CÁLCULO II - MA263
PRESENTACIÓN DEL TRABAJO FINAL

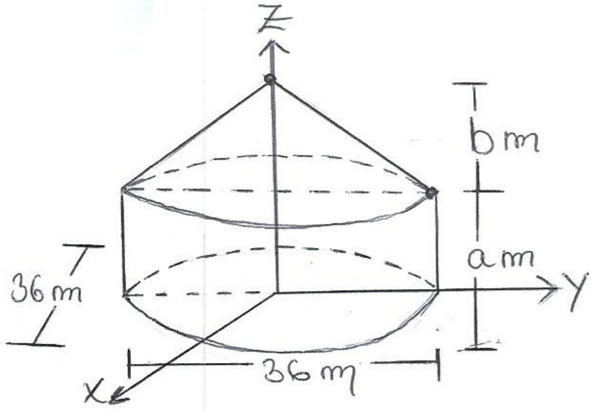
Apellidos y nombres	Código	Sección	Firma
Gallegos Ayuque, Luis Felipe	U201516478	C134	

Indicaciones:

- ✓ Descargue e imprima este documento.
- ✓ Copie los enunciados de las preguntas.
- ✓ Responda manualmente las preguntas con lapicero azul o negro, justificando sus respuestas.
- ✓ Respondidas las preguntas, siga los siguientes pasos:
  - a. Escanear en un solo documento y colocarlo en formato PDF.
  - b. El nombre del archivo en PDF debe tener la siguiente sintaxis: **Código de su sección y sus apellidos y nombres,** por ejemplo: CX11_Tiza Alva, Mario Rubén
  - c. Finalmente, enviar el documento a través del enlace que se encuentra en el AV.
- ✓ El plazo para subir el documento es hasta el domingo 26 de junio, 23:50 horas.

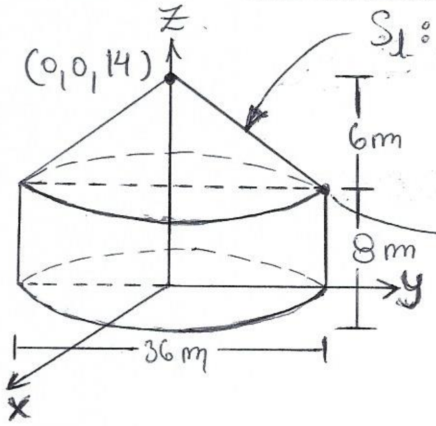
A continuación, responda las preguntas:

① La figura muestra una carpa de circo en la que se necesita determinar las ecuaciones de las superficies que limitan la carpa. Se sabe que la parte superior es um semicono de "b" metros de altura y la parte inferior es um cilindro circular.



a> Encuentre las ecuaciones de las dos superficies que limitan la carpa.

$a = 8$ y $b = 6$



$S_1: Z = a + b\sqrt{x^2+y^2}$

$* (0,0,14) \in S_1: 14 = a + b\sqrt{0^2+0^2}$

$14 = a + b(0)$

$14 = a$

$* (0,18,8) \in S_1: 8 = 14 + b\sqrt{0^2+18^2}$

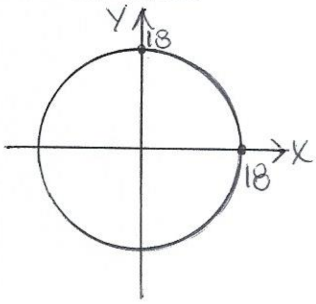
$-6 = b\sqrt{18^2}$

$\frac{\cancel{-6}}{\cancel{18}} = b \rightarrow b = -\frac{1}{3}$

$S_1: Z = 14 - \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ *

$S_2: x^2 + y^2 = 18^2$ *

PlANO XY



$D = \{(r,\theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi ; 0 \leq r \leq 18\}$

$S_1: Z = 14 - \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

$Z - 14 = -\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow Z - 14 = -\frac{r}{3}$

$3(Z-14) = -\sqrt{x^2+y^2}$

$9(Z-14)^2 = x^2+y^2 \longrightarrow (Z-14)^2 = \frac{x^2+y^2}{9}$

$S_1: 9(Z-14)^2 - x^2 - y^2 = 0$

$f(x,y,Z) = 9(Z-14)^2 - x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f = \langle f_x, f_y, f_Z \rangle$

