Multiple Choice (48 Punkte)

Markieren Sie bei folgenden Multiple-Choice-Aufgaben die korrekte Aussage.

- In jedem Block von Aussagen ist **genau eine** Antwort korrekt.
- Die eindeutig markierte korrekte Aussage wird mit 4 Punkten (pro MC-Aufgabe) bewertet.
- Eine Markierung der falschen Aussage, eine Mehrfachmarkierung oder keine Markierung wird mit 0 Punkten bewertet.

1. (4 Punkte) Wir beobachten die Realisierungen von 25 Zufallsvariablen, die jeweils unabhängig voneinander aus derselben Normalverteilung mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz $\sigma^2 = 0.5$ gezogen werden. Wir möchten folgenden Hypothesentest durchführen: $H_0 : \mu = 0.5$ gegen $H_1 : \mu \geq 0.5$ mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$. Für welchen Wertebereich des Stichprobenmittelwertes $\bar{x}$ wird die Hypothese H_0 verworfen?
Geben Sie den *größtmöglichen* Bereich an.

   (a) $\bar{x} > 0.66$.
   (b) $\bar{x} > 0.73$.
   (c) $\bar{x} > 0.78$.
   (d) $\bar{x} > 1.64$.

   Lösung: (b)
   Der Hypothesentest ist einseitig. Berechnen Sie den kleinsten möglichen Stichprobenmittelwert (bezeichnet als $\bar{x}^*$), für den H_0, d.h., $\mu = \mu_0 = 0.5$, verworfen würde. Die Inverse der kumulativen Verteilungsfunktion (CDF) der Standardnormalverteilung wird mit ϕ^{-1} bezeichnet.

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(1-\alpha) &= \frac{\bar{x}^* - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2}/\sqrt{n}} \\ &= \frac{\bar{x}^* - 0.5}{\sqrt{0.5}/\sqrt{25}} \\ \leftrightarrow\ \bar{x}^* &= \phi^{-1}(0.95) \cdot \left(\sqrt{0.5}/\sqrt{25}\right) + 0.5 \\ &= 0.7326 \end{aligned}$$

2. (4 Punkte) Seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Es ist bekannt, dass $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{3}$, $\mathbb{E}[X] = 0$ und $\rho_{X^2,Y} > 0$ (ρ bezeichnet den Korrelationskoeffizienten nach Pearson).
Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr?

   (a) $-1 \leq \rho_{X,Y} < 0$
   (b) $\rho_{X,Y} = 0$
   (c) $0 < \rho_{X,Y} \leq 1$
   (d) Keine der obigen Aussagen ist immer wahr.

   Lösung: (d)
   Intuitiv impliziert eine positive lineare Beziehung (Korrelation) zwischen X^2 und Y nichts über eine lineare Beziehung zwischen X und Y.

   Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, zwei Beispiele zu finden, welche die Bedingungen erfüllen, aber unterschiedliche Implikationen für $\rho_{X,Y}$ liefern:

- $Y = X^2$ wobei X kontinuierlich gleichverteilt ist zwischen -1 und 1. Offensichtlich gilt $\rho_{X^2,Y} > 0$, aber $\rho_{X,Y} = 0$.
- $Y = X^2 + X$ wobei X kontinuierlich gleichverteilt ist zwischen -1 und 1. Offensichtlich gilt $\rho_{X^2,Y} > 0$ und $\rho_{X,Y} > 0$.

3. (4 Punkte) A und B sind Ereignisse. Es sei $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. $\bar{B}$ bezeichnet das Komplement von B. Wie groß ist der Wert von $\mathbb{P}(A \mid \bar{B})$?

   (a) $\frac{1}{4}$
   (b) $\frac{1}{3}$
   (c) $\frac{3}{4}$
   (d) $\frac{5}{6}$

   Lösung: (c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \mid \bar{B}) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(\bar{B})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)}{1 - \mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{1/4}{1/3} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

4. (4 Punkte) Das tatsächliche Gewicht einer Packung Nudeln ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 500$ und der Varianz $\sigma^2 = 40$. Finden Sie das korrekte symmetrische Konfidenzintervall um den wahren Parameter für das Gewicht einer einzelnen Packung: das Konfidenzintervall muss um das mittlere Gewicht zentriert sein und 99% aller Nudelpackungen enthalten.

