Multiple Choice (48 Punkte)

Markieren Sie bei folgenden Multiple-Choice-Aufgaben die korrekte Aussage.

- In jedem Block von Aussagen ist **genau eine** Antwort korrekt.
- Die eindeutig markierte korrekte Aussage wird mit 4 Punkten (pro MC-Aufgabe) bewertet.
- Eine Markierung der falschen Aussage, eine Mehrfachmarkierung oder keine Markierung wird mit 0 Punkten bewertet.

1. (4 Punkte) Drei Freunde spielen ein Spiel. Sie werfen eine faire Münze. Spieler 1 gewinnt, wenn beim ersten Wurf Kopf herauskommt. Spieler zwei gewinnt, wenn beim zweiten Wurf Kopf herauskommt. Spieler drei gewinnt, wenn beim dritten Wurf Kopf herauskommt. Wenn bis zur dritten Runde kein Gewinner ermittelt wurde, beginnt das Spiel von neuem. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 3 das Spiel gewinnt? *Hinweis:* $\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot k^i = \frac{a}{1-k}$, *wenn der absolute Wert von k kleiner als 1 ist.*

   (a) $\frac{1}{6}$
   (b) $\frac{1}{7}$
   (c) $\frac{1}{5}$
   (d) $\frac{1}{3}$

   Die richtige Antwort ist (b) $= \frac{1}{7}$:

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^9 ....$$
$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^i\right)$$
$$x = \frac{1}{7}$$

2. (4 Punkte) Sie haben 1000 Münzen und wissen, dass es unter den 1000 Münzen genau eine besondere Münze gibt, die auf beiden Seiten *Zahl* hat. Sie wählen eine Münze zufällig aus diesen 1000 aus. Sie werfen diese eine Münze 10 Mal. Sie zeigt 10 Mal hintereinander *Zahl* an. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die besondere Münze genommen haben?

   (a) 50.6%
   (b) 1.8%
   (c) 51.9%
   (d) 2.9%

   Die richtige Antwort ist (a) = 50,6%. Die Lösung kann wie folgt gezeigt werden:

$$x = \frac{\frac{1}{1000} \cdot 1}{\frac{1}{1000} \cdot 1 + \frac{999}{1000} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}$$

3. (4 Punkte) Nehmen wir an, dass X_1, X_2, ..., X_N unabhängige und identisch (I.I.D) gleichverteilte Zufallsvariablen zwischen 0 und 1 sind. Wie groß ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass das arithmetische Mittel größer als 0.55 ist, wenn $N = 100$?

   (a) 4.2%

(b) 1.2%

(c) 3.3%

(d) 3.1%

Die richtige Antwort ist (a) = 4,2%. Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes:

$$
\begin{aligned}
&= Pr(X \geq 0.55) \\
&= 1 - Pr\left(X \leq 0.55\right) \\
&= 1 - Pr\left(\frac{X - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{1200}}} \leq \frac{0.55 - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{1200}}}\right) \\
&= 1 - Pr\left(\frac{X - 0.5}{\sqrt{\frac{1}{1200}}} \leq 1.732\right) \\
&= 1 - \Phi(1.73) \\
&= 1 - 0.9582 \\
&= 0.0418
\end{aligned}
$$

4. (4 Punkte) Für welchen Wert von c ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-0.8x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

eine Dichtefunktion?

(a) $c = \frac{5}{4}$
(b) $c = \frac{1}{2}$
(c) $c = -\frac{7}{9}$
(d) $c = \frac{4}{5}$

Die richtige Antwort ist (d) $c = \frac{4}{5}$.

5. (4 Punkte) Folgende Angaben sind gegeben: $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P\left(\overline{A}\,|B\right) = 0.75$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit von $P(A \cup B)$?

(a) 0.425
(b) 0.6
(c) 0.7
(d) Keine der obigen Angaben ist richtig.

Die richtige Antwort ist (b), $P(A \cup B) = 0.6$

6. (4 Punkte) Im Oktober macht Nina einen einwöchigen Städtetrip nach Hamburg. Die Wettervorhersage sagt für jeden Tag eine Regenwahrscheinlichkeit von 70% voraus. Wie hoch ist in etwa die Wahrscheinlichkeit, dass es an mindestens 5 von 7 Tagen regnet?

(a) 65%
(b) 66%
(c) 67%
(d) 68%

Die richtige Antwort ist (a) = 65%

7. (4 Punkte) Zwei Spieler stehen sich in einem Best-of-5-Spiel gegenüber, d.h. der erste Spieler, der 3 Runden gewinnt, gewinnt das Spiel. Bei jeder Runde hat Spieler A eine 60%ige Chance zu gewinnen und Spieler B eine 40%ige Chance (es gibt keine Unentschieden). Nach einer Runde geht Spieler B in Führung und hat nun einen Vorsprung von eins in der Best-of-5-Serie. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler B nach dieser ersten Runde das gesamte Spiel gewinnt?

(a) 52.48%
(b) 34.56%
(c) 50.05%
(d) 45.24%

Die richtige Antwort ist (a).
Wann gewinnt B das Spiel?

(a) B gewinnt 2 und 3: 0.4^2
(b) B gewinnt 2 und 4: $0.4^2 \cdot 0.6$
(c) B gewinnt 2 und 5: $0.4^2 \cdot 0.6^2$

(d) B gewinnt 3 und 4: $0.4^2 \cdot 0.6$

(e) B gewinnt 3 und 5: $0.4^2 \cdot 0.6^2$

(f) B gewinnt 4 und 5: $0.4^2 \cdot 0.6^2$

$$P(\text{Sieg}) = 0.4^2 \cdot (1 + 2 \cdot .6 + 3 \cdot .6^2) = 0.5248$$

8. (4 Punkte) Sie beobachten eine auf dem Interval [0, b] gleichverteilte Zufallsvariable X. Im Einzelnen beobachten Sie die folgenden Realisierungen: 1.1, 3.8, 4.2, 0.5, 5.2.
Wie lautet der Maximum-Likelihood-Schätzer für b?

