HSG, VWL | HS 2025
Prof. Tobias Sutter | Statistik 3,220

Musterlösungen

Übung 2: Zufallsvariablen und spezielle Verteilungen

Teil B: Multiple Choice

Kreuzen Sie bitte in den folgenden Mehrfachwahl-Aufgaben die richtigen Aussagen an. Dabei kann es sein, dass von den zu einer Aufgabe vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten keine, eine, mehrere oder alle richtig sind.

1. Diskret ist eine Zufallsvariable, wenn

   X die Zufallsvariable nur abzählbar viele Werte annehmen kann.

   O die Zufallsvariable überabzählbar viele Werte annehmen kann.

   X die Zufallsvariable nur endlich viele Werte annehmen kann.

   O die Zufallsvariable unendlich viele Werte annehmen kann.

   X ihre Verteilungsfunktion nur als Treppenfunktion gezeichnet werden kann.

2. Stetig ist eine Zufallsvariable, wenn

   O die Zufallsvariable nur abzählbar viele Werte annehmen kann.

   X die Zufallsvariable überabzählbar viele Werte annehmen kann.

   O die Zufallsvariable nur endlich viele Werte annehmen kann.

   X die Zufallsvariable unendlich viele Werte annehmen kann.

   O ihre Verteilungsfunktion nur als Treppenfunktion gezeichnet werden kann.

3. Der Erwartungswert einer Verteilung

   O ist der Wert, unter dem 50% der Wahrscheinlichkeitsmasse liegt.

   X ist der erwartete Wert einer Zufallsvariable vor Durchführung des Zufallsexperimentes.

O ist bei stetigen Verteilungen der Wert, an dem die Dichtefunktion maximal ist.

X ist der Schwerpunkt einer Verteilung.

O bei diskreten Verteilungen der Wert mit der grössten Wahrscheinlichkeit.

4. Die Varianz einer diskreten Zufallsvariable X ist

   X $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - E[X]^2$.

   X ein Mass für die Streuung einer Verteilung.

   O ein Mass für den Schwerpunkt einer Verteilung.

   X die quadrierte Standardabweichung.

   O $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - E[X^2]$.

5. X sei diskret verteilt. Die Wahrscheinlichkeit $P[1 \leq X < 2]$ist dann:

   O $F(2) - F(1)$

   O $F(2) - F(1) - P[X = 2]$

   O $F(2) - F(1) + P[X = 1]$

   X $F(2) - F(1) - P[X = 2] + P[X = 1]$

   O $F(2) - F(1) + P[X = 2]$

6. Eine Funktion $f(x) \geq 0$ ist eine Dichtefunktion, wenn

   O $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$.

   X $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

   X die Fläche unterhalb der Dichtefunktion gleich 1 ist.

   O $F(-\infty) = 1$ und $F(+\infty) = +\infty$.

   X $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$.

7. Sei $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - b$ für $1 \leq x \leq 2$ und $= 0$ sonst. Bestimme b so, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion ist.

O $b = 1/2$

O $b = 1/3$

X $b = 1/6$

O $b = 1$

O $f(x)$ ist keine Dichtefunktion

8. Eine Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{18}x$ im Intervall $[0, 6]$. Die Varianz $V(X)$ ist dann

   O $V(X) = 3$

   O $V(X) = 18$

   O $V(X) = 9$

   O $V(X) = 14/3$

   X $V(X) = 2$

9. Eine Binomialverteilung liegt vor, wenn nach der Wahrscheinlichkeit gefragt ist,

   O beim x-ten Versuch "Erfolg" zu haben.

   X bei n Versuchen x-mal "Erfolg" zu haben (mit Zurücklegen).

   O innerhalb eines bestimmten Intervalls x-mal "Erfolg" zu haben.

   O bei n Versuchen x-mal "Erfolg" zu haben (ohne Zurücklegen).

   O bei x Versuchen n-mal "Erfolg" zu haben.

