Universidad de San Carlos de Guatemala

Apuntes de clase

Matemática Intermedia I

Primer Semestre 2018

Luis
Alvarado

Matrices

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos que se denotan por a_{ij} y la matriz se denota por:

$$A = \left(a_{ij}\right)$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \cdots, n$$

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

TAMAÑO O FORMA

Tamaño

Viene dado por el número de filas y por el número de columnas. Las filas se denotan por la letra **m** y las columnas por la letra **n**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz } 2\times 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz } 2\times 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{es una matriz } 3\times 2$$

Matriz rectangular

$m \neq n$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz cuadrada

$m = n$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular

Es una matriz cuadrada para la cual:

Triangular superior

$a_{ij} = 0$ si $i > j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

$a_{ij} = 0$ si $i < j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

$a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Es una matriz diagonal en que todos los elementos de la diagonal son 1 y se denota por I o I_n o $I_{n\times m}$.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRANSPUESTA

Sea A una matriz $m \times n$, la matriz transpuesta de A se denota como A^T, y es una matriz $n \times m$ que resulta de intercambiar filas por columnas de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES CON MATRICES

Suma

Sea A y B dos matrices $m \times n$, la suma se denota $A+B$, la condición para poder sumar dos matrices es que ambas deben tener el mismo número de filas como de columnas, y se define como:

$$A = \left(a_{ij}\right) \text{ y } B = \left(b_{ij}\right)$$

$$A \pm B = \left(a_{ij} \pm b_{ij}\right)$$

Multiplicación por un escalar

Sea A una matriz $m \times n$ y k un escalar, la multiplicación de k por A se denota por kA y se define como:

$$kA = \left(ka_{ij}\right)$$

Multiplicación de matrices

Sea A una matriz $m \times p$ y B una matriz $p \times m$. La multiplicación $A \times B$ se denota AB, la matriz resultante C es una matriz $m \times m$. Y cada elemento esta definido como:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Potencia de matrices

La potencia de una matriz cuadrada $m \times m$ se denota por A^n donde n es un entero positivo y se define como:

$$A^0 = I_m$$

$$A^1 = A$$

$$A^2 = AA$$

$$A^3 = AAA$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n veces}}$$

Propiedades

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $0A = 0$
5. $(k + r)A = kA + rA$
6. $k(A + B) = kA + kB$
7. $krA = k(rA) = r(kA) = (rk)A$
8. $A - A = 0$
9. $A(B + C) = AB + AC$
10. $(A + B)C = AC + BC$
11. $A(BC) = (AB)C = B(AC)$
12. $I_m A = AI_n = A$
13. $(A^T)^T = A$
14. $(A + B)^T = A^T + B^T$
15. $(AB)^T = B^T A^T$
16. $(kA)^T = kA^T$
17. $A^r A^k = A^{r+k}$
18. $(A^r)^k = A^{rk}$

Sistemas de ecuaciones y matrices

Para un sistema de m ecuaciones y n variables.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

FORMA MATRICIAL

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

A matriz de cofactores:

X matriz de las incognitas:

B matriz de valores independientes:

Ejemplo:

$$2x + y - 4z + w = 3$$

$$x - y + 5z - w = -8$$

$$\begin{pmatrix} +2 & +1 & -4 & +1 \\ +1 & -1 & +5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

MATRIZ AUMENTADA

Es la matriz que se obtiene al aumentar una columna al final de la matriz de coeficientes que son los valores independientes del sistema.

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} +2 & +1 & -4 & +1 & \vdots & +3 \\ +1 & -1 & +5 & -1 & \vdots & -8 \end{pmatrix}$$

OPERACIONES DE EQUIVALENCIA (ELEMENTALES) EN MATRICES

Intercambiar filas

$$F_i \to F_j$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Una fila por un factor

$$F_i \to kF_i$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to 3F_2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

A una fila se le suma k veces otra fila

$$F_i \to F_i + kF_j$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 13 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALONADA

Es una matriz rectangular que cumple con:

1. $a_{11} = 1$
2. El primer elemento diferente de cero de cada fila es 1 y esta a la derecha del primer 1 de la fila anterior.
3. Las filas o la fila formada solo de ceros esta o están como ultimas filas de la matriz.

Ejemplos

Si	No
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA

Es una matriz escalonada donde los elementos de arriba de los primeros unos de cada fila son ceros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MÉTODO DE GAUSS

Pasos:

1. Formar la matriz aumentada del sistema.
2. Transformar la matriz aumentada en una matriz escalonada utilizando las operaciones de equivalencia.
3. Encontrar la solución del sistema comenzando por la última fila y luego para arriba de fila en fila.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS Y NO HOMOGÉNEOS

Sea $AX = B$.
Si $B = 0$ entonces el sistema es homogéneo.
Si $B \neq 0$ entonces el sistema no es homogéneo.

INFINITAS SOLUCIONES DE UN SISTEMA NO HOMOGÉNEO

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{sol.particularSnH} \underbrace{+a \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \cdots + m \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}}_{sol.generaldelSH}}_{sol.generalSnH}$$

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

En principio es igual al método de Gauss solo que la matriz se lleva a escalonada reducida.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. El determinante de A se denota como $|A|$ y es un escalar que se le asigna, de la siguiente forma:

a. 1×1

$$\text{Si} \quad A = (a_{ij}) \Longrightarrow |A| = a_{ij}$$

b. 2×2

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

c. 3×3

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$
$$+a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

MATRIZ MENOR DE A

Sea A una matriz $n \times n$, la matriz menor de A se denota por A_{ij} es una matriz $(n-i) \times (n-j)$, que se obtiene de quitar la fija i y la columna j.

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

COFACTORES

Sea A una matriz $n \times n$, el cofactor denotado por C_{ij} se define como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

DETERMINANTES POR COFACTORES

Por fila i

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Por columna j

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

PROPIEDADES DE DETERMINANTES

1. $|A^T| = |A|$
2. Si A tiene dos filas o columnas idénticas $\therefore |A| = 0$

3. Si tiene una fila o columna solo de ceros $\therefore |A| = 0$
4. Si A es triangular $\therefore |A| = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{mn}$
5. Sea B la matriz que se obtiene de A.
   a) Al intercambiar filas o columnas.
   $$|A| = -|B|$$
   b) Al multiplicar un escalar k por una fila.
   $$|A| = \frac{1}{k}|B|$$
   c) $A \xrightarrow{F_n - kF_r} B$
   $$|A| = |B|$$

MATRIZ DE COFACTORES

Sea A una matriz $n \times n$, la matriz de cofactores de A, se define por:

$$\text{Cof}A = (C_{ij})$$

MATRIZ ADJUNTA

Sea A una matriz $n \times n$, la matriz adjunta de A se denota por Adj$A$ y se define por:

$$\text{Adj}A = (\text{Cof}A)^T$$

MATRIZ INVERSA

Sea A una matriz $n \times n$ y $|A| \neq 0$. La matriz inversa de A denotada por A^{-1} se define por:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Primer método para encontrar A^{-1}
Por operaciones de equivalencia

Se escribe a la par de la matriz la matriz identidad, luego con operaciones de equivalencia se trata de obtener la matriz identidad del lado derecho.

$$(A|I) \rightarrow \left(I|A^{-1}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Segundo método para encontrar A^{-1} - Por matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}A$$

TERCER MÉTODO DE SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES - POR MATRIZ INVERSA

$$AX = B$$

Donde A es $n \times n$ entonces:

$$X = A^{-1}B$$

TEOREMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES - DETERMINANTE E INVERSA

Sea A una matriz $n \times n$

1. Si $|A| \neq 0 \Rightarrow AX = B$ tiene solución unica.
   Y es $X = A^{-1}B$.
2. Si $|A| = 0 \Rightarrow AX = B$ no tiene solución.
3. Si $|A| \neq 0 \Rightarrow AX = 0$ tiene solución única, y es la solución trivial.
4. Si $|A| = 0 \Rightarrow AX = 0$ tiene infinitas soluciones.

Tecnicas de Integración

SUSTITUCIÓN DIRECTA

Aunque no es el cometido de este curso, es bueno recalcar el buen uso de la regla de la susticución directa al momento de resolver integrales. La forma general de la regla de la sustitución directa para el caso especial de una funcion de x elevada a una potencia n es la siguiente:

$$\int \left[f\left(x\right)\right]^{n} f'\left(x\right) \, \mathrm{dx} = \frac{1}{n+1} \left[f\left(x\right)\right]^{n+1} + \mathbb{C}$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

Orden recomendado para elegir la función u:

1. Logaritmos
2. Trigonométricas inversas
3. Algebraicas
4. Trigonométricas
5. Exponenciales

Método

Algunas integrales del tipo

$$\int x^{n} f\left(x\right) \, dx$$

donde $f\left(x\right)$ puede ser una función trigonométrica o una función exponencial. Cuando es este caso, hay una forma rápida de encontrar al integral. Se realiza una tabla de la siguiente manera:

d/dx	$\int dx$
x^{n}	$f^{(n)}\left(x\right)$
$n \, x^{n-1}$	$f^{(n-1)}\left(x\right)$
$n\left(n-1\right) x^{n-1}$	$f^{(n-2)}\left(x\right)$
$\vdots$	$\vdots$
0	$f\left(x\right)$

En la primera columna se ponen las n derivadas de x^{n} hasta 0, y en la segunda columna la función $f\left(x\right)$ como la n-cima derivada, ósea $f^{(n)}\left(x\right)$, y se integra n veces. Para le integral se multiplica la primera derivada con la primera integral, la segunda derivada con la segunda integral, y así sucesivamente alternando los signos empezando con $(+)$. Tomar en cuenta que $f^{(n)}\left(x\right)$ no es la primera integral.

INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n} x \, dx$

- Si la potencia del coseno es impar $(n = 2k+1)$, extraemos un factor coseno y utilizamos la identidad pitagórica para expresar los factores restantes en términos del seno:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{2k+1} x \, dx &= \int \operatorname{sen}^{m} x (\cos^{2} x)^{k} \cos x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen}^{m} x \left(1 - \operatorname{sen}^{2} x\right)^{k} \cos x \, dx \end{aligned}$$

  Después sustituimos $u = \operatorname{sen} x$

- Si la potencia del seno es impar $(n = 2k+1)$, extraemos un factor seno y utilizamos la identidad pitagórica para expresar los factores restantes en términos del coseno:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^{n} x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^{2} x)^{k} \cos^{n} x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int \left(1 - \cos^{2} x\right)^{k} \cos^{n} x \operatorname{sen} x \, dx \end{aligned}$$

  Después sustituimos $u = \cos x$.

  Si la potencia de ambos, seno y coseno, es impar, puede utilizarse ambas técnicas.

- Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares, utilizamos las identidades del ángulo medio

$$\cos^{2} x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right)$$

$$\operatorname{sen}^{2} x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^{m} x \sec^{n} x \, dx$

A diferencia del caso anterior anterior en este hay cuatro permutaciones, a continuacion se exponen todas:

- Si la potencia de ambos, tangente y secante, son pares $(m = n = 2k)$. Extraemos un factor $\sec^{2} x$ y utilizamos la identidad pitagórica para expresar

$\sec^{2k-2} x$ en terminos de la tangente.

$$\int \tan^{2k} \sec^{2k} x\ dx = \int \tan^{2k} x \sec^{2k-2} x \left(\sec^2 x\right)\ dx$$

$$= \int \tan^{2k} x \left(\tan^2 x + 1\right)^{2k-2} \left(\sec^2 x\right)\ dx$$

Después sustituimos $u = \tan x$.

- Si la potenca de la tangente es impar $(m = 2k+1)$ y la de la secante es par $(n = 2k)$. Extraemos un factor $\sec^2 x$ y utlilizamos la identidad pitagórica para expresar $\sec^{2k-2} x$ en terminos de la tangente.

$$\int \tan^{2k+1} \sec^{2k} x\ dx = \int \tan^{2k+1} x \sec^{2k-2} x \left(\sec^2 x\right)\ dx$$

$$= \int \tan^{2k+1} x \left(\tan^2 x + 1\right)^{2k-2} \left(\sec^2 x\right) dx$$

Después sustituimos $u = \tan x$.

- Si las potencias de ambos, tangente y secante, son impares $(m = n = 2k+1)$. Extraemos un factor $\tan x \sec x$ y utilizamos la identidad pitagórica para expresar $\tan^2 kx$ en terminos de la secante.

$$\int \tan^{2k+1} \sec^{2k+1} x\ dx = \int \sec^{2k} x \tan^{2k} x \left(\tan x \sec x\right)\ dx$$

$$= \int \sec^{2k} x \left(\sec^2 x - 1\right)^{k} \left(\tan x \sec x\right)\ dx$$

Después sustituimos $u = \sec x$.