(a) $\hat{b}_{\text{ML}} = 6.23$

(b) $\hat{b}_{\text{ML}} = 5.20$

(c) $\hat{b}_{\text{ML}} = 5.92$

(d) $\hat{b}_{\text{ML}} = 5.75$

Die richtige Antwort ist (b).

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & 0 \leq x \leq b \\ 0, & \text{ansonsten} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(b \mid x_1, \ldots, x_5) = b^{-5}$$

Die Likelihood ist monoton fallend in b, aber alle x_i müssen im Intervall $[0, b]$ liegen. Das heißt, um $\mathcal{L}$ zu maximieren, wählen wir das kleinstmögliche b, also das größte x_i. $b = x_5 = 5.2$

9. (4 Punkte) A und B sind zwei Ereignisse mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$, welche Aussage muss wahr sein?

(a) $P(A \mid B) \cdot P(A) = P(B \mid A) \cdot P(B)$

(b) $P(B) > P(A \cap B)$

(c) $P(A) > P(A \mid B)$

(d) Keine der oben genannten Möglichkeiten.

Die richtige Antwort ist (d).

10. (4 Punkte) Beim Schach sind die Engines viel stärker als die Menschen. Sie sind so stark, dass bestimmte Züge als *unmenschlich* angesehen werden. Natürlich ist es möglich, dass ein Mensch zufällig einen Top-Engine-Zug findet, daher bedeutet das Finden eines Top-Engine-Zuges nicht, dass er schummelt. Der Verdacht, dass ein Spieler betrügt, entsteht, wenn dieser Spieler viele Top-Engine-Züge findet. Nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein sehr starker Spieler einen Top-Engine-Zug zufällig findet, $p = 0.3$ ist. Sie entwickeln einen Algorithmus zur Erkennung von Betrügern für eine Online-Schachplattform, die Spieler sperren will, die in einer Folge von 1000 Zügen mindestens 340 Top-Engine-Züge finden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Algorithmus einen sehr starken Spieler fälschlicherweise als Betrüger einstuft?

(a) 0.1%

(b) 0.3%

(c) 0.5%

(d) 0.7%

Die richtige Antwort ist (b).
Die Anzahl der Top-Engine-Züge eines hochrangigen Spielers ist $X \sim B(1,000, 0.3)$.

$$P[X \geq 340] = 1 - P[X < 340] = 1 - \sum_{k=0}^{339} \binom{1\,000}{k} 0.3^k 0.7^{1\,000-k} = 0.0034825$$

alternativ

$$\begin{aligned} \mu &= 1\,000 \cdot 0.3 = 300 \\ \sigma &= \sqrt{1\,000 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = 14.49 \\ 1 - P\left[Z \leq \frac{339.5 - \mu}{\sigma}\right] &= 0.003207 \end{aligned}$$

11. (4 Punkte) Seien X, Y und Z 3 Zufallsvariablen mit $E[X] = E[Y]$, $E[XY] = 1$ und $E[X + Y - 2Z] = -1$. X und Y sind unabhängig. Wie groß ist der Wert von $E[Z]$?

(a) $E[Z] = -0.5$

(b) $E[Z] = 1,5$

(c) $E[Z] = 3$

(d) Nicht genügend Informationen gegeben.

Lösung: (d)

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= 0 \quad (indep.\ X\ Y) \\ E[XY] - E[X]E[Y] &= 1 - E[X]E[X] = 0 \\ E[X] &= E[Y] = + - 1 \end{aligned}$$

Es ist nicht möglich, das Vorzeichen von $E[X]$ und $E[Y]$ zu bestimmen, welches erforderlich ist, um $E[Z]$ unter Verwendung von $E[X + Y - 2Z] = -1$ zu lösen.

12. (4 Punkte) Sie haben zwei Wale. Ein Wal ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% männlich, ansonsten weiblich. Der Tag der Geburt eines Wals ist unabhängig vom Geschlecht, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{7}$ für jeden Tag. Geben Sie das Verhältnis der bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|B)$ und $P(A|C)$ an:

- Ereignis A: Beide Wale sind männlich.
- Ereignis B: Mindestens ein Wal ist männlich.
- Ereignis C: Mindestens ein Wal ist männlich UND an einem Dienstag geboren.

(a) $P(A|B) = P(A|C)$

(b) $P(A|B) > P(A|C)$

(c) $P(A|B) < P(A|C)$

(d) Nicht genügend Informationen gegeben.

Lösung: (c)
Die Aufgabe ist schwierig, da die Lösung entgegen der typischen Intuition von Unabhängigkeit geht.
Zu B: $P(A|B) = 1/3$. Lösen Sie mithilfe einer Tabelle: Es gibt 3 Optionen mit 1 männlichem Wal mit gleicher Wahrscheinlichkeit, 1 davon hat zwei männliche Wale ([m,m],[m,f],[f,m]).
Zu C: $P(A|C) = 13/27$. Lösen Sie mithilfe einer Tabelle aller Kombinationen der Geburts-Tagen (7 x 7 Tabelle) für einen männlichen Wal und nehmen Sie Zeile und Spalte, in der mindestens ein Männchen am Dienstag geboren ist, um die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.
Daher gilt $P(A|B) < P(A|C)$.
Würde die Aufgabe die Reihenfolge der Wale bestimmen: "der erste Wal ist männlich", dann wären die Wahrscheinlichkeiten gleich.
Siehe dieser Twitter post für einen möglichen Lösungsweg
(https://twitter.com/aureliengeron/status/1460519082512560134?lang=en).