$\nabla f = \langle -2x, -2y, 18(Z-14) \rangle$

$\|\nabla f\| = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + (18(Z-14))^2}$

$= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + \underbrace{18^2(Z-14)^2}_{18 \cdot \cancel{18}_{2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\cancel{9}}}}$

$\|\nabla f\| = \sqrt{4(x^2+y^2) + 36(x^2+y^2)}$

$\|\nabla f\| = \sqrt{40(x^2+y^2)}$

$\|\nabla f\| = 2\sqrt{10(x^2+y^2)}$

En Polar:

$\|\nabla f\| = 2\sqrt{10r^2} = 2\sqrt{10}\, r$ *

$|f_Z| = |18(Z-14)|$

$|f_Z| = |18(-\frac{r}{3})|$

$|f_Z| = |-6r|$

$|f_Z| = 6r$ *

$$A(S_1) = \iint_S 1\,dS = \iint_{D_{xy}} 1 \cdot \frac{\|\nabla f\|}{|f_z|}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{18} \frac{\cancel{2}\sqrt{10}\,\cancel{r}}{\cancel{6}\cancel{r}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{18} \frac{\sqrt{10}}{3} r\,dr\,d\theta = \frac{\sqrt{10}}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{18} r\,dr\,d\theta = \frac{r^2}{2}\Big|_0^{18} = 162$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{3} \times 162 \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot 162 \cdot 2\pi$$

$$\hookrightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{18} \frac{2\sqrt{10}\,r}{6r}\, r\,dr\,d\theta = 1072{,}935533\ m^2$$

b> Si el recubrimiento de la estructura cónica es una lona que cuesta 5 dolares el metro cuadrado, ¿Cuál es el costo total de la lona?

$$1072{,}935533\ \cancel{m^2} \cdot \frac{\$5}{\cancel{m^2}} = \$5364{,}677665$$

El costo total de la lona para recubrir la estructura conica es de $5365 dolares $_{\#}$

② Una partícula parte de la posición $r(0) = \langle a; b; c \rangle$. Si se sabe que su velocidad en cualquier instante t es

$$V(t) = 2\,\text{Sen}\,t\,i + (t^2+1)\,j + (t^3+t)\,K$$

a> Determine la posición de la partícula para cualquier instante de tiempo.

$a = 8$
$b = 6$
$c = 17$

$r(0) = \langle 8; 6; 17 \rangle \qquad r(t) = ?$

INTEGRAR

$$V(t) = \langle 2\,\text{Sen}\,t;\ t^2+1;\ t^3+t \rangle$$

$$r(t) = \langle -2\cos t;\ \frac{t^3}{3} + t;\ \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \rangle$$

$$r(t) = \langle -2\cos t + 8;\ \frac{t^3}{3} + t + 6;\ \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 17 \rangle$$

b> Determine la aceleración de la partícula para cualquier instante de tiempo. $a(t) = ?$

Derivar

$$V(t) = \langle 2\,\text{Sen}\,t;\ t^2+1;\ t^3+t \rangle$$

$$a(t) = \langle 2\cos t;\ 2t;\ 3t^2+1 \rangle$$

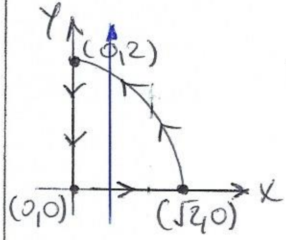
③ Determine el trabajo que realiza las aguas de un rio cuyo campo de fuerza es:

$$F(x,y) = \left\langle \frac{xy^3}{3a} + \operatorname{Sen}(x^2) ; \frac{x^3y}{3b} + \operatorname{Sen}(y^2) \right\rangle$$

Sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva C que consta del segmento de recta de (0;2) a (0;0), el segmento de recta de (0;0) a $(\sqrt{2};0)$, y el arco de parábola $y = 2 - x^2$ de $(\sqrt{2};0)$ a $(0;2)$.