   (a) [396.967 ; 603.033]
   (b) [483.709 ; 516.291]
   (c) [485.287 ; 514.713]
   (d) [487.604 ; 512.396]

   Lösung: (b)
   Das Konfidenzintervall wird konstruiert als:

$$[\mu + \phi^{-1}(\alpha/2) \cdot \sqrt{\sigma^2}; \mu + \phi^{-1}(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\sigma^2}],$$

   wobei ϕ^{-1} die Inverse der kumulativen Verteilungsfunktion (CDF) der Standardnormalverteilung bezeichnet.
   Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung gilt $-\phi^{-1}(\alpha/2) = \phi^{-1}(1-\alpha/2)$.

$$[500 - 2.575829 \cdot \sqrt{40}\,;\, 500 + 2.575829 \cdot \sqrt{40}]$$
$$[483.709\,;\, 516.291]$$

5. (4 Punkte) Es werden zufällig 4 Zahlen aus den ersten 12 Primzahlen ohne Zurücklegen ausgewählt. Definieren Sie zwei Ereignisse:

   - A: Die Summe der 4 ausgewählten Zahlen ist ungerade.

- B: Alle vier ausgewählten Zahlen sind ungerade.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig in Bezug auf die Ereignisse A und B?

(a) A und B sind unabhängig und disjunkt.
(b) A und B sind unabhängig, aber nicht disjunkt.
(c) A und B sind abhängig und disjunkt.
(d) A und B sind abhängig und nicht disjunkt.

Lösung: (c)
Die Summe der vier Zahlen ist genau dann ungerade, wenn die Zahl 2 ausgewählt wurde. In diesem Fall kann Ereignis B nicht eintreten. Somit sind die Ereignisse A und B disjunkt. Weiterhin sind A und B abhängig, da die Kenntnis des Ausgangs von A Informationen über den Ausgang von B liefert.

6. (4 Punkte) In einem Bewerbungsverfahren beträgt die Wahrscheinlichkeit, zu einem Vorstellungsgespräch eingeladen zu werden, 10%. Von denjenigen, die eingeladen werden, haben 90% in ihrer Statistikprüfung eine bessere Note als 5 erreicht. Umgekehrt haben von den Bewerbern, die nicht zu einem Vorstellungsgespräch eingeladen wurden, nur 20% eine bessere Note als 5 erreicht. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Bewerber eine bessere Note als 5 in Statistik hat?

(a) 18%.
(b) 25%.
(c) 27%.
(d) 50%.

Lösung: (c)
Sei I das Ereignis, dass ein Bewerber zu einem Vorstellungsgespräch eingeladen wird, und sei G das Ereignis, dass die Statistiknote besser als 5 ist.

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(G|I) \cdot \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(G|\bar{I}) \cdot \mathbb{P}(\bar{I})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G) &= (0.90 \cdot 0.10) + (0.20 \cdot 0.90) \\ &= 0.09 + 0.18 \\ &= 0.27 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Bewerber eine bessere Note als 5 in Statistik hat, beträgt somit 27%.

7. (4 Punkte) Sei Y eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(y) & \text{für } 0 < y < \pi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie groß ist der Erwartungswert von Y?

(a) $\ln(\pi)$
(b) $\frac{\pi}{2}$
(c) $\sqrt{2}\pi$
(d) $\frac{3\pi}{2}$

Lösung: (b) $\frac{\pi}{2}$
Die Lösung kann wie folgt geschrieben werden:

$$E[Y] = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} y \sin(y) dy = \frac{1}{2} \left[-y\cos(y)|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(y) dy \right] = \frac{1}{2} \left[\pi + \sin(y)|_0^{\pi} \right] = \frac{\pi}{2}$$

8. (4 Punkte) Angenommen, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit $\sigma^2 = 5$. Wir wollen die Hypothese $H_0 : \mu = 8$ gegen $H_1 : \mu \neq 8$ mit nur 5 Beobachtungen testen. Ein MLE-Schätzwert von μ steht uns zur Verfügung und beträgt $\hat{\mu} = 4.95$. Wie groß ist der p-Wert des obigen Tests?