Der Grund für das überraschende Ergebnis: Die "doppelt gezählte Option"([m,m], [m am Dienstag, m am Dienstag]) ist im zweiten Fall mit Wochentagen weniger wahrscheinlich als im ersten Fall ohne Wochentage.

Problem 1 (12 Punkte)

Teil 1A (4 Punkte)

Aus jeder der vier Verteilungen F_1, F_2, F_3 und F_4 wird eine Zufallsstichprobe von Beobachtungen gezogen:

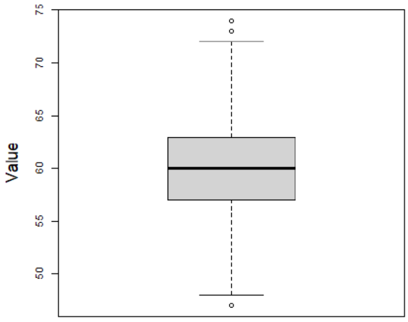
F_1) Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 0.5$.
Stichprobenumfang $n_2 = 300$

F_2) Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0.6$.
Stichprobenumfang $n_3 = 300$

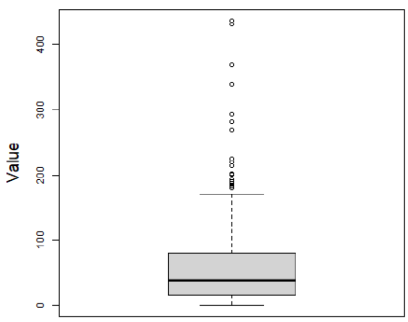
F_3) Gleichverteilung auf dem Intervall $[-2, 2]$.
Stichprobenumfang $n_1 = 300$

F_4) Exponentialverteilung mit $\lambda = 1/60$.
Stichprobenumfang $n_4 = 300$

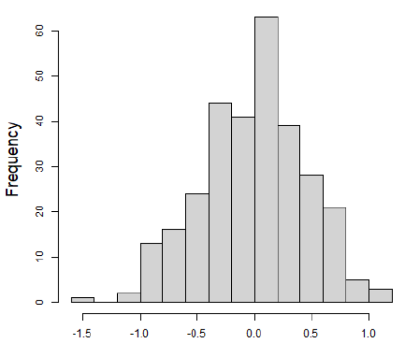
Die folgenden Diagramme zeigen die Boxplots und Histogramme der entsprechenden Stichproben (F_1, F_2, F_3 und F_4). Ordne jedem Diagramm die entsprechende Verteilung zu, z.B. F_1 : a
Hinweis: Jeder Graph entspricht genau einer der vier Verteilungen F_1, F_2, F_3 und F_4.



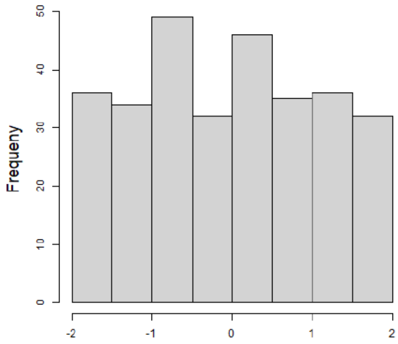
(a)



(b)



(c)



(d)

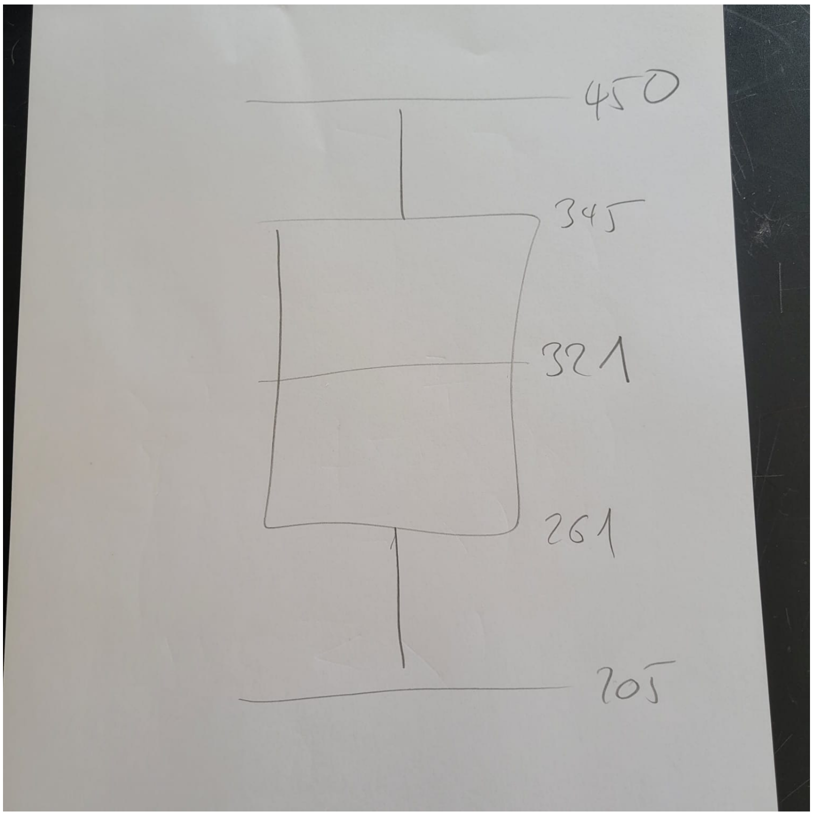
(F1:c);(F2:a);(F3:d);(F4:b)

Teil 1B (8 Punkte)

Die Anzahl der pro Tag in einem Supermarkt verkauften Salate ist wie folgt:

321, 321, 205, 320, 240, 450, 261, 345, 321, 276, 399

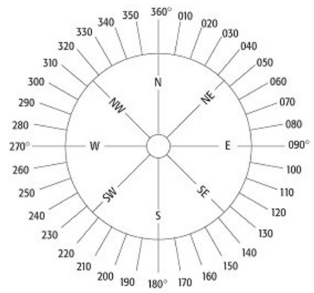
1. (3 Punkte) Berechnen Sie den Mittelwert, den Median und den Modus der Anzahl der pro Tag verkauften Salate.
2. (5 Punkte) Zeichnen Sie einen Boxplot der Anzahl der pro Tag im Supermarkt verkauften Salate.



