Musterlösung
Herbstsemester 2014

Teil A: Multiple Choice (40 Punkte)

1. D)
2. A)
3. C)
4. C)
5. D)
6. B)
7. B)
8. D)
9. B)
10. A)

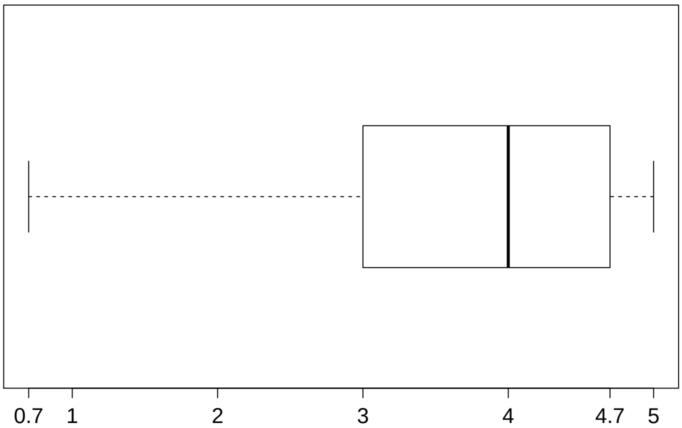
Aufgabe 1 (12 Punkte)

Teil 1A (4 Punkte):

- A ⇔ V2
- B ⇔ V3
- C ⇔ V1
- D ⇔ V4

Teil 1B (8 Punkte):

1. - Mittelwert: 3.79
   - Modus: 5
2. - Quartile:
     - 25%: 3
     - 50%: 4
     - 75%: 4.7
   - IQA: 1.7
     - Oberer Ausläufer: 5
     - Unterer Ausläufer: 0.7
     - Keine Ausreisser



Aufgabe 2 (10 Punkte)

Teil 2A (6 Punkte)

1. Baum:

   Start

   2/3 1/3

   Rot Schwarz

   1/2 1/2 1

   Rot Schwarz Rot

   1 1 1

   Schwarz Rot Rot

2. Prob("rote Kugel im zweiten Zug")=$\frac{2}{3}$
3. Prob("rote Kugel im ersten Zug"|"rote Kugel im zweiten Zug")=$\frac{1}{2}$

Teil 2B (4 Punkte)

1. Prob("12 oder mehr Fragen richtig") =
   1 − Prob("11 oder weniger Fragen richtig") =
   $= 1 - F_{Bin}(11; 20, \frac{1}{3}) = 0.013$
2. $\lambda = np = 100 \cdot 0.013 = 1.3$
   Prob("3 oder mehr Studenten bestehen") =
   1 − Prob("2 oder weniger Studenten bestehen") =
   $1 - F_{Poi}(2; 1.3) = 0.1429$

   (Ersatzergebnis: $\lambda = 0.015, \text{Prob} = 0.1912$)

Aufgabe 3 (18 Punkte)

1. $\int\limits_0^x \frac{1}{500}\mathrm{e}^{-\frac{t}{500}}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-\frac{t}{500}}\Big|_0^x = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{500}} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{500}}$

2. $\mathrm{P}\left(X > 500\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X \leq 500\right) = 1 - 1 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{500}\cdot 500} = \mathrm{e}^{-1} \sim 0.367879$

3. $1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{500}} = 0.8$; $\mathrm{e}^{-\frac{x}{500}} = 0.2$; $-\frac{x}{500} = \log 0.2$, $x = -500 \cdot \log 0.2 \sim 804.719$

4. $X = \min(X_1, X_2)$
   $\mathrm{P}\left(X > a\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X \leq a\right)$
   $X > a$ iff $X_1 > a$ und $X_2 > a$.
   Da X_1 und X_2 *iid* sind,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(X > a\right) &= \mathrm{P}\left(X_1 > a\right) \cdot \mathrm{P}\left(X_2 > a\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda_1 \cdot a} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2 \cdot a} = \mathrm{e}^{(-\lambda_1 - \lambda_2)\cdot a}\end{aligned}$$

$$\mathrm{P}\left(X \leq a\right) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda_1 + \lambda_2)\cdot a}$$