   (a) 0.0011
   (b) 0.0022
   (c) 0.1738
   (d) 0.3476

   Lösung: (b) 0.0022
   Die Lösung kann wie folgt berechnet werden:

$$\Phi\left(\sqrt{5}\frac{|4.95 - 8|}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(3.05) = 0.9989 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9989 \Rightarrow \alpha = 0.0022.$$

9. (4 Punkte) Das Einkommen X der Bürger einer Stadt ist lognormal verteilt (d.h. $\ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$) mit $\mu = 8$ und $\sigma^2 = 4$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Einkommen eines Bürgers unter 12000 CHF liegt?

   (a) 0.242
   (b) 0.363
   (c) 0.637
   (d) 0.758

   Lösung: (d) 0.758
   Die Lösung kann wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} P[X < 12000] = P[\ln(X) < \ln(12000)] &= P\left[\frac{\ln(X) - 8}{2} < \frac{\ln(12000) - 8}{2}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{\ln(12000) - 8}{2}\right) = \Phi(0.696) = 0.758. \end{aligned}$$

10. (4 Punkte) Ruben und Jochen spielen das folgende Spiel. Ruben würfelt so lange mit einem fairen Würfel, bis er die Sequenz $(1, 1)$ in zwei aufeinanderfolgenden Würfen erhält. Jochen würfelt so lange, bis er die Sequenz $(1, 2)$ in zwei aufeinanderfolgenden Würfen erhält. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
    Hinweis: Versuchen Sie nicht, die erwartete Anzahl an Würfen zu berechnen! Ein bisschen gesunder Menschenverstand und Statistik helfen hier weiter.

    (a) Im Durchschnitt benötigt Ruben mehr Würfe, um zu gewinnen.
    (b) Im Durchschnitt benötigt Jochen mehr Würfe, um zu gewinnen.
    (c) Im Durchschnitt benötigen beide die gleiche Anzahl an Würfen, um zu gewinnen.
    (d) Im Durchschnitt gibt es nicht genügend Informationen, um den Gewinner zu bestimmen.

Lösung: (a)
Ohne Berechnungen können wir argumentieren, dass Ruben, wenn er eine 1 würfelt, aber die Sequenz nicht vervollständigt, vollständig neu beginnen muss. Jochen hingegen kann, wenn er eine 1 würfelt und die Sequenz nicht vervollständigt, möglicherweise dennoch die Sequenz in drei Würfen vervollständigen (z. B. $1, 1, 2$), was für Ruben nicht möglich ist, wenn er die zweite 1 nicht würfelt (im besten Fall vier Würfe).

Sei X die Anzahl der Würfe, die Ruben benötigt, um seine Sequenz zu erhalten, und Y die Anzahl der Würfe, die Jochen benötigt. Wir berechnen dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \underbrace{\frac{5}{6}(1+\mathbb{E}X)}_{\text{Würfe 2–6}} + \underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2}_{\text{Würfe 1,1}} + \underbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}(2+\mathbb{E}X)}_{\text{Würfe 1,2–6}} \\
\mathbb{E}X &= \frac{5}{6} + \frac{5}{6}\mathbb{E}X + \frac{2}{36} + \frac{10}{36} + \frac{5}{36}\mathbb{E}X \\
\frac{36-30-5}{36}\mathbb{E}X &= \frac{30+2+10}{36} \\
\mathbb{E}X &= 42.
\end{aligned}$$

Für die erwartete Anzahl der Würfe von Jochen führen wir Z als Anzahl der Würfe ein, die benötigt werden, um die Sequenz zu vervollständigen, nachdem die erste 1 geworfen wurde. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Z &= \underbrace{\frac{1}{6}\cdot 1}_{\text{Würfe 2}} + \underbrace{\frac{1}{6}\cdot(1+\mathbb{E}Z)}_{\text{Würfe 1}} + \underbrace{\frac{4}{6}(1+\mathbb{E}Y)}_{\text{Würfe 3–6}} \\
\mathbb{E}Z &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\mathbb{E}Z + \frac{4}{6} + \frac{4}{6}\mathbb{E}Y \\
\frac{6-1}{6}\mathbb{E}Z &= \frac{6}{6} + \frac{4}{6}\mathbb{E}Y \\
\mathbb{E}Z &= \frac{6}{5} + \frac{4}{5}\mathbb{E}Y.
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die erwartete Anzahl der Würfe für Jochen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= \underbrace{\frac{5}{6}(1+\mathbb{E}Y)}_{\text{Würfe 2–6}} + \underbrace{\frac{1}{6}(1+\mathbb{E}Z)}_{\text{Würfe 1}} \\
\mathbb{E}Y &= \frac{5}{6} + \frac{5}{6}\mathbb{E}Y + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{4}{30}\mathbb{E}Y \\
\frac{30-25-4}{30}\mathbb{E}Y &= \frac{25+5+6}{30} \\
\mathbb{E}Y &= 36.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\mathbb{E}X = 42 > 36 = \mathbb{E}Y$$

und Ruben benötigt im Durchschnitt mehr Würfe als Jochen.