Lösungen: Mittelwert = 314.45, Median= 321, Modus = 321
Für Boxplot: 25 Perzentil = 261, Median = 321, 75 Perzentil = 345, Interquartilsabstand (IQA) =84, 1.5*IQA = 126, untere Grenze = 205, obere Grenze = 405.

Problem 2 (15 Punkte)

Christopher verbringt seine Herbstferien als Kapitän eines Segelschiffs. Er möchte schnell die Insel San Salvador erreichen, die sich westlich von ihm befindet (W). Er weiß, dass er bei einer *guten* Windrichtung zwei Tage brauchen wird, um die Insel San Salvador zu erreichen.
Eine *gute* Windrichtung bedeutet, dass der Wind 90° oder weiter von der Zielrichtung (W) entfernt ist.
Z.B. liegen Norden (N) und Westen (W) genau 90° *auseinander, also wäre die Windrichtung N gut.*
Wenn die Windrichtung nicht *gut* ist, muss Christopher einen Tag lang warten. Die Windrichtung X kann sich zu Beginn eines jeden Tages einmal ändern und ist den ganzen Tag über konstant.
Z.B. für 3 Tage könnten die Windrichtungen $(x_1 = W, x_2 = N, x_3 = N)$ *sein.*



Lösung:

1. X ist i.i.d. diskret gleichverteilt mit $P[X = \{N, E, S, W\} = \frac{1}{4}$. d ist die Anzahl Reisetage zur Insel und k die Anzahl an Tagen mit *guter* Windrichtung, um die Insel zu erreichen. Alle Windrichtungen außer W sind *gute* Windrichtungen, also: $P[\text{guter Wind}] = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} P[d = k] &= P[\text{guter Wind}]^k \\ P[d = k = 2] &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

2. X ist i.i.d. diskret gleichverteilt mit $P[X = \{N, NE, E, SE, S, SW, W, NW\} = \frac{1}{8}$. Alle Windrichtungen außer SW, W, NW sind *gute* Windrichtungen, also $P[\text{guter Wind}] = \frac{5}{8}$.

$$P[d = k = 2] = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

3. Am ersten Tag ist X diskret gleichverteilt mit $P[X = \{N, E, S, W\} = \frac{1}{4}$. Aber X ist nicht i.i.d aufgrund der 90° Restriktion.
Am ersten Tag sind alle Richtungen außer W *gute* Windrichtungen, also $P[\text{guter Wind}] = \frac{3}{4}$.
Am zweiten Tag gilt $x_1 = \{N, S\}$, $P[\text{guter Wind}_2 | x_1 = \{N, S\}] = \frac{2}{3}$, da die Windrichtung entweder gleichbleibt, nach E wechselt (*guter* Wind) oder nach W wechselt (nicht *guter* Wind)), wobei jede der 3 Möglichkeiten die selbe Wahrscheinlichkeit hat. $P[\text{guter Wind}_2 | x_1 = E] = \frac{3}{3}$ da der Wind in diesem Fall nicht nach W wechseln kann. Möglichkeiten mit $x_1 = W$ sind nicht relevant, da in diesen Fällen keine Ankunft innerhalb von 2 Tagen möglich ist.

$$\begin{aligned} P[d = k = 2] &= P[x_1 = E] \cdot P[\text{guter Wind}_2 | x_1 = E] + P[x_1 = \{N, S\}] \cdot P[\text{guter Wind}_2 | x_1 = \{N, S\}] \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

4. Dem Schiff gehen die Nahrungsmittel nicht aus, wenn es innerhalb von 3 Tagen ankommt. Die Zielwahrscheinlichkeit ist daher $P[d <= 3] = P[d = 2] + P[d = 3]$ (da $P[d < 2] = 0$). $P[d = 2] = \frac{9}{16}$ is bekannt von Teilaufgabe 1. $P[d = 3]$ ist der Fall wenn der Wind 1 mal innerhalb der ersten zwei Tage schlecht ist, und gut am jeweils anderen und dem dritten

Tag. Daher muss die Anzahl der Permutationen dieser Fälle sowie deren Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

Lösungsweg 1 - Manuelles Aufschreiben aller möglichen Permutationen und Wahrscheinlichkeiten.
$(x_1 = W, x_2 = \{N, E, S\}, x_3 = \{N, E, S\})$ and $(x_1 = \{N, E, S\}, x_2 = W, x_3 = \{N, E, S\})$.

$$\begin{aligned}
P[d = 3] &= P[(x_1 = W, x_2 = \{N, E, S\}, x_3 = \{N, E, S\})] + P[(x_1 = \{N, E, S\}, x_2 = W, x_3 = \{N, E, S\})] \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \\
&= \frac{9}{32} \\
P[d <= 3] &= P[d = 2] + P[d = 3] \\
&= \frac{9}{16} + \frac{9}{32} \\
&= \frac{27}{32}
\end{aligned}$$

Lösungsweg 2 - Nutzen von Kombinatorik oder (nicht nötig) Anwendung der negative Binomialverteilung.
Anzahl der Erfolge $k = 2$, Anzahl der Miss-Erfolge $r = 1$.

$$\begin{aligned}
P[d = 3] &= \binom{k + r - 1}{r} P[\text{guter Wind}]^k (1 - P[\text{guter Wind}])^r \\
&= \binom{2 + 1 - 1}{1} P[\text{guter Wind}]^2 (1 - P[\text{guter Wind}])^1 \\
&= \frac{9}{32} \\
P[d <= 3] &= P[d = 2] + P[d = 3] \\
&= \frac{9}{16} + \frac{9}{32} \\
&= \frac{27}{32}
\end{aligned}$$

Bemerkung: $P[d = 3] = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$ ist falsch, da es die Möglichkeit $x_3 = W$ beinhaltet,in welcher das Schiff bereits in 2 Tagen angekommen ist, also $d = 2$.