10. Eine Binomialverteilung kann approximiert werden durch

    O eine Exponentialverteilung wenn $n > 30$ und $p \leq 0.10$.

    X eine Normalverteilung wenn $np(1 - p) > 9$.

    O eine Normalverteilung wenn $n > 30$ und $p \leq 0.10$.

    O eine Poissonverteilung wenn $np(1 - p) > 9$.

    X eine Poissonverteilung wenn $n > 30$ und $p \leq 0.10$.

11. Die Wahrscheinlichkeit, dass Miguel I. die "Giro d'Italia" gewinnt, liege konstant bei 30%. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei fünf Giroteilnahmen mindestens zweimal die "Giro d'Italia" gewinnt?

O 0.63985

X 0.47178

O 0.6

O 0.36015

O 0.52822

12. Karl kauft eine neue Autobatterie, deren erwartete Lebensdauer mit 10000 km angegeben wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Autobatterie länger als 20000 km läuft?

    O 0.864665

    O 0.606531

    O 0.5

    O 0.393469

    X 0.135335

13. Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern $(\mu = 30, \sigma^2 = 9)$. Wie gross ist $P[X < 21]$?

    O $P[X < 21] = 0.99865$

    O $P[X < 21] = 0.84134$

    O $P[X < 21] = 0.15866$

    X $P[X < 21] = 0.00135$

14. Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern $(\mu = 30, \sigma^2 = 9)$. Für welchen Wert t gilt $P[X \geq t] = 0.06681$.

    X $t = 34.5$

    O $t = 33$

    O $t = 31.5$

    O $t = 30$

15. Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit den Parametern $(\mu = 30, \sigma^2 = 9)$. Geben Sie die Grenzen des zentralen Schwankungsintervalls an, in dem 95 Prozent aller Werte liegen.

O 29.05 und 30.95

O 27.00 und 33.00

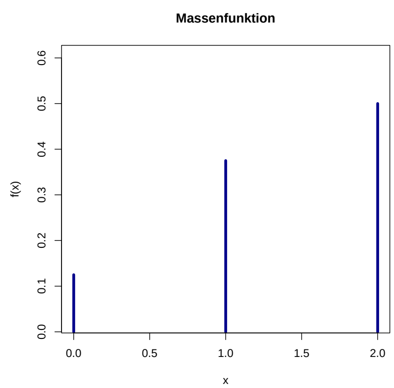
O 25.05 und 34.95

X 24.12 und 35.88

Teil C1: Aufgaben zu Zufallsvariablen

1. (a) $P[X=0]+P[X=1]+P[X=2]$
   $1(a-\frac{1}{2})+(a-\frac{1}{4})+(a-\frac{1}{8}) \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow 3a=\frac{15}{8} \Leftrightarrow a=\frac{5}{8}$

   (b) Grafik

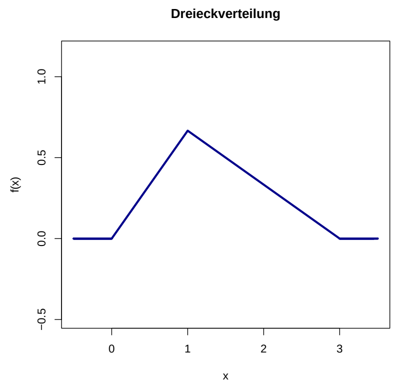
   (c) $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

   (d) 1

   (e) $\left.\begin{array}{l} E[X]=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{4}{8}=\frac{11}{8} \\ E[X^2]=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{4}{8}=\frac{19}{8} \end{array}\right\} V(X)=\frac{19}{8}-\frac{121}{64}=\frac{31}{64}$

2. (a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \frac{3\cdot 2a}{2} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$. Zudem gilt $f(x)\geq 0$ für alle x falls $a\geq 0$. Daher ist die Lösung $a=1/3$.

