UNIVERSIDAD DE SAN CARLOS DE GUATEMALA
MATEMÁTICA BÁSICA 2
FACULTAD DE INGENIERÍA

AUTOR: LUIS E. MACK

PRIMER PARCIAL

Escuela de Vacaciones: Junio 2016

TEMA 1

a) Usando leyes de límites calcule:

$i)\ \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+ax}+x \qquad ii)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\tan(2x)+1-\cos(x)}{x\sec(x)} \qquad iii)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x+1|-|x-1|}{x}$

b) Si $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$ encuentre $f'(1)$ utilizando la definición de derivada como límite.

TEMA 2

a) Derive la función $F(x)=\left(\dfrac{3}{x^3}-2x^2\right)^2+x^3\tan\left(\dfrac{2}{x}\right)+\operatorname{sen}^{-1}(2^x)$

b) Sea $h(x)=f\Big[\operatorname{sen}(x)\cdot g(x)\Big]$. Halle $g'(\pi/3)$; si $g(\pi/3)=2$, $f'(\sqrt{3})=2$ y $h'(\pi/3)=4$

c) Si $xy^2+x^2y=2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(1,1)$

TEMA 3

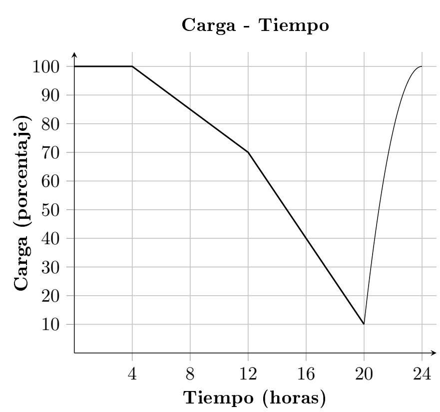
a) Encuentre los valores de a y b tales que la función f sea continua y derivable en todos los números reales.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+a & si\ x\le 2 \\ bx^3 & si\ x>2 \end{cases}$$

b) Después de encontrarlos, halle una fórmula para $f'(x)$ y grafíquela

TEMA 4

En cierto día de uso, la curva de carga y descarga en porcentaje de la batería de un teléfono móvil que presenta en la pantalla está dada por la función $C=f(t)$ que se muestra en la figura



a) Elabore una gráfica de $C'(t)$ (razón de cambio instantánea de la carga con respecto al tiempo), explicando su procedimiento. No se tomará en cuenta sin explicación.

b) Determine los intervalos donde la razón de cambio instantánea es continua y en qué horas es discontinua

TEMA 1

a) Primero sustituímos al límite negativo por un límite positivo, notando que para mantener el límite igual, se debe cambiar todas las x por $-x$ y tenemos

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+ax}+x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-ax}-x$$

Luego para eliminar los negativos, multiplicamos tanto arriba como abajo por $\sqrt{x^2-ax}+x$ de tal manera que no alteramos el límite y con ello

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-ax}-x=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-ax}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2-ax}+x}{\sqrt{x^2-ax}+x}$$

Para finalizar, multiplicamos $\sqrt{x^2-ax}-x$ con $\sqrt{x^2-ax}+x$ lo que es una diferencia de cuadrados, mientras que en el denominador sacamos factor común x, se sigue

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-ax}-x)\cdot\frac{\sqrt{x^2-ax}+x}{\sqrt{x^2-ax}+x}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-ax}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-ax}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax-x^2}{x\left(\sqrt{1-\cancelto{0}{\frac{a}{x}}}+1\right)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-a}{\sqrt{1}+1}=\boxed{-\frac{a}{2}}\end{aligned}$$

ii) Para este límite primero separamos la fracción como suma de dos fracciones de la siguiente manera

$$\lim_{x\to0}\frac{4\,\tan(2x)+1-\cos(x)}{x\,\sec(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4\,\tan(2x)}{x\,\sec(x)}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x\,\sec(x)}$$

Trabajamos ambos límites, notando que $\sec(x)\to1$, cuando $x\to0$, que $\tan(2)=\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}$ y además que $\cos(nx)\to1$ cuando $x\to0$ por consiguiente

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{4\,\tan(2x)}{x\,\sec(x)}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x\,\sec(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{4\,\operatorname{sen}(2x)}{x\,\cancelto{1}{\cos(2x)}\,\cancelto{1}{\sec(x)}}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x\,\cancelto{1}{\sec(x)}}\\&=\lim_{x\to0}\frac{4\,\operatorname{sen}(2x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}\end{aligned}$$

Para finalizar, recordemos que $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{nx}=1$ y que $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$ y con ello concluímos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{4\,\tan(2x)+1-\cos(x)}{x\,\sec(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{4\,\operatorname{sen}(2x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(x)}{x}\\&=8\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}+0=\boxed{8}\end{aligned}$$

iii) Al igual que en el inciso *i*) multiplicamos arriba y abajo por $|x+1|+|x-1|$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{|x+1|-|x-1|}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{|x+1|-|x-1|}{x}\cdot\frac{|x+1|+|x-1|}{|x+1|+|x-1|}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\left(|x+1|\right)^2-\left(|x-1|\right)^2}{x\,\overset{2}{\left(|x+1|+|x-1|\right)}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x+1-x^2-1+2x}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x} = \boxed{2}
\end{aligned}
$$