Problem 3 (15 Punkte)

Kim beobachtet die Aktie von Unternehmen X. Sie möchte eine Schätzung über die Wahrscheinlichkeit von *hoch* und *runter* Bewegungen der Aktie in den folgenden drei Tagen anstellen. Sie bezeichnet die Tage entsprechend mit *Tag 1*, *Tag 2* und *Tag 3*. Auf der Grundlage ihrer Erfahrung im Handel schätzt sie das Folgende:

- Für *Tag 1* schätzt sie, dass die Aktie mit gleicher Wahrscheinlichkeit *hoch* oder *runter* gehen wird.
- Für *Tag 2* glaubt sie, dass, wenn die Aktie an *Tag 1* gestiegen ist, sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.55 wieder steigen wird. Wenn die Aktie am Tag 1 gesunken ist, glaubt sie, dass sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.55 wieder sinken wird.
- Für *Tag 3* glaubt sie, dass, wenn sich die Aktie an den beiden vorangegangenen Tagen zweimal in die gleiche Richtung bewegt hat *(aufwärts, aufwärts oder abwärts, abwärts)*, die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich erneut in die gleiche Richtung bewegt, 0.6 beträgt. Wenn sich die Aktie in den beiden vorangegangenen Tagen in entgegengesetzte Richtungen bewegt hat *(aufwärts, abwärts oder abwärts, aufwärts)*, ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich nach oben bewegt, 0.5.

Teil 1 (4 Punkte)

Das Baumdiagramm ist wie folgt beschriftet:

- Tag 1: $P(hoch) = P(runter) = 0.5$
- Tag 2: $P(hoch|hoch) = 0.55$, $P(runter|hoch) = 0.45$, $P(hoch|runter) = 0.45$, and $P(runter|runter) = 0.55$
- Tag 3: $P(hoch|hoch, hoch) = 0.6$, $P(runter|hoch, hoch) = 0.4$, $P(hoch|hoch, runter) = 0.5$, $P(runter|hoch, runter) = 0.5$, $P(hoch|runter, hoch) = 0.5$, $P(runter|runter, hoch) = 0.5$, $P(hoch|runter, runter) = 0.4$, and $P(runter|runter, runter) = 0.6$.

Teil 2 (4 Punkte)

1. (1 Punkt) $P(hoch \cap hoch \cap hoch) = 0.5 \cdot 0.55 \cdot 0.6 = 0.165$
2. (2 Punkte) $P(hoch \cap runter \cap hoch) + P(runter \cap hoch \cap runter) = 0.5 \cdot 0.45 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.45 \cdot 0.5 = 0.225$
3. (1 Punkt) $P(runter|hoch, hoch) = 0.4$

Teil 3 (3 Punkte)

$$
\begin{aligned}
P(hoch) &= P(hoch|hoch, hoch) \cdot P(hoch, hoch) + P(hoch|hoch, runter) \cdot P(hoch, runter) \\
&\quad + P(hoch|runter, hoch) \cdot P(runter, hoch) + P(hoch|runter, runter) \cdot P(runter, runter)
\end{aligned}
$$

$$P(hoch) = 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.55 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.45 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.45 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.55 = 0.5$$

Teil 4 (4 Punkte)

Sei $X \sim Bin(5, p)$ mit $p = P(hoch) = 0.5$. Die Wahrscheinlichkeit für "hochïn mindestens 4 von 5 Tagen ist:

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= \sum_{k=4}^{5} P(X = k) \\ &= \sum_{k=4}^{5} \binom{5}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{5-k} \\ &= 0.1875 \end{aligned}$$

Problem 4 (15 Punkte)

Hinweis: Stellen Sie sicher, dass Sie Ihre Berechnungen für die folgenden Fragen zeigen. Wenn Sie einfach die richtige Antwort ohne Herleitung schreiben, erhalten Sie nicht die volle Punktzahl.

Teil 4A (8 Punkte)
Sei a eine Konstante mit $a \geq 1$ und X eine Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} a \cdot \sin(x) & 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. (3 Punkte) Für welchen Wert der Konstanten a ist $f_X(x)$ eine Dichtefunktion?

1.

$$\begin{aligned} 1 &= a \cdot \int_0^\pi \sin(x)dx \\ &= a \cdot (-\cos(x))\Big|_0^\pi \\ &= a \cdot (-\cos(\pi) + \cos(0)) \\ &= a \cdot (1+1) \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(x)\cos(y)dx \\ &= \frac{1}{4}\cos(y) \cdot (-\cos(x))\Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{4}\cos(y) \cdot (1+1) \\ &= \frac{1}{2}\cos(y) \end{aligned}$$

3.

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{4}\sin(x)\cos(y) = f_{X,Y}$$

Unabhängig.

Teil 4B (7 Punkte)

1.

$$P(X \leq Y) = 1$$

Gegeben durch den Definitionsbereich: $x < 1 < y$.