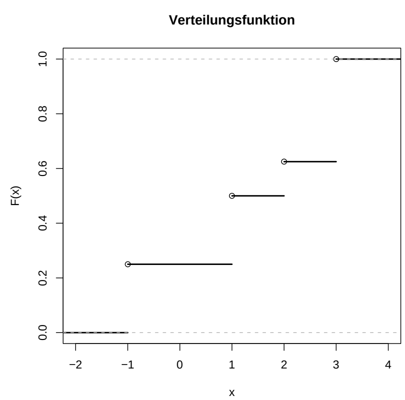
   (b) Grafik



(c) $P[X = 1] = 0$;
$P[0.5 < x < 2] = 1 - \frac{0.5+2a\cdot 0.5}{2} - \frac{1\cdot a}{2} = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$
$P[X < 2] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

(d) 1.

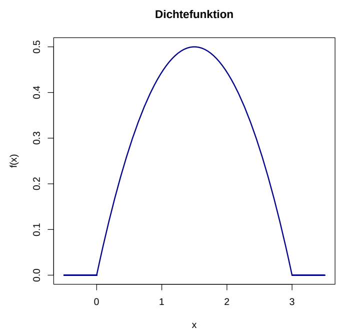
3. (a) Grafik



(b) $f(-1) = \frac{1}{4}; f(1) = \frac{1}{4}; f(2) = \frac{1}{6}; f(3) = \frac{1}{3}$

(c) $P[X \leq 1] = f(-1) + f(1) = \frac{1}{2}$
$P[X = 1] = f(1) = \frac{1}{4}$
$P[X = 1.5 \leq X < 2.7] = f(2) = \frac{1}{6}$

4. (a) Grafik



(b) $P[X \leq 2] = \frac{2}{9} \int_0^2 (3x - x^2)dx = \frac{2}{9}[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2] = \frac{2}{9} \cdot [6 - \frac{8}{3}] = \frac{20}{27}$

(c) Aus Symmetriegründen: 1.5

$\rightarrow$ aber auch: $E[X] = \int_0^3 x \cdot \frac{2}{9}x(3-x)dx = 1.5$

5. (a) $E[X] = \frac{a+b}{2} = 1.5$

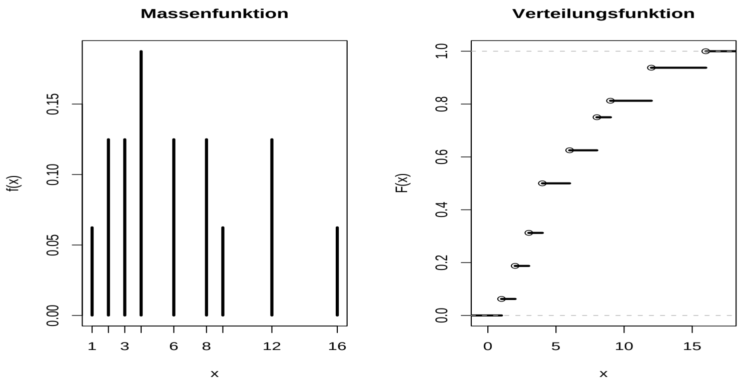
(b) $E[g(X)] = E[4x+2] = 4 \cdot E(X) + 2 = 8$
$g(E[X]) = 4 \cdot E[X] + 2 = 8$
$\rightarrow$ nein, Linearität des Erwartungswertes

6. $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$

Massenfunktion $f(\cdot) : \frac{1}{16} \frac{2}{16} \frac{2}{16} \frac{3}{16} \frac{2}{16} \frac{2}{16} \frac{1}{16} \frac{2}{16} \frac{1}{16}; \sum = 1$

Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1/16 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 3/16 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 5/16 & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 8/16 & \text{für } 4 \leq x < 6 \\ 10/16 & \text{für } 6 \leq x < 8 \\ 12/16 & \text{für } 8 \leq x < 9 \\ 13/16 & \text{für } 9 \leq x < 12 \\ 15/16 & \text{für } 12 \leq x < 16 \\ 1 & \text{für } x \geq 16 \end{cases}$$



7. $E[X] = 20 \cdot \frac{1}{10} + 60 \cdot \frac{1}{3} + 80 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot \frac{1}{15} = 70$ Minuten

8. (a) $S = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots\}$
   $f(\cdot) : \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{2^4} \cdots$

   (b) $E[G] = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^3 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = +\infty$, existiert nicht

   (c) $\diamond$

Teil C2: Aufgaben zu speziellen diskreten Verteilungen

1. (a) Binomial $(4, \frac{1}{2})$;

   (b) $E[X] = np = 2$, $V(X) = np(1-p) = 1$ ...

