

REFERENCIAS

1. JS Banks, JS Carson II, BL Nelson y DM Nicol. *Simulación de sistemas de eventos discretos*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 4.^a edición, 2004.
2. GS hombre pez. *Simulación de eventos discretos: modelado, programación y análisis*. Springer-Verlag, Nueva York, 2001.
3. JM Hammersley y DC Handscomb. *Métodos de Montecarlo*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1964.
4. MH Kalos y PA Whitlock. *Métodos de Montecarlo*, tomo I: Fundamentos. John Wiley & Sons, Nueva York, 1986.
5. AM Law y WD Kelton. *Modelado y análisis de simulación*. McGraw-Hill, Nueva York, 3.^a edición, 2000.
6. I. Mitrani. *Técnicas de simulación para sistemas de eventos discretos*. Prensa de la Universidad de Cambridge, Cambridge, Reino Unido, 1982.
7. TJ Naylor, JL Balintfy, DS Burdick y K. Chu. *Técnicas de simulación por computadora*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1966.
8. RY Rubinstein y B. Melamed. *Simulación y modelado modernos*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1998.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE SISTEMAS DE EVENTOS DISCRETOS

4.1 INTRODUCCIÓN

Una parte esencial de un estudio de simulación es el análisis estadístico de los datos de salida, es decir, los datos obtenidos del modelo de simulación. En este capítulo presentamos varias técnicas estadísticas importantes aplicadas a diferentes tipos de modelos de simulación. Como se explicó en el capítulo anterior, los modelos de simulación generalmente se pueden dividir en *estático* y *dinámico* modelos. En ambos tipos el comportamiento del sistema es descrito por el *estado del sistema*, que, a todos los efectos prácticos, se puede considerar como un vector aleatorio de dimensión finita \mathbf{X} que contiene toda la información sobre el sistema. En los modelos estáticos, el estado del sistema no depende del tiempo. La simulación de dichos modelos implica la generación repetida del estado del sistema y se puede implementar utilizando los algoritmos del Capítulo 2. En los modelos dinámicos, el estado del sistema *o* *hace* dependen del tiempo, por ejemplo, \mathbf{X} en el momento t . El comportamiento del sistema se describe mediante un proceso estocástico de tiempo discreto o continuo: $\{\mathbf{X}_t\}$.

El resto de este capítulo está organizado de la siguiente manera. La Sección 4.2 ofrece una breve introducción a la estimación puntual y los intervalos de confianza. La Sección 4.3 trata el análisis estadístico de los datos de salida de los modelos estáticos. La Sección 4.4 analiza la diferencia entre la simulación de horizonte finito y de estado estacionario para modelos dinámicos. En la Sección 4.4.2 consideramos la simulación de estado estacionario con más detalle. En las Secciones 4.4.2.1 y 4.4.2.2, respectivamente, se analizan dos métodos populares para estimar las medidas de desempeño en estado estacionario, las medias por lotes y los métodos regenerativos. Finalmente, en la Sección 4.5 presentamos la técnica bootstrap.

4.2 ESTIMADORES E INTERVALOS DE CONFIANZA

Suponga que el objetivo de un estudio de simulación es estimar una cantidad desconocida basada en un estimador, que es una función de los datos producidos por la simulación.

La situación común es cuando es la expectativa de una variable de salida Y de la simulación. Suponga que las ejecuciones repetidas del experimento de simulación producen copias independientes $Y_1, \dots, Y_{\text{norte}}$ de Y . ~~muestra~~ ~~propiedad~~ ~~de~~ ~~sentido~~ ~~común~~ ~~de~~ es entonces el

$$\hat{Y} = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{i=1}^{\text{norte}} Y_i. \quad (4.1)$$

Este estimador *es imparcial*, en el sentido de que $E[\hat{Y}] = \mu$. Además, por la ley de los grandes números converge con probabilidad 1 como $\text{norte} \rightarrow \infty$. Observe que un estimador se ve como una variable aleatoria. Un resultado particular u observación de un estimador se llama *estimar* (un número), a menudo denotado por la misma letra.

Para especificar cómo *preciso* una estimación particular es, es decir, qué tan cerca está del parámetro desconocido real, uno necesita proporcionar no solo una estimación puntual sino también un intervalo de confianza. Para hacerlo con la media muestral (4.1), observe que por el teorema del límite central el estimador \hat{Y} tiene aproximadamente un $NORTE(\sigma^2/NORTE)$ distribución, donde σ^2 es la varianza de Y —asumiendo $\sigma^2 < \infty$. Normalmente, σ^2 se desconoce, pero se puede estimar con la *varianza muestral*

$$S^2 = \frac{1}{\text{norte} - 1} \sum_{i=1}^{\text{norte}} (Y_i - \bar{Y})^2, \quad (4.2)$$

que (por la ley de n grande √ números) tiende a σ^2 como $\text{norte} \rightarrow \infty$. En consecuencia, por largo norte , vemos eso $(\bar{Y} - \mu)/\sqrt{S^2/\text{norte}}$ Des aproximadamente $NORTE(0,1)$ distribuido. Así, si z_γ denota el γ -cuantil de la $NORTE(0,1)$ distribución (este es el número tal que $\Phi(z_\gamma) = \gamma$, donde Φ denota la cdf normal estándar; por ejemplo $z_{0.95} = 1.645$, ya que $\Phi(1.645) = 0.95$), entonces

$$\left(\bar{Y} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{\text{norte}}} \leq \mu \leq \bar{Y} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{\text{norte}}} \right) \approx 1 - \alpha,$$

que después de reorganizar da

$$\left(\bar{Y} - z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{\text{norte}}} \leq \mu \leq \bar{Y} + z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{\text{norte}}} \right) \approx 1 - \alpha.$$

En otras palabras, un aproximado $(1 - \alpha)100\%$ *intervalo de confianza* por es

$$\left(\bar{Y} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{\text{norte}}} \right), \quad (4.3)$$

donde la notación $(a \pm b)$ es la abreviatura del intervalo $(un - segundo, un + b)$.

Observación 4.2.1 La interpretación de un intervalo de confianza requiere cierto cuidado. Es importante notar que (4.3) es una *estocástico* intervalo de confianza que contiene con

probabilidad aproximadamente $1-\alpha$. Después de observar los resultados y_1, \dots, y_{norte} de las variables aleatorias Y_1, \dots, Y_{norte} , somos capaces de construir un *número* intervalo de confianza reemplazando el $\{Y_i\}$ con el $\{y_i\}$ en (4.3). Sin embargo, ya no podemos afirmar que tal intervalo contiene con probabilidad aproximadamente $1-\alpha$. Esto se debe a que es un *número*, por lo que se encuentra en el intervalo de confianza numérico con probabilidad 1 o 0. La interpretación de un intervalo de confianza numérico del 95% como (1.53, 1.58) es así que es un resultado particular de un intervalo aleatorio que contiene en el 95% de los casos. Si sacamos al azar una bola de una urna con 95 bolas blancas y 5 negras *pero no mires*, podemos estar bastante seguros de que la bola en nuestra mano es de hecho blanca. Así de seguros deberíamos estar de que el intervalo (1.53, 1.58) contiene.