2. Wir wollen zeigen:

(a) $f_{X,Y} \geq 0$ für alle x,y im Definitionsbereich.
(b) $\int_1^e \int_0^1 f_{X,Y} dxdy = 1$

Die erste Bedingung ist trivial da $c, x, y > 0$ für alle x,y im Definitionsbereich.

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_1^e \int_0^1 c \cdot \left(x + \frac{x}{y}\right) dxdy \\
&= c \int_1^e \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2y}\bigg|_0^1 dy \\
&= c \int_1^e \frac{1}{2} + \frac{1}{2y} dy \\
&= \frac{c}{2} \cdot (y + \ln(y)) \bigg|_1^e \\
&= \frac{c}{2} \cdot (e + 1 - 1 - 0) \\
&= c \cdot \frac{e}{2} \\
&= \frac{2}{e} \cdot \frac{e}{2} = 1
\end{aligned}
$$

■

Problem 5 (15 Punkte)

Teil 1):
Für eine Poisson-Verteilung gilt E[X] = λ. Um einen Momentenschätzer zu erhalten, setzen wir einfach den ersten Populations-Moment gleich dem ersten Stichproben-Moment.

$$E[X] = \bar{X}$$
$$\hat{\lambda}_{MM} = \bar{X}$$

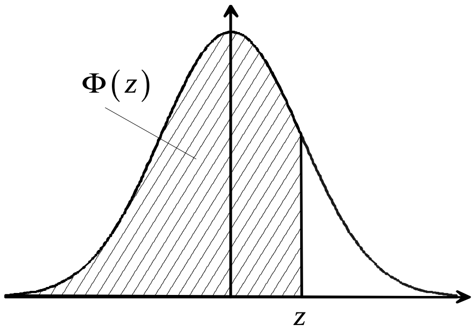
Teil 2): Wir können die Likelihood Funktion schreiben als:

$$LF(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^{N} \frac{\lambda^{x_i}\, e^{-\lambda}}{x_i!}$$
$$LLF(x_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} x_i ln(\lambda) - \lambda - ln(x_i!)$$
$$\frac{\partial LLF(x_i, \lambda)}{\partial \theta} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i}{\hat{\lambda}_{MLE}} - 1 \right) = 0$$
$$\frac{1}{\hat{\lambda}_{MLE}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} x_i}$$
$$\hat{\lambda}_{MLE} = \bar{X}$$

Teil 3):

$$\bar{X} = 0.3 = \hat{\lambda}_{MLE} = \hat{\lambda}_{MM}$$

Standardnormalverteilung
($z \geq 0$)
Verteilungsfunktion



Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen $Z \sim N(0, 1)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Binomialverteilung