11. (4 Punkte) Ruben und Jochen spielen das folgende Spiel. Eine faire Münze wird geworfen. Wenn Kopf fällt, zahlt Jochen 1 CHF an Ruben. Wenn Zahl fällt, zahlt Ruben 1 CHF an Jochen. Sie spielen das Spiel für eine feste Anzahl an Runden n. Sei X Rubens Gesamtgewinn nach n Runden und Y Jochens Gesamtgewinn nach n Runden. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
Hinweis: Beachten Sie, dass *Gewinne* auch negativ sein können. Sie bezieht sich auf den Betrag, den der Spieler verdient oder verloren hat (wenn negativ).

(a) X und Y haben dieselbe Verteilung.

(b) $X = Y$

(c) X und Y sind unabhängig.

(d) Keine der obigen Aussagen ist wahr.

Lösung: (a)
Der Gewinn von Ruben ist der negative Gewinn von Jochen, also $X = -Y$. Da für alle Gewinne $-n \leq x \leq n$ Ruben dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, am Ende mit x und $-x$ CHF zu enden, ist X symmetrisch um Null verteilt (tatsächlich ist $X + n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{2}\right)$, was um $\frac{n}{2}$ symmetrisch ist) und daher muss dies auch für Y gelten.

Da $X = -Y$, gilt

$$\mathbb{P}(Y = x) = \mathbb{P}(-X = x) = \mathbb{P}(X = -x) = \mathbb{P}(X = x)$$

und daher sind die Verteilungen von X und Y identisch.

12. (4 Punkte) Ein Brunnen enthält 10 Liter Wasser. Jeden Tag wird eine zufällige Menge Wasser aus dem Brunnen gepumpt. Die täglich gepumpte Wassermenge ist i.i.d. und gleichverteilt zwischen 0 und 1 Litern. Wie viele Tage dauert es im Durchschnitt, bis der Brunnen leer ist?

(a) 12.5

(b) 15

(c) 17.5

(d) 20

Lösung: (d)
Sei X die Menge des täglich gepumpten Wassers. Wir suchen nach n Tagen, sodass $\mathbb{E}[nX] = 10$. Dies kann leicht gelöst werden, indem wir die Konstante außerhalb des Erwartungswerts ziehen und nach n auflösen, d.h.,

$$n\mathbb{E}X = 10 \iff n = \frac{10}{\mathbb{E}X} = \frac{10}{0.5} = 20.$$

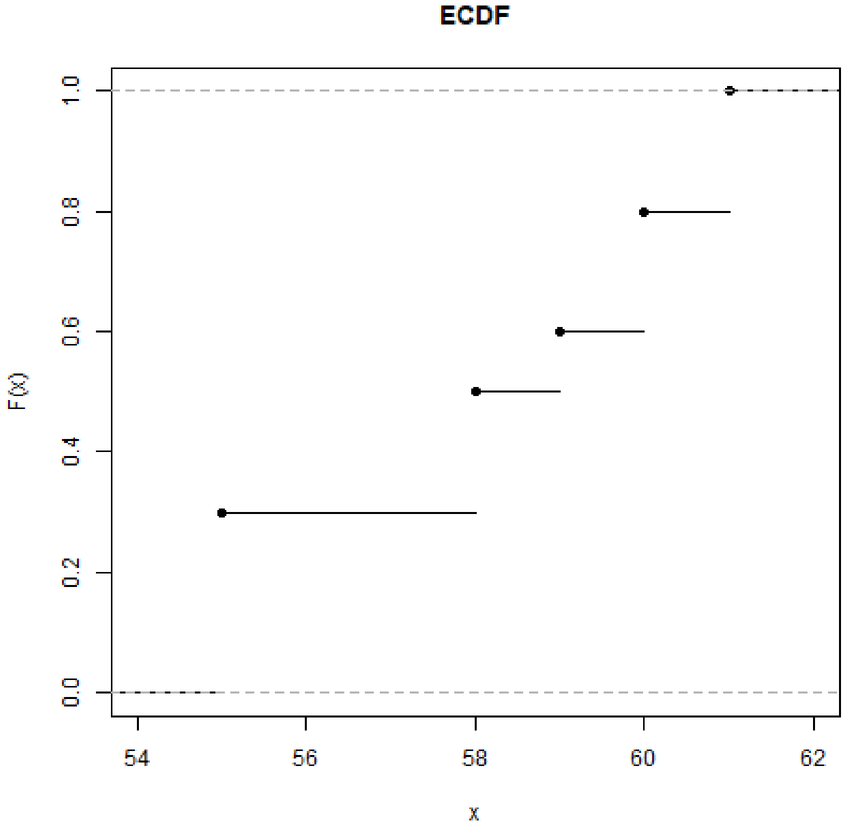
Aufgabe 1 (12 Punkte)

