$
    (d) Wir haben nicht genügend Informationen um $P[B]$ zu berechnen

14. A und B sind zwei Ereignisse mit $P[A] = 0.1$ und $P[B] = 0.5$. Dann gilt
    (a) $P[A \cap B] = 0.1 \cdot 0.5$
    (b) $P[A \cap B] = 0.1 + 0.5$
    (c) $P[A \cap B] = P[A \mid B]$
    (d) Wir haben nicht genügend Informationen um $P[A \cap B]$ anzugeben
15. A und B sind zwei Ereignisse mit $P[A] = 1/3, P[B] = 1/2$ und $P[B \mid A] = 1/3$. Dann gilt
    (a) $P[A \mid B] = 1/6$
    (b) $P[A \mid B] = 1/9$
    (c) $P[A \mid B] = 2/9$
    (d) $P[A \mid B] = 1/2$
16. A, B und C sind drei Ereignisse mit $P[A \cap B \cap C] = P[A] \cdot P[B] \cdot P[C]$. Dann gilt
    (a) A, B und C sind unabhängig
    (b) A und C sind unabhängig
    (c) A, B und C sind nicht unabhängig
    (d) Wir haben nicht genügend Elemente um etwas über die Abhängigkeit von A, B und C zu sagen

Teil C: Aufgaben

In Übung voraussichtlich besprochen: 1,3,4,6,8,9,12,13

1. Ein fairer Würfel wird zweimal hintereinander geworfen.
    (a) Geben Sie jedes Element des Ereignisraumes explizit an.
    (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 10 oder grösser ist, wenn beim ersten Wurf eine 5 erscheint?
    (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 10 oder grösser ist, wenn bei mindestens einem Wurf eine 5 erscheint?

    [(b) 1/3; (c) 3/11]

2. Ein fairer Würfel wird geworfen, bis erstmals die Augenzahl 6 erscheint. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass
    (a) genau 4 Mal
    (b) mindestens 2 Mal
    (c) höchstens 4 Mal

    geworfen werden muss.

    [(a) 0.096; (b) 5/6; (c) 0.518]

3. Für die Ereignisse A und B seien die Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P[A] = 0.5, P[B] = 0.3 \text{ und } P[A \cap B] = 0.2.$$

Geben Sie - wenn möglich - die folgenden Wahrscheinlichkeiten zahlenmässig an:

(a) $P[A \cup B]$ (b) $P[A \mid B]$
(c) $P[\overline{A \cap B}]$ (d) $P[\overline{A} \cap \overline{B}]$
(e) $P[\overline{A \cup B}]$ (f) $P[\overline{A} \cup \overline{B}]$

[(a) 0.6; (b) 2/3; (c) 0.8; (d) 0.4; (e) 0.4; (f) 0.8]

4. Ein Student bewirbt sich bei zwei Universitäten A und B um ein Stipendium. Er schätzt seine Erfolgschancen wie folgt ein:

Aufnahme an A:	0.3
Aufnahme an B:	0.4
Aufnahme an beiden Unis:	0.2
Aufnahme an keiner der beiden Unis:	0.3

Wie beurteilen Sie diese Schätzungen?

5. Zwei Maschinen A und B produzieren denselben Artikel in einer Fabrik. Maschine A produziert 70% der Stücke und B 30%. 8% der von A hergestellten Stücke sind fehlerhaft, aber nur 6% der von Maschine B produzierten Stücke.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig aus der Tagesproduktion gezogenes fehlerhaftes Stück von Maschine A hergestellt wurde?

[0.7568]

6. In einem Gymnasium werden zwar alle sich bewerbenden Schüler aufgenommen, aber ihre Eignung wird durch einen psychologischen Test geprüft. Langjährige Statistiken haben dabei ergeben:

   40% der Schüler bestehen die Matura nicht;
   90% dieser Schüler hatten bei der Aufnahme ein negatives Testergebnis.

   Von den Schülern mit bestandener Matura hatte 1% bei dem Aufnahmetest versagt.

   (a) Veraunschaulichen Sie die obige Problemstellung in einem Baumdiagramm. Jeder Ast ist dabei mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit zu versehen.
   (b) Zeigen Sie: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler ein negatives Testergebnis aufweist, beträgt 36.6%.
   (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler die Matura nicht besteht, falls er ein negatives Testergebnis aufweist?