$0.25 \leq p \leq 0.5$

$1 \leq n \leq 9$

n	x	$p = 0.25$		$p = 0.30$		$p = 1/3$		$p = 0.40$		$p = 0.50$	
		$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$	$f_X(x)$	$F_X(x)$
1	0	0.7500	0.7500	0.7000	0.7000	0.6667	0.6667	0.6000	0.6000	0.5000	0.5000
	1	0.2500	1.0000	0.3000	1.0000	0.3333	1.0000	0.4000	1.0000	0.5000	1.0000
2	0	0.5625	0.5625	0.4900	0.4900	0.4444	0.4444	0.3600	0.3600	0.2500	0.2500
	1	0.3750	0.9375	0.4200	0.9100	0.4444	0.8889	0.4800	0.8400	0.5000	0.7500
	2	0.0625	1.0000	0.0900	1.0000	0.1111	1.0000	0.1600	1.0000	0.2500	1.0000
3	0	0.4219	0.4219	0.3430	0.3430	0.2963	0.2963	0.2160	0.2160	0.1250	0.1250
	1	0.4219	0.8438	0.4410	0.7840	0.4444	0.7407	0.4320	0.6480	0.3750	0.5000
	2	0.1406	0.9844	0.1890	0.9730	0.2222	0.9630	0.2880	0.9360	0.3750	0.8750
	3	0.0000	0.9844	0.0270	1.0000	0.0370	1.0000	0.0640	1.0000	0.1250	1.0000
4	0	0.3164	0.3164	0.2401	0.2401	0.1975	0.1975	0.1296	0.1296	0.0625	0.0625
	1	0.4219	0.7383	0.4116	0.6517	0.3951	0.5926	0.3456	0.4752	0.2500	0.3125
	2	0.2109	0.9492	0.2646	0.9163	0.2963	0.8889	0.3456	0.8208	0.3750	0.6875
	3	0.0469	0.9961	0.0756	0.9919	0.0988	0.9877	0.1536	0.9744	0.2500	0.9375
	4	0.0039	1.0000	0.0081	1.0000	0.0123	1.0000	0.0256	1.0000	0.0625	1.0000
5	0	0.2373	0.2373	0.1681	0.1681	0.1317	0.1317	0.0778	0.0778	0.0313	0.0313
	1	0.3955	0.6328	0.3602	0.5282	0.3292	0.4609	0.2592	0.3370	0.1563	0.1875
	2	0.2637	0.8965	0.3087	0.8369	0.3292	0.7901	0.3456	0.6826	0.3125	0.5000
	3	0.0879	0.9844	0.1323	0.9692	0.1646	0.9547	0.2304	0.9130	0.3125	0.8125
	4	0.0146	0.9990	0.0284	0.9976	0.0412	0.9959	0.0768	0.9898	0.1563	0.9688
	5	0.0010	1.0000	0.0024	1.0000	0.0041	1.0000	0.0102	1.0000	0.0313	1.0000
6	0	0.1780	0.1780	0.1176	0.1176	0.0878	0.0878	0.0467	0.0467	0.0156	0.0156
	1	0.3560	0.5339	0.3025	0.4202	0.2634	0.3512	0.1866	0.2333	0.0938	0.1094
	2	0.2966	0.8306	0.3241	0.7443	0.3292	0.6804	0.3110	0.5443	0.2344	0.3438
	3	0.1318	0.9624	0.1852	0.9295	0.2195	0.8999	0.2765	0.8208	0.3125	0.6563
	4	0.0330	0.9954	0.0595	0.9891	0.0823	0.9822	0.1382	0.9590	0.2344	0.8906
	5	0.0044	0.9998	0.0102	0.9993	0.0165	0.9986	0.0369	0.9959	0.0938	0.9844
	6	0.0002	1.0000	0.0007	1.0000	0.0014	1.0000	0.0041	1.0000	0.0156	1.0000
7	0	0.1335	0.1335	0.0824	0.0824	0.0585	0.0585	0.0280	0.0280	0.0078	0.0078
	1	0.3115	0.4449	0.2471	0.3294	0.2048	0.2634	0.1306	0.1586	0.0547	0.0625
	2	0.3115	0.7564	0.3177	0.6471	0.3073	0.5706	0.2613	0.4199	0.1641	0.2266
	3	0.1730	0.9294	0.2269	0.8740	0.2561	0.8267	0.2903	0.7102	0.2734	0.5000
	4	0.0577	0.9871	0.0972	0.9712	0.1280	0.9547	0.1935	0.9037	0.2734	0.7734
	5	0.0115	0.9987	0.0250	0.9962	0.0384	0.9931	0.0774	0.9812	0.1641	0.9375
	6	0.0013	0.9999	0.0036	0.9998	0.0064	0.9995	0.0172	0.9984	0.0547	0.9922
	7	0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0005	1.0000	0.0016	1.0000	0.0078	1.0000
8	0	0.1001	0.1001	0.0576	0.0576	0.0390	0.0390	0.0168	0.0168	0.0039	0.0039
	1	0.2670	0.3671	0.1977	0.2553	0.1561	0.1951	0.0896	0.1064	0.0313	0.0352
	2	0.3115	0.6785	0.2965	0.5518	0.2731	0.4682	0.2090	0.3154	0.1094	0.1445
	3	0.2076	0.8862	0.2541	0.8059	0.2731	0.7414	0.2787	0.5941	0.2188	0.3633
	4	0.0865	0.9727	0.1361	0.9420	0.1707	0.9121	0.2322	0.8263	0.2734	0.6367
	5	0.0231	0.9958	0.0467	0.9887	0.0683	0.9803	0.1239	0.9502	0.2188	0.8555
	6	0.0038	0.9996	0.0100	0.9987	0.0171	0.9974	0.0413	0.9915	0.1094	0.9648
	7	0.0004	1.0000	0.0012	0.9999	0.0024	0.9998	0.0079	0.9993	0.0313	0.9961
	8	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0007	1.0000	0.0039	1.0000
9	0	0.0751	0.0751	0.0404	0.0404	0.0260	0.0260	0.0101	0.0101	0.0020	0.0020
	1	0.2253	0.3003	0.1556	0.1960	0.1171	0.1431	0.0605	0.0705	0.0176	0.0195
	2	0.3003	0.6007	0.2668	0.4628	0.2341	0.3772	0.1612	0.2318	0.0703	0.0898
	3	0.2336	0.8343	0.2668	0.7297	0.2731	0.6503	0.2508	0.4826	0.1641	0.2539
	4	0.1168	0.9511	0.1715	0.9012	0.2048	0.8552	0.2508	0.7334	0.2461	0.5000
	5	0.0389	0.9900	0.0735	0.9747	0.1024	0.9576	0.1672	0.9006	0.2461	0.7461
	6	0.0087	0.9987	0.0210	0.9957	0.0341	0.9917	0.0743	0.9750	0.1641	0.9102
	7	0.0012	0.9999	0.0039	0.9996	0.0073	0.9990	0.0212	0.9962	0.0703	0.9805
	8	0.0001	1.0000	0.0004	1.0000	0.0009	0.9999	0.0035	0.9997	0.0176	0.9980
	9	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0020	1.0000