$a = 8$
$b = 6$ $\quad F(x;y) = \left\langle \underbrace{\frac{xy^3}{24} + \operatorname{Sen}(x^2)}_{} ; \frac{x^3y}{18} + \operatorname{Sen}(y^2) \right\rangle$

P Q



$$W = \oint F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$D = \{ (x,y) \in R^2 / 0 \leq x \leq \sqrt{2} ; 0 \leq y \leq 2 - x^2 \}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 y}{6}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x y^2}{8}$$

$$W = \oint F \cdot dr = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2-x^2} \left(\frac{x^2 y}{6} - \frac{x y^2}{8} \right) dy\, dx$$

$$W = \oint F \cdot dr = -0{,}0150026\ldots$$

$$W = -0{,}01$$

④ Considere el campo de fuerzas

$F(x;y;z) = (y+z)i + (x+2z)j + (x+2y)K$

Calcule el trabajo realizado por el campo sobre una partícula que se desplaza por la curva C_1, definida por la función vectorial.

$r(t) = ti + (10-t)j + (b-\sqrt{t})K;\ 0 \leq t \leq b^2$, seguido por el segmento de recta C_2 hacia el punto $(b;0;0)$

$F(x;y;z) = \langle \overset{P}{y+z};\ \overset{Q}{x+2z};\ \overset{R}{x+2y} \rangle$

a = 8
b = 6

$r(t) = \langle t;\ 10-t;\ 6-\sqrt{t} \rangle \ /\ 0 \leq t \leq 36$

$* \ r(0) = \langle 0;\ 10;\ 6 \rangle \qquad * \ r(36) = \langle 36;\ -26;\ 0 \rangle$

$P = y+z$
$Q = x+2z$
$R = x+2y$

$$\text{rot}\,F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)K$$

$\text{rot}\,F = (2-2)i - (1-1)j + (1-1)K$

$\text{rot}\,F = (0)i - (0)j + (0)K = \langle 0;\ 0;\ 0 \rangle$

$r(t) = A + (C-A)t;\ 0 \leq t \leq 1$

$r(t) = \langle 0;10;6 \rangle + \langle 6;-10;-6 \rangle t$

$r(t) = \langle \underset{x}{6t};\ \underset{y}{10-10t};\ \underset{z}{6-6t} \rangle$

$r'(t) = \langle 6;\ -10;\ -6 \rangle$

$F(r(t)) = \langle 10-10t+6-6t;\ 6t+2(6-6t);\ 6t+2(10-10t) \rangle$

$= \langle 16-16t;\ 12-6t;\ 20-14t \rangle$

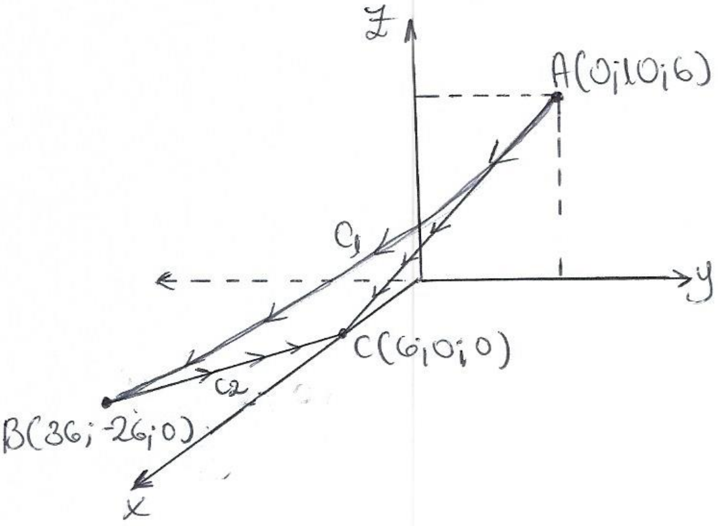
$F(r(t)) \circ r'(t) = \langle 16-16t;\ 12-6t;\ 20-14t \rangle \langle 6;-10;-6 \rangle$