5. $S = \sum_{i=1}^{8} X_i$; $\mathrm{E}\left(S\right) = 8 \cdot 250$; $\mathrm{Var}\left(S\right) = 8 \cdot 250^2$
   $\mathrm{P}\left(\frac{S - 8\cdot 250}{250\cdot\sqrt{8}} \leq \frac{6\cdot 365 - 8\cdot 250}{250\cdot\sqrt{8}}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq 0.268006\right) = 0.60599199$

   $\mathrm{P}(S > 6 \cdot 365) = 1 - 0.60599199 = 0.3940801$

   (Ersatzergebnis: $\lambda = \frac{1}{220}$; $1 - (Z \leq 0.6910362) = 1 - 0.7552286 = 0.2447714$)

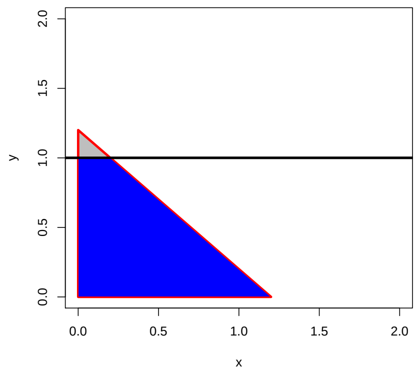


Abbildung 1: Integrationsgrenzen

Aufgabe 4 (20 Punkte)

1. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$

   $\int\limits_0^1 \int\limits_0^2 \frac{1}{1+2c}(xy+c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{1+2c}\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2y}{2}+cx\right)\Big|_0^2 \mathrm{d}y = \frac{1}{1+2c}\int\limits_0^1 (2y+2c)\,\mathrm{d}y$

   $\frac{1}{1+2c}\left(\frac{2y^2}{2}+2cy\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{1+2c}(1+2c) = 1$

2. $\frac{1}{1+2c}\int\limits_0^1 (xy+c)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{1+2c}\left(\frac{xy^2}{2}+cy\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{1+2c}\left(\frac{x}{2}+c\right) = \frac{x+2c}{2+4c}$

3. $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$

   $\int\limits_0^2 x^2\left(\frac{x+2}{6}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(x^3+2x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{16}{4}+\frac{16}{3}\right) = \frac{14}{9}$

   $\int\limits_0^2 x\frac{x+2}{6}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 \left(x^2+2x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{8}{3}+\frac{8}{2}\right) = \frac{10}{9}$

   $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{26}{81} \sim 0.32$

4. $\frac{1}{1+2c}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{6/5-y} (xy+c)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

5. $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{6/5-y} (xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \frac{x^2y}{2}\Big|_0^{6/5-y}\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \frac{(6/5-y)^2}{2}y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{6}{5}\right)^2\frac{y^2}{2} - \frac{12y^3}{5\cdot 3} + \frac{y^4}{4}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{25} - \frac{4}{5} + \frac{1}{4}\right) \sim$ 0.085

Aufgabe 5 (20 Punkte)

1. $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{x_i^{\alpha+1}} = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\alpha+1)}$

   $\log L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = n \cdot \log \alpha - (\alpha + 1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \log x_i$

   $\frac{\partial \log L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha)}{\partial \alpha} = 0$

   $\frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \Rightarrow \widehat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}$

2. $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i} = \frac{4}{\log 11 + \log 16.4 + \log + 27.9 + \log 15.9}$

   $\frac{4}{2.40 + 2.80 + 3.33 + 2.77} \sim 0.35$

3. $\mathrm{E}(X) = \int\limits_{1}^{+\infty} x \cdot f(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x \cdot \alpha}{x^{\alpha+1}} \mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\alpha}{x^{\alpha}} \mathrm{d}x = \alpha \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_{1}^{+\infty} = 0 - \frac{\alpha}{-\alpha+1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$

   $\frac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\alpha}-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x \Rightarrow \alpha = \frac{\overline{x}}{\overline{x}-1}$

4. $\widehat{\alpha} = \frac{17.8}{17.8-1} \sim 1.06$

5. Die Dichtefunktion ist definiert für $\alpha > 0$. Die Momentenmethode ist allerdings nur definiert falls $\alpha > 1$.