Teil 1A (4 Punkte)

(F1:b);(F2:d);(F3:c);(F4:a)

Teil 1B (8 Punkte)

$Modus = 55$, $Median = 58.5$, $10\% - Quantil = 55$



Aufgabe 2 (15 Punkte)

Lösung:

1. Sei D das Ereignis, dass ein Fahrrad defekt ist, und T^- das Ereignis, dass der Test negativ ist. Wir verwenden das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit, um $\mathbb{P}(T^-)$ zu berechnen:

$$\mathbb{P}(T^-) = \mathbb{P}(T^-|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T^-|\bar{D})\mathbb{P}(\bar{D})$$

   Gegeben:

$$\mathbb{P}(D) = 0.02, \quad \mathbb{P}(\bar{D}) = 0.98, \quad \mathbb{P}(T^-|D) = 0.94, \quad \mathbb{P}(T^+|\bar{D}) = 0.96 \Rightarrow \quad \mathbb{P}(T^-|\bar{D}) = 0.04$$

   Einsetzen der Werte ergibt:

$$\mathbb{P}(T^-) = (0.94 \cdot 0.02) + (0.04 \cdot 0.98) = 0.0188 + 0.0392 = 0.058$$

   Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Test negativ ist, $\mathbb{P}(T^-) = 0.058$ oder 5,8%.

2. Wir verwenden den Satz von Bayes, um $\mathbb{P}(D|T^-)$ zu berechnen:

$$\mathbb{P}(D|T^-) = \frac{\mathbb{P}(T^-|D)\mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T^-)}$$

   Einsetzen der bekannten Werte:

$$\mathbb{P}(D|T^-) = \frac{0.94 \cdot 0.02}{0.058} = \frac{0.0188}{0.058} \approx 0.324$$

3. Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn gilt:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

   Wir wissen:

$$\mathbb{P}(T^-|D) = 0.94, \quad \mathbb{P}(D) = 0.02$$

   Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse T^- und D auftreten, beträgt:

$$\mathbb{P}(T^- \cap D) = \mathbb{P}(T^-|D)\mathbb{P}(D) = 0.94 \cdot 0.02 = 0.0188$$

   Andererseits ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(T^-) \cdot \mathbb{P}(D) = 0.058 \cdot 0.02 = 0.00116$$

   Da:

$$\mathbb{P}(T^- \cap D) = 0.0188 \neq 0.00116 = \mathbb{P}(T^-) \cdot \mathbb{P}(D)$$

   sind die Ereignisse nicht unabhängig.

4. Damit die Lieferung angenommen wird, müssen alle 4 getesteten Fahrräder nicht defekt sein. Die Wahrscheinlichkeit, nur nicht defekte Fahrräder auszuwählen, ist:

$$\mathbb{P}(\bar{D}) = \frac{37}{40} \cdot \frac{36}{39} \cdot \frac{35}{38} \cdot \frac{34}{37} = 0.7223$$

   Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine abgelehnte Lieferung: $1 - 0.7223 = 0.2773$.

5. Wahrscheinlichkeit für eine **nicht** abgelehnte Lieferung

   Sei X_i eine Indikator-Zufallsvariable, die angibt, ob das i-te Fahrrad in der Stichprobe defekt ist, wobei $X_i = 1$ falls defekt, und $X_i = 0$ sonst. $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ notiert die Gesamtzahl der defekten Fahrräder in der Stichprobe.