$\langle 96-96t-120+60t-120+84t \rangle$

$\langle -144+48t \rangle$

$$W = \int_C F.dr = \int_0^1 (-144+48t)\,dt = -120$$

$W = -120J$


Z
A(0;10;6)
y
C1
C(6;0;0)
c2
B(36;-26;0)
x

⑤ Un resorte tiene forma de una hélice circular $x = \text{Cos } t$, $y = \text{Sen} t$ y $z = t$; $0 \leq t \leq 2\pi$. Si la densidad en cualquier punto de la hélice circular es numericamente igual a "b" veces de la distancia del punto al plano xy. Grafique manualmente el resorte en forma de hélice, determine la masa y longitud de la hélice del resorte.

$$C \begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen } t \; / \; 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = t \end{cases}$$

$$r(t) = < \text{Cos } t ; \text{Sen } t ; t >$$

$$r'(t) = < -\text{Sen } t ; \text{Cos } t ; 1 >$$

$$\| r'(t) \| = \sqrt{(-\text{Sen} t)^2 + (\text{Cos} t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$ds = \| r'(t) \| dt \Rightarrow ds = \sqrt{2} dt$$

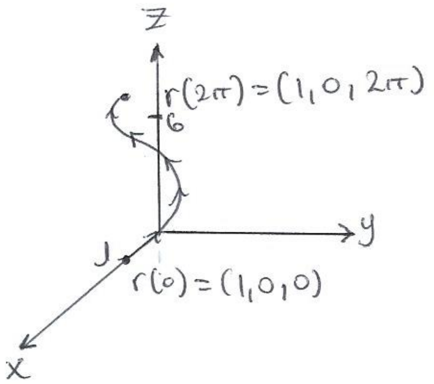
$$m = \delta(x, y, z) = 6z \rightarrow \delta(x, y, z) = 6t$$

$$m = \int_C \delta(x, y, z) ds \rightarrow \int_0^{2\pi} 6 + \sqrt{2} dt = 167{,}4927408$$
$$= 167$$

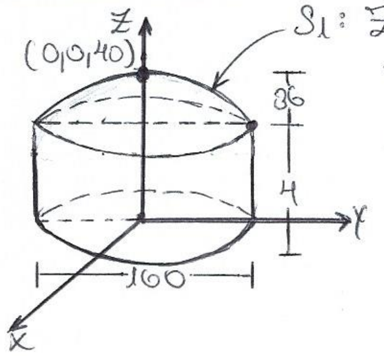
$$\mathcal{L}: \int_C 1 ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 8{,}885765875 = 8{,}89$$

↳ La masa es de 167

→ La Longitud es de 8,89



⑥ Proyecto Museo UPC en Lima - Perú, tomando como modelo arquitectónico el Museo de Louvre Abu Dhabi en los Emiratos Árabes unidos. La cúpula que envuelve el Louvre es una construcción del siglo XXI con forma de paraboloide circular y con dimensiones nunca vistas antes : 20a metros de diámetro, el punto más alto de la cúpula es de 40 metros sobre el piso, 36 metros sobre el nivel de la planta baja y aproximadamente 7,500 toneladas de acero (prácticamente lo mismo que la torre Eiffel) que se soportan únicamente por cuatro puntos de apoyo que se han ocultado.



$S_1: Z = a+b(x^2+y^2)$

$* (0,0,40) \in S_1: 40 = a+b(0^2+0^2)$

$40 = a$

$* (0,80,4) \in S_1: 4 = 40+b(0^2+80^2)$

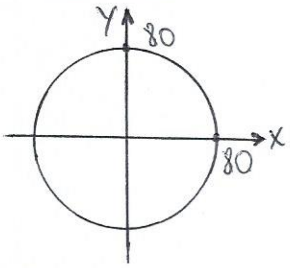
$-36 = b(80^2)$

$-\frac{9}{1600} = b$

$S_1: Z = 40 - \frac{9}{1600}(x^2+y^2)$

$S_2: x^2+y^2 = 80^2$

PLANO XY



$D = \{(r,\theta) / 0 \leq \theta \leq 2\pi ; 0 \leq r \leq 80\}$

$S_1: Z = 40 - \frac{9}{1600}(x^2+y^2)$

$1600(Z-40) = -9(x^2+y^2)$

$S_1: 9x^2+9y^2+1600(Z-40) = 0$

$f(x,y,z) = 9x^2+9y^2+1600(Z-40) \Rightarrow \nabla f = \langle f_x ; f_y ; f_z \rangle$