2. (a) $E[X] = \frac{2}{10} \cdot 16 = 3.2$; $\mathrm{Var}(X) = \frac{2}{10} \cdot 16 \cdot \frac{8}{10} = 2.56$

   (b) $P[\sum X_i > 10] = \sum_{k=11}^{16} P[\sum X_i = u] \cong 0$

3. (a) Poisson: $P[X \geq 6] = 1 - \sum_{k=0}^{5} e^{-8} \cdot \frac{8^k}{k!} = 1 - 0.1912 = 0.8088$

   (b) $P[X = 13] = e^{-8} \cdot \frac{8^{13}}{13!} = 0.0296$

4. (a) $X = \sum$ "Geburtstag am Sonntag" $\sim$Bin$(5, \frac{1}{7})$
   $\Rightarrow P[X = 2] = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 2 \end{array}\right) \cdot (\frac{1}{7})^2 \cdot (\frac{6}{7})^3 = 0.1285$

   (b) $1 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = 0.1499$

(c) $X_i =$"i-te Person Geburtstag am 24.12.", $\sum_{i=1}^{500} X_i \sim\text{Bin}(500, \frac{1}{365})$
$P[\sum X_i \geq 1] = 1 - P[\sum X_i = 0] = 0.7463$ ($\approx$ mit Poisson 0.7459)

5. Mit Poisson-Verteilung: $\lambda = \frac{10}{10000} \cdot 100$, $1 - P[\underbrace{X = 0}_{\text{kein Defekt}}] = 1 - e^{-\frac{10}{10000} \cdot 100} \simeq 0.0952$
Mit Exponential-Verteilung: $\lambda = \frac{10}{10000}$, $\int_0^{100} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1 - e^{-100\lambda} = 1 - e^{-(\frac{1}{10})} \simeq 0.0952$

6. $P[\sum_{i=1}^{5} X_i = 2] = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 = 0.2048 \leftarrow X_i = \begin{cases} 1, \text{ i-te Kugel weiss } p = 0.2 \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$

7. (a) $P[X > 0] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95 \cdot \cdots \cdot 89}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \cdots \cdot 91} = 0.1909$,
$X = \#$ defekte Klammern in der Stichprobe

   (b) i. $P[X > 0] = 1 - P[X = 0] = 1 - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0.02^0 \cdot 0.98^{10} = 0.1829$

   ii. Approx: $P[X > 0] = 1 - P[X = 0] = 1 - e^{-0.2} = 0.1813$
   mit $\Delta a = 0.1829 - 0.1813 = 0.0016$ und $\Delta r = \frac{\Delta a}{0.1829} = 0.875\%$

8. (a) X = # Ausfälle

   i. $\frac{200 \cdot 500 = 100000}{20000} = 5$; $P[X < 5] = \sum_{i=0}^{4} \begin{pmatrix} 500 \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{500-i}$

   ii. $P[X > 5] = 1 - \sum_{i=0}^{5} \begin{pmatrix} 500 \\ i \end{pmatrix} p^i (1-p)^{500-i}$

   (b) Approx. Poisson:

   i. $\rightarrow P[X < 5] \cong \sum_{i=0}^{4} e^{-2} (\frac{2^i}{i!}) = 0.9473$

   ii. $\rightarrow P[X > 5] \cong 1 - \sum_{i=0}^{5} e^{-2} (\frac{2^i}{i!}) = 0.01656$