Es una práctica común en la simulación usar y reportar el *absoluto y relativo* anchos del intervalo de confianza (4.3), definido como

$$w_a = 2Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S}{norte}} \quad (4.4)$$

y

$$w_r = \frac{w_a}{\bar{Y}} \quad (4.5)$$

respectivamente, siempre que $\bar{Y} > 0$. Los anchos absolutos y relativos se pueden usar como reglas de parada (criterios) para controlar la duración de una ejecución de simulación. El ancho relativo es particularmente útil cuando es muy pequeño. Por ejemplo, si $\approx 10^{-10}$, reportando un resultado como $w_a = 0.05$ casi no tiene sentido, mientras que, por el contrario, informar $w_r = 0.05$ es bastante significativo. Otra cantidad importante es la *error relativo* (RE) de un estimador, definido como

$$RE = \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}}{\hat{\theta}}, \quad (4.6)$$

que, en el caso de que $\hat{\theta} = \bar{Y}$, es igual a $\sigma_{\bar{Y}}$ (dividido por \bar{Y}). Tenga en cuenta que esto es igual a w_r por $2Z_{1-\alpha/2}$ y se puede estimar como S/\bar{Y} .

■ EJEMPLO 4.1 Estimación de probabilidades de eventos raros

Considere la estimación de la probabilidad de cola $P\{X > \gamma\}$ de alguna variable aleatoria X para γ un número γ . Si es muy pequeño, entonces el evento $\{X > \gamma\}$ se llama *evento raro* y la probabilidad $P\{X > \gamma\}$ se llama *probabilidad de eventos raros*.

Podemos intentar estimar $P\{X > \gamma\}$ vía (4.1) como

$$\hat{\theta} = \frac{1}{norte} \sum_{i=1}^{norte} I_{\{X_i > \gamma\}}, \quad (4.7)$$

que consiste en extraer una muestra aleatoria X_1, \dots, X_{norte} del pdf de X definiendo los indicadores $I_i = I_{\{X_i > \gamma\}}$. El estimador $\hat{\theta}$ se denomina *crudo* *Montecarlo* (CMC) estimador. Para pequeños γ la

el error relativo del estimador CMC viene dado por

$$k = \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}}{\hat{\theta}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{norte}}} {\hat{\theta}} \approx \frac{1}{\hat{\theta} \sqrt{norte}}. \quad (4.8)$$

Como ejemplo numérico, supongamos que $\mu = 10^{-6}$. Para estimar con precisión un error relativo (digamos) $k = 0.01$, tenemos que elegir un tamaño de muestra

$$n_{\text{muestra}} \approx \frac{1}{k^2} = 10^8.$$

Esto muestra que estimar probabilidades pequeñas a través de estimadores CMC no tiene sentido desde el punto de vista computacional.

4.3 MODELOS DE SIMULACIÓN ESTÁTICA

Como se mencionó en el Capítulo 3, en un modelo de simulación estático el estado del sistema no depende del tiempo. Supongamos que queremos determinar la expectativa

$$\mu = \text{MI}[H(\mathbf{X})] = \int H(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \tag{4.9}$$

dónde \mathbf{X} es un vector aleatorio con pdf f , y $H(\mathbf{x})$ es una función de valor real llamada *actuación* función. Suponemos que no se puede evaluar analíticamente y debemos recurrir a la simulación. La situación es exactamente como se describe en la Sección 4.2, con $Y = H(\mathbf{X})$, y se puede estimar con la media muestral

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(\mathbf{X}_i), \tag{4.10}$$

dónde $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ es una muestra aleatoria de F ; eso es el $\{\mathbf{X}_i\}$ son réplicas independientes de $\mathbf{X} \sim F$.

El siguiente algoritmo resume cómo estimar el rendimiento esperado del sistema, $\mu = \text{MI}[H(\mathbf{X})]$, y cómo calcular el intervalo de confianza correspondiente:

Algoritmo 4.3.1: Estimación puntual e intervalo de confianza (modelo estático)

aporte : Método de simulación para $\mathbf{X} \sim F$, función de rendimiento H , tamaño de la muestra n , nivel de confianza $1 - \alpha$.

producción: Estimación puntual y $(1 - \alpha)$ -intervalo de confianza para $\mu = \text{MI}[H(\mathbf{X})]$.

1 Simular n repeticiones, $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$, de \mathbf{X} .

2 Dejar $Y_i \leftarrow H(\mathbf{X}_i)$, $i = 1, \dots, n$

3 Calcule la estimación puntual y un intervalo de confianza de μ de (4.1) y (4.3), respectivamente.

Concluimos con dos ejemplos donde se utiliza la simulación estática.

■ EJEMPLO 4.2 Modelo de confiabilidad

Considere un sistema que consta de n componentes. El estado operativo de cada componente $i = 1, \dots, n$ está representado por $X_i \sim \text{Ber}(p_i)$, donde $X_i = 1$ significa que el componente está funcionando y $X_i = 0$ significa que ha fallado. Tenga en cuenta que la probabilidad de que el componente i está funcionando - *confiabilidad* - es p_i . El comportamiento de falla del sistema está representado por el vector aleatorio binario $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, donde generalmente se supone que el $\{X_i\}$ son independientes. Suponga que el estado operativo del sistema, digamos Y , es cualquiera

funcionando o fallando, dependiendo de los estados operativos de los componentes. En otras palabras, supongamos que existe una función $H: X \rightarrow \{0,1\}$ tal que

$$Y = H(\mathbf{X}),$$

dónde $X = \{0,1\}^{norte}$ es el conjunto de todos los vectores binarios de longitud $norte$.

La función H se llama *estructura función* y a menudo se puede representar mediante un gráfico. En particular, el gráfico de la figura 4.1 muestra una *red puente* con cinco componentes (enlaces). Para este modelo en particular, el sistema funciona (es decir, $H(\mathbf{X}) = 1$) si los nodos terminales negros están conectados por enlaces de trabajo. La función de estructura es igual a (ver Problema 4.2)

$$H(\mathbf{X}) = 1 - (1 - X_1 X_4) (1 - X_2 X_5) (1 - X_1 X_3 X_5) (1 - X_2 X_3 X_4). \quad (4.11)$$

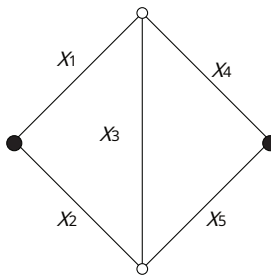


Figura 4.1: Una red puente.

Suponga que estamos interesados en el sistema de componentes de confiabilidad. Tenemos

del general $norte$ -

$$\begin{aligned} \text{PAGS}(Y=1) &= MI[H(\mathbf{X})] = \sum_{\mathbf{X} \in X} H(\mathbf{X}) \text{PAGS}(\mathbf{X}=\mathbf{X}) \\ &= \sum_{\mathbf{X} \in X} H(\mathbf{X}) \prod_{i=1}^{norte} [1 - \text{pags}_i(1 - \text{pags}_i)^{1 - X_i}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para sistemas complejos con un gran número de componentes y con poca estructura, se requiere mucho tiempo para calcular la confiabilidad del sistema a través de (4.12), ya que esto requiere la evaluación de $\text{PAGS}(\mathbf{X}=\mathbf{X})$ y $H(\mathbf{X})$ para 2^{norte} vectores \mathbf{X} . Sin embargo, la simulación de \mathbf{X} y la estimación de PAGS a través de (4.10) aún puede ser un enfoque viable, incluso para sistemas grandes, siempre que $H(\mathbf{X})$ se evalúa fácilmente. En la práctica, se necesitan sustancialmente menos de 2^{norte} muestras para estimar con precisión.