$\nabla f = \langle 18x ; 18y ; 1600 \rangle$

$\|\nabla f\| = \sqrt{(18x)^2+(18y)^2+(1600)^2}$

$\|\nabla f\| = \sqrt{324x^2+324y^2+(1600)^2}$

$\|\nabla f\| = 2\sqrt{81(x^2+y^2)+640000}$

$f_Z = 1600$

En Polar:

$\|\nabla f\| = 2\sqrt{81r^2+640000}$

$$A(S_1) = \iint 1\, dS = \iint_D 1 \cdot \frac{\|\nabla F\|}{|F_z|} = \int_0^{2\pi}\int_0^{80} \frac{2\sqrt{81r^2+640000}}{1600}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (3779,70292)\, d\theta \to (3779,70292)\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi$$

$$= (3779,70292)(2\pi) = 23748,57385 = 23\,749\ m^2$$

El Área de la superficie superior de la cupula es de
$23\,749\ m^2$

⑦

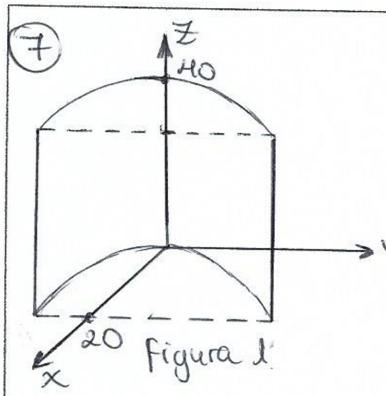
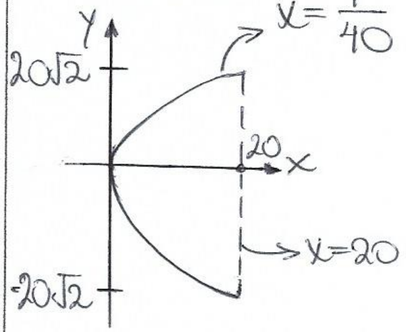


Figura 1

Supongamos que una empresa de logistica cuenta con un diseño de almacen que tiene la forma de la Figura 1 que consta basicamente de tres partes; una primera parte, desde la base hasta el techo del almacén se trata de un cilindro parabólico recto ($S_1: 40x = y^2$), y dos planos cuyos ecuaciones $S_2: z - x = 40$ y $S_3: x = 20$

PLANO XY



$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / -20\sqrt{2} \leq y \leq 20\sqrt{2} \,;\ \frac{y^2}{40} \leq x \leq 20 \right\}$$

a> Calcular el Área de la base del almacen:

$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_{-20\sqrt{2}}^{20\sqrt{2}} \int_{\frac{y^2}{40}}^{20} 1\, dx\, dy = \int_{-20\sqrt{2}}^{20\sqrt{2}} \left(20 - \frac{y^2}{40}\right) dy$$

$$= 754{,}2472333$$

El Área de la base del almacen es de $754{,}25\ m^2$

b> Calcule la capacidad del almacen:

$$V = \iint_D (40+x)\, dA = \int_{-20\sqrt{2}}^{20\sqrt{2}} \int_{\frac{y^2}{40}}^{20} (40+x)\, dx\, dy$$

$$V = \int_{-20\sqrt{2}}^{20\sqrt{2}} \left(40 + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\frac{y^2}{40}}^{20} dy$$

$$V = \int_{-20\sqrt{2}}^{20\sqrt{2}} \left(1000 - y^2 - \frac{y^4}{3200}\right) dy = 39\,220{,}86\,m^3$$

$\hookrightarrow$ $39\,220{,}86\,m^3 \times 75\% = 29\,415{,}65\ m^3$

b> Si bastara con almacenar 25 000 m^3, ya que la capacidad del almacen al 75% de su capacidad total es de 29 415,65 m^3

c> Costo de material:

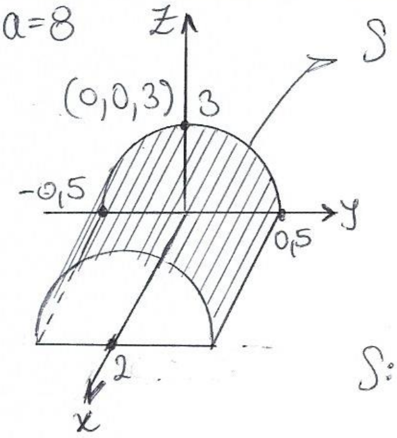
$$754{,}25\ m^2 \times \frac{\$5}{m^2} = 3\,771{,}25 = \$\ 3771$$

El costo total del material impermeable es de \$ 3771 dolares.

