Musterlösungen

Übung 4a: Zentraler Grenzwertsatz

Teil B: Multiple Choice

1. Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit endlichen Werten sowohl für den Erwartungswert als auch für die Varianz und $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Dann besagt der Zentrale Grenzwertsatz, dass

   O S_n approximativ standardnormalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n > 30$.

   X die standardisierte Zufallsvariable S_n approximativ standardnormalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n > 30$.

   X S_n approximativ normalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n > 30$.

   X die standardisierte Zufallsvariable S_n approximativ normalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n > 30$.

   O die standardisierte Zufallsvariable S_n approximativ standardnormalverteilt ist, wenn $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identisch verteilt sind und $n \leq 30$.

2. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit der Zentrale Grenzwertsatz angewendet werden kann?

   X $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

   O $S_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$.

   X $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind identisch verteilt.

   O $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind gleichverteilt.

   X $n > 30$.

3. X und Y seien unabhängig. Die Summe $Z = X + Y$ ist

X binomialverteilt, wenn X und Y binomialverteilt sind mit demselben p.

X normalverteilt, wenn X und Y normalverteilt sind mit denselben Parametern.

O standardnormalverteilt, wenn X und Y standardnormalverteilt sind.

X normalverteilt, wenn X und Y standardnormalverteilt sind.

Teil C: Aufgaben zur beschreibenden Statistik

1. 1) $P[\sum_{i=1}^{400} X_i \leq 44] \cong P[Z \leq \frac{44+0.5-40}{\sqrt{40\cdot 0.9}}] = \Phi(\frac{3}{4}) = 0.7734$

   2) $P[\sum X_i \geq 51] \cong 1 - \Phi(1.75) = 0.040$

   3) $P[45 \leq \sum_{i=1}^{400} X_i \leq 50] = 1 - 0.7734 - 0.040 = 0.1866$

2. (a) $P[\overline{X}_{400} > 32000] \cong P[Z > \frac{32000-32600}{\frac{6200}{\sqrt{400}}}] = P[Z > -1.9355] = 0.9732$

   (b) $P[32100 \leq \overline{X}_{400} < 33100] \cong \Phi(\frac{10000}{6200}) - \Phi(-\frac{10000}{6200}) = \Phi(1.6129) - \Phi(-1.6129) = 0.893$

   (c) $P[32350 \leq \overline{X}_{400} < 32950] \cong \Phi(1.129) - \Phi(-0.8065) = 0.8708 - (1 - 0.791) = 0.6618$

   (d) Im Intervall (3) da dieses das mittlere Jahreseinkommen enthält.

3. $P\left[\sum_{i=1}^{2000} x_i > 200\right] = 0.05 \Leftrightarrow P\left[\frac{\sum_{i=1}^{2000} x_i - 2000\cdot p}{\sqrt{2000\cdot p(1-p)}} > \frac{200-2000p}{\sqrt{2000p(1-p)}}\right] \cong P[Z > \frac{200-2000p}{\sqrt{2000p(1-p)}}] = 0.05 \Leftrightarrow \frac{200-2000p}{\sqrt{2000p(1-p)}} = 1.6449 \to p = 0.090$

   Bemerkung: Hier müsste man eine Stetigkeitskorrektur machen. In diesem Fall ist der Unterschied (mit und ohne diese Korrektur) sehr klein.

   Mit Stetigkeitskorrektur: $\frac{200-2000p-0.5}{\sqrt{2000p(1-p)}} = 1.6449 \to p = 0.0893$

4. (a) $P[28 < S_{180} \leq 32] = \Phi(\frac{32+0.5-180\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}) - \Phi(\frac{28+0.5-180\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}) = \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-0.3) = 0.6915 - 0.3821 = 0.3094$

   (b) $P[31 \leq S_{180} < 36] = P[31 \leq S_{180} \leq 35] = \cdots = \Phi(1.1) - \Phi(0.1) = 0.8643 - 0.5398 = 0.3245$

   (c) $P[S_{180} = 30] = P[29.5 \leq S_{180} \leq 30.5] = \Phi(0.1) - \Phi(-0.1) = 0.5398 - 0.4602 = 0.0796$

5. (a) $P[\overline{X}_{16} > \mu + 0.01] = P[\frac{\overline{X}_{16}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{0.01}{\frac{0.025}{\sqrt{16}}}] \cong 1 - \Phi(1.6) = 0.0548$

(b) $1-P[-0.012 \leq \overline{X}_{16}-\mu \leq +0.012] = 1-(1-2\cdot\Phi(-1.92)) = 0.0548$

(c) kleiner ($\rightarrow \sqrt{n}$ wird grösser)

6. (a) Bin $(1000, 0.001)$

   (b) $P[2 < S_{1000} < 6] \cong \Phi(\frac{6-0.5-1}{\sqrt{0.999}}) - \Phi(\frac{2.5-1}{\sqrt{0.999}}) \approx 1 - \Phi(1.50) = 0.0668$
   Der Kontinuitäts-Korrektur Faktor wird für $P[S < k]$ abgezogen (-0.5), während er für $P[S \leq k]$ addiert werden würde ($+0.5$).

   (c) $1 - P[S_{1000} = 0] \cong 1 - e^{-1} = 0.6321$ (Poisson Approx.)

   $$1 - P[S_{1000} = 0] = 1 - \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0.001^0 \cdot 0.999^{1000} = 0.6323$$

7. $P[\sum_{i=1}^{50} X_i > 4200] \cong P[Z > \frac{4200-4000}{\sqrt{50\cdot 10}}] = 1 - \Phi(2.8284) = 0.0023$