■ EJEMPLO 4.3 Red PERT estocástica

El *Programa de Evaluación y Revisión Técnica* (PERT) es una herramienta de uso frecuente para la gestión de proyectos. Por lo general, un proyecto consta de muchas actividades, algunas de las cuales se pueden realizar en paralelo, mientras que otras solo se pueden realizar después de que se hayan terminado ciertas actividades anteriores. En particular, cada actividad

tiene una lista de *antecedentes* que debe completarse antes de que pueda comenzar. Una red PERT es un gráfico dirigido donde los arcos representan las actividades y los vértices representan hitos específicos. Un hito se completa cuando se completan todas las actividades que apuntan a ese hito. Antes de que una actividad pueda comenzar, se debe completar el hito desde el cual se origina la actividad. En la Tabla 4.3 se da un ejemplo de una lista de precedencia de actividades; su gráfico PERT se muestra en la figura 4.2.

Tabla 4.1: Orden de precedencia de las actividades.

Actividad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Predecesor(es) -		- 1	1	1	2	2	3	3	4, 6	5, 8	7	9, 10

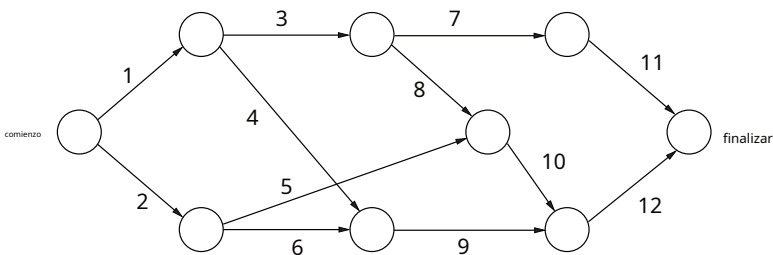


Figura 4.2: Una red PERT estocástica.

Supongamos que cada actividad t toma un tiempo aleatorio X_t para completarse. Una cantidad importante para las redes PERT es la duración máxima del proyecto, es decir, la longitud del camino más largo de principio a fin, el llamado *camino crítico*. Supongamos que estamos interesados en la duración máxima esperada del proyecto, digamos μ . Alquilar \mathbf{X} ser el vector de longitudes de actividad y $H(\mathbf{X})$ sea la longitud de la ruta crítica, tenemos

$$\mu = \text{MI}[H(\mathbf{X})] = \min_{j=1, \dots, \text{pags}} \left[\sum_{i \in \text{PAGS}_j} X_i \right] \tag{4.13}$$

dónde PAGS_j es el j -th ruta completa de principio a fin y pags es el número de tales caminos.

4.4 MODELOS DE SIMULACIÓN DINÁMICA

Los modelos de simulación dinámica tratan con sistemas que evolucionan con el tiempo. Nuestro objetivo es (como en el caso de los modelos estáticos) estimar el rendimiento esperado del sistema, donde el estado del sistema ahora se describe mediante un proceso estocástico $\{X_t\}$, que puede tener un parámetro de tiempo continuo o discreto. Para simplificar, consideramos principalmente el caso donde X es una variable aleatoria escalar; luego escribimos X_t en vez de \mathbf{X}_t .

Hacemos una distinción entre *horizonte-nocturno* y *estado estable* simulación. En la simulación de horizonte finito, las mediciones del rendimiento del sistema se definen en relación con un intervalo específico de tiempo de simulación $[0, T]$ (dónde T puede ser una variable aleatoria),

mientras que en la simulación de estado estable, las medidas de rendimiento se definen en términos de ciertas medidas limitantes a medida que el horizonte de tiempo (duración de la simulación) llega al infinito.

El siguiente ejemplo ilustrativo ofrece una mayor comprensión de las simulaciones de estado estacionario y de horizonte finito. Supongamos que el estado X_t representa el número de clientes en un establo $M/M/1$ cola (ver Ejemplo 1.13 en la página 27). Dejar

$$F_{t, m}(X) = \text{PAGS}(X_t = X / X_0 = \text{metro}) \quad (4.14)$$

ser el cdf de X_t dado el estado inicial $X_0 = \text{metro}$ (metro los clientes están inicialmente presentes). $F_{t, m}$ se llama el *distribución de horizonte finito* de X_t dado que $X_0 = \text{metro}$.

Decimos que el proceso $\{X_t\}$ se establece en estado estacionario (equivalentemente, que el estado estacionario existe) si por todo metro

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_{t, m}(X) = F(X) \equiv \text{PAGS}(X = X) \quad (4.15)$$

para alguna variable aleatoria X . En otras palabras, *estado estable* implica que, como $t \rightarrow \infty$, la cdf transitoria, $F_{t, m}(X)$ (que generalmente depende de t y metro), se aproxima a una cdf de estado estacionario, $F(X)$, cual *no depende* en el estado inicial, metro . El proceso estocástico, $\{X_t\}$, se dice que *convergen en distribución* a una variable aleatoria $X \sim F$. Tal X puede interpretarse como el estado aleatorio del sistema cuando se observa en un futuro lejano. El significado operativo de *estado estable* es que después de un período de tiempo el transitorio cdf $F_{t, m}(X)$ se acerca a su cdf límite (estado estable) $F(X)$. Es importante darse cuenta de que esto *no* significa que en cualquier momento las realizaciones de $\{X_t\}$ generados a partir de la ejecución de la simulación se vuelven independientes o constantes. La situación se ilustra en la Figura 4.3, donde la curva punteada indica la expectativa de X_t .

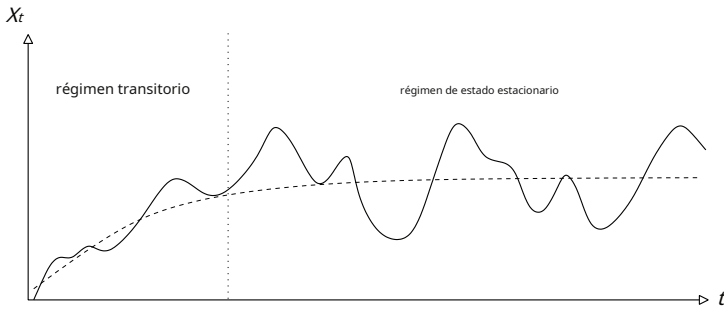


Figura 4.3: El proceso de estado para un modelo de simulación dinámica.

Las distribuciones exactas (transitoria y de estado estacionario) generalmente están disponibles solo para modelos markovianos simples como el $M/M/1$ cola. Para los modelos no markovianos, normalmente ni las distribuciones (transitoria y de estado estable) ni los momentos asociados están disponibles a través de métodos analíticos. Para el análisis del rendimiento de tales modelos se debe recurrir a la simulación.

Tenga en cuenta que para algunos modelos estocásticos, solo la simulación de horizonte finito es factible, ya que el régimen de estado estacionario no existe o el período de horizonte finito es tan largo que el análisis de estado estacionario es computacionalmente prohibitivo (p. ej., [10]).