⑧ El invernadero tipo tunel, esta compuesto por una serie de arcos paralelos que parten desde el suelo y se unen entre sí mediante perfiles cilíndricos longitudinales, los cuales sirven para dar rigidez a la estructura y fijar el recubrimiento (plastico o mallas). Su forma proporciona resistencia a las lluvias y permiten el control de la temperatura, la humedad y otros factores ambientales que favorecen el desarrollo de las plantas

---

$a=8$



$S: Z = ay^2+b$

$* (0,0,3) \in S: \; 3 = a(0)^2+b$

$3 = b$

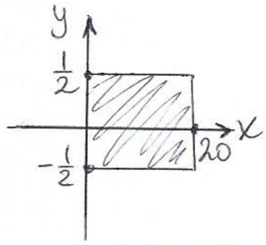
$* (0,\tfrac{1}{2},0) \; S: \; 0 = a(\tfrac{1}{2})^2+3$

$-3 = \tfrac{1}{4}a$

$a = -12$

$S: Z = -12y^2+3$

PLANO XY



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 20; -\tfrac{1}{2} \leq y \leq \tfrac{1}{2}\}$

$f(x,y,z) = z+12y^2-3 = 0 \Rightarrow \nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$

$\nabla f = \langle 0, 24y, 1 \rangle$

$$A(S) = \iint_S 1\, dS = \int_0^{20}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, dS$$

$\|\nabla f\| = \sqrt{(0)^2+(24y)^2+(1)^2}$

$\|\nabla f\| = \sqrt{576y^2+1}$

$|f_z| = 1$

$$\int_0^{20}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 \cdot \frac{\|\nabla f\|}{|f_z|}\, dA = \int_0^{20}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{576y^2+1}\, dy\, dx$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{20} \sqrt{576y^2+1}\, dx\, dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 20\sqrt{576y^2+1}\, dy$$

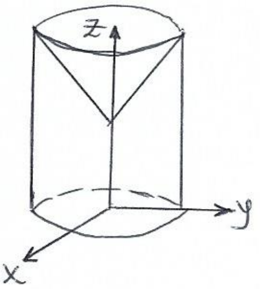
$$A(S) = \int_0^{20}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\, dS = 123{,}065767\ldots$$

Si el recubrimiento de la estructura cilindrica es una malla que cuesta 5 dolares el metro cuadrado ¿Cuál es el costo total de la malla?

$$123{,}065767\ m^2 \times \$\frac{5\,dls}{m^2} = 615{,}3288349$$

El costo total de la malla es de 615,32 dolares

⑨ S es la parte de la superficie $z=\sqrt{x^2+y^2}+1$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=1$, orientada hacia abajo y el campo vectorial $F(x,y,z)=<x,y,-z>$



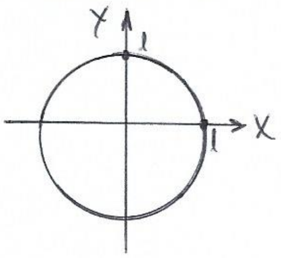
$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+1-z$$

$$S: f(x,y,z)=0$$

$$\nabla f=<f_x, f_y, f_z>$$

$$\nabla f=<\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} ; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} ; -1>$$