Donde el hecho que $\left(|x+1|\right)^2 = x^2+2x+1$ y que $\left(|x-1|\right)^2 = x^2-2x+1$ se debe a que al elevar al cuadrado a cualquier número real resulta siempre un número positivo y por lo tanto se puede eliminar el valor absoluto.

b) A partir de la definición de la derivada

$$
\begin{aligned}
f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{3}{\sqrt{x+h}-2}-\frac{3}{\sqrt{x}-2}\right)\cdot\frac{1}{h}\\
&= 3\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x+h}+2}{h(\sqrt{x+h}-2)(\sqrt{x}-2)}\\
&= 3\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h(\sqrt{x+h}-2)(\sqrt{x}-2)}
\end{aligned}
$$

Multiplicamos por $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}$ para formar una diferencia de cuadrados y simplificamos

$$
\begin{aligned}
3\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h(\sqrt{x+h}-2)(\sqrt{x}-2)} &= 3\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h(\sqrt{x+h}-2)(\sqrt{x}-2)}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}\\
&= 3\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{h(\sqrt{x+h}-2)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}\\
&= 3\lim_{h\to 0}-\frac{1}{(\sqrt{x+h}-2)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}
\end{aligned}
$$

Como al evaluar el límite, no hay nada indeterminado simplemente hacemos todas las h iguales a 0 y concluímos

$$
\begin{aligned}
f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= 3\lim_{h\to 0}-\frac{1}{(\sqrt{x+h}-2)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}\\
&= -\frac{3}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}-2)^2}
\end{aligned}
$$

Así que

$$
f'(1) = -\frac{3}{2\sqrt{1}\,(\sqrt{1}-2)^2} = \boxed{-\frac{3}{2}}
$$

TEMA 2

a) Aprovechando la regla de la cadena $(f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)$ para derivar tanto $\left(\frac{3}{x^3} - 2x^2\right)^2$ como $\operatorname{sen}^{-1}(2^x)$ y empleando la regla del producto $\big(g(x)f(x)\big)' = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$ para derivar $x^3 \tan\left(\frac{2}{x}\right)$ conseguimos

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2\Big(\frac{3}{x^3} - 2x^2\Big)\left(\frac{3}{x^3} - 2x^2\right)' + x^3\left(\tan\left(\frac{2}{x}\right)\right)' + 3x^2 \tan\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-2^x}}\,(2^x)' \\
&= 2\Big(\frac{3}{x^3} - 2x^2\Big)\left(-\frac{9}{x^4} - 4x\right) + x^3 \sec^2\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{2}{x}\right)' + 3x^2 \tan\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{2^x}{\log_2(e)\,\sqrt{1-2^x}} \\
&= 2\Big(\frac{3}{x^3} - 2x^2\Big)\left(-\frac{9}{x^4} - 4x\right) + x^3 \sec^2\left(\frac{2}{x}\right)(-2x^{-2}) + 3x^2 \tan\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{2^x}{\log_2(e)\,\sqrt{1-2^x}} \\
&= \boxed{2\Big(\frac{3}{x^3} - 2x^2\Big)\left(-\frac{9}{x^4} - 4x\right) + -2x \sec^2\left(\frac{2}{x}\right) + 3x^2 \tan\left(\frac{2}{x}\right) + \frac{2^x}{\log_2(e)\,\sqrt{1-2^x}}}
\end{aligned}$$

b) Al igual que el ejercicio anterior, aplicamos tanto la regla de la cadena como la regla del producto para derivar $h(x)$

$$\begin{aligned}
h'(x) = \Big(f\Big[\operatorname{sen}(x)\cdot g(x)\Big]\Big)' &= f'\Big(\operatorname{sen}(x)\cdot g(x)\Big)\big(\operatorname{sen}(x)\cdot g(x)\big)' \\
&= f'\Big(\operatorname{sen}(x)\cdot g(x)\Big)\big(\operatorname{sen}(x)\,g'(x) + \cos(x)\,g'(x)\big)
\end{aligned}$$

Ahora valuamos en $x = \pi/3$ y sustituimos los valores que nos han dado.

$$\begin{aligned}
h'(\pi/3) &= f'\Big(\operatorname{sen}(\pi/3)\cdot g(\pi/3)\Big)\big(\operatorname{sen}(\pi/3)\,g'(\pi/3) + \cos(\pi/3)\,g(\pi/3)\big) \\
4 &= f'\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\Big)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,g'(\pi/3) + \frac{1}{2}\cdot 2\Big) \\
&= f'(\sqrt{3})\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,g'(\pi/3) + 1\Big) = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\,g'(\pi/3) + 1\Big) = \sqrt{3}\,g'(\pi/3) + 2
\end{aligned}$$

Despenjando llegamos a $g'(\pi/3) = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

c) Derivamos ambas variables utilizando derivación implícita

$$\begin{aligned}
(xy^2 + x^2y = 2)' \\
(xy^2)' + (x^2y)' = 0
\end{aligned}$$

Ahora por la regla del producto y regla de la cadena

$$2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 0$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$$

Lo cual por definición de derivada es la pendiente de la recta tangente para cualquier punto de la ecuación, por ende para (1,1) la pendiente de la recta tangente a la ecuación que pasa por el punto es

$$m = -\frac{1^2 + 2(1)(1)}{1^2 + 2(1)(1)} = -1$$

y usando punto pendiente encontramos la ecuación de la recta la cual es

$$(x-1) = m(y-1)$$

$$(x-1) = -(y-1)$$

$$x = \boxed{-y+2}$$

TEMA 3

a) Pimero para que sea contínua $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(x)$ (en el resto de puntos ya es continua y diferenciable) en otras palabras

$$\lim_{x\to 2^-} x^2 + a = \lim_{x\to 2^+} bx^3$$

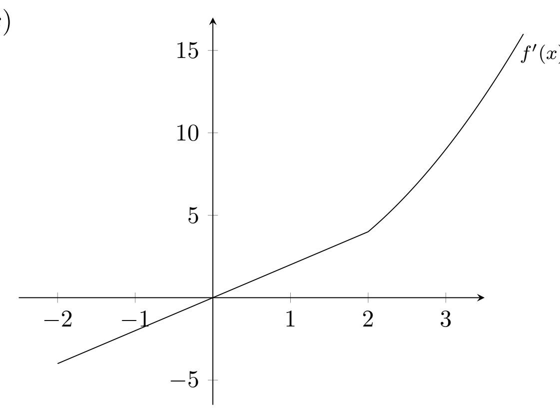
$$2^2 + a = 2^3 b$$

$$a = 8b - 4$$

Por otro lado, para que sea diferenciable, $f'(2^-) = f'(2^+)$ (derivada por la izquierda igual que derivada por la derecha) luego $f'(x^-) = (x^2+a)' = 2x$, $f'(x^+) = (bx^3)' = 3x^2 b$ y

$$f'(2^-) = 2(2) = 3(2^2)b = f'(2^+)$$

$$4 = 12b$$



Gráfica 1: $y = f'(x)$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones llegamos a que $b = \boxed{1/3}$ y $a = \boxed{-4/3}$

b) Para terminar, hacemos

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\, x \leq 2 \\ x^2 & si\, x > 2 \end{cases}$$

Por último graficamos, como se hizo en la Gráfica 1.

TEMA 4

a) En el intervalo de $(0, 4]$, la pendiente de dicha recta es cero por lo que $C'(t) = 0$, luego de $(4, 12]$, deciende 30 en el eje de carga y avanza 8 en el eje del tiempo, así que $C'(t) = -30/8 = -3.75$, de $(12, 20]$ se mueve 60 unidades hacia abajo y 8 unidades a la derecha por lo que la pendiente en dicho intervalo es $C'(t) = -60/8 = -7.5$.

Para el último intervalo, el cuaal es $(20, 24]$, hay que hacer algo diferente, primero debemos encontrar la ecuación de la parábola descrita en dicho intervalo y luego derivar para saber la pendiente, recordemos la fórmula

$$C(t) = a(t - h)^2 + k$$

donde (h, k) son las coordenadas del vértice, como éste tiene coordenadas $(24, 100)$ entonces $h = 24$ y $k = 100$, para encontrar a valuamos en algún otro punto de la parábola, entre los cuales se encuentra el punto $(20, 10)$, se sigue

$$10 = a(20 - 24)^2 + 100$$

$$-90 = 16a$$

$$a = -90/16 = -5.625$$

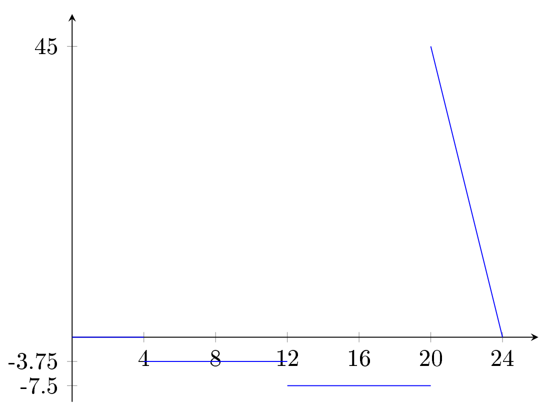
Así que la ecuación de la parábola es

$$C(t) = -5.625(t - 24)^2 + 100$$

derivando llegamos a

$$C'(t) = -11.25(t - 24), \text{ Con } 20 < t \leq 24$$

Con esta información se puede graficar como se hizo en la gráfica 2.



Gráfica 2: $y = C'(t)$

b) A partir de la gráfica 2 es fácil ver que los puntos de discontinuidad de $C'(t)$, se dan en $t = 4$, en $t = 12$, y en $t = 20$, por otro lado los intervalos en los que la derivada es continua son $(0, 4)$, $(4, 12)$, $(12, 20)$ y $(20, 24)$.