- Si la potencia de la tangente es par $m = 2k$ y la de la secante es impar $n = 2k+1$. Esta integral no puede solucionarse completando el diferencial de la tangente o la secante, se utiliza integracíon por partes y es muy trabajoso. Utilizamos la identidad pitagórica para expresar $\tan^{2k} x$ en términos de la secante.

$$\int \tan^{2k} \sec^{2k+1} x\ dx = \int \sec^{2k+1} \left(\sec^2 x - 1\right)^{2k}\ dx$$

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen}^n x$ dx

Para el caso $n > 2$, se extrae un factor de seno:

$$\int \operatorname{sen}^n x \text{ dx} = \int \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x \text{ dx}$$

por medio de integración por partes, tomando como $u = \operatorname{sen}^{n-1} x$ y $dv = \operatorname{sen} x$:

$$u = \operatorname{sen}^{n-1} x \qquad dv = \operatorname{sen} x$$

$$du = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \qquad v = -\cos x$$

reestructurando la integral:

$$-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \text{ dx}$$

luego se usa la tecnica de integración número (1) de esta sección.

Estrategia para la evaluación de $\int \cos^n x$ dx

Para el caso $n > 2$, se extrae un factor de coseno:

$$\int \cos^n x \text{ dx} = \int \cos^{n-1} x \cos x \text{ dx}$$

por medio de integración por partes, tomando como $u = \cos^{n-1} x$ y $dv = \cos x$:

$$u = \cos^{n-1} x \qquad dv = \cos x$$

$$du = -(n-1) \cos^{n-2} x \operatorname{sen} x \qquad v = \operatorname{sen} x$$

reestructurando la integral:

$$\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \operatorname{sen}^2 x \text{ dx}$$

luego se usa la tecnica de integración número (1) de esta sección.

Estrategia para la evaluación de $\int \sec^n x$ dx

Para el caso $n > 2$, se extrae un factor $\sec^2 x$:

$$\int \sec^n x \text{ dx} = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x \text{ dx}$$

por medio de integración por partes, tomando como $u = \sec^{n-2} x$ y $dv = \sec^2 x$:

$$u = \sec^{n-2} x \qquad dv = \sec^2 x$$

$$du = (n-2) \sec^{n-2} x \tan x \qquad v = \tan x$$

reestructurando la integral:

$$\sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \tan^2 x \text{ dx}$$

usando la identeidad pitagorica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:

$$\sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x \left(\sec^2 x - 1\right) \text{ dx}$$

reduciendo terminos semejantes:

$$\sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x \text{ dx} + (n-2) \int \sec^{n-2} x \text{ dx}$$

la dificultad de la integración de las potencias de secante es que resulta en una integración cíclica, para resolverla tomamos en cuenta la propiedad de transitividad y tratamos como ecuación la integral, donde la incógnita es la integral de la potencia de la secante la cual se encuentra del lado izquierdo con coeficiente 1 y del lado derecho con coeficiente $2-n$ por lo tanto el despeje seriá:

$$\int \sec^n x \ \mathrm{dx} = \frac{1}{n-1}\left[\sec^{n-2} x \tan x + (n-2)\int \sec^{n-2} x \ \mathrm{dx}\right]$$

Estrategia para la evaluación de $\int \csc^n x \ \mathbf{dx}$

Igual que la integral de las potencias de la secante, la integral de las potencias de cosecante generan integrales cíclicas, se resuelven de forma analoga a las de secante.

Estrategia para la evaluación de $\int \tan^n x \ dx$

Se extrae un factor $\tan^2 x$ y se utiliza la identidad pitagorica $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

$$\begin{aligned}
\int \tan^n x \ \mathrm{dx} &= \int \tan^{n-2} \tan^2 x \ \mathrm{dx} \\
&= \int \tan^{n-2} \left(\sec^2 x - 1\right) \mathrm{dx} \\
&= \int \sec^2 x \tan^{n-2} \ \mathrm{dx} - \int \tan^{n-2} \ \mathrm{dx} \\
&= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-4} \tan^2 x \ \mathrm{dx} \\
&= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-4} \left(\sec^2 x - 1\right) \mathrm{dx} \\
&= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \sec^2 x \tan^{n-4} \ \mathrm{dx} + \int \tan^{n-4} \ \mathrm{dx} \\
&= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tan^{n-3} x}{n-3} + \int \tan^{n-6} \tan^2 x \ \mathrm{dx}
\end{aligned}$$

y asi cuantas veces sea necesario para volver la potencia de tangente en $\tan^2 x$ o $\tan x$.

Estrategia para la evaluación de $\int \cot^n x \ \mathbf{dx}$

De una forma analoga que para las potencias de tangente, se extrae un factor $\cot^2 x$ y se utiliza la identidad pitagorica $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ las veces que sea necesario para reducir la potencia en $\cot^2 x$ o $\cot x$.

Estrategia para la evaluación de $\int \operatorname{sen} mx \cos nx \ \mathbf{dx}$, $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \ \mathbf{dx}$ y $\int \cos mx \cos nx \ \mathbf{dx}$

Para evaluar las inegrales utilizamos la identidad correspondiente:

$$\operatorname{sen} A \ \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\right]$$

$$\operatorname{sen} A \ \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

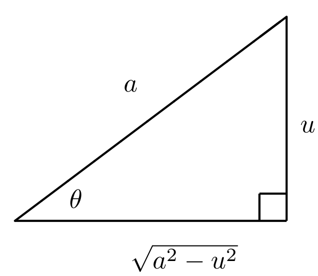
$$\cos A \ \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

a es una constante y u una función de x. Para esta técnica se construye un triángulo rectángulo utilizando las diferentes partes de la integral que se esta analizando. A continuacióan se describen los tres posibles casos con su triángulo respectivo.

Caso 1 $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, dx$

Se utiliza el siguiente triángulo para las sustituciones:



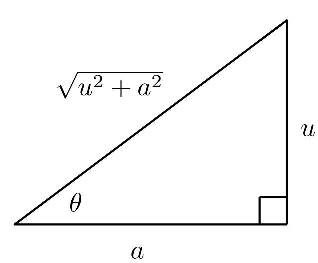
Sustituciones:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{u}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$$

Caso 2 $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, dx$

Se utiliza el siguiente triángulo para las sustituciones:



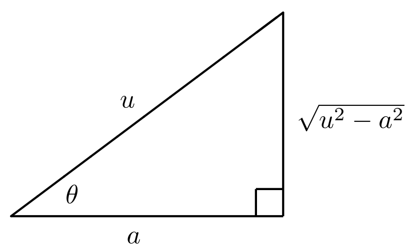
Sustituciones:

$$\tan\theta = \frac{u}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

Caso 3 $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, dx$

Se utiliza el siguiente triángulo para las sustituciones:



Sustituciones:

$$\sec\theta = \frac{u}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a}$$

FRACCIONES PARCIALES

Fracción racional: cociente de dos polinomios.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Fraciones Racionales

- Propias: si el grado del polinomio del numerador es menor al del denominador.
- Impropias: si el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el del denominador.

$$\text{FRI} = \text{polinomio} + \text{FRP}$$

Fraciones Racionales Propias

- Simples: no se pueden descomponer.
- Compuestas: se pueden descomoner en la suma de FRPS.

Fracciones Racionales Propias Simples

1. $$\frac{A}{x+a}$$
2. $$\frac{A}{(x+a)^n}$$
3. $$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$
4. $$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Integral de una FRI

$$\int \text{FRI}\, dx = \int \text{polinomio}\, dx + \int \text{FRP}\, dx$$

Integrales de las FRPS

1. $$\int \frac{A}{x+a}\, dx = A\, ln\, |x+a| + C$$
2. $$\int \frac{A}{(x+a)^n}\, dx = \frac{A}{1-n}(x+a)^{1-n} + C$$
3. $$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\, dx =$$

   Logaritmo natural + Tangente inversa $+\, C$
4. $$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \quad \text{Por sustitución trigonométrica}$$

Casos de Fracciones Parciales

Factores Lineales no repetidos

$$\frac{\text{grado} < n}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)} = \frac{A_1}{x+a_1} + \frac{A_2}{x+a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x+a_n}$$

Factores Lineales Repetidos

$$\frac{\text{grado} < n}{(x+a)^n} = \frac{A_1}{x+a} + \frac{A_2}{(x+a)^2} + \frac{A_3}{(x+a)^3} + \cdots + \frac{A_n}{(x+a)^n}$$

Factores Cuadráticos no Reducibles ni Repetidos

$$\frac{\text{grado} < 2n}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)\cdots(a_nx^2+b_nx+c_n)} =$$

$$\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)} + \frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

Factores Cuadráticos no Reducibles Repetidos

$$\frac{\text{grado} < 2n}{(ax^2+bx+c)^n} =$$

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

OTRAS TÉCNICAS ÚTILES

Radicales de x

$$\int \frac{1}{\sqrt[a]{x} + \sqrt[b]{x} + \cdots + \sqrt[n]{x}}\, dx$$

$$x = z^n$$

$$dx = nz^{n-1}dz$$

n es M.C.M. de los radicales.

Radicales de Factores Lineales de x

$$\int \frac{1}{\sqrt[a]{x+c} + \sqrt[b]{x+c} + \cdots + \sqrt[n]{x+c}}\, dx$$

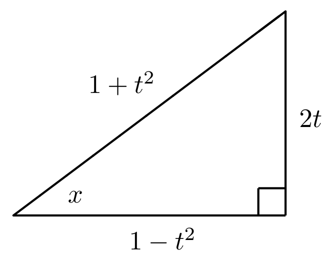
$$x + c = z^n$$

$$dx = nz^{n-1}dz$$

n es M.C.M. de los radicales.

De Trigonométrica a Fracción Racional

Se utiliza el siguiente triángulo para las sustituciones:



$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

Integración Aproximada

REGLA DEL PUNTO MEDIO

$$\int_a^b f(x)dx \approx M_n = \Delta x \left[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)\right]$$

Donde:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$$

REGLA DEL TRAPECIO

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \Delta x \left[\frac{f(x_o) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

LA REGLA DE SIMPSON

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + f(b)\right]$$

Donde n es par.

COTAS DE ERROR

$$|E_M| \leq \frac{|f''(x)|_{max}(a-b)^3}{24n^2}$$

$$|E_T| \leq \frac{|f''(x)|_{max}(a-b)^3}{12n^2}$$

$$|E_S| \leq \frac{\left|f^{IV}(x)\right|_{max}(a-b)^5}{180n^4}$$

Integrales Impropias

f no es continua en a

$$\int_a^b f\left(x\right)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f\left(x\right)\,dx$$

f no es continua en b

$$\int_a^b f\left(x\right)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f\left(x\right)\,dx$$

f discontinua en un valor entre a y b

c es el valor de discontinuidad.

$$\begin{aligned}\int_a^b f\left(x\right)\,dx &= \int_a^c f\left(x\right)\,dx + \int_c^b f\left(x\right)\,dx\\ &= \lim_{r\to c^-}\int_a^r f\left(x\right)\,dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f\left(x\right)\,dx\end{aligned}$$

Límites de Integración al ∞

$$\int_a^\infty f\left(x\right)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f\left(x\right)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f\left(x\right)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f\left(x\right)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^c f\left(x\right)dx + \int_c^\infty f\left(x\right)dx$$

Otras Aplicaciones de la Integral

LONGITUD DE ARCO

Primero se define un nuevo diferencial ds en términos de dx y dy:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Ahora la longitud en términos de ds:

$$L = \int_{s_o}^{s_n} ds$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

ÁREA SUPERFICIAL DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

En general

$$S = 2\pi \int r\, ds$$

Si el eje de revolución es el eje de las absicas r es y y si es el eje de las ordenadas es x.

PRESIÓN Y FUERZA HIDROSTATICA

Repaso de unidades:

Unidad	SI	Ingles
Longitud	m	ft
Masa	Kg	slug
Fuerza	N	lb_f
Presion	Pa $\left(N/m^2\right)$	lb/ft^2

Definiciones:
ρ densidad de masa.
δ densidad de peso.

$$\delta = g\rho$$

Principio de Pascal

La presión ejercida por un fluido a una profundidad h es igual en cualquier direccion.

$$P = \delta h$$

Fuerza Hidrostatica

De la definición de presión:

$$P = \frac{F}{A} \longrightarrow F = PA$$

$$F = \delta h A$$

En general:

$$F = \delta \int hA\, dx$$

$$= \delta \int hA\, dy$$

Donde:
h es la profundidad a la que se encuentra un diferencial de placa.
A es el área de ese diferencial de placa.

$$\delta_{\mathrm{H_2O}} = 9800\ N/m^3 = 62{,}43\ lb/ft^3$$

MOMENTOS Y CENTROS DE MASA

En general, si se tiene un sistema de n particulas con masas $m_1,\ m_2,\ \cdots\ ,\ m_n$ localizadas en los puntos x_1, $x_2,\cdots,\ x_n$ sobre el eje x, puede demostrarse de manera similar que el centro de masa del sistema se localiza en:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Momento del Sistema Respecto al Eje y

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = \rho \int_a^b x\ f(x)\, dx$$

Momento del Sistema Respecto al Eje x

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = \rho \int_a^b \frac{1}{2}\ [f(x)]^2\, dx$$

Entonces M_y mide la tendencia del sistema a girar respecto al eje y y M_x mide la tendencia a girar respecto al eje x.