PIANO XY



$$|f_z|=|-1|=1$$

$$D=\{(r,\theta)/0\leq\theta\leq 2\pi ; 0\leq r\leq 1\}$$

$$\iint_S F.ds=\iint_S F.n\,dS=\iint_S F.\frac{\nabla f}{|f_z|}dA$$

$$\iint_S <x,y,-z>.\frac{<\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} ; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} ; -1>}{1}dA$$

$$\iint_S <\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} ; \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} ; \sqrt{x^2+y^2}+1>dA$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}+1\right)r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2}+1\right)r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{r^2}{r}+r+1\right)r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2r+1)\,r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1(2r^2+r)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(2\frac{r^3}{3}+\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^1 d\theta=\frac{7}{6}\int_0^{2\pi}(1)d\theta$$

$$=\frac{7}{6}\cdot 2\pi=\frac{7}{3}\pi$$

a> Calcule el flujo F a travéz de S.

$$\iint_S F. dS = \frac{7\pi}{3}$$

b> Determire la masa de la superficie

$$\delta(x,y,z) = z$$

$$\iint_S \delta(x,y,z) dS = \iint_S z . \frac{\nabla f}{|f_z|} dA$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 <\sqrt{x^2+y^2}+1><\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};-1> r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 <r+1><\frac{\cancel{r}Cos\theta}{\cancel{r}};\frac{\cancel{r}Sen\theta}{\cancel{r}};-1> r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (rCos\theta + Cos\theta + r Sen\theta + Sen\theta - r - 1) r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r(Cos\theta + Sen\theta - 1) + Cos\theta + Sen\theta - 1) r dr d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(Cos\theta + Sen\theta - 1) + r(Cos\theta + Sen\theta - 1) dr d\theta$$

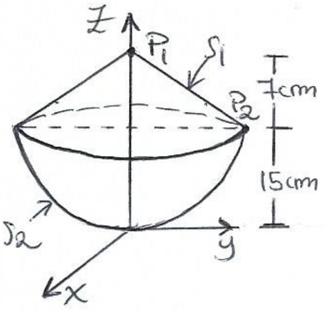
$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2+r)(Cos\theta + Sen\theta - 1) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(Cos\theta + Sen\theta - 1)\int_0^1 (r^2+r) dr d\theta = \frac{r^3}{3} + \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$$

$$= \frac{5}{6}\int_0^{2\pi}(Cos\theta + Sen\theta - 1) d\theta = \frac{5}{6}.(-2\pi) = -\frac{5\pi}{6}$$

La masa de la superficie es de $\frac{5\pi}{6}$

⑩ S es la frontera de la región que se muestra en la figura. La altura total de la región sólida es de 22 cm y esta formada por un semiesfero cuya centro está en el eje Z a una altura de 15 cm del suelo y la parte restante está formada por un semi cono circular, si consideramos el campo de fuerza $F(x,y,z) = \langle x^3y ; -x^2y^2 ; -x^2yz \rangle$.



$$S_1 : Z = a + b\sqrt{x^2+y^2}$$

$$P_1(0,0,22) \in S_1 : 22 \ a + b\sqrt{0^2+0^2}$$

$$22 = a$$

$$P_2(0,15,15) \in S_1 : 15 = 22 + b\sqrt{0^2+15^2}$$

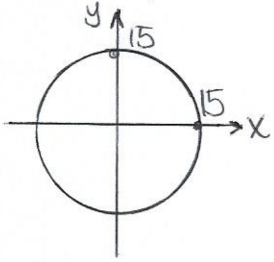
$$-\frac{7}{15} = b$$

$$S_1 : Z = 22 - \frac{7}{15}\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 22 - \frac{7}{15}r$$

$$S_2 : \underbrace{x^2+y^2}_{r^2} + (Z-15)^2 = 15^2 \rightarrow (Z-15)^2 = 225 - r^2$$

$$S_2 : Z = \pm\sqrt{225-r^2} + 15$$

PLANO XY



$$E = \left\{ (r,\theta,z) / 0 \leq \theta \leq 2\pi ,\ 0 \leq r \leq 15 \right.$$
$$\left. -\sqrt{225-r^2} + 15 \leq z \leq 22 - \frac{7}{15}r \right\}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial Z}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 3x^2y + (-2x^2y) + (-x^2y)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \underline{0}$$

$$\phi = \iint_S F . dS = \iiint_E \operatorname{div}(F) . dV = \iiint_E 0 \, dv = 0$$

El flujo atraves de S es 0