4.4.1 Simulación de horizonte finito

El análisis estadístico para los modelos de simulación de horizonte finito es básicamente el mismo que para los modelos estáticos. Para ilustrar el procedimiento, supongamos que $\{X_t, t=0\}$ es un proceso de tiempo continuo para el cual deseamos estimar el valor promedio esperado,

$$(T, \text{metro}) = \text{mi} \left[\int_0^T X_t dt \right] \quad (4.16)$$

en función del horizonte temporal T y el estado inicial $X_0 = \text{metro}$. (Para un tiempo discreto proceso $\{X_t, t=1, 2, \dots\}$, la integral $\int_0^T X_t dt$ se reemplaza por la suma $\sum_{t=1}^T X_t$). Por ejemplo, si X_t representa el número de clientes en un sistema de colas a la vez t , después (T, metro) es el número promedio de clientes en el sistema durante el intervalo de tiempo $[0, T]$, dado $X_0 = \text{metro}$.

Supongamos ahora que n se realizan replicaciones independientes, cada una comenzando en el estado $X_0 = \text{metro}$. Entonces el estimador puntual y el $(1 - \alpha)$ Intervalo de confianza del 100% para (T, metro) se puede escribir, como en el caso estático (ver (4.10) y (4.3)):

$$(T, \text{metro}) = \text{norte}^{-1} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (4.17)$$

$$y \left((T, \text{metro}) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\text{número de serie}^{-1} S^2} \right) \quad (4.18)$$

respectivamente, donde $Y_i = \int_0^T X_t dt$, X_t es la observación en el tiempo t desde la i -ésima replicación y S^2 es la varianza muestral de $\{Y_i\}$. El algoritmo para estimar el rendimiento de horizonte finito, (T, metro) , es así:

Algoritmo 4.4.1: Estimación puntual e intervalo de confianza (horizonte finito)

aporte : Método de simulación para el proceso $\{X_t, t=0\}$, horizonte de tiempo T , estado inicial metro , tamaño de la muestra n , nivel de confianza $1 - \alpha$.

producción: Estimación puntual y $(1 - \alpha)$ -intervalo de confianza para el esperado valor promedio (T, metro) .

1 Simular n replicas del proceso $\{X_t, t=0, \dots, T\}$, comenzando cada replicación desde el estado inicial $X_0 = \text{metro}$.

2 Calcule el estimador puntual y el intervalo de confianza de (T, metro) de (4.17) y (4.18), respectivamente.

Si, en lugar del número promedio esperado de clientes, queremos estimar el esperado *máximo* número de clientes en el sistema durante un intervalo $(0, T]$, el único cambio requerido es reemplazar $Y_i = \int_0^T X_t dt$ con $Y_i = \max_{0 \leq t \leq T} X_t$. De la misma manera, podemos estimar otras medidas de rendimiento de este sistema, como la probabilidad de que el número máximo de clientes durante $(0, T]$ supere algún nivel γ o el período de tiempo promedio esperado que la primera k los clientes gastan en el sistema.

4.4.2 Simulación de estado estacionario

La simulación de estado estacionario se usa para sistemas que exhiben alguna forma de comportamiento estacionario o de largo plazo. En términos generales, consideramos que el sistema comenzó en el

pasado infinito, por lo que cualquier información sobre las condiciones iniciales y los tiempos de inicio se vuelve irrelevante. La noción más precisa es que el estado del sistema es descrito por un *proceso estacionario*; véase también la Sección 1.13.

■ EJEMPLO 4.4 *M/M/1* cola

Considere el proceso de nacimiento y muerte $\{X_t, t \geq 0\}$ describiendo el número de clientes en el *M/M/1* cola; ver Ejemplo 1.13. Cuando la intensidad del tráfico $\rho = \lambda/\mu$ es menor que 1, este proceso de salto de Markov tiene una distribución límite,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{PAGS}(X_t = k) = (1 - \rho)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

que es también su distribución estacionaria. Cuando X_0 se distribuye de acuerdo con esta distribución límite, el proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ es estacionario: se comporta como si hubiera estado funcionando durante un período de tiempo infinito. En particular, la distribución de X_t no depende de t . Un resultado similar es válido para el proceso de Markov $\{Y_{norte}, norte = 1, 2, \dots\}$, que describe el número de clientes en el sistema visto por el *norte*-th cliente que llega. Se puede demostrar que bajo la condición

$\rho < 1$ tiene el mismo límite la distribución como $\{X_t, t \geq 0\}$. Tenga en cuenta que para el *M/M/1* cola las medidas de rendimiento esperadas en estado estacionario están disponibles analíticamente, mientras que para el *CURRO/1* cola, que se discutirá en el Ejemplo 4.5, se necesita recurrir a la simulación.

Se debe tener especial cuidado al hacer inferencias sobre el desempeño en estado estacionario. El motivo es que los datos de salida suelen estar correlacionados; en consecuencia, el análisis estadístico utilizado anteriormente, basado en observaciones independientes, ya no es aplicable.

Para cancelar los efectos de la dependencia del tiempo y la distribución inicial, es una práctica común descartar los datos que se recopilan durante la parte no estacionaria o transitoria de la simulación. Sin embargo, no siempre está claro cuándo el proceso alcanzará la estacionariedad. Si el proceso es regenerativo, entonces el método regenerativo, discutido en la Sección 4.4.2.2, evita por completo este problema de transitoriedad.

A partir de ahora supondremos que $\{X_t\}$ es un proceso estacionario. Suponga que deseamos estimar el valor esperado en estado estacionario $E[X]$, por ejemplo, la longitud esperada de la cola en estado estable o el tiempo esperado de permanencia en estado estable de un cliente en una cola. Entonces se puede estimar como

$$\begin{aligned} &= T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t \\ \text{o} \quad &= T^{-1} \int_0^T X_t dt, \end{aligned}$$

respectivamente, dependiendo de si $\{X_t\}$ es un proceso de tiempo discreto o de tiempo continuo.

Para mayor concreción, considere el caso discreto. La varianza de \bar{X}_T (ver Problema 1.15) está dada por

$$\text{Var}(\bar{X}_T) = \frac{1}{T^2} \left(\sum_{t=1}^T \text{Var}(X_t) + 2 \sum_{s=1}^{T-1} \sum_{t=s+1}^T \text{cov}(X_s, X_t) \right). \quad (4.19)$$

Ya que $\{X_t\}$ es estacionario, tenemos $\text{Cov}(X_s, X_t) = \text{MI}[X_s X_t] - R$ define $R(t-s)$, donde $R(t-s)$ es la función de covarianza del proceso estacionario. $\text{Var}(X_t)$. En consecuencia, podemos escribir (4.19) como

$$\text{Var}() = R(0) + 2 \sum_{t=1}^{T-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right) R(t). \quad (4.20)$$

Del mismo modo, si $\{X_t\}$ es un proceso de tiempo continuo, la suma en (4.20) se reemplaza con la integral correspondiente (de $t=0$ a T), mientras que todos los demás datos permanecen iguales. En muchas aplicaciones $R(t)$ disminuye rápidamente con t , de modo que solo los primeros términos de la suma (4.20) son relevantes. Estas covarianzas, digamos $R(0), R(1), \dots, R(K)$, se puede estimar a través de sus promedios muestrales (imparciales):

$$R(k) = \frac{1}{T-k-1} \sum_{t=1}^{T-k} (X_t - \bar{X})(X_{t+k} - \bar{X}), \quad k=0, 1, \dots, K.$$

Así, para grandes T la varianza de $R(k)$ se puede estimar como S_2/T , donde

$$S_2 = R(0) + 2 \sum_{t=1}^{T-1} R(t).$$

En intervalos de confianza, usamos nuevamente el teorema del límite central; es decir, la cdf de \bar{X} converge a la cdf de la distribución normal con expectativa 0 y varianza $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}(\bar{X})$ — el llamado *varianza asintótica* de \bar{X} . Usando S_2 como estimador de σ^2 , encontramos que un aproximado $(1-\alpha)$ El intervalo de confianza del 100% para \bar{X} está dado por

$$\bar{X} \pm Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S_2}{T}}. \quad (4.21)$$

A continuación, consideramos dos métodos populares para estimar parámetros de estado estacionario: el *lote* *significativo* y *regenerado* métodos.