   (c) $P[X \leq k] \geq 0.90 \overset{\sim}{\Leftrightarrow} \sum_{i=0}^{k} e^{-2} (\frac{2^i}{i!}) \geq 0.90 \Rightarrow k \geq 4 \Rightarrow 4$ Geräte. (mit $3 \rightarrow 0.8571$)

9. (a) $P[X = 5] \cong e^{-3} \cdot \frac{3^5}{5!} = 0.1008$;
   (b) $\underbrace{3}_{=np}$ Fehler;

(c) $P[X=0] = e^{-0.3} = 0.7408$

10. (a) $\binom{3}{0} p^0(1-p)^3 = \binom{3}{1} p \cdot (1-p)^2 \Leftrightarrow (1-p)^{\cancel{3}} = 3p\cancel{(1-p^2)} \Leftrightarrow$ $4p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$ oder $p = 1!$

    (b) $\binom{3}{0} p^0(1-p)^3 = \binom{3}{3} p^3 \cdot (1-p)^0 \Leftrightarrow (1-p)^3 = p^3 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

    (c) Offensichtlich kann dies nicht für beide gleichzeitig gelten, da keine der Lösungen aus (a) mit einer Lösung von (b) übereinstimmt.

11. $\lambda = 3 \Rightarrow E[X] = V(X) = \lambda = 3$
    $P[X=3] = e^{-3} \cdot \frac{3^3}{3!} = 0.2240$

Teil C3: Aufgaben zur Normalverteilung

Hinweis zur Notation: Φ in nachfolgender Musterlösung entspricht $F_{st.}$ im Lehrbuch Schira.

1. (a) $P[X \geq 1 \text{ kg}] = 1 - P[\frac{X-\mu}{\sigma} < -\frac{0.01}{0.02}] = 1 - \Phi(-\frac{1}{2}) = 0.6915$

   (b) $P[X \geq q] = 0.06 \Leftrightarrow \frac{q-\mu}{\sigma} = 1.555 \Leftrightarrow q = \mu + 1.555 \cdot \sigma = 1.0411$ kg

   (c) $P[X \geq 1.02 \text{ kg}] = \cdots = 1 - P[Z < \frac{1}{2}] = 0.3085$

   (d) 70% der Pakete wiegen mehr als 1 kg.

2. (a) Tabelle: 0.6826

   (b) $-1 \cdot 4 + 18 = 14$; $+1 \cdot 4 + 18 = 22$

   (c) $P[10 < X \leq 26] = P[\mu - 2 \cdot \sigma < X \leq \mu + 2 \cdot \sigma] = 0.9544$

3. (a) $(-1.282, 1.282); (-1.645, 1.645); (-1.96, 1.96); (-\infty, +\infty)$

   (b) $(\underbrace{-1.282 \cdot \frac{1}{2} - 5}_{-5.641}, \underbrace{1.282 \cdot \frac{1}{2} - 5}_{-4.395}), \ldots$

4. (a) 0

   (b) $P[120 \leq X \leq 130] = P[-1 \leq Z \leq +1] = 0.6826$

   (c) $P[X \leq 110] = P[Z \leq -3] = 0.0013$

   (d) $P[X \leq q] = 0.05 \Leftrightarrow \frac{q-\mu}{\sigma} = -1.645 \Leftrightarrow q = -1.645 \cdot 5 + 125 =$ 116.775 g

5. (a) 95.44%
   (b) 95.44%
   (c) $\mu = np = 1.6$
   $2\sigma = 2 \cdot \sqrt{np(1-p)} \cong 2.263 \to P[0 \leq X \leq 3] = 94.37\%$ (Tabelle)
   (d) $\mu = 8$
   $2\sigma = 4$
   $\to P[4 \leq X \leq 12] = 95.10\%$ (Tabelle)

6. $\to$ Tabelle!

7. $P[X > 176.4] = 0.14 \Leftrightarrow P[Z > \frac{176.4-171}{\sigma}] = 0.14 \Leftrightarrow \sigma = \frac{5.4}{1.08} = 5$