Binomialverteilung

$0.25 \leq p \leq 0.5$

$15 \leq n \leq 30$

n	x	$p = 0.25$ $f_X(x)$	$p = 0.25$ $F_X(x)$	$p = 0.30$ $f_X(x)$	$p = 0.30$ $F_X(x)$	$p = 1/3$ $f_X(x)$	$p = 1/3$ $F_X(x)$	$p = 0.40$ $f_X(x)$	$p = 0.40$ $F_X(x)$	$p = 0.50$ $f_X(x)$	$p = 0.50$ $F_X(x)$
15	0	0.0134	0.0134	0.0047	0.0047	0.0023	0.0023	0.0005	0.0005	0.0000	0.0000
	1	0.0668	0.0802	0.0305	0.0353	0.0171	0.0194	0.0047	0.0052	0.0005	0.0005
	2	0.1559	0.2361	0.0916	0.1268	0.0599	0.0794	0.0219	0.0271	0.0032	0.0037
	3	0.2252	0.4613	0.1700	0.2969	0.1299	0.2092	0.0634	0.0905	0.0139	0.0176
	4	0.2252	0.6865	0.2186	0.5155	0.1948	0.4041	0.1268	0.2173	0.0417	0.0592
	5	0.1651	0.8516	0.2061	0.7216	0.2143	0.6184	0.1859	0.4032	0.0916	0.1509
	6	0.0917	0.9434	0.1472	0.8689	0.1786	0.7970	0.2066	0.6098	0.1527	0.3036
	7	0.0393	0.9827	0.0811	0.9500	0.1148	0.9118	0.1771	0.7869	0.1964	0.5000
	8	0.0131	0.9958	0.0348	0.9848	0.0574	0.9692	0.1181	0.9050	0.1964	0.6964
	9	0.0034	0.9992	0.0116	0.9963	0.0223	0.9915	0.0612	0.9662	0.1527	0.8491
	10	0.0007	0.9999	0.0030	0.9993	0.0067	0.9982	0.0245	0.9907	0.0916	0.9408
	11	0.0001	1.0000	0.0006	0.9999	0.0015	0.9997	0.0074	0.9981	0.0417	0.9824
	12	0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0016	0.9997	0.0139	0.9963
	13			0.0000	1.0000	0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0032	0.9995
	14							0.0000	1.0000	0.0005	1.0000
	15									0.0000	1.0000
20	0	0.0032	0.0032	0.0008	0.0008	0.0003	0.0003	0.0000	0.0000		
	1	0.0211	0.0243	0.0068	0.0076	0.0030	0.0033	0.0005	0.0005	0.0000	0.0000
	2	0.0669	0.0913	0.0278	0.0355	0.0143	0.0176	0.0031	0.0036	0.0002	0.0002
	3	0.1339	0.2252	0.0716	0.1071	0.0429	0.0604	0.0123	0.0160	0.0011	0.0013
	4	0.1897	0.4148	0.1304	0.2375	0.0911	0.1515	0.0350	0.0510	0.0046	0.0059
	5	0.2023	0.6172	0.1789	0.4164	0.1457	0.2972	0.0746	0.1256	0.0148	0.0207
	6	0.1686	0.7858	0.1916	0.6080	0.1821	0.4793	0.1244	0.2500	0.0370	0.0577
	7	0.1124	0.8982	0.1643	0.7723	0.1821	0.6615	0.1659	0.4159	0.0739	0.1316
	8	0.0609	0.9591	0.1144	0.8867	0.1480	0.8095	0.1797	0.5956	0.1201	0.2517
	9	0.0271	0.9861	0.0654	0.9520	0.0987	0.9081	0.1597	0.7553	0.1602	0.4119
	10	0.0099	0.9961	0.0308	0.9829	0.0543	0.9624	0.1171	0.8725	0.1762	0.5881
	11	0.0030	0.9991	0.0120	0.9949	0.0247	0.9870	0.0710	0.9435	0.1602	0.7483
	12	0.0008	0.9998	0.0039	0.9987	0.0092	0.9963	0.0355	0.9790	0.1201	0.8684
	13	0.0002	1.0000	0.0010	0.9997	0.0028	0.9991	0.0146	0.9935	0.0739	0.9423
	14	0.0000	1.0000	0.0002	1.0000	0.0007	0.9998	0.0049	0.9984	0.0370	0.9793
	15			0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0013	0.9997	0.0148	0.9941
	16					0.0000	1.0000	0.0003	1.0000	0.0046	0.9987
	17							0.0000	1.0000	0.0011	0.9998
	18									0.0002	1.0000
	19									0.0000	1.0000
30	0	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000				
	1	0.0018	0.0020	0.0003	0.0003	0.0001	0.0001				
	2	0.0086	0.0106	0.0018	0.0021	0.0006	0.0007	0.0000	0.0000		
	3	0.0269	0.0374	0.0072	0.0093	0.0026	0.0033	0.0003	0.0003		
	4	0.0604	0.0979	0.0208	0.0302	0.0089	0.0122	0.0012	0.0015	0.0000	0.0000
	5	0.1047	0.2026	0.0464	0.0766	0.0232	0.0355	0.0041	0.0057	0.0001	0.0002
	6	0.1455	0.3481	0.0829	0.1595	0.0484	0.0838	0.0115	0.0172	0.0006	0.0007
	7	0.1662	0.5143	0.1219	0.2814	0.0829	0.1668	0.0263	0.0435	0.0019	0.0026
	8	0.1593	0.6736	0.1501	0.4315	0.1192	0.2860	0.0505	0.0940	0.0055	0.0081
	9	0.1298	0.8034	0.1573	0.5888	0.1457	0.4317	0.0823	0.1763	0.0133	0.0214
	10	0.0909	0.8943	0.1416	0.7304	0.1530	0.5848	0.1152	0.2915	0.0280	0.0494
	11	0.0551	0.9493	0.1103	0.8407	0.1391	0.7239	0.1396	0.4311	0.0509	0.1002
	12	0.0291	0.9784	0.0749	0.9155	0.1101	0.8340	0.1474	0.5785	0.0806	0.1808
	13	0.0134	0.9918	0.0444	0.9599	0.0762	0.9102	0.1360	0.7145	0.1115	0.2923
	14	0.0054	0.9973	0.0231	0.9831	0.0463	0.9565	0.1101	0.8246	0.1354	0.4278
	15	0.0019	0.9992	0.0106	0.9936	0.0247	0.9812	0.0783	0.9029	0.1445	0.5722
	16	0.0006	0.9998	0.0042	0.9979	0.0116	0.9928	0.0489	0.9519	0.1354	0.7077
	17	0.0002	0.9999	0.0015	0.9994	0.0048	0.9975	0.0269	0.9788	0.1115	0.8192
	18	0.0000	1.0000	0.0005	0.9998	0.0017	0.9993	0.0129	0.9917	0.0806	0.8998
	19			0.0001	1.0000	0.0005	0.9998	0.0054	0.9971	0.0509	0.9506
	20			0.0000	1.0000	0.0001	1.0000	0.0020	0.9991	0.0280	0.9786
	21					0.0000	1.0000	0.0006	0.9998	0.0133	0.9919
	22							0.0002	0.9999	0.0055	0.9974
	23							0.0000	1.0000	0.0019	0.9993
	24									0.0006	0.9998
	25									0.0001	1.0000
	26									0.0000	1.0000