   Gemäß dem Zentralen Grenzwertsatz kann die Verteilung von S durch eine Normalverteilung angenähert werden:

$$\mu = np = 100 \cdot 0.02 = 2$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.02 \cdot 0.98} \approx 1.4$$

   - Mit Kontinuitätskorrektur:

$$\mathbb{P}(S < 4) = \mathbb{P}(S \leq 3) \approx \Phi\left(\frac{3 + 0.5 - 2}{1.4}\right) = \Phi(1.071) = 0.858$$

   - Ohne Kontinuitätskorrektur:

$$\mathbb{P}(S < 4) = \mathbb{P}(S \leq 3) \approx \Phi\left(\frac{3 - 2}{1.4}\right) = \Phi(0.714) = 0.761$$

   - Poisson-Annäherung:

$$\mathbb{P}(S < 4) = \mathbb{P}(S \leq 3) \approx \sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{i!} e^{-2} = (1 + 2 + 2 + \frac{4}{3})e^{-2} = 0.857$$

   Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung **nicht abgelehnt** wird, ungefähr 0.858.

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Lösung:

1.

$$f\left(x; \frac{1}{60}\right) = \begin{cases} \frac{1}{60} \cdot e^{-\frac{1}{60}x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Notiz: Vergessen sie nicht, den Wertebereich von X zu notieren (der zweite Teil der Definition für $X < 0$).

2. Die kumulierte Wahrscheinlichkeitsfunktion der Exponentialverteilung ist $F(x; \lambda) = 1 - \exp(-\lambda x)$ for $x \geq 0$, sonst $F(x; \lambda) = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 30) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 30) \\ &= 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{60} \cdot 30\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{60} \cdot 30\right) \\ &= 0.607 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 75 \mid X > 45) &= \frac{\mathbb{P}(X > 75, X > 45)}{\mathbb{P}(X > 45)} \\ &= \frac{1 - \left(1 - \exp(-\frac{1}{60} \cdot 75)\right)}{1 - \left(1 - \exp(-\frac{1}{60} \cdot 45)\right)} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{1}{60} \cdot 75\right)}{\exp\left(-\frac{1}{60} \cdot 45\right)} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{60} \cdot 30\right) \\ &= 0.607 \end{aligned}$$

Die bedingende Information is nicht relevant. Die Ereignisse *niemand hat den Raum in den letzten 45 Sekunden betreten* und *niemand wird den Raum in den nächsten 30 Sekunden betreten* sind unabhängig.

4. Der Erwartungswert der Exponentialverteilung mit Parameter λ ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, \lambda)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\, dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx \end{aligned}$$

- Partielle Integration: Mit $u = x$, $du = dx$, und $dv = \lambda e^{-\lambda x}\, dx$, $v = -e^{-\lambda x}$. Mithilfe partieller Integration:

$$\mathbb{E}[X] = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-\lambda x}\, dx$$

- Der erste Teil ist 0. Das Integral ist:

$$-\int_0^{\infty} -e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

- Der **Erwartungswert** ist daher $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$

5. Zur Berechnung der Varianz wird noch $\mathbb{E}[X^2]$ benötigt, da $\mathbb{E}[\mathbb{X}] = \frac{1}{\lambda}$ in der obigen Teilaufgabe berechnet wurde.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x,\lambda)\,dx \\ &= 0 + \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx\end{aligned}$$

Zur Berechnung verwenden wir zwei mal partielle Integration:

- Erste partielle Integration:
Mit $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, und $dv = \lambda e^{-\lambda x}\,dx$, $v = -e^{-\lambda x}$.

$$\mathbb{E}[X^2] = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}\,dx$$

Der Term $\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}$ ist 0.