4.4.2.1 Método de medias por lotes El método de medias por lotes es el más utilizado por los profesionales de la simulación para estimar los parámetros de estado estacionario a partir de una sola ejecución de simulación, digamos de longitud M . La inicial k observaciones, correspondientes a la parte transitoria de la corrida (llamada *quemado*), se eliminan y el resto $M - K$ Las observaciones se dividen en n lotes, cada uno de longitud

$$T = \frac{M-K}{n}.$$

La eliminación sirve para eliminar o reducir el sesgo inicial, de modo que las observaciones restantes $\{X_t, t > K\}$ son estadísticamente más típicos del estado estacionario.

Supongamos que queremos estimar el rendimiento esperado en estado estacionario $= \text{MI}[X]$, suponiendo que el proceso es estacionario durante $t > k$. Suponemos, por simplicidad, que $\{X_t\}$ es un proceso de tiempo discreto. Dejar X_{ti} denota el t -ésima observación de la i -ésimo lote. La media muestral de la i -th lote de longitud T es dado por

$$Y_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{ti}, \quad i=1, \dots, N.$$

Por lo tanto, la media muestral de es

$$= \frac{1}{M-K} \sum_{t=k+1}^{\text{METRO}} X_t = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{i=1}^{\text{norte}} Y_i. \quad (4.22)$$

El procedimiento se ilustra en la Figura 4.4.

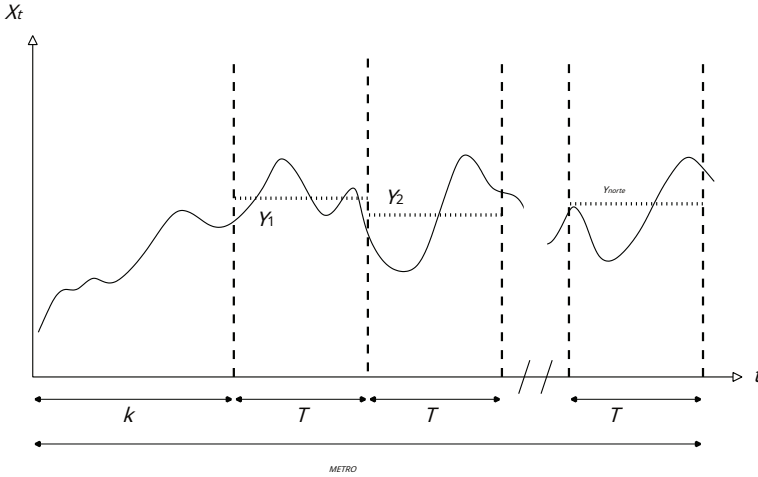


Figura 4.4: Ilustración del procedimiento de medios por lotes.

Para asegurar una independencia aproximada entre los lotes, su tamaño, T , debe ser lo suficientemente grande. Para que el teorema del límite central se cumpla aproximadamente, el número de lotes, norte , normalmente debe elegirse en el rango 20-30. En tal caso, un intervalo de confianza aproximado para está dado por (4.3), donde S es la desviación estándar muestral de la $\{Y_i\}$. En el caso de que los medios por lotes muestren alguna dependencia, podemos aplicar la fórmula (4.21) como alternativa a (4.3).

A continuación, discutimos brevemente cómo elegir k . En general, esta es una tarea muy difícil, ya que se dispone de muy pocos resultados analíticos. El siguiente ejemplo de cola proporciona algunas sugerencias sobre cómo k debe incrementarse a medida que aumenta la intensidad del tráfico en la cola.

Dejar $\{X_t, t \geq 0\}$ Sea el proceso de longitud de cola (sin incluir al cliente en servicio) en un $M/M/1$ cola, y supongamos que comenzamos la simulación en el tiempo cero con una cola vacía. Se muestra en [1, 2] que para estar dentro del 1% de la media de estado estacionario, la longitud de la parte inicial que se eliminará, k , debe ser del orden de $8\lambda(m-1)/\epsilon$, donde $1/\mu$ es el tiempo de servicio esperado. Así, por $\epsilon = 0.5, 0.8, 0.9$, y 0.95 , k es igual a 32, 200, 800 y 3200 tiempos de servicio esperados, respectivamente.

En general, uno puede usar la siguiente regla general simple.

1. Defina la siguiente media móvil A_k de longitud T :

$$A_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^{k+T} X_t$$

2. Calcular A_k para diferentes valores de k , decir $k=0, m, 2m, \dots, rm, \dots$, dónde $metro$ está arreglado, digamos $metro=10$
3. Encuentra r tal que $A_{rm} \approx A_{(r+1)metro} \approx \dots \approx A_{(r+s)metro}$, tiempo $A_{(r-s)metro} \approx A_{(r-s+1)metro} \approx \dots \approx A_{rm}$, dónde $r \geq s=5$, por ejemplo.
4. Entregar $k=rm$.

El algoritmo de medios por lotes es el siguiente:

Algoritmo 4.4.2: Método de medios por lotes

aporte : Método de simulación para $\{X_t, t \geq 0\}$, longitud de carrera $METRO$, periodo de rodaje k , número de lotes $norte$, nivel de confianza $1 - \alpha$.

producción: Estimación puntual y $(1 - \alpha)$ -intervalo de confianza para el esperado rendimiento en estado estacionario.

- 1 Realice una sola ejecución de simulación de longitud $METRO$ y borro el primero k observaciones correspondiente al periodo de rodaje.
 - 2 Dividir el resto $M-k$ observaciones en $norte$ lotes, cada uno de longitud $T = (M-k)/norte$.
 - 3 Calcule el estimador puntual y el intervalo de confianza para de (4.22) y (4.3), respectivamente.
-

■ **EJEMPLO 4.5** *CURRO/1* cola

los *CURRO/1* modelo de cola es una generalización del *M/M/1* modelo discutido en los ejemplos 1.13 y 4.4. Las únicas diferencias son que (1) los tiempos entre llegadas tienen cada uno un cdf general F_y (2) los tiempos de servicio tienen cada uno un cdf general $GRAMO$. Consideremos el proceso $\{Z_{norte}, norte=1, 2, \dots\}$ describir el número de personas en un *CURRO/1* cola vista por el $norte$ -th cliente que llega. La Figura 4.5 da una realización del procedimiento de medios por lotes para estimar la longitud de la cola en estado estacionario. En este ejemplo la primera $k=5$ Se tiran 100 observaciones, dejando $norte=9$ lotes, cada uno de tamaño $T=100$. Los medios por lotes se indican mediante líneas gruesas.