Como en el caso unidimensional, las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa estan dadas en términos de los momentos por las fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

Como $m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)$ definimos $\bar{x}$ y $\bar{y}$ como:

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\ f(x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx} = \frac{1}{A} \int_a^b x\ f(x)\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\int_a^b \frac{1}{2}\ [f(x)]^2\, dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2}\ [f(x)]^2\, dx$$

Entre Curvas

Si la región $\Re$ se localiza entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces las coordenadas del centroide son:

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x\ [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_a^b \frac{1}{2}\ \left\{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right\} dx$$

Teorema de Pappus

Sea $\Re$ la región plana que esta completamente en un lado de una recta l en el plano. Si se hace girar a $\Re$ en torno a l, entonces el volumen del solido resultante es el producto del área A de $\Re$ y la distancia d recorrida por el centroide de $\Re$.

Ecuaciones Paramétricas

$$x = f(t) \quad ; \quad y = g(t)$$

Donde t se le llama parámetro de la ecuación paramétrica La forma de ecuaciones paramétricas le da a la curva movimiento y orientación.

PARAMÉTRICA A RECTANGULAR

1. Expresar t en términos de x o y.
2. Sustituir todas a las t de la ecuación restante.
3. Expresar la ecuación en función de una sola variable, si es posible.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE LA RECTA

Con dos puntos

De (x_o, y_o) a (x_1, y_1)

$$x = x_o + (x_1 - x_o)\,t$$

$$y = y_o + (y_1 - y_o)\,t$$

Si dan: $\mathbf{A} = \langle a, b\rangle$

$$x = x_o + at$$

$$y = y_o + bt$$

CIRCUNFERENCIA

De radio r y centro (h, k)

$$x = h + r\cos t \quad ; \quad y = k + r\operatorname{sen} t$$

De $0 \leq t \leq 2\pi$

ELIPSE

Con centro (h, k).

$$x = h + a\cos t \quad ; \quad y = k + b\operatorname{sen} t$$

De la misma forma que en forma cartesiana. El coeficiente mayor de las funciones trigonométricas corresponde a a e indica donde esta el eje mayor.

De $0 \leq t \leq 2\pi$

Donde $a > b$

RECTANGULAR A PARAMÉTRICA

1. Se elige $x = t$ o $y = t$
2. Se expresa en términos de la otra variable.
3. Se sustituye con la por t todas las variables dependientes.

APLICACIONES

Tangentes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Areas

$$A = \int_{t_o}^{t} g(t)\, f'(t)\, dt$$

Longitud de arco

$$L = \int_{t_o}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Área superficial

Curva: $\quad x = f(t) \qquad y = g(t)$

* Eje de revolución: x

$$A_s = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{g(t)}_{r} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

* Eje de revolución: y

$$A_s = 2\pi \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{f(t)}_{r} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Coordenadas Polares

PAREJAS DE ORDENADAS

Una desventaja en coordenadas polares es que un punto se puede representar por varias parejas ordenadas.

- $r < 0$ y $\theta > 0$
$$(r, \theta) \longrightarrow (-r, \theta + \pi)$$
- $r > 0$ y $\theta < 0$
$$(r, \theta) \longrightarrow (r, \theta - 2\pi n)$$
- $r < 0$ y $\theta < 0$
$$(r, \theta) \longrightarrow (-r, \theta - \pi)$$
- $\theta > 0$
$$(r, \theta) \longrightarrow (r, \theta + 2\pi n)$$

Coordenadas del polo: $(0, \theta)$

RELACIÓN DE COORDENADAS POLARES ENTRE COORDENADAS RECTANGULARES

C.P. $\longrightarrow$ C.R.

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

C.R. $\longrightarrow$ C.P.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Se debe elegir θ de modo que el punto (r, θ) esté en el cuadrante correcto.

SIMETRÍA EN CURVAS POLARES

a) Si una ecuación polar permanece sin cambio cuando θ se reemplaza por $-\theta$, la curva es simétrica respecto al eje polar.
   i. Si la ecuación polar solo tiene $\cos \theta$, ya que: $\cos(-\theta) = \cos \theta$

b) Si la ecuación no cambia cuando r se reemplaza por $-r$, o cuando θ se sustituye por $\theta + \pi$ la curva es simétrica respecto al polo. (Esto significa que la curva permanece sin cambio si la rotamos 180 respecto al origen.)

c) Si la ecuación no cambia cuando θ se reemplaza por $\pi - \theta$, la curva es simétrica respecto a la recta vertical $\theta = \frac{\pi}{2}$.
   i. Si la ecuación polar solo tiene $\operatorname{sen} \theta$, ya que: $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen} \theta$

Nota: con este análisis no se puede concluir anti-simétria.

PASOS PARA GRAFICAR CURVAS POLARES

1. Identificar la curva.
2. Encontrar $r_{\max}$.
3. Probar si la curva cumple alguna simétria.
4. Encontrar en que valores la curva pasa por el polo. Osea:
$$f(\theta) = 0$$
5. Encontrar en que valores la curva tiene $r_{\max}$. Osea:
$$f(\theta) = r_{\max}$$
6. Si la ecuación de la curva es de la forma $\cos(n\theta)$ o $\operatorname{sen}(n\theta)$, se encuentra los valores de los puntos 4 y 5 para n vueltas.
7. Valuar los ángulos importantes, osea: ángulos cuadrantales, ángulos de referencia a 45°, a 30° y 60°.

Para rosas.

- Los valores donde pasa por el polo indica el inicio y el fin de un pétalo. Los valores de $r_{\max}$ indica la cúspide del pétalo.
- Las rosas de pétalos pares se grafican de $[0, 2\pi]$.
- Las rosas de pétalos impares se grafican de $[0, \pi]$, de $[\pi, 2\pi]$ se grafica la misma rosa pero con $r < 0$.

CURVAS EN COORDENADAS POLARES

Recta que pasa por el polo

$$r = a$$

Caracoles

Forma general:

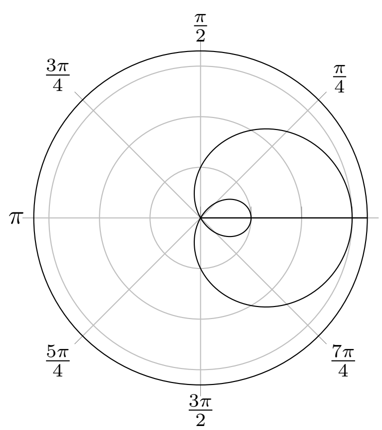
$$r = a \pm b\cos\theta$$

$$r = a \pm b\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$a > 0 \wedge b > 0$$

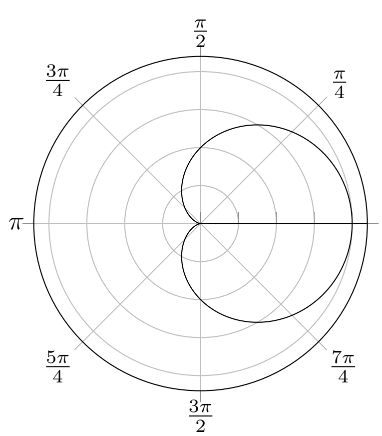
Caracol con lazo interno

$$0 < \frac{a}{b} < 1$$



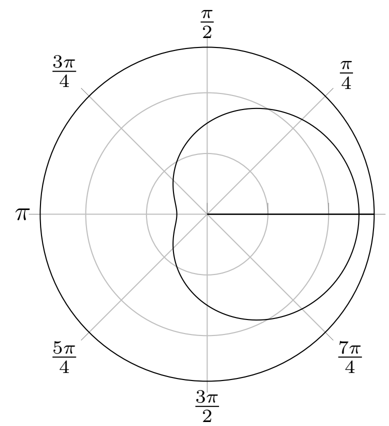
Cardioide

$$a = b$$



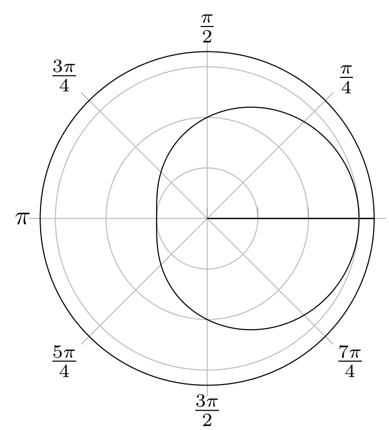
Caracol con hoyuelo

$$1 < \frac{a}{b} < 2$$



Caracol Convexo

$$\frac{a}{b} \geq 2$$



Rosas

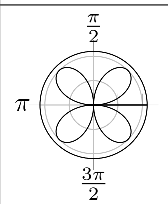
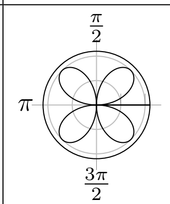
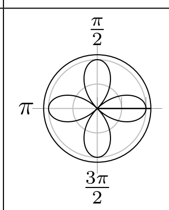
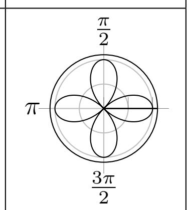
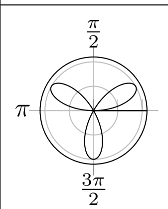
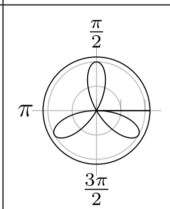
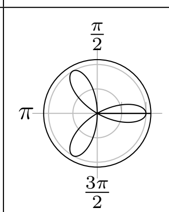
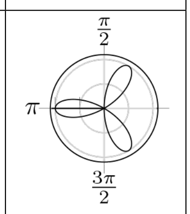
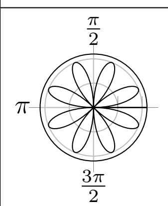
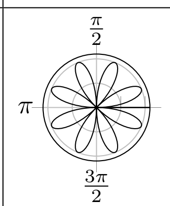
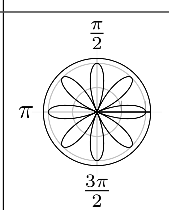
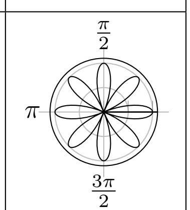
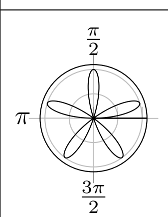
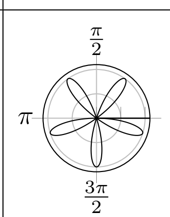
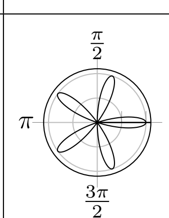
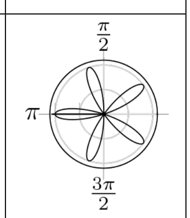
Forma general:

$$r = a\cos n\theta$$

$$r = a\operatorname{sen} n\theta$$

De n pétalos si n es impar.
De $2n$ pétalos si n es par.
$n \geq 2$

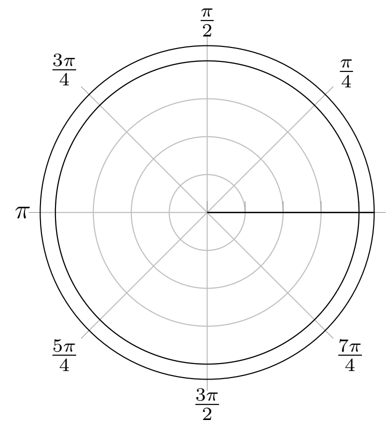
Variantes

n	$\operatorname{sen} n\theta$	$-\operatorname{sen} n\theta$	$\cos n\theta$	$-\cos n\theta$
2				
3				
4				
3				