- Zweite partielle Integration Das restliche Integral ist

$$\int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}\,dx$$

Mit $u = 2x$, $du = 2\,dx$, und $dv = e^{-\lambda x}\,dx$, $v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}$.

$$\int_0^{\infty} 2xe^{-\lambda x}\,dx = \left[-\frac{2x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{2}{\lambda}e^{-\lambda x}\,dx$$

Der Term $\left[-\frac{2x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty}$ ist 0, und das restliche Integral ist:

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{\lambda}e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

- Daher erhalten wir:

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

- Die **Varianz** kann nun berechnet werden als:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{1}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

6. Die Populations-Varianz und der Parameter der Exponentialverteilung λ hängen wie folgt voneinander ab: $\lambda = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{Var}(X)}}$.
Durch Ersetzen der Populations-Varianz durch die Stichproben-Varianz erhalten wir einen Schätzer der Momentenmethode: $\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \sqrt{\frac{1}{2500}} = \frac{1}{50} = 0.02$

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Lösung:

1.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{2\ln(c)} \int_0^\infty \frac{1}{3c} e^{y-x} \, dx \, dy &\stackrel{!}{=} 1 \\
\frac{1}{3c} \int_{-\infty}^{2\ln(c)} e^y \int_0^\infty e^{-x} \, dx \, dy &\stackrel{!}{=} 1 \\
\int_{-\infty}^{2\ln(c)} e^y \underbrace{\left(e^0 - e^{-\infty}\right)}_{=1} \, dy &= 3c \\
\left(e^{2\ln(c)} - e^{-\infty}\right) &= 3c \\
c^2 &= 3c \\
c &= 3.
\end{aligned}
$$

Da $c = 3$ auch $f_{X,Y}(x,y) > 0$ impliziert, ist $c = 3$ die passende Konstante.

2. $f_{X,Y}(x,y)$ ist monoton fallend in x und monoton steigend in y. Daher ist der Modus das Paar (x,y) welches x minimiert und y maximiert: $(x,y) = (0, 2\ln(3))$.

3.

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y) \, dx \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{3c} e^{y-x} \, dx \\
&= \frac{1}{3c} e^y \left(e^0 - e^{-\infty}\right) \\
&= \frac{1}{3c} e^y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{2\ln(c)} f_{X,Y}(x,y) \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{2\ln(c)} \frac{1}{3c} e^{y-x} \, dy \\
&= \frac{1}{3c} e^{-x} \left(e^{2\ln(c)} - e^{-\infty}\right) \\
&= \frac{1}{3c} e^{-x} \cdot c^2 = \frac{c}{3} e^{-x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) \cdot f_Y(y) &= \frac{c}{3} e^{-x} \cdot \frac{1}{3c} e^y \\
&= \frac{1}{9} e^{y-x} = f_{X,Y}(x,y).
\end{aligned}
$$

Daher sind X und Y unabhängig.

4. Mithilfe der obigen Ergebnisse für $f_X(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty x f_X(x)\ dx \\
&= \int_0^\infty x \cdot \frac{c}{3} e^{-x}\ dx \\
&= \frac{c}{3} \int_0^\infty x e^{-x}\ dx \\
&= \frac{c}{3} \left(-x e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x}\ dx \right) \\
&= \frac{c}{3} e^{-x} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{c}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

1. Der Maximum-Likelihood-Schätzer kann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
LF(p;x) &= \prod_{i=1}^{N} (1-p)^{x_i-1} p && (1)\\
LLF(p;x) &= \sum_{i=1}^{N} (x_i - 1)\log(1-p) + \log(p) && (2)\\
\frac{\partial LLF(p;x)}{\partial p} &\overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i-1}{1-p} + \frac{N}{p} \overset{!}{=} 0 && (3)\\
\frac{N}{\hat{p}} &= \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{1-\hat{p}} - \frac{N}{1-\hat{p}} && (4)\\
\frac{1-\hat{p}}{\hat{p}} + 1 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i && (5)\\
\hat{p} &= \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} && (6)
\end{aligned}$$

2. Für $p \in (0,1)$ gilt

$$\frac{d}{dp}\frac{1-p}{p^2} = \frac{p-2}{p^3} < 0,$$

und es folgt $\frac{1-p}{p^2}$. Mit dem Invarianzprinzip folgt:

$$\begin{aligned}
\widehat{Var(X)} &= \frac{1-\hat{p}}{\hat{p}^2}\\
&= \frac{1 - \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}}{\left(\frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}\right)^2}
\end{aligned}$$

3. Das arithmetische Mittel ist $\bar{x} = 2$. Deshalb:

$$\hat{p} = \frac{1}{2}, \qquad \text{und} \qquad \widehat{Var(X)} = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2.$$