[(c) 0.9836]

7. In zwei Werken werden Glühlampen hergestellt. Werk A liefert 70% und Werk B 30% der Gesamtproduktion. Im Mittel sind von je 100 Lampen des Werks A 83 und von Werk B 63 normgerecht.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt eine normgerechte Lampe aus Werk B?

   [0.24545]

8. *Qualitätskontrolle.* Eine Firma erhält als Zulieferung regelmässig ein bestimmtes Produkt in Sendungen zu 50 Stück. Die Annahmekontrolle verläuft nach dem folgenden „Inspektionsplan" Ip_5:

   Man entnimmt zufällig ein Stück und prüft es. Ist es in Ordnung entnimmt man - ohne das schon Geprüfte zurückzulegen - ein Zweites usw. Sobald ein schadhaftes Stück gefunden wird weist man die Sendung zurück. Sind jedoch die ersten fünf Stücke in Ordnung wird die Sendung angenommen (Ereignis A).

   (a) Wie gross ist die Annahmewahrscheinlichkeit $P[A]$, falls 0, 2, 5 oder 10 Stücke in einer Sendung schadhaft sind?

   (b) Zeichen Sie die „Operationscharakteristik" des Inspektionsplanes Ip_5 (Annahmewahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von den tatsächlich schadhaften Stücken).

   [(a) 1; 0.8082; 0.5766; 0.3106]

9. *Familienplanung.* Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von vier Geschwistern

   (a) alle vier Jungen sind

   (b) alle vier Mädchen sind

   (c) nur das älteste Kind ein Junge ist

   (d) nur das jüngste Kind ein Mädchen ist

   (e) zwei Jungen und zwei Mädchen sind

   (f) die verbleibenden zwei Mädchen sind, wenn wir wissen, dass mindestens zwei der Geschwister Jungen sind?

   [(a) 1/16; (b) 1/16; (c) 1/16; (d) 1/16; (e) 3/8; (f) 6/11]

10. In einer Urne befindet sich eine grosse Zahl von Kugeln. 80% der Kugeln sind weiss, 20% sind schwarz.

    (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel bei blindem Hineingreifen zufällig zu ziehen?

    (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zufällig eine weisse Kugel zu ziehen?

    (c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei drei zufälligen Stichproben mit Zurücklegen, genau drei weisse Kugeln zu finden?

    (d) Wie gross die Wahrscheinlichkeit, genau drei schwarze Kugeln zu finden?

    (e) Wie gross die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze und zwei weisse Kugeln zu finden?

[(a) 0.2; (b) 0.8; (c) 0.512; (d) 0.008; (e) 0.384]

11. 1996 lebten in der Schweiz 80% Schweizer Bürger und 20% Ausländer. Die Arbeitslosigkeit betrug 3.3% unter den Schweizern und 9.3% unter Ausländern.

    (a) Wie hoch war die Arbeitslosenquote 1996 in der Schweiz?

    (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewählter Arbeitsloser Schweizer ist?

[(a) 0.045; (b) 0.59]

12. Der ELISA-Test zum Nachweis von HIV-Antikörpern fällt mit 99.8%-iger Wahrscheinlichkeit negativ aus, wenn eine Person nicht HIV-infiziert ist (Spezifität eines medizinischen Tests). Der Test fällt mit 99.95%-iger Wahrscheinlichkeit positiv aus, wenn eine Person HIV-infiziert ist (Sensitivität eines medizinischen Tests). Es sei bekannt, dass die Anzahl der HIV-positiven Personen 0.01% in einer Bevölkerungsgruppe beträgt.

    (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand tatsächlich HIV-infiziert ist, wenn der ELISA-Test positiv ausfällt?

    (b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand tatsächlich nicht HIV-infiziert ist, wenn der ELISA-Test negativ ausfällt?

    (c) Was ist wichtiger für ein solchen Test: Die Spezifität oder die Sensitivität?

[(a) 0.0474; (b) ≈ 1]

13. *Würfelspiel.* Man bietet Ihnen das folgende Glücksspiel an: Sie bezahlen einen Einsatz von x Rappen und dürfen dann zweimal mit einem Würfel würfeln. Werfen Sie mindestens einmal eine Sechs erhalten Sie als Gewinn 1 CHF.

    (a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei diesem Spiel gewinnen?

    (b) Sie dürfen das Spiel hinreichend oft wiederholen. Welchen Einsatz x wären Sie höchstens bereit zu zahlen, um langfristig zu gewinnen?

[(a) 11/36; (b) 30 Rappen]