Círculos y Lemniscatas

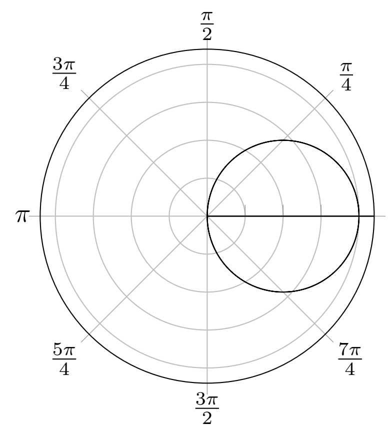
Círculo con centro en el polo

$$r = a$$



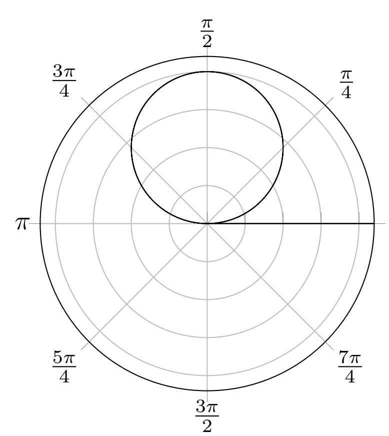
Círculo sobre el eje polar

$$r = a\cos\theta$$



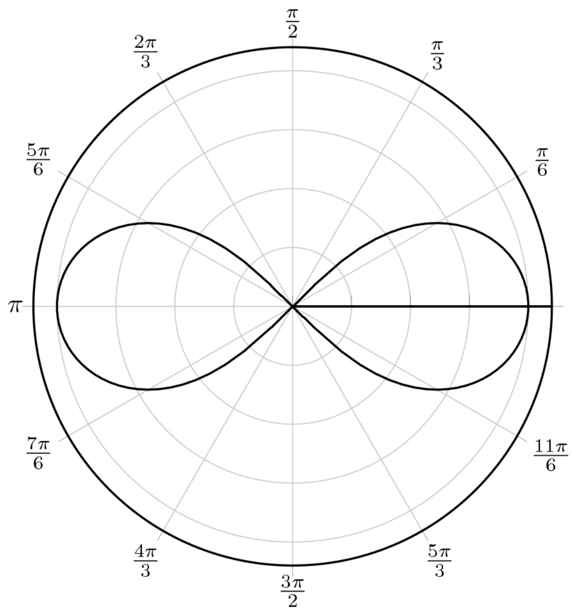
Círculo sobre $\frac{\pi}{2}$

$$r = a\operatorname{sen}\theta$$



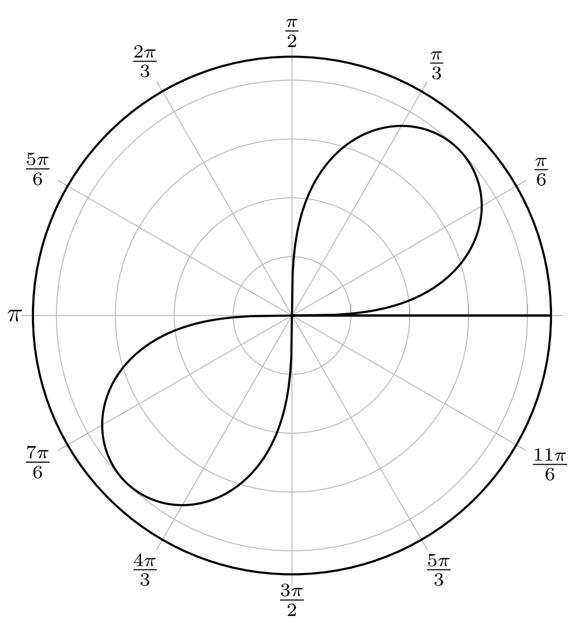
Lemniscata sobre el eje polar

$$r^2 = a\cos 2\theta$$



Lemniscata sobre $\frac{\pi}{4}$

$$r^2 = a\,\text{sen}\, 2\theta$$



ÁREAS Y LONGITUDES EN COORDENADAS POLARES

Área

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \left[f(\theta)\right]^2\, d\theta$$

Es útil pensar que el área es barrida por un rayo que rota alrededor del polo empezando con un ángulo a y terminando en un ángulo b.

Área Entre dos Curvas

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b \left\{\left[f(\theta)\right]^2 - \left[g(\theta)\right]^2\right\} d\theta$$

Donde $g(\theta)$ es la curva que el rayo toca primero y $f(\theta)$ es la que toca después.

Longitud de Arco

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[f(\theta)\right]^2 + \left\{\frac{d}{d\theta}\left[f(\theta)\right]\right\}^2}\, d\theta$$

SECCIONES CONICAS EN COORDENADAS POLARES

Una ecuación polar de la forma:

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta}$$

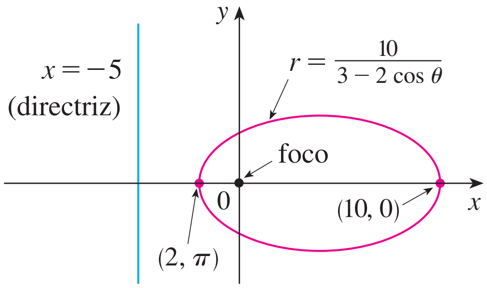
$$r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$

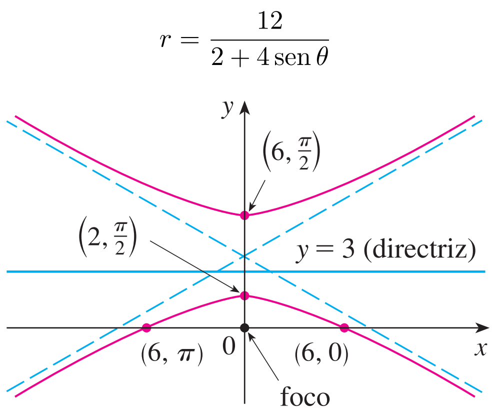
representa una sección cónica con excentricidad e y directriz d. Donde la excentricidad determina que sección es:

$e < 1$ Elipse
$e = 1$ Parabola
$e > 1$ Hiperbola

La función trigonométrica determina en que eje esta la directriz, si es coseno en x y si es seno en y. El signo de la función trigonométrica determina si esta en el semi eje positivo y negativo. Un foco siempre es el polo.

Ejemplos:



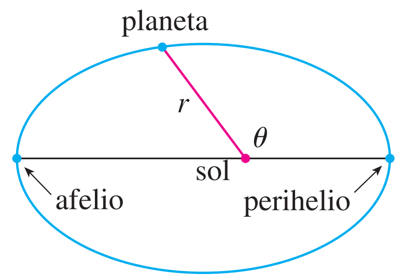


Órbitas Elipticas

La ecuación polar de una elipse con foco en el origen, semieje mayor a, excentricidad e y directriz $x = d$ se puede expresar en la forma:

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\theta}$$

Las posiciones de un planeta que sean más cercanas al Sol, y más lejanas a éste, se denominan perihelio y afelio, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse. Las distancias del Sol al perihelio y afelio reciben el nombre de distancia al perihelio y distancia al afelio, respectivamente. El perihelio se tiene en $\theta = 0$ y el afelio en $\theta = \pi$.



Sucesiones

SUCESIONES

Es una función cuyo dominio lo constituyen los números enteros positivos.

Notación

$$a_n = f(n)$$

$$a_n = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Forma recursiva:

$$a_{n+1} = a_n + 1 \qquad a_1 = f(1)$$

Representación

Ecuación

$$a_n = \frac{1}{2n-1}$$

Enumeración

$$a_n = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \cdots\right\}$$

Forma recursiva

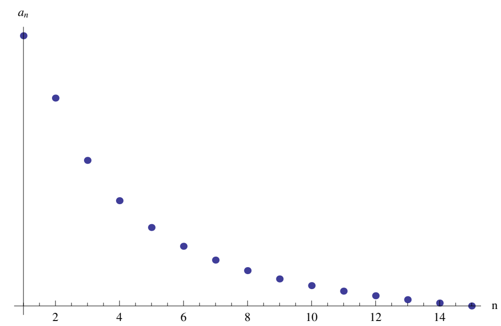
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$$

$$a_1 = 6$$

$$a_n = \left\{6, 6, 3, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \cdots\right\}$$

Gráfica

La grafica correspondiente de una sucesión es un conjunto de puntos.



CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN

Una sucesión a_n converge si:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

Diverge si:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \nexists \end{cases}$$

NOTA: todos los teoremas de límites de funciones son aplicables para limites de sucesiones.

Ejemplo de límites con factorial:

$$a_n = \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Otro ejemplo:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \\ &= \frac{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)!} \\ &= (2n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to +\infty} (2n+2)(2n+3) = \infty$$

Sucesión Creciente

Una sucesión es creciente si:

$$a_{n+1} > a_n$$

Sucesión Decreciente

Una sucesión es decreciente si:

$$a_{n+1} < a_n$$

Sucesión Monotona

Una sucesión es monotona si siempre es creciente o decreciente.

Cota Superior de una Sucesión

M se llama cota superior de a_n si:

$$M \geq a_n$$

Cota Inferior de una Sucesión

m se llama cota inferior de a_n si:

$$m \leq a_n$$

Sucesión Acotada

Una sucesión es acotada si tiene cota superior (M) y cota inferior (m).

Teorema de Convergencia de una Sucesión

Toda sucesión acotada y monotona es convergente.

Series

Es la suma de los términos de una sucesión.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Las principales preguntas que se tratan de responder al analisar una serie son: ¿Converge o diverge?, si converge ¿cuál es el valor de su suma?

CONVERGENCIA DE UNA SERIE

i. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow a_n$ converge a 0.

ii. Si la sucesión converge a $L \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

iii. Si la sucesión diverge $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Hay series que divergen y la sucesión converge.

SERIE GEOMÉTRICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\, r^{n} = \frac{a}{1-r}$$

Una forma de generalizar la serie gemoétrica es de la siguiente forma:

$$\sum_{n=\phi}^{\infty} a\, r^{n-\phi} = \frac{a}{1-r}$$

Expresar un número como una razón de enteros

Aplicando la serie geométrica se pueden expresar numeros como: $1.\overline{24}$, $0.\overline{8}$, $12{,}00\overline{1201}$, etc. Como una razón de enteros. El algoritmo a seguir es el siguente:

Sea un número a un número periódico, b la parte entera de a, c la parte decimal no periódica, y d la parte decimal periódica.

1. a se expresa como la suma de esas tres partes $a = b + c + d$. El problema radica en expresar la parte periódica como una razón de numeros enteros.

2. d se expresa como una serie geométrica, de la siguente forma:

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D}{10^x}\left(\frac{1}{10^y}\right)^{n-1}$$

3. Donde D es el número d como entero, x es la posición en la que se encuentra el ultimo dígito del decimal d, por ejemplo $0{,}00\overline{12}$ x en este casi seria 4. Al igual que en $0.\overline{9324}$.

4. y es la cantidad de dígitos del número decimal d. En los ejemplos anteriores y seria 2 y 4 respectivamente.

5. Resolviendo la serie con la fórmula de una serie geométrica tendriamos:

$$d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D}{10^x}\left(\frac{1}{10^y}\right)^{n-1} = \frac{\dfrac{D}{10^x}}{1-\dfrac{1}{10^y}} = \frac{D \times 10^{y-x}}{10^y - 1}$$

6. Entonces, a se expresaria como:

$$a = b + c + d = b + c + \frac{D \times 10^{y-x}}{10^y - 1}$$

Aunque es recomendable no memorizar la ecuación del punto 5, y solo aprender la forma general del punto 2 y el significado de x y y, luego proceder a resolverla numericamente.

SERIE TELESCÓPICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \cdots$$

$$= -b_1 + \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$$

Converge si $\lim_{n\to\infty} b_{n+1} \quad \exists$. En muchas ocaciones esta serie tiene la forma de b_{a+n}, entonces quedan $2a$ elementos sin anularse y de los cuales a son límites que se deben valuar. Es aconsejable analizar tantos términos de la serie para identificar cuántos y cuáles no se anulan.

PRIMER CRITERIO DE CONVERGENCIA CRITERIO DE LA INTEGRAL

a_n es una sucesión monótona decreciente y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sea $f(x)$ una funcion continua positiva y decreciente, entonces:

i.

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \ \text{ converge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(x) \ \text{ converge}$$

ii.

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx \ \text{ diverge} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(x) \ \text{ diverge}$$

SUMAS PARCIALES DE UNA SERIE

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n \qquad N \text{ entero positivo}$$

ERROR DE UNA SUMA PARCIAL

$$E_N = \int_{N}^{\infty} f(x)\, dx$$

COTA DE ERROR DE LA SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{N} a_n + E_N$$

P-SERIE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$$

- $P > 1$ converge
- $P \leq 1$ diverge

Cota del Error de la P-Serie

$$E_N \leq \frac{1}{(P-1)\, N^{P-1}}$$

SERIE ALTERNADA O SERIE ALTERNANTE

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n$$

Converge si:

i.

$$b_n \geq b_{n+1}$$

ii.

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$$

Cota de Error

$$|E_n| \leq b_{n+1}$$

SEGUNDO CRITERIO DE CONVERGENCIA PRUEBA DE LA RAZÓN

i. La serie converge absolutamente

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

ii. La serie diverge absolutamente

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \to \nexists$$

iii. No podemos concluir

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

TERCER CRITERIO DE CONVERGENCIA PRUEBA DE LA RAÍZ

i. La serie converge absolutamente

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

ii. La serie diverge absolutamente

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \to \nexists$$

i. No podemos concluir

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

CUARTO CRITERIO DE CONVERGENCIA COMPARACIÓN EN LÍMITE

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series con términos positivos, entonces:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$$

i. Ambas convegen

ii. Ambas divergen

SERIES DE POTENCIAS

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Derivada de Series de Potencias

$$D_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

En el caso de la derivada se debe analizar al menos los primeros cinco términos de la serie, para saber en que valor inicia la serie derivada. Ya que si el primer termino es una constante no se incluye en la derivada asi que se corre el inicio de la serie derivada.

Integral de Series de Potencias

$$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + C$$

SERIE GEOMÉTRICA COMO SERIE DE POTENCIAS

$$\sum_{n=0}^{\infty} a x^n = \frac{a}{1-x}$$

RADIO E INTÉRVALO DE CONVERGENCIA

Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ hay solo tres posibilidades:

i. La serie converge solo cuando $x = a$

ii. La serie converge para toda x.

iii. La serie converge solo para un intérvalo de x's.

Utilizar el criterio de convergencia de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

En general converge si:

$$|(x-a)| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| < 1$$

Si el límite es cero o no existe corresponde al caso i.
Si el límite es infinito corresponde al caso ii.
Si el límite es un número finito, corresponde al caso iii.

Para determinar si el intérvalo es cerrado o abierto se analizan los extremos en la serie de potencias, sutituyendo las x's y aplicando los teoremas de convergencia. Dependiendo de si convergen o no, se toma el intervalo cerrado o abierto.

El radio de convergencia es:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|$$

SERIE DE POTENCIAS CENTRADA EN a

A partir de la serie de potencias $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ se puede centrar la misma en un valor arbitrario a de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1-x+a-a} \\
&= \frac{1}{(1-a)-(x-a)} \qquad (*) \\
&= \frac{1}{1-a} * \frac{1}{1-\left(\dfrac{x-a}{1-a}\right)} \\
&= \frac{1}{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a}{1-a}\right)^n
\end{aligned}$$

(*) se factoriza por agrupación de terminos dejando $-a$ junto a x debido a la naturaleza de las traslaciones rigidas de las funciones. El termino $x-a$ indica una traslacion rigida en el eje de las abscisas.

Series de Taylor-Maclaurin

POLINOMIO DE TAYLOR

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

POLINOMIO DE MACLAURIN

Es el polinomio de Taylor con $a = 0$.

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Serie de Maclaurin

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

SERIES IMPORTANTES DE MACLAURIN

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\tan^{-1} x = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$\mathbb{R}^3$ y Vectores

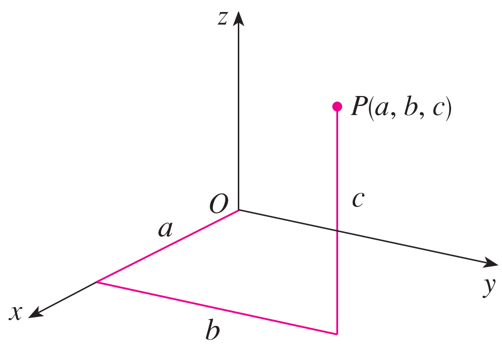
ESPACIO NUMÉRICO TRIDIMENCIONAL

El conjunto de todas las triadas ordenadas de numeros reales se llaman espacio numérico tridemencional.

Se denota por R^3. Representación gráfica de R^3:

Punto

Cada triada ordenada en R^3 recibe el nombre de punto en el espacio numérico tridimencional se denota por (x, y, z). x, y y z son las coordenadas del punto.



Octantes

Los ejes coordenados dividen R^3 en ocho regiones llamados octantes.

	x	y	z
Primer Octante	+	+	+
Octante	+	+	−
Octante	+	−	+
Octante	−	+	+
Octante	+	−	−
Octante	−	−	+
Octante	−	+	−
Octante	−	−	−

Distancia Entre Puntos

Sea P_1 y P_2 dos triadas con cordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) respectivamente. La distancia entre esos dos puntos se denota como D y se define como:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_2)^2}$$

Punto Medio Entre Puntos

Sea P_1 y P_2 dos triadas con cordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) respectivamente. El punto medio entre esos dos puntos se denota como $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ y se define como:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\bar{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

SUPERFICIE

Es la gráfica de una ecuación en R^3.

Esfera

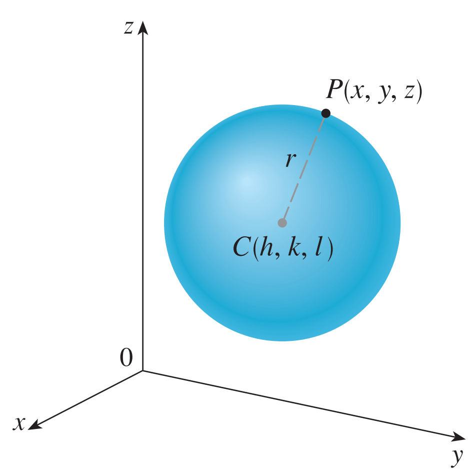
Es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo en R^3.

- La distancia equidistante se llama radio de la esfera.
- El punto fijo se llama centro de la esfera.

Ecuación de la esfera

La ecuación de una esfera con centro $C\,(h, k, l)$ y radio r es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$



Forma general de una ecuación que puede ser esfera en R^3

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fz = H$$

Completando al cuadrado:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{F}{2}\right)^2 = M$$

- $M > 0$ Esfera
- $M = 0$ Punto esfera
- $M < 0$ No tiene representacion real

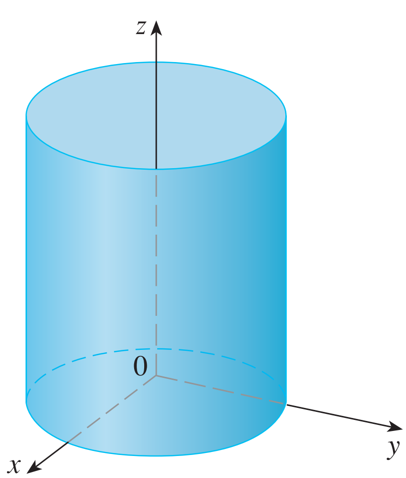
Cilindro Circular

Una circunferencia en R^2 es un cilindro circular en R^3, y su ecuación es la misma que la de la esfera solo que sin una pareja de coordenadas. Y el cilindro es paralelo al eje de la coordenada que no aparece.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - h)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

$$(y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$



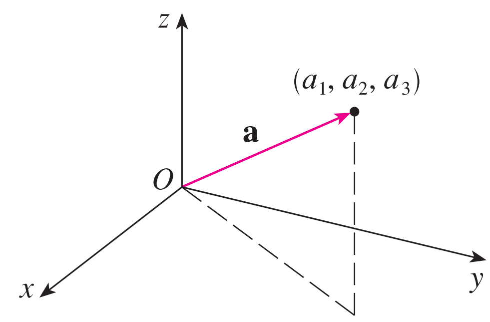
VECTORES

Un vector en R^3 se denota por una triada ordenada $\langle x, y, z\rangle$, donde x, y y z son las componentes del vector. Notación de vector más común en matemáticas:

$$\mathbf{A} = \langle x, y, z\rangle$$

Representación de posición de un vector

El inicio del vector esta en el origen y el final en el punto (x, y, z).



$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$$

Vector desde un punto dado

Sea $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ un vector no nulo, y el punto (x, y, z) el punto donde inicia el vector en R^3, el punto final seria:

$$(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$$

Vector dado un punto inicial y un punto final

Sea $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ el punto donde inicia el vector y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ el punto donde finaliza el vector. Las componentes del vector serian:

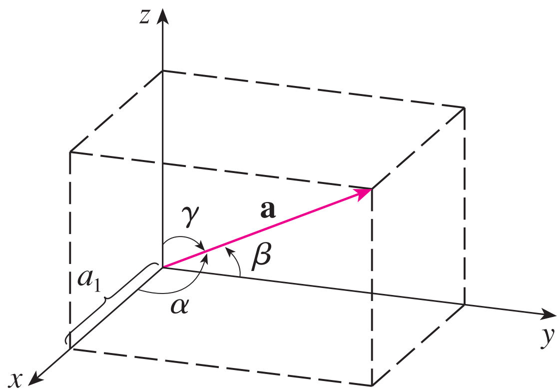
$$\mathbf{A} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$

Magnitud de un Vector

Sea $\mathbf{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ un vector no nulo, la magnitud de $\mathbf{A}$ se denota como $|\mathbf{A}|$ y se define por:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$
$$= D_{P_1P_2}$$

Direccion de un Vector



Los ángulos α, β y γ son los ángulos que forma el vector con respecto a los ejes x, y y z respectivamente. Se llaman ángulos directores. Y los cosenos directores se definen por:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{A}|}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{A}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{A}|}$$

Propiedad de los cosenos directores

$$\cos^2\alpha + cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Vector Unitario

$\hat{\mathbf{u}}$ vector unitario en la direccion de $\mathbf{A}$

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

Vector por sus cosenos directores

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \langle \cos\alpha, cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Suma de Vectores

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \cdots + \mathbf{V}_n = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} z_i \right)$$

Resta de Vectores

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) = \mathbf{D}$$

Escalar por Vectorial

$$k\mathbf{A} = (ka_x, ka_y, ka_y)$$

$$|k\mathbf{A}| = |k| \, |\mathbf{A}|$$

Vectores Unitarios Canonicos

$$\hat{\mathbf{i}} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Representación de un vector en base a $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ *y* $\hat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \langle a_x, a_y, a_z \rangle \\ &= \langle a_x, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_y, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_z \rangle \\ &= a_x \langle 1, 0, 0 \rangle + a_y \langle 0, 1, 0 \rangle + a_z \langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Producto Escalar

Tambien llamado "Producto Punto" debido a su notación.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| \, |\mathbf{B}| \cos\theta_{AB}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Aplicaciones

i. Angulo entre vectores

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| \, |\mathbf{B}|}$$

ii. Vectores Ortogonales

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{B} \iff \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

iii. Proyección de **A** sobre **B**

a. Magnitud

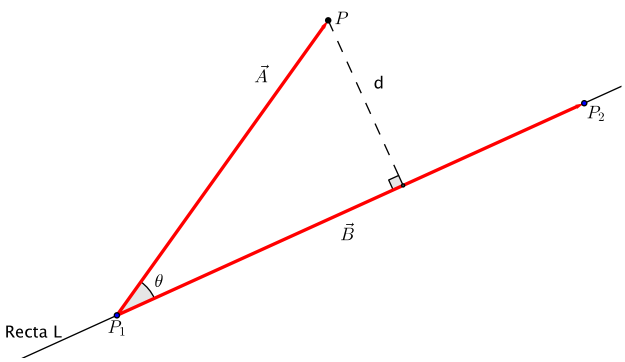
$$|\mathbf{A}| \cos \theta_{AB} = P_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|}$$

b. Vector proyección

$$\mathbf{P}_{AB} = P_{AB} \hat{\lambda}_{AB}$$

iv. Distancia de un punto a una recta:

Sea una racta L definida por dos puntos P_1 y P_2, la distancia a un punto P. La distancia d se puede obtener mediante dos métodos. Se forman dos vectores **A** y **B**, uno que vaya de P_1 a P y otro de P_1 a P_2.



Mediante el producto escalar se llegan a las siguientes ecuaciones:

$$d = |\mathbf{A}| \operatorname{sen} \theta$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| \, |\mathbf{B}|}\right)$$

$$d = \sqrt{|\mathbf{B}|^2 + (P_{AB})^2}$$

Producto Vectorial

Tambien llamado "Producto Cruz" debido a su notación.

- Se denota

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{E}$$

- Se define

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \, |\mathbf{B}| \operatorname{sen} \theta_{AB}$$

- Cálculo mediante componentes

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\hat{\mathbf{i}} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\hat{\mathbf{k}}$$

Aplicaciones

i. Ángulo entre vectores

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}| \, |\mathbf{B}|}$$

ii. Vectores Paralelos

$$\mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \iff \mathbf{A} = k\mathbf{B} \iff \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$$

iii. Vectores Ortogonales

$$\mathbf{A} \perp \mathbf{B} \iff |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \, |\mathbf{B}|$$

iv. El vector resultante del producto cruz, es perpendicular tanto al vector **A** como al vector **B**. Entonces:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = 0$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = 0$$

v. Distancia de un punto a una recta

El mismo planteamiento que en el producto punto.

$$d = |\mathbf{B}| \operatorname{sen} \theta$$

$$d = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|}$$

Triple Producto Escalar

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

Propiedad del los Vectores

Sean **A**, **C** y **C** vectores no nulos y k y r escalares.

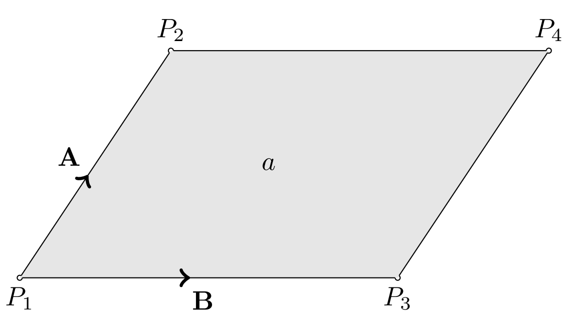
- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = (\mathbf{A} + \mathbf{C}) + \mathbf{B} = (\mathbf{B} + \mathbf{C}) + \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
- $(k + r)\,\mathbf{A} = k\mathbf{A} + r\mathbf{A}$
- $k\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
- $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

- $0\mathbf{A} = 0$
- $(kr)\,\mathbf{A} = k\,(r\mathbf{A}) = r\,(k\mathbf{A})$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2$
- $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
- $k\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (k\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}\,(k\mathbf{B})$
- $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\,(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$
- $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{B}$
- $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{|\mathbf{A}|^2\,|\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2}$
- $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$
- Regla de la mano derecha:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$$
$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$$
$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

Área de un Paralelogramo

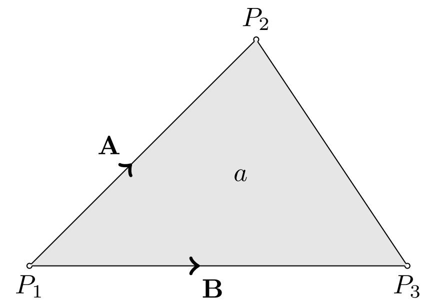
El área a de un paralelgramo definido por los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 se encuentra mediante el producto vectorial de un vector **A** que va de P_1 a P_2 y un vector **B** que va de P_1 a P_3.



$$a = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$$

Área de un Triángulo

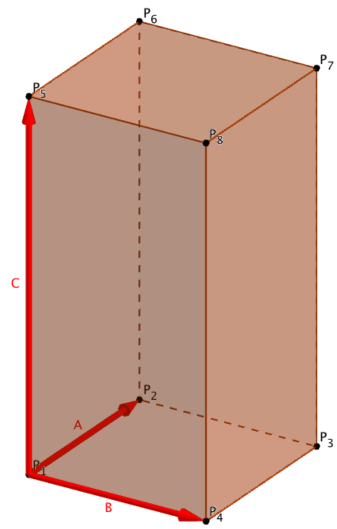
El área a de un triángulo definido por los puntos P_1, P_2 y P_3 se encuentra mediante el semi-producto vectorial de un vector **A** que va de P_1 a P_2 y un vector **B** que va de P_1 a P_3.



$$a = \frac{1}{2}\,|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$$

Volumen de un Paralelepipedo

El volumen V de un paralelepipedo definido por los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 y P_8, se obtiene aplicando un triple producto entre dos vectores que generen el área del sólido con uno que representa la altura.



$$V = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

Plano

Es el conjunto de puntos que al formar vector con un punto dado es ortogonal a un vector dado.

- Al punto dado se llama punto del plano. $Q = (x_o, y_o, z_o)$
- Vector dado se llama vector normal al plano. $\mathbf{N} = \langle a, b, c \rangle$
- Vector de Q a cualquier punto (x, y, z) Ecuación:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_o, y - y_o, z - z_o \rangle = 0$$

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_o + by_o + cz_o}_{d}$$

$$ax + by + cz = d$$

La gráfica de una ecuación lineal en R^3 es un plano.

Ejemplos

1.

Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(1, -2, 5)$ y tiene como vector normal $\mathbf{N} = \langle 3, 4, -6 \rangle$.

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

$$3(x - 1) + 4(y + 2) - 6(z - 5) = 0$$

$$3x - 3 + 4y + 8 - 6z + 30 = 0$$

$$3x + 4y - 6z = -35$$

2.

Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos no colineales $P = (1, 2, 4)$, $Q = (-2, 3, 6)$ y $R = (4, 2, 5)$.

Se generan dos vectores con el mismo punto inicial utilizando los tres puntos dados. Usando P como punto inicial para ambos vectores, sabiendo que:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = 0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} = 0 \end{array}\right\} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{N}$$

$$\mathbf{A}_{PQ} = \langle -2 - 1, 3 - 2, 6 - 4 \rangle$$

$$= \langle -3, 1, 2 \rangle$$

$$\mathbf{B}_{PR} = \langle 4 - 1, 2 - 2, 5 - 4 \rangle$$

$$= \langle 3, 0, 1 \rangle$$

Usando el algoritmo del producto vectorial:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \langle -3, 1, 2 \rangle \times \langle 3, 0, 1 \rangle$$

$$\mathbf{N} = \langle 1, 9, -3 \rangle$$

A partir del punto P:

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0$$

$$1(x - 1) + 9(y - 2) - 3(z - 4) = 0$$

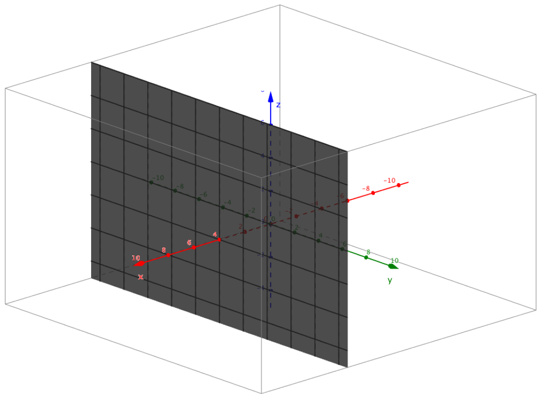
$$x + 9y - 3z = 7$$

Gráfica de Planos

1. Si de a, b y c dos son cero.

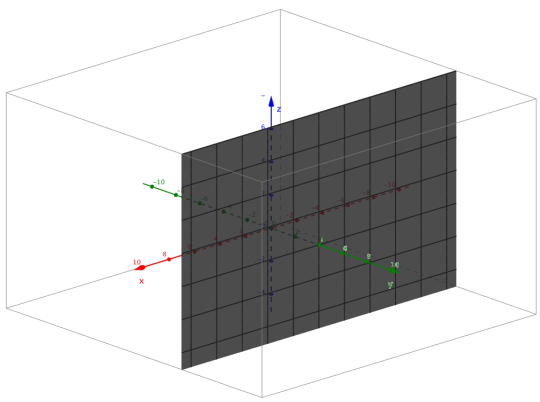
   i. $b = c = 0$

   $ax = d \quad \mathbf{N} = \langle a, 0, 0 \rangle \quad \|$ Plano yz



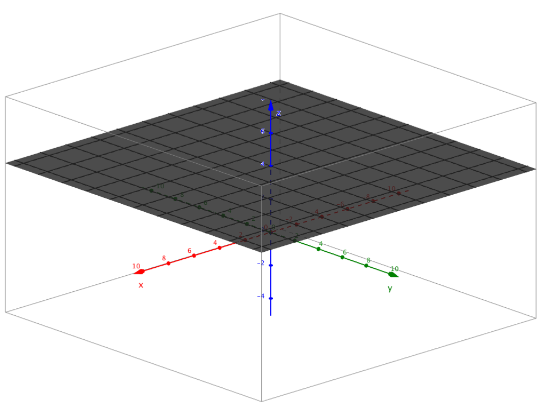
   ii. $a = c = 0$

   $by = d \quad \mathbf{N} = \langle 0, b, 0 \rangle \quad \|$ Plano xz



   iii. $a = b = 0$

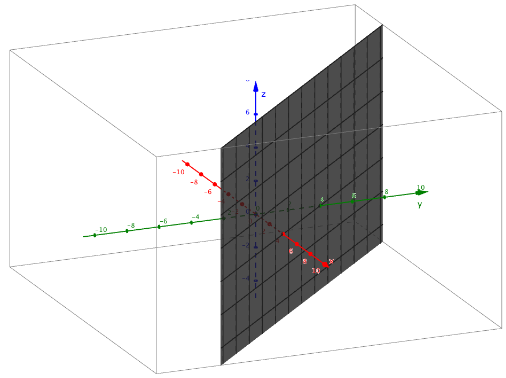
   $cz = d \quad \mathbf{N} = \langle 0, 0, c \rangle \quad \|$ Plano xy



2. Si de a, b y c uno es cero.

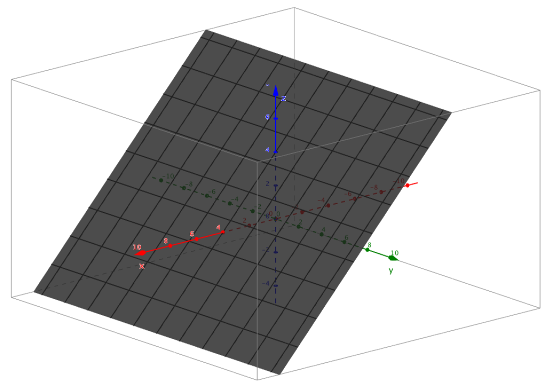
   i. $c = 0$

   $ax + by = d \quad \mathbf{N} = \langle a, b, 0 \rangle \quad \perp$Plano xy



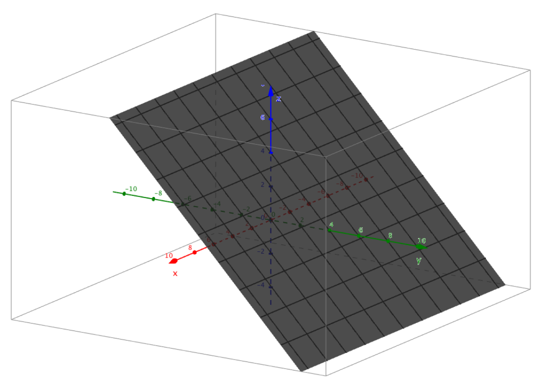
   ii. $b = 0$

   $ax + cz = d \quad \mathbf{N} = \langle a, 0, c \rangle \quad \perp$Plano xz



   iii. $a = 0$

   $by + cz = d \quad \mathbf{N} = \langle 0, b, c \rangle \quad \perp$Plano yz

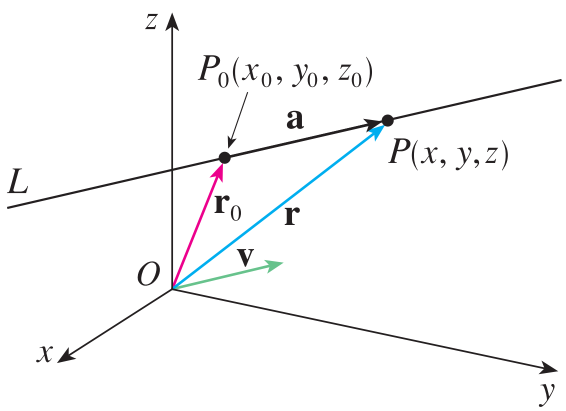


3. Ninguno es cero

$$ax + by + cz = d \quad \mathbf{N} = \langle a, b, c \rangle$$

Se gráfica el plano yz, haciendo $x = 0$ y encontrando un punto $(0, x, y)$ y se traza una recta desde el origen. De igual manera el plano xy haciendo $z = 0$ y un punto $(x, y, 0)$ se traza la recta desde el origen. Y se unen esas dos rectas desde cualquier punto de ambas.

Recta en R^3



Una recta en R^3 queda definida por un punto x_o, y_o, z_o y un vector director $\mathbf{A} = \langle a, b, c\rangle$.

Ecuación Vectorial de la Recta

$$\langle x - x_o, y - y_o, z - z_o\rangle = t\mathbf{A}$$

Ecuaciones Paramétricas de la Recta

$$x = x_o + at$$

$$y = y_o + bt$$

$$z = z_o + ct$$

Ecuaciones Simétricas

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

$$\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$$

Recta Intersección de dos superficies

En R^3 una curva es la intersección de dos superficies. Si las superficies son planos $\rightarrow$ la curva es una recta.

$$\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{matrix}\right\}\text{Recta}$$

Definir Rectas

Punto-Vector Director

Se aplica la ecuación vectorial o la parametrica directamente.

Punto-Punto

Sea $P\,(x_o, y_o, z_o)$ y $Q\,(x, y, z)$ dos puntos por lo cual pasa una recta L, se define el vector director $\mathbf{A}$ que va de PQ. Luego se aplica la ecuación vectorial o la parametrica directamente con el punto P o Q.