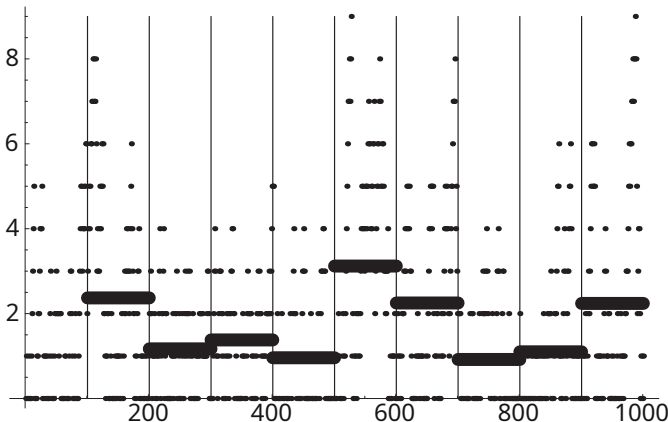


Figura 4.5: Los medios por lotes para el proceso $\{Z_{norte}, norte=1, 2, \dots\}$.

Observación 4.4.1 (Método de replicación-eliminación) En el método de replicación-eliminación, *no* se llevan a cabo corridas independientes, en lugar de una sola corrida de simulación como en el método de medios por lotes. De cada replicación, se eliminan k observaciones iniciales correspondientes a la simulación de horizonte finito y luego calcula el estimador puntual y el intervalo de confianza para μ vía (4.22) y (4.3), respectivamente, exactamente como en el enfoque de medias por lotes. Tenga en cuenta que el intervalo de confianza obtenido con el método de replicación-delección no está sesgado, mientras que el obtenido por el método de medias por lotes está ligeramente sesgado. Sin embargo, el primero requiere la eliminación de k replicación, en comparación con *una sola* eliminación en este último. Por esta razón, el primero no es tan popular como el segundo. Para obtener más detalles sobre el método de replicación-eliminación, consulte [10].

4.4.2.2 El método regenerativo Un proceso estocástico $\{X_t\}$ se llama *regenerador* si existen puntos de tiempo aleatorios $T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ tal que en cada momento el proceso se reinicia probabilísticamente. Más precisamente, el proceso $\{X_t\}$ se puede dividir en réplicas iid durante intervalos, llamados *ciclos*, de longitudes $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$

■ EJEMPLO 4.6 Cadena de Markov

El ejemplo estándar de un proceso regenerativo es una cadena de Markov. Suponga que la cadena comienza desde el estado i . Dejar $T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ indicar las veces que visita el estado j . Tenga en cuenta que en cada momento aleatorio T_i la cadena de Markov comienza de nuevo, independientemente del pasado. Decimos que el proceso de Markov *regenera* sí mismo. Por ejemplo, considere una cadena de Markov de dos estados con matriz de transición

$$PAGS = \begin{pmatrix} pags_{11} & pags_{12} \\ pags_{21} & pags_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Suponga que las cuatro probabilidades de transición $pags_{ij}$ son estrictamente positivos y que, a partir del estado $i \neq 1$, obtenemos la siguiente trayectoria de muestra:

$$(X_0, X_1, X_2, \dots, X_{10}) = (1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1).$$

Se ve fácilmente que las probabilidades de transición correspondientes a la trayectoria de la muestra anterior son

$$pags_{12}, pags_{22}, pags_{22}, pags_{21}, pags_{12}, pags_{21}, pags_{11}, pags_{12}, pags_{22}, pags_{21}.$$

Tomando $j=1$ como estado regenerativo, la trayectoria contiene cuatro ciclos con las siguientes transiciones:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1; 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1; 1 \rightarrow 1; 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1,$$

y las longitudes de ciclo correspondientes son $\tau_1=4$, $\tau_2=2$, $\tau_3=1$, $\tau_4=3$.

■ EJEMPLO 4.7 CURRO/1 cola (continuación)

Otro ejemplo clásico de un proceso regenerativo es el proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ describiendo el número de clientes en el CURRO/1 sistema, donde los tiempos de regeneración $T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ corresponden a clientes que llegan a un sistema vacío (ver también el ejemplo 4.5, donde se muestra un proceso de tiempo discreto relacionado).

consideró). Observe que en cada momento T el proceso comienza de nuevo, independientemente del pasado; en otras palabras, el proceso se regenera a sí mismo. La Figura 4.6 ilustra una ruta de muestra típica del proceso $\{X_t, t \geq 0\}$. Tenga en cuenta que aquí $T_0=0$; es decir, en el tiempo 0 llega un cliente a un sistema vacío.

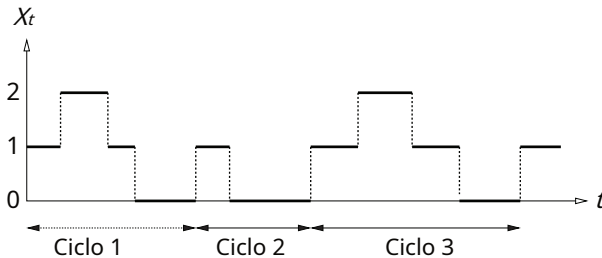


Figura 4.6: Ejemplo de ruta del proceso $\{X_t, t \geq 0\}$, que describe el número de clientes en un *CURRO* cola.

■ EJEMPLO 4.8 (s, s) Modelo de Inventario de Políticas

Considere un modelo de inventario de un solo producto de revisión continua que suministre demandas externas y reciba existencias de una instalación de producción. Cuando se produce la demanda, se llena o se hace un pedido pendiente (que se satisfará mediante entregas retrasadas). En el momento t , la *inventario neto* (inventario disponible menos pedidos atrasados) es $norte_t$, y el *posición de inventario* (inventario neto más inventario en pedido) es X_t . La política de control es un (s, s) política que opera en la posición del inventario. En concreto, en cualquier momento t cuando una demanda D se recibe que reduciría la posición del inventario a menos de s (es decir, $X_t - D < s$, donde X_t denota la posición del inventario justo antes t), un orden de tamaño $S - (X_t - D)$ se coloca, lo que hace que la posición del inventario vuelva inmediatamente a s . De lo contrario, no se realiza ninguna acción. Llega el pedido r unidades de tiempo después de que se coloca (r se llama el *Plomo* tiempo). Claramente, $X_t = norte_t + r = 0$. Ambos procesos de inventario se ilustran en la Figura 4.7. Los puntos en el gráfico de la posición del inventario (debajo de la línea) representan cuál habría sido la posición del inventario si no se hubiera realizado ningún pedido.

Dejar D_i y A_i ser el tamaño de la i -ésima demanda y la duración de la i -ésimo tiempo entre demanda, respectivamente. Suponemos que ambos $\{D_i\}$ y $\{A_i\}$ son secuencias iid, con cdfs comunes F_D y F_A , respectivamente. ~~Se supone que las secuencias son independientes entre sí.~~

Debajo de la espalda-política de pedidos y los supuestos anteriores, tanto el proceso de posición del inventario $\{X_t\}$ y el proceso de inventario neto $\{norte_t\}$ son regenerativos. En particular, cada proceso se regenera cuando se eleva a s . Por ejemplo, cada vez que se realiza un pedido, el proceso de posición de inventario se regenera. Se ve fácilmente que la trayectoria de la muestra de $\{X_t\}$ en la Figura 4.7 contiene tres ciclos regenerativos, mientras que la ruta de muestra de $\{norte_t\}$ contiene solo dos, que ocurren después del segundo y tercer tiempo de entrega. Tenga en cuenta que durante estos tiempos no se ha realizado ningún pedido.

