

Musterlösungen

Übung 5: Punkt- und Intervallschätzungen und Hypothesentests

Teil A: Multiple Choice

1. b)
2. a)
3. b)
4. a)
5. b)
6. a) und b)
7. a)
8. b)
9. b)
10. d)
11. c)
12. b)
13. b)
14. b)
15. c)
16. b)
17. a)
18. b)

Teil B: Aufgaben: Punkt- und Intervallschätzung

1. (a) $\mathbb{E}[\mu_1] = \mathbb{E}\left[\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_1] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_2] = \frac{2\mu}{2} = \mu$
 $\Rightarrow \mu_1$ ist erwartungstreu.

$$\mathbb{E}[\mu_2] = \mathbb{E}\left[\frac{X_1}{3} + \frac{2X_2}{3}\right] = \frac{1}{3}\mathbb{E}[X_1] + \frac{2}{3}\mathbb{E}[X_2] = \frac{2\mu}{2} = \mu$$

$\Rightarrow \mu_2$ ist erwartungstreu.

$$(b) \ Var[\mu_1] = Var\left[\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right] = \frac{1}{4}Var[X_1] + \frac{1}{4}Var[X_2] = \frac{Var[X]}{2}$$

$$Var[\mu_2] = Var\left[\frac{X_1}{3} + \frac{2X_2}{3}\right] = \frac{1}{9}Var[X_1] + \frac{4}{9}Var[X_2] = \frac{5Var[X]}{9}$$

$Var[\mu_1] < Var[\mu_2] \Rightarrow \mu_1$ ist effizienter.

$$2. \ Var\left[\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} X_i\right] = \frac{1}{500^2} \sum_{i=1}^{500} Var[X_i] = \frac{V[X]}{500}$$

$$Var\left[\frac{1}{320} \sum_{i=1}^{320} X_i\right] = \frac{1}{320^2} \sum_{i=1}^{320} Var[X_i] = \frac{V[X]}{320}$$

Beide Schätzer sind erwartungstreue aber die Varianz des Schätzer ist grösser wenn nur ein Teil der Stichprobe verwendet wird. Diese Differenz beschreibt den Effizienzverlust.

3. (a)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\theta}^{\theta+1} x \cdot 1 dx = \frac{(\theta+1)^2 - \theta^2}{2} = \frac{2\theta+1}{2} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{\theta}^{\theta+1} x^2 \cdot 1 dx = \frac{(\theta+1)^3 - \theta^3}{3} = \frac{3\theta^2 + 3\theta + 1}{3} \\ Var &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$(b) \ \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{n \cdot \mathbb{E}[X]}{n} = \theta + 0.5$$

$\Rightarrow \bar{X}$ ist verzerrt. $\bar{X} - 0.5$ ist erwartungstreue.

$$(c) \ Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{n \cdot Var[X]}{n^2} = \frac{1}{12 \cdot n}$$

4. (a)

$$\mathbb{E}[T_1] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i\right] = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \mathbb{E}[X_i] = \frac{5 \cdot \mathbb{E}[X]}{5} = \mu$$

$$\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i\right] = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbb{E}[X_i] = \frac{3 \cdot \mathbb{E}[X]}{3} = \mu$$

$$\mathbb{E}[T_3] = \mathbb{E}\left[\frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{8} + \frac{1}{2}X_5\right] = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^4 \mathbb{E}[X_i] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[X_5] = \frac{8 \cdot \mathbb{E}[X]}{8} = \mu$$

$$\mathbb{E}[T_4] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} \sum_{i=2}^2 X_i\right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \mathbb{E}[X_i] = \frac{2 \cdot \mathbb{E}[X]}{2} = \mu$$

$$\mathbb{E}[T_5] = \mathbb{E}[X_1] = \mu$$

$$\begin{aligned}
Var[T_1] &= Var\left[\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 X_i\right] = \frac{1}{5^2} \sum_{i=1}^5 Var[X_i] = \frac{5 \cdot Var[X]}{5^2} = \frac{\sigma^2}{5} \\
Var[T_2] &= Var\left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i\right] = \frac{1}{3^2} \sum_{i=1}^3 Var[X_i] = \frac{3 \cdot Var[X]}{3^2} = \frac{\sigma^2}{3} \\
Var[T_3] &= Var\left[\frac{(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{8} + \frac{1}{2} X_5\right] = \frac{1}{8^2} \sum_{i=1}^4 Var[X_i] + \frac{1}{2^2} Var[X_5] = \frac{5 \cdot \sigma^2}{16} \\
Var[T_4] &= Var\left[\frac{1}{2} \sum_{i=2}^2 X_i\right] = \frac{1}{2^2} \sum_{i=1}^2 Var[X_i] = \frac{2 \cdot Var[X]}{2^2} = \frac{\sigma^2}{2} \\
Var[T_5] &= Var[X_1] = \sigma^2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
MSE[T_1] &= \frac{\sigma^2}{5} \\
MSE[T_2] &= \frac{\sigma^2}{3} \\
MSE[T_3] &= \frac{5 \cdot \sigma^2}{16} \\
MSE[T_4] &= \frac{\sigma^2}{2} \\
MSE[T_5] &= \sigma^2
\end{aligned}$$

$Var[T_1]$ ist am kleinsten $\Rightarrow T_1$ ist am effizientesten.

5. X ist eine Bernoulli Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] = \pi$ und $Var[X] = \pi(1 - \pi)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{\pi}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X] = \pi \\
Var[\hat{\pi}] &= Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var[X_i] = \frac{Var[X]}{n} = \frac{\pi(1-\pi)}{n}
\end{aligned}$$

- (a) • für $\pi = 0$ $\mathbb{E}[X] = 0$ und $Var[X] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\pi}] = 0$ und $Var[\hat{\pi}] = 0$.
• für $\pi = 0.25$ $\mathbb{E}[X] = 0.25$ und $Var[X] = 0.1875 \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\pi}] = 0.25$ und $Var[\hat{\pi}] = 0.1875/n$.
• für $\pi = 0.5$ $\mathbb{E}[X] = 0.5$ und $Var[X] = 0.25 \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\pi}] = 0.5$ und $Var[\hat{\pi}] = 0.25/n$.
• für $\pi = 0.75$ $\mathbb{E}[X] = 0.75$ und $Var[X] = 0.1875 \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\pi}] = 0.75$ und $Var[\hat{\pi}] = 0.1875/n$.
• für $\pi = 1$ $\mathbb{E}[X] = 1$ und $Var[X] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\pi}] = 1$ und $Var[\hat{\pi}] = 0$.

Den $MSE(\hat{\pi})$ erhält man nun mit der folgenden Formel:

$$MSE(\hat{\pi}) = bias(\hat{\pi})^2 + Var(\hat{\pi}) = (E(\hat{\pi}) - \pi)^2 + Var(\hat{\pi}).$$

Da unser Schätzer jedoch erwartungstreu ist ($bias = 0$) erhalten wir $MSE(\hat{\pi}) = Var(\hat{\pi})$.

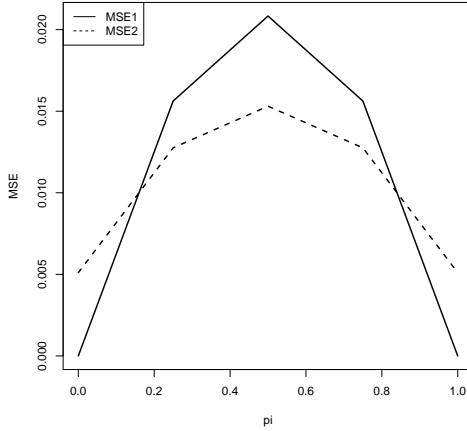
(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E} \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i + 1}{n+2} \right] = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] + 1}{n+2} = \frac{n\mathbb{E}[X] + 1}{n+2} = \frac{n\pi + 1}{n+2} \\ Var[T] &= Var \left[\frac{\sum_{i=1}^n X_i + 1}{n+2} \right] = \frac{\sum_{i=1}^n Var[X_i]}{(n+2)^2} = \frac{nVar[X]}{(n+2)^2} = \frac{n\pi(1-\pi)}{(n+2)^2} \\ bias[T] &= \mathbb{E}[T] - \mathbb{E}[X] = \frac{n\mathbb{E}[X]+1-(n+2)\mathbb{E}[X]}{n+2} = \frac{-2\mathbb{E}[X]+1}{n+2} \\ \Rightarrow \text{MSE}(\hat{\pi}) &= Var[T] + bias[T]^2 = \frac{nVar[X]}{(n+2)^2} + \left(\frac{-2\mathbb{E}[X]+1}{n+2} \right)^2\end{aligned}$$

$bias[T] \neq 0 \Rightarrow T$ ist nicht erwartungstreu. Da $bias[T] \rightarrow 0$ wenn $n \rightarrow \infty \Rightarrow T$ ist asymptotisch erwartungstreu.

Konsistenz: Da T asymptotisch erwartungstreu ist und $Var[T] \rightarrow 0$ wenn $n \rightarrow \infty \Rightarrow T$ ist konsistent.

$$\begin{aligned}(c) \quad \mathbb{E}[\hat{\pi}] &= \pi \text{ und } \mathbb{E}[T] = \frac{12\pi+1}{14} \\ bias(\hat{\pi}) &= 0 \text{ und } bias(T) = \frac{1-2\pi}{14} \\ Var[\hat{\pi}] &= \frac{\pi(1-\pi)}{12} \text{ und } Var[T] = \frac{12\pi(1-\pi)}{14^2}\end{aligned}$$



Die Grafik zeigt den MSE für den Schätzer π ($MSE1$) und für T ($MSE2$) für verschiedene Werte π . Die beiden Kurven schneiden sich in den Punkten $\pi \approx 0.14$ und $\pi \approx 0.86$. Falls wir den MSE als Bewertungskriterium für die Güte des Schätzers heranziehen bevorzugen wir also T für $0.14 \leq \pi \leq 0.86$ und $\hat{\pi}$ sonst.

6. (a) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ ein Momentenschätzer wäre $\frac{1}{\hat{\lambda}_{MM}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow \hat{\lambda}_{MM} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}$
- (b) $\mathbb{E}[X] = \frac{\theta-0.5+\theta+0.5}{2} \Rightarrow$ ein Momentenschätzer wäre $\hat{\theta}_{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
- (c) $\mathbb{E}[X] = \mu \Rightarrow$ ein Momentenschätzer für μ wäre $\hat{\mu}_{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
 $Var[X] = \sigma^2 \Rightarrow$ ein Momentenschätzer für σ^2 wäre
 $\hat{\sigma^2}_{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$.

7. Für eine poissonverteilte Zufallsvariable X gilt $\mu = E(X) = \lambda$. Daher werden wir in der Folge den unbekannten Verteilungsparameter λ schätzen.

(a) Likelihood Funktion:

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(\lambda, x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-n\lambda}$$

Loglikelihood Funktion:

$$l(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \ln L(\lambda) = \ln \left(\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} e^{-\lambda} \right) = \ln(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i! \right) - n\lambda \ln(e)$$

Bilde die erste Ableitung und setzt diese Null:

$$\frac{\partial l(\lambda, x_1, \dots, x_n)}{\partial \lambda} = 0 \iff \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

(b) $\mathbb{E}[\hat{\lambda}_{MLE}] = \lambda \Rightarrow$ erwartungstreu.

8. (a) X binomialverteilt $\mathbb{E}[X] = np \Rightarrow$ ein Momentenschätzer wäre $n\hat{p}_{MM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, oder $p_{MM} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i$

(b)

$$0.25 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n X_i \leq 0.75$$

(c) Da n und p unbekannt sind, brauchen wir zwei Momenten z.B. $\mathbb{E}[X] = np$ und $Var[X] = np(1-p)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \hat{n}\hat{p} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \hat{n}\hat{p}(1-\hat{p}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2. \end{aligned}$$

Die Schätzer \hat{n} und \hat{p} ergeben sich dann aus der Lösung dieses Gleichungssystems.

9.

$$\begin{aligned} P\left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &\simeq 1 - \alpha \\ P\left(-q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{50 - \mu}{\frac{5}{\sqrt{300}}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) &\simeq 0.95 \\ -1.96 \leq \frac{50 - \mu}{\frac{5}{\sqrt{300}}} &\leq 1.96 \end{aligned}$$

Man erhält

$$KONF_{0.95}(\mu) = \left[\bar{X} - q_{0.975} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + q_{0.975} \frac{S}{\sqrt{n}} \right] = [49.4342, 50.5658].$$