La intersección de dos planos

Se plantea la matriz aumentada del sistema de 2×3 y se lleva a escalonada, o escalonada reducida (Gauss o Gauss-Jordan), a una variable (de preferencia z) se le da valor arbitrario t.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Por vectores normales de dos planos

Sean P_1 y P_2 dos planos cuyos vectores normales son $\mathbf{N}_1$ y $\mathbf{N}_2$ respectivamente, se puede demostrar que:

$$\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \mathbf{A}$$

Luego se determina un punto que pertenezca a ambos planos y se aplica las ecuaciones paramétricas de la recta.

Criterio de Planos y Rectas

1. Rectas paralelas

$$L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow \mathbf{A}_1 \parallel \mathbf{A}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{A}_1 = k\mathbf{A}_2$$

2. Rectas perpendiculares

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \mathbf{A}_1 \perp \mathbf{A}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = 0$$

3. Ángulo entre dos rectas

$$\theta_{L_1L_2} \Longleftrightarrow \theta_{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} \Longleftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1|\,|\mathbf{A}_2|}\right)$$

4. Planos paralelos

$$P_1 \parallel P_2 \Longleftrightarrow \mathbf{N}_1 \parallel \mathbf{N}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{N}_1 = k\mathbf{N}_2$$

5. Planos perpendiculares

$$P_1 \perp P_2 \Longleftrightarrow \mathbf{N}_1 \perp \mathbf{N}_2 \Longleftrightarrow \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0$$

6. Ángulo entre dos planos

$$\theta_{P_1P_2} \Longleftrightarrow \theta_{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2} \Longleftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1|\,|\mathbf{N}_2|}\right)$$

7. Recta paralela a un plano

$$P \parallel L \Longleftrightarrow \mathbf{N} \perp \mathbf{A} \Longleftrightarrow \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}$$

8. Recta perpendicular a un plano

$$P \perp L \Longleftrightarrow \mathbf{N} \parallel \mathbf{A} \Longleftrightarrow \mathbf{N} = k\mathbf{A}$$

9. Ángulo entre recta y plano

$$\theta_{PL} \Longleftrightarrow \theta_{\mathbf{NA}} \Longleftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{A}}{|\mathbf{N}|\,|\mathbf{A}|}\right)$$

10. Recta contenida en un plano

$$L \in P \Longleftrightarrow \mathbf{N} \perp \mathbf{A} \Longleftrightarrow \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}$$

Criterio de Rectas

1. Paralelas: para demostrar que dos rectas son paralelas teniendo sus ecuaciones, se encuentran los vectores directores y se demuestra que uno es multiplo del otro.
2. Se intersectan: se representan las dos rectas por sus ecuaciones paramétricas, asignando diferentes letras para los parametros (t y s, por ejemplo) y se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

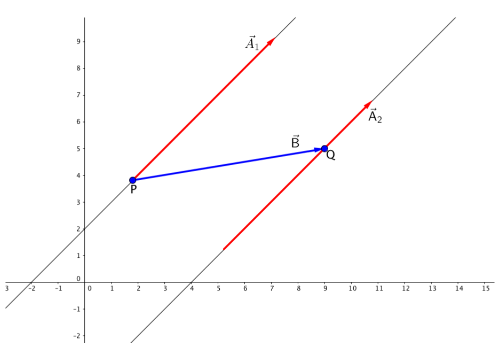
$$x_1 = x_2$$

$$y_1 = y_2$$

$$z_1 = z_2$$

3. Rectas oblicuas (no coplanares): si cumplen con
   i. No son paralelas
   ii. No se intersecctan

Ejemplo de encontrar un plano que contiene dos rectas oblicuas



Como los vectores directores de las dos rectas son iguales y paralelos el producto cruz seria cero. Asi que se plantea un vector $\mathbf{B}$ que vaya de L_1 a L_2 y se hace el producto cruz con este vector para encontrar el vector normal del plano, luego se plantea la ecuación con cualquier punto de las rectas.

Encontrar un plano que contiene dos rectas que se intercectan

El vector director del plano que contiende a las dos rectas L_1 y L_2 se obtiene mediante el producto cruz de los vectores directores de las rectas:

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \mathbf{N}$$

Y como punto se puede utilizar cualquiera que este en alguna recta, o el punto de intersección.

Intersección Recta-Plano

Para encontrar el punto de intersección se sustituye las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano y se despeja el parametro t. El cual corresponde al punto de intersección.

Posibles resultados:

i. Recta paralela al plano

$$0 \neq c$$

ii. Recta contenida en el plano

$$0 = 0$$

iii. Recta intersecta al plano

$$t = c$$

DISTANCIAS EN $\mathbf{R}^3$

Punto a Punto

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_2)^2}$$

Punto a Recta

Sea P_o el punto al cual se quiere determinar la distancia a la recta l. Conviene determinar si el punto esta sobre la recta, porque si es asi la distancia es 0. Se definen dos puntos sobre la recta P_1 y P_2, luego los vectores A y B, que vayan de P_1 a P_2 y de P_1 a P_o, respectivamente. Se encuentra la proyección de A sobre B y se encuentra la distancia con el teorema de pitágoras:

$$|A| = \sqrt{P_{AB}^2 + d^2}$$

$$d = \sqrt{|A|^2 - P_{AB}^2}$$

Punto a Plano

Se define un vector $\mathbf{B}$ con punto inicial en el plano y punto final en el punto.

$$D = \left| \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{N}|} \right|$$

Distancia entre Rectas

i. Paralelas: se define un vector $\mathbf{B}$ con punto inicial en la primera recta, y con punto final en la segunda recta. Para la operación es indiferente que vector director usar.

$$D = \left| \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} \right|$$

ii. Se interceptan

$$D = 0$$

iii. Oblicuas: se define un vector $\mathbf{B}$ de L_1 a L_2 o viceversa.

$$D = \left| \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|} \right|$$

Distancia de Recta a Plano

i. $L \subset P$

$$D = 0$$

ii. L intersecta a P

$$D = 0$$

iii. $L \parallel P$: se define un vector $\mathbf{B}$ que vaya de P a L.

$$D = \left| \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{N}|} \right|$$

Distancia entre Planos

i. P_1 intersecta a P_2:

$$D = 0$$

ii. $P_1 \parallel P_2$: se define un vector $\mathbf{B}$ que vaya de P_1 a P_2.

$$D = \left| \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{N}|} \right|$$

Superficies en $\mathbb{R}^3$

TRAZAS

Se denomina traza a la curva de nivel obtenida al intersectar la superficie con uno de los planos coordenados. Esta traza permite ver con que ley crecen las curvas de nivel. Para determinar las trazas en el plano xy se hace $z = k$, se ve el comportamiento de la gráfica conforme k toma diferentes valores. Analiticamente para ver las trazas del plano xz se hace $y = k$ y para el planoyz se hace $x = k$.

CILINDROS

Es la gráfica de una ecuación en R^3 que solo aparecen dos de las tres coordenadas. Las rectas generatrizes son paralelas al eje que no aparece en la ecuación.

Se grafican la traza en el plano que se genera y luego extenderla al infinito paralela el eje que no aparece en la ecuación.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Superficie de Rev.	Curva Generatriz	Eje de Rev.
$y^2 + z^2 = [f(x)]^2$	$x = \pm f(x)$	x
	$z = \pm f(x)$	
$x^2 + z^2 = [g(y)]^2$	$y = \pm g(y)$	y
	$z = \pm g(y)$	
$x^2 + y^2 = [h(z)]^2$	$x = \pm h(z)$	z
	$y = \pm h(z)$	

SUPERFICIES CUÁDRICAS

Una superficie cuádrica es la gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y y z. La ecuación más general es:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Iz+J=0$$

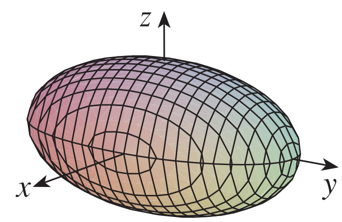
donde A, B, C, $\dots$, J son constantes, pero por traslación y rotación se puede llevar a una de las dos formas estándar

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad \text{o bien} \quad Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

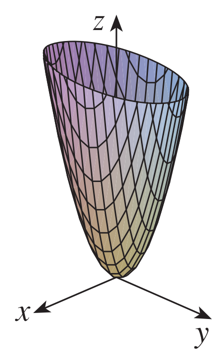
Todas las trazas son elipses. Si $a = b = c$, la elipsoide es una esfera.



Paraboloide Eliptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

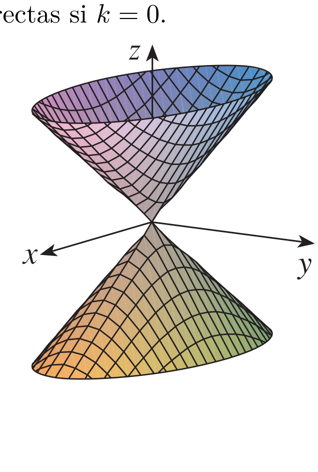
Las trazas horizontales son elipses y las verticales parabolas. La variable a la primera potencia indica el eje del paraboloide.



Cono Eliptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

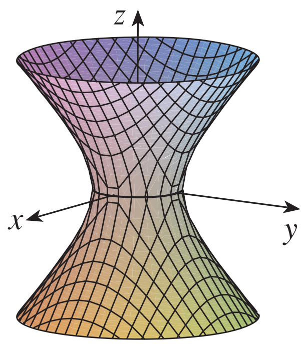
Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x = k$ y $y = k$ son hiperbolas si $k \neq 0$ pero son pares de rectas si $k = 0$.



Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

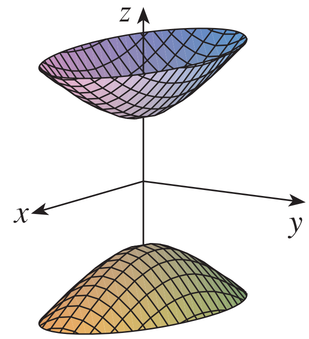
Las trazas horizontales son elipses y las verticales hiperbolas. El eje de simetria corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.



Hiperboloide Eliptico de dos Hojas

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Las trazas horizontales en $z=k$ son elipses si $k>c$ o $k<-c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

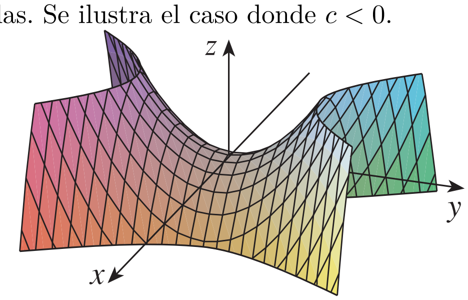


Silla de Montar

También llamado: Paraboloide Hiperbolico o Hiperboloide Parabolico

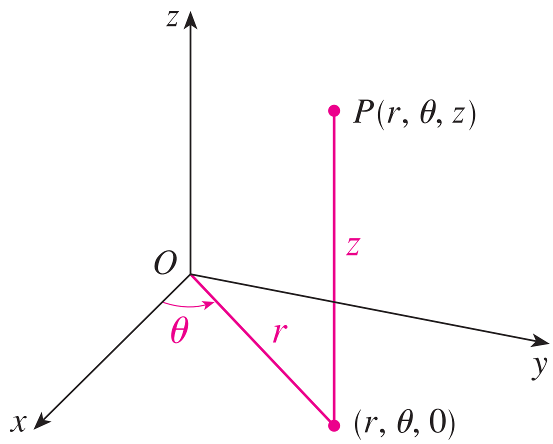
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

Las trazas horizontales son hipérbolas y las verticales son parábolas. Se ilustra el caso donde $c<0$.



Coordenadas Cilíndricas y Coordenadas Esféricas

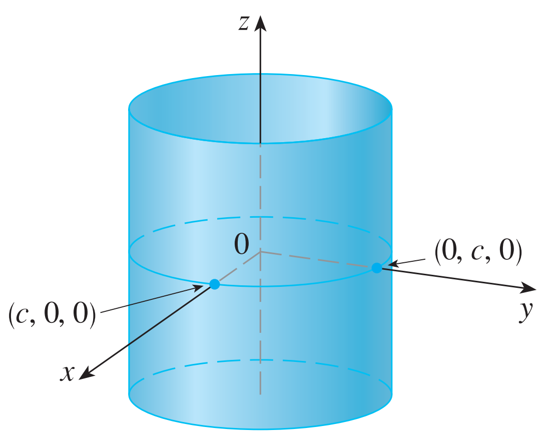
COORDENADAS CILÍNDRICAS



Superficies

Cilindros

1. $r = cte \longrightarrow$ Cilindro circular paralelo al eje z.



2. Todas las ecuaciones que se grafican en R^2 en coordenadas polares son cilindros en coordenadas cilíndricas.

   i. $r = 1 + \cos\theta \longrightarrow$ Cilindro de Cardiodie

   ii. $r = 2\sin\theta \longrightarrow$ Cilindro Circular

   iii. $r^2 = 4\sin 2\theta \longrightarrow$ Cilindro de Lemniscata

De Revolución

El eje de revolución siempre es el eje z.
Forma en coordenadas rectangulares:

$$x^2 + y^2 = [f(z)]^2$$

En coordenadas cilíndricas:

$$x^2 + y^2 = [f(z)]^2$$

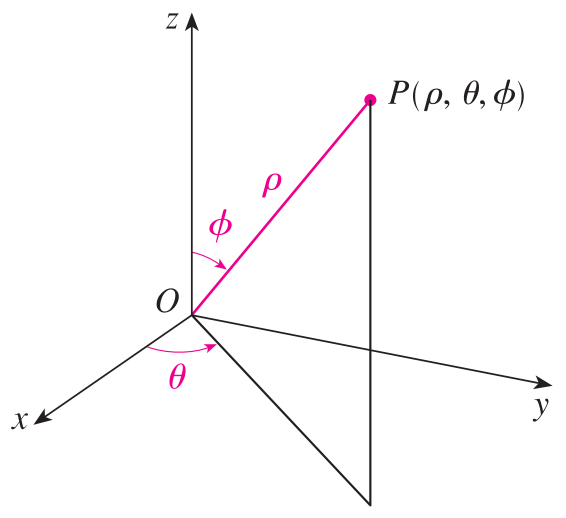
$$r^2 = [f(z)]^2$$

$$r = f(z)$$

1. $r = \sqrt{1+z^2} \longrightarrow$ Hiperboloide
2. $r = \sqrt{1-z^2} \longrightarrow$ Esfera
3. $r = z \longrightarrow$ Cono

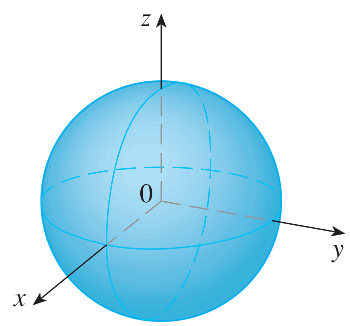
- Plano perpendicular al plano xy, y contiene al eje z.
  $\theta = cte$
- Plano paralelo al plano xy.
  $z = cte$

COORDENADAS ESFÉRICAS

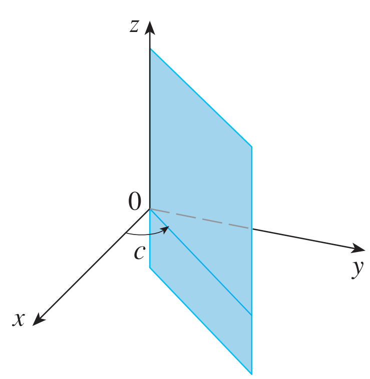


Superficies

1. $\rho = \mathrm{c} \longrightarrow$ Esfera de radio c.

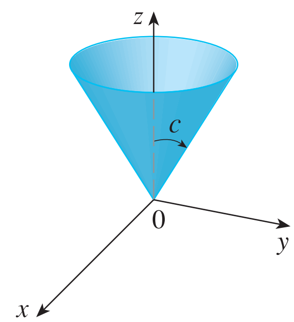


2. $\theta = \mathrm{c} \longrightarrow$ Plano perpendicular al plano xy y contiene al eje z.

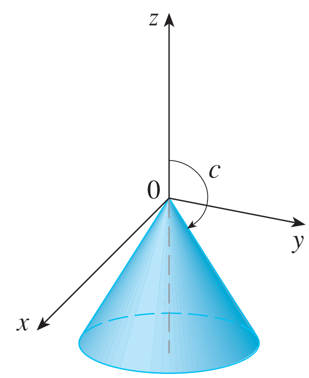


3. $\phi = \mathrm{c}$, hay varios casos:

   i. $0 < c < \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ Semi Cono con parte abierta en dirección $+z$.



   ii. $\frac{\pi}{2} < c < \pi \longrightarrow$ Semi Cono con parte abierta en dirección $-z$.



   iii. $\phi = 0 \longrightarrow$ Eje $+z$.

   iv. $\phi = \pi \longrightarrow$ Eje $-z$.

   v. $\phi = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$ Plano xy.

Otras Superficies en Coordenadas Esféricas

1. $\rho = \cos\phi \longrightarrow$ Esfera trasladada en z
2. $\rho = \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \longrightarrow$ Esfera trasladada en x
3. $\rho = \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \longrightarrow$ Esfera trasladada en y
4. Planos

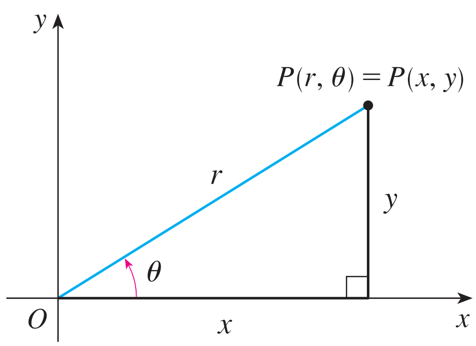
   i. $x = a \longrightarrow \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi = a$

   ii. $y = a \longrightarrow \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi = a$

   iii. $z = a \longrightarrow \rho\cos\phi = a$

RELACIÓN ENTRE SISTEMAS DE COORDENADAS

Relación de Coordenadas Cilíndricas entre Coordenadas Rectangulares



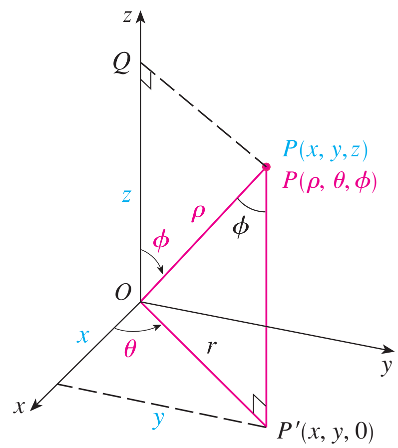
C.R. $\longrightarrow$ C.C.

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = z$$

C.C. $\longrightarrow$ C.R.

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$z = z$$

Relación de Coordenadas Esféricas entre Coordenadas Rectangulares y Coordenadas Cilíndricas



C.R. $\longrightarrow$ C.E.

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

C.E. $\longrightarrow$ C.R.

$$x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$z = \rho\cos\phi$$

C.C. $\longrightarrow$ C.E.

$$\rho = \sqrt{r^2+z^2}$$
$$\theta = \theta$$
$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\rho}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)$$

C.E. $\longrightarrow$ C.C.

$$r = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$\theta = \theta$$
$$z = \rho\cos\phi$$

Apéndice

DERIVADAS

Propiedades básicas

Sean u y v funciones de x:

- Suma y resta

$$\frac{d}{dx}\left[u \pm v\right] = u' \pm v'$$

- Multiplicación y división

$$\frac{d}{dx}\left[u\ v\right] = u'v + u\ v' \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{u'v - u\ v'}{v^2}$$

Derivadas

1. $\dfrac{d}{dx}\left[x^n\right] = nx^{n-1}$
2. $\dfrac{d}{dx}\left[\mathrm{e}^x\right] = \mathrm{e}^x$
3. $\dfrac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x \ln a$
4. $\dfrac{d}{dx}\left[\ln x\right] = \dfrac{1}{x}$
5. $\dfrac{d}{dx}\left[\log_a x\right] = \dfrac{1}{x \ln a}$
6. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{sen} x\right] = \cos x$
7. $\dfrac{d}{dx}\left[\cos x\right] = -\operatorname{sen} x$
8. $\dfrac{d}{dx}\left[\tan x\right] = \sec^2 x$
9. $\dfrac{d}{dx}\left[\sec x\right] = \sec x \tan x$
10. $\dfrac{d}{dx}\left[\csc x\right] = -\csc x \cot x$
11. $\dfrac{d}{dx}\left[\cot x\right] = -\csc^2 x$
12. $\dfrac{d}{dx}\left[\operatorname{sen}^{-1} x\right] = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $\dfrac{d}{dx}\left[\cos^{-1} x\right] = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $\dfrac{d}{dx}\left[\tan^{-1} x\right] = \dfrac{1}{1+x^2}$
15. $\dfrac{d}{dx}\left[\sec^{-1} x\right] = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
16. $\dfrac{d}{dx}\left[\csc^{-1} x\right] = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
17. $\dfrac{d}{dx}\left[\cot^{-1} x\right] = -\dfrac{1}{1+x^2}$

INTEGRALES

Puede sumarse una constante arbitraria a cada integral

1. $\displaystyle\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x|$
3. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\ dx = \mathrm{e}^x$
4. $\displaystyle\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a}$
5. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x$
6. $\displaystyle\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x$
7. $\displaystyle\int \tan x\ dx = \ln|\sec x|$
8. $\displaystyle\int \cot x\ dx = \ln|\operatorname{sen} x|$
9. $\displaystyle\int \sec x\ dx = \ln|\sec x + \tan x| = \ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi\right)\right|$
10. $\displaystyle\int \csc x\ dx = \ln|\csc x - \cot x| = \ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}x\right)\right|$
11. $\displaystyle\int \sec^2 x\ dx = \tan x$
12. $\displaystyle\int \csc^2 x\ dx = -\cot x$
13. $\displaystyle\int \sec x \tan x\ dx = \sec x$
14. $\displaystyle\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x$
15. $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$
16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (a > 0)$

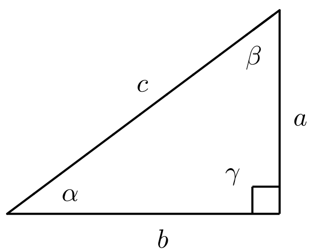
TRIGONOMETRIA

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$$

LEYES DE TRIÁNGULOS



Ley de Senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Ley de Cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Identidades Pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Suma y Diferencia de Ángulos

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$$

Producto a Suma

$$\operatorname{sen} x \ \cos y = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)\right]$$

$$\operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\cos x \ \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

Suma a Producto

$$\operatorname{sen} x \pm \cos y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

Identidades de Doble Ángulo

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

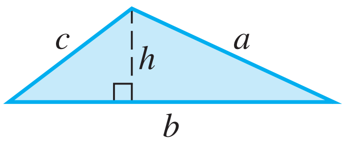
$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$$

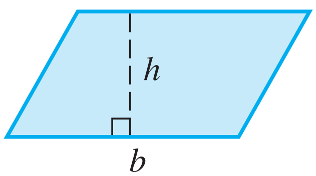
FÓRMULAS DE GEOMETRÍA

TRIÁNGULO



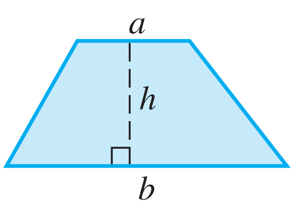
$$A = \frac{1}{2}bh \qquad P = a + b + c$$

PARALELOGRAMO



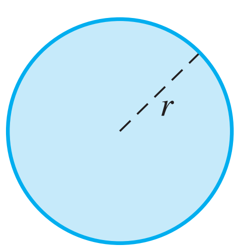
$$A = bh$$

TRAPECIO



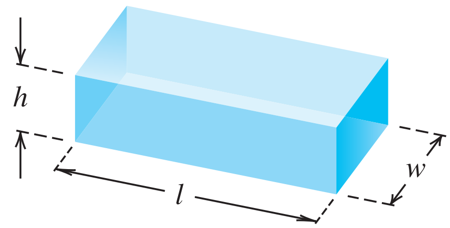
$$A = \frac{1}{2}(a + b)\,h$$

CÍRCULO



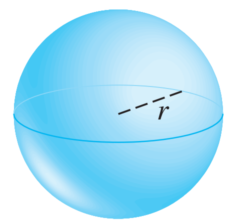
$$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$$

PARALELEPÍPEDO



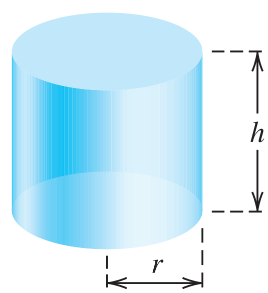
$$V = lwh \qquad S = 2\,(hl + lw + hw)$$

ESFERA



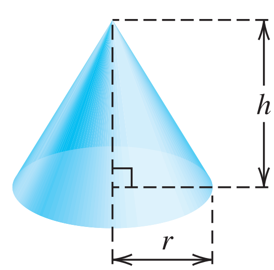
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$$

CILINDRO



$$V = \pi r^2 h \qquad S = 2\pi r h$$

CONO



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$