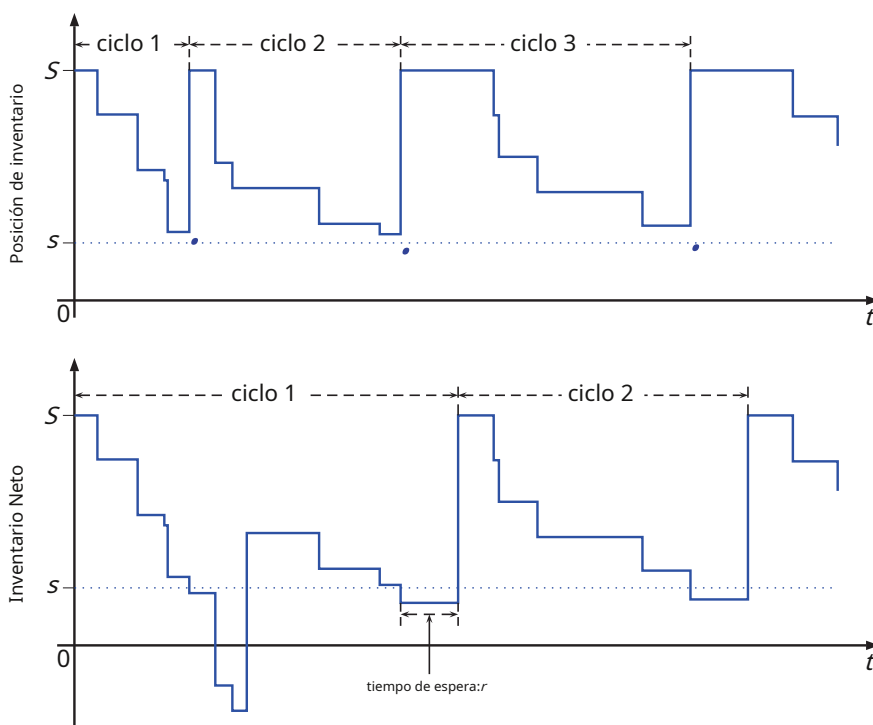


Figura 4.7: rutas de muestra para los dos procesos de inventario.

Las principales fortalezas del concepto de procesos regenerativos son que se garantiza la existencia de distribuciones límite en condiciones muy suaves y el comportamiento de la distribución límite depende únicamente del comportamiento del proceso durante un ciclo típico.

Dejar $\{X_t\}$ ser un proceso regenerativo con tiempos de regeneración T_0, T_1, T_2, \dots . Dejar $\tau_i = T_i - T_{i-1}, i=1, 2, \dots$ ser las longitudes de ciclo. Dependiendo de si $\{X_t\}$ es un proceso de tiempo discreto o de tiempo continuo, defina, para alguna función de valor real H ,

$$R = \frac{1}{\tau_i} \sum_{t=T_{i-1}}^{T_i} H(X_t) \quad (4.24)$$

O

$$R = \frac{1}{\tau_i} \int_{T_{i-1}}^{T_i} H(X_t) dt, \quad (4.25)$$

respectivamente, para $i=1, 2, \dots$. Suponemos, por simplicidad, que $T_0=0$. También asumimos que en el caso discreto la duración del ciclo no siempre es un múltiplo de algún número entero mayor que 1. Podemos ver R como la recompensa (o, alternatively, el costo) acumulado durante el i -ésimo ciclo. Dejar $\tau=T_1$ sea la duración del primer ciclo de regeneración, y sea $R=R_1$ ser la primera recompensa.

Las siguientes propiedades de los procesos regenerativos serán necesarias más adelante (ver, por ejemplo, [3]):

- (a) Si $\{X_t\}$ es regenerativo, entonces el proceso $\{H(X_t)\}$ es regenerativo también.
- (b) Si $MI[\tau] < \infty$, entonces, bajo condiciones suaves, el proceso $\{X_t\}$ tiene una distribución límite (o de estado estacionario), en el sentido de que existe una variable aleatoria X , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{PAGS}(X_t - X) = \text{PAGS}(X - X).$$

En el caso discreto, no se requiere ninguna condición adicional. En el caso continuo, una condición suficiente es que las rutas de muestra del proceso sean continuas a la derecha y que la distribución de la longitud del ciclo sea *sin celosía*—es decir, la distribución no concentra toda su masa de probabilidad en los puntos $n\delta$, $n \in \mathbb{N}$, para algunos $\delta > 0$.

- (c) Si se cumplen las condiciones en (b), el valor esperado en estado estacionario viene dado por

$$E[H(X)] = \frac{MI[R]}{MI[\tau]}. \quad (4.26)$$

- (d) (R_i, t_i) , $i=1, 2, \dots$, es una secuencia de vectores aleatorios iid.

Tenga en cuenta que la propiedad (a) establece que los patrones de comportamiento del sistema (o cualquier función medible del mismo) durante ciclos distintos son estadísticamente iid, mientras que la propiedad (d) establece que las recompensas y la duración del ciclo son iid conjuntamente para ciclos distintos. La fórmula (4.26) es fundamental para la simulación regenerativa. Para los modelos típicos de colas no markovianos, la cantidad (el rendimiento esperado en estado estable) es desconocida y debe evaluarse mediante simulación regenerativa.

Para obtener una estimación puntual de $E[H(X)]$, se generan n ciclos regenerativos, calcula la secuencia iid de vectores aleatorios bidimensionales (R_i, t_i) , $i=1, \dots, n$, y finalmente las estimaciones de la relación estimador

$$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{\sum_{i=1}^n t_i}, \quad (4.27)$$

dónde $\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{\sum_{i=1}^n t_i}$. Tenga en cuenta que el estimador es parcial; eso es, $E[\hat{R}] = E[H(X)]$. Sin embargo, \hat{R} es fuertemente consistente, es decir, converge a $E[H(X)]$ con probabilidad 1 como $n \rightarrow \infty$. Esto se sigue directamente del hecho de que, por la ley de los grandes números, \hat{R} y $\hat{\tau}$ convergen con probabilidad 1 a $E[R]$ y $E[\tau]$, respectivamente.

las ventajas del método de simulación regenerativa son:

- (a) No es necesaria la eliminación de datos transitorios.
- (b) Es asintóticamente exacta.
- (b) Es fácil de entender e implementar.

las desventajas del método de simulación regenerativa son:

- (a) Para muchos casos prácticos, el proceso de salida, $\{X_t\}$, no es regenerativo o sus puntos de regeneración son difíciles de identificar. Además, en sistemas complejos (p. ej., grandes redes de colas), la comprobación de la aparición de puntos de regeneración podría ser computacionalmente costosa.
- (b) El estimador está sesgado.

(c) Los ciclos regenerativos pueden ser muy largos.

A continuación, estableceremos un intervalo de confianza para τ . Dejar $Z_i = (R_i - \tau)/\sigma$. Fácilmente se ve que el Z_i son variables aleatorias iid, como los vectores aleatorios (R_i, τ) . Alquilar τ definido como antes, el teorema del límite central asegura que

$$\frac{\sqrt{norte}(\bar{R} - \tau)}{\sigma} = \frac{\sqrt{norte}(\bar{Z})}{\sigma/\sqrt{norte}}$$

converge en distribución a la distribución normal estándar como $norte \rightarrow \infty$, donde

$$\sigma^2 = \text{Var}(Z) = \text{Var}(R) - 2 \text{cov}(R, \tau) + \text{Var}(\tau). \quad (4.28)$$

Por lo tanto, un $(1 - \alpha)$ Intervalo de confianza del 100% para $\tau = \text{MI}[R]/\text{MI}[\tau]$ es

$$\bar{R} \pm \frac{Z_{1-\alpha/2} S}{\sqrt{norte} N_{1/2}}, \quad (4.29)$$

dónde

$$S^2 = S_{11} - 2S_{12} + S_{22} \quad (4.30)$$

es el estimador de σ^2 basado en reemplazar las cantidades desconocidas en (4.28) con sus estimadores insesgados. Eso es,

$$S_{11} = \frac{1}{norte-1} \sum_{i=1}^{norte} (R_i - \bar{R})^2, \quad S_{22} = \frac{1}{norte-1} \sum_{i=1}^{norte} (\tau_i - \bar{\tau})^2$$

y

$$S_{12} = \frac{1}{norte-1} \sum_{i=1}^{norte} (R_i - \bar{R})(\tau_i - \bar{\tau}).$$

Note que (4.29) difiere del intervalo de confianza estándar, digamos (4.3), por tener un término adicional $\bar{\tau}$:

El algoritmo para estimar el $(1 - \alpha)$ Intervalo de confianza del 100% para τ es como siguiente:

Algoritmo 4.4.3: Método de simulación regenerativa

aporte : Método de simulación para el proceso $\{X_t\}$, función de rendimiento H , número de regeneraciones $norte$, nivel de confianza $1 - \alpha$. **producción:** Estimación puntual y $(1 - \alpha)$ -intervalo de confianza para el esperado rendimiento en estado estacionario $= \text{MI}[H(X)]$.

- 1 Simular $norte$ ciclos regenerativos del proceso $\{X_t\}$.
 - 2 Calcular la secuencia $\{(R_i, \tau_i), i = 1, \dots, N\}$.
 - 3 Calcule el estimador puntual y el intervalo de confianza de (4.27) y (4.29), respectivamente.
-

Note que si uno usa dos simulaciones independientes de longitud $norte$, uno para estimar $\text{MI}[R]$ y el otro para estimar $\text{MI}[\tau]$, entonces claramente $S^2 = S_{11} + S_{22}$, ya que $\text{Cov}(R, \tau) = 0$.

Observación 4.4.2 Si la recompensa en cada ciclo es de la forma (4.24) o (4.25), entonces $MI[H(X)]$ puede verse tanto como el rendimiento de estado estable esperado como el rendimiento promedio a largo plazo. Esta última interpretación es válida incluso si la recompensa en cada ciclo no es de la forma (4.24)–(4.25) siempre que el $\{(\tau_i, R_i)\}$ son iid. En ese caso,

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{norte-1} R_i}{t} = \frac{MI[R]}{MI[\tau]}, \quad (4.31)$$

dónde $norte$ es el número de regeneraciones en $[0, t]$.

■ EJEMPLO 4.9 Cadena de Markov: Ejemplo 4.6 (Continuación)

Considere nuevamente la cadena de Markov de dos estados con la matriz de transición

$$PAGS = \begin{pmatrix} pags_{11} & pags_{12} \\ pags_{21} & pags_{22} \end{pmatrix}.$$

Suponga, como en el ejemplo 4.6, que partimos de 1 y obtenemos la siguiente trayectoria de muestra: $(X_0, X_1, X_2, \dots, X_{10}) = (1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1)$, que tiene cuatro ciclos con longitudes $\tau_1=4$, $\tau_2=2$, $\tau_3=1$, $\tau_4=3$ y transiciones correspondientes $(pags_{12}, pags_{22}, pags_{22}, pags_{21}), (pags_{12}, pags_{21}), (pags_{11}), (pags_{12}, pags_{22}, pags_{21})$. Además, suponga que cada transición de i a j incurre en un costo (o, alternatively, una recompensa) C_{y0} que la matriz de costos relacionada es

$$C = (C_{y0}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Note que el costo en cada ciclo no es de la forma (4.24) (sin embargo, vea el Problema 4.14) sino que se da como

$$R = \sum_{t=T_{y0}-1}^{T-1} C_{X_t, X_{t+1}}, \quad i=1, 2, \dots$$

Ilustramos el procedimiento de estimación para el costo promedio a largo plazo. Primero, observa que $R_1=1+3+3+2=9$, $R_2=3$, $R_3=0$, y $R_4=6$. Se sigue que $\bar{R} \approx 4.5$. Desde $\bar{\tau} \approx 2.5$, la estimación puntual de $\bar{es} = 1.80$. Además, $S_{11}=15$, $S_{22}=5/3$, $S_{12}=5$, y $S_{21}=2.4$. Esto da un intervalo de confianza del 95% para $(1.20, 2.40)$.

■ EJEMPLO 4.10 Ejemplo 4.7 (Continuación)

Considere la ruta de muestra en la Figura 4.6 del proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ describiendo el número de clientes en el *CURRO*1 sistema. Los datos de ruta de muestra correspondientes se dan en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2: Ejemplo de datos de ruta para el *CURRO1* proceso de cola.

$t \in \text{intervalo}$	X_t	$t \in \text{intervalo}$	X_t	$t \in \text{intervalo}$	X_t
[0.00,0.80)	1	[3.91,4.84)	1	[6.72,7.92)	1
[0.80,1.93)	2	[4.84,6.72)	0	[7.92,9.07)	2
[1.93,2.56)	1			[9.07,10.15)	1
[2.56,3.91)	0			[10.15,11.61)	0
Ciclo 1		Ciclo 2		Ciclo 3	

Note que la figura y la tabla revelan tres ciclos completos con los siguientes pares: $(R_1, t_1) = (3.69, 3.91)$, $(R_2, t_2) = (0.93, 2.81)$, y $(R_3, t_3) = (4.58, 4.89)$. Las estadísticas resultantes son (redondeadas) = 0.79, $S_1=3.62$, $S_2=1.08$, $S_{12}=1.92$, $S_2=1.26$, y el intervalo de confianza del 95% es (0.79 ± 0.32) .

■ EJEMPLO 4.11Ejemplo 4.8 (Continuación)

Dejar $\{X_t, t \geq 0\}$ Sea el proceso de posición de inventario descrito en el ejemplo 4.8. La Tabla 4.3 presenta los datos correspondientes a la ruta de muestra en la Figura 4.7 para un caso donde $s=10$, $S=40$, $y=1$.

Tabla 4.3: Datos para el proceso de posición de inventario, $\{X_t\}$, con $s=10$ y $S=40$. Las casillas indican los tiempos de regeneración.

t	X_t	t	X_t	t	X_t
[0.00]	40.00	[5.99]	40.00	[9.67]	40.00
1.79	32.34	6.41	33.91	11.29	32.20
3.60	22.67	6.45	23.93	11.38	24.97
5.56	20.88	6.74	19.53	12.05	18.84
5.62	11.90	8.25	13.32	13.88	13.00
		9.31	10.51	[14.71]	40.00

Con base en los datos de la tabla 4.3, ilustramos la derivación del estