HSG, VWL
Prof. Tobias Sutter

HS 2025
Statistik 3,220

Musterlösungen

Übung 3: Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Teil B: Multiple Choice

Kreuzen Sie bitte in den folgenden Mehrfachwahl-Aufgaben die richtigen Aussagen an. Dabei kann es sein, dass von den zu einer Aufgabe vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten keine, eine, mehrere oder alle richtig sind.

1. Die Kovarianz

    O misst nur die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.

    X misst nur die Richtung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.

    O misst die Stärke und die Richtung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.

    O hat keinerlei Aussagekraft über den Zusammenhang zwischen zwei Variablen.

    O nimmt immer Werte zwischen -1 und $+1$ an.

2. Der Korrelationskoeffizient ρ

    O misst nur die Stärke des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.

    O misst nur die Richtung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.

    X misst die Stärke und die Richtung des Zusammenhangs zwischen zwei Variablen.

    O hat keinerlei Aussagekreft über den Zusammenhang zwischen zwei Variablen.

    X nimmt immer Werte zwischen -1 und $+1$ an.

3. Zwei Variablen sind unabhängig, wenn

    O der Korrelationskoeffizient $\rho = 0$ ist.

    X das Produkt der Randverteilungen und die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung übereinstimmen.

    O die Summe der Randverteilungen und die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung übereinstimmen.

O die Kovarianz $Cov = 1$ und der Korrelationskoeffizient $\rho = 0$ ist.

O die Kovarianz $Cov = 0$ ist.

4. Die Kovarianz wird errechnet mit:

   X $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.
   O $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X^2]E[Y^2]$.
   O $Cov(X, Y) = E[X^2Y^2] - E[X]E[Y]$.
   O $Cov(X, Y) = E[X^2Y^2] - E[X^2]E[Y^2]$.
   O $Cov(X, Y) = E[XY]^2 - E[X]E[Y]$.

5. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

   X X, Y unabhängig $\Longrightarrow X, Y$ unkorreliert.
   O X, Y unkorreliert $\Longrightarrow X, Y$ unabhängig.
   X $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.
   O $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
   X $\rho_{XY} = -1$ bedeutet: Je grösser X desto kleiner Y.
   X Falls $Y = cX, c > 0$, ist $\rho_{XY} = 1$.

6. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? $E[XY] = E[X]E[Y]$

   O immer,
   O nie,
   X falls X und Y unkorreliert sind,
   X falls X und Y unabhängig sind,
   O falls $E[X] = E[Y] = 0$.

7. Korrekte Zuteilung der Korrelationskeoffizienten:

   - Oben links: $\rho = 0.6$
   - Oben rechts: $\rho = 0.9$
   - Unten links: $\rho = -0.7$
   - Unten rechts: $\rho = 0$

8. Sei X die Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Würfels und Y das Ergebnis eines einmaligen Münzwurf. Dann ist $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}]$:

O $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 1/3$

X $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 1/2$

O $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 2/3$

O $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 0$

O $P[X > 3 \mid Y = \text{“Kopf”}] = 1$

9. In einem Experiment werden aus einer Urne mit 5 unterschiedlichen Kugeln (numeriert von 1-5) zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Dabei gelte: $X =$“Kugelnummer der ersten Ziehung” und $Y =$“Kugelnummer der zweiten Ziehung”. Das Experiment wird eine Million Mal wiederholt. Es gilt:

   O X und Y sind unabhängig.

   O Die Kovarianz $Cov(X, Y) = 0$.

   O Der Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = 0$.

   X Der Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = -0.25$.

   O Der Korrelationskoeffizient $\rho_{XY} = -0.5$.

10. Folgende Dichtefunktion sei gegeben: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2}x + y$ für $0 \leq x \leq a$ und $0 \leq y \leq 1$. Berechnen Sie den Parameter a.

   X $a = 1.236068$

   O $a = 2$

   O $a = 3.236068$

   O $a = 3$

   O $a = 1$

11. Folgende Dichtefunktion sei gegeben: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}y$ für $0 \leq x, y \leq 2$. Berechnen Sie die bedingte Dichte $f_{Y|X}(y)$ für $0 \leq x, y \leq 2$.

   O $f_{Y|X}(y) = \frac{x+2y}{2+4y}$

   X $f_{Y|X}(y) = \frac{x+2y}{2x+4}$

   O $f_{Y|X}(y) = \frac{2+4y}{x+2y}$

   O $f_{Y|X}(y) = \frac{2x+4}{x+2y}$

   O $f_{Y|X}(y) = \frac{x+2}{1+2y}$

12. Folgende Dichtefunktion sei gegeben: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}y$ für $0 \leq x, y \leq 2$. Berechnen Sie $E[X + 2Y]$.

O $E[X+2Y] = 33$
O $E[X+2Y] = \frac{34}{9}$
O $E[X+2Y] = \frac{10}{3}$
X $E[X+2Y] = \frac{32}{9}$
O $E[X+2Y] = \frac{3}{10}$

13. Folgende Dichtefunktion sei gegeben: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}y$ für $0 \leq x, y \leq 2$. Berechnen Sie $V(Y)$.

X $V(Y) = \frac{23}{81}$
O $V(Y) = \frac{25}{81}$
O $V(Y) = \frac{26}{81}$
O $V(Y) = \frac{28}{81}$
O $V(Y) = \frac{29}{81}$

Teil C1: Aufgaben zu Zufallsvariablen

1. (a) Man berechne die die Zeilensummen und Kolonnensummen und erhält: $f_X(10) = f_X(20) = f_X(30) = 1/3$ und $f_Y(2) = f_Y(3) = f_Y(4) = 1/3$.

   (b) $f_{X/Y=4}(10) = \frac{f_{X,Y}(10,4)}{f_Y(4)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$; $f_{X/Y=4}(20) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$; $f_{X/Y=4}(30) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$

   (c) $E[X] = \frac{1}{3} \cdot (10+20+30) = 20$; $E[X^2] = \frac{1}{3} \cdot (10^2+20^2+30^2) = \frac{1400}{3} \to V(X) = \frac{1400}{3} - 20^2 = 66.67$
   $E[Y] = \frac{1}{3} \cdot (2+3+4) = 3$; $E[Y^2] = \frac{1}{3} \cdot (2^2+3^2+4^2) = \frac{29}{3} \to V(X) = \frac{29}{3} - 3^2 = 0.6667$.

   (d) $E[XY] = \frac{20}{9} + \frac{30}{9} + \frac{40}{9} + \frac{40}{6} + \frac{80}{6} + \frac{60}{18} + \frac{180}{9} + \frac{120}{18} = 10+20+10+20 = 60 \to \mathrm{Cov}(X,Y) = 60 - 20 \cdot 3 = 0, \rho_{X,Y} = 0$

   (e) Nein: $f_{X,Y}(30,4) = \frac{1}{18} \neq f_X(30) \cdot f_Y(4) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ Widerspruch!

2. (b) $f_{Y/X=X_2}(y_3) = \frac{f_{X,Y}(x_2,y_3)}{f_X(x_2)} = \frac{0.17}{0.17} = 1$; $f_{X/Y=Y_3}(x_3) = \frac{0.12}{0.29} = 0.4138$;
   $f_{Y/X=X_4}(y_1) = 0$

3. (a) Nein: $f_{X,Y}(0,0) = \frac{3}{24} \neq f_X(0) \cdot f_Y(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{24}$ Widerspruch!

(b) und (c) $E[X] = \frac{1}{2}$; $E[X^2] = \frac{1}{2} \to V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \frac{1}{4}$
$E[Y] = \frac{2}{3}$; $E[Y^2] = \frac{29}{48} \to V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 \frac{23}{144} = 0.1597$
$E[XY] = \frac{1}{3} \to \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0$
$V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4} + \frac{23}{144} - 2 \cdot 0 = 0.4097$

4. (a) Die erste Bedingung ($f_{X,Y}(x,y) \geq 0$) ist erfüllt. Zudem muss $\int_0^1 \int_0^{1-y} 24xy \, dx \, dy = 1$ sein. Wir erhalten
$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-y} 24xy \, dx \, dy = \int\limits_0^1 24y \frac{x^2}{2}|_0^{1-y} \, dy = \int\limits_0^1 24y \frac{(1-y)^2}{2} \, dy$
$12 \int\limits_0^1 y(1-2y+y^2) \, dy = 12 \int\limits_0^1 (y-2y^2+y^3) \, dy = 12[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4}]|_0^1 =$
$12(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}) = 12(\frac{6-8+3}{12}) = 12(\frac{1}{12}) = 1$

(b) Wir berechnen die Randdichten:
$f_X(x) = \int\limits_0^{1-x} 24xy \, dy = 24x \cdot \frac{y^2}{2}|_0^{1-x} = 12x(1-x)^2, x \in [0,1]$
$f_Y(y) = \int\limits_0^{1-y} 24xy \, dx = \cdots = 12y(1-y)^2, y \in [0,1]$
Sind X und Y unabhängig?

$$24xy = f_{x,y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y) = 12^2 \cdot xy(1-x)^2(1-y)^2,$$

für alle $x \geq 0, y \geq 0$ mit $x + y \leq 1$. Daraus folgt, dass X und Y abhängig sind.

5. (a) Es gilt $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 2x \, \exp(-y) \, dx \, dy = \int\limits_0^\infty 2 \, \exp(-y) \cdot \frac{x^2}{2}|_0^1 \, dy$
$\int\limits_0^\infty \exp(-y) \, dy = -\exp(-y)|_0^\infty = 1$
Zudem ist $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ für alle x, y. Somit ist $f_{X,Y}(x,y)$ eine gemeinsame Dichtefunktion von zwei Zufallsvariablen X und Y.

(b) Wir berechnen die Randdichten:
$f_X(x) = \int\limits_0^\infty 2x \, \exp(-y) \, dy = 2x, x \in [0,1]$
$f_Y(y) = \int\limits_0^1 2x \, \exp(-y) \, dy = \exp(-y), y \in]0, \infty[$
Sind X und Y unabhängig?
Es gilt $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ für alle x, y und somit folgt, dass X und Y unabhängig sind.

6. (a) $\mu_X = E[X] = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.3 + 4 \cdot 0.1 = 2.3$
$\mu_Y = E[Y] = 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 = 2.7$
$E[X^2] = 6.1 \rightarrow \mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81$, $\sigma_X = 0.9$ $E[Y^2] = 8.1 \rightarrow \mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = 8.1 - 2.7^2 = 0.81$, $\sigma_Y = 0.9$

(b) $E[XY] = 1 \cdot 1 \cdot 0.05 + 1 \cdot 2 \cdot 0.1 + 1 \cdot 3 \cdot 0.05 + \cdots = 6.5 \to \mathrm{Cov}(X,Y) = 6.5 - 2.3 \cdot 2.7 = 0.29$

$\rho_{XY} = \frac{0.29}{0.9^2} = 0.358$

(c) Wahrscheinlichkeitsfunktion:

z	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
f_Z	0.05	0.13	0.17	0.28	0.19	0.15	0.03

$$\left.\begin{array}{l} E[Z] = 2.5 \\ E[Z^2] = 6.8 \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_Z^2 = 6.8 - 2.5^2 = 0.55$$

7. (a) $\mu_X = \frac{3}{4}$; $\mu_Y = 0$;

$E[X^2] = \frac{3}{4} \to V(X) = \frac{3}{16} = 0.1875$

$E[Y^2] = \frac{2}{3} \to V(Y) = \frac{2}{3} = 0.6667$

$\Rightarrow E[X-Y] = \frac{3}{4}; V(X-Y) \underbrace{=}_{\text{unabh.}} V(X) + V(Y) = 0.8542$

(b)

u	-1	0	1	2	
f_U	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\sum = 1$

v	0	1	2	3	4	5	6
f_V	$\frac{3}{120}$	$\frac{16}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{34}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{3}{120}$

(c) $P[X=0, Y=-1, Z=4] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{120}$

$P[X=0|Y=1] \underbrace{=}_{\text{unabh.}} P[X=0] = \frac{1}{4}$

$P[X=1|X+Y=2] = \frac{P[X=1, X+Y=2]}{P[X+Y=2]} = \frac{P[X=1, Y=1]}{P[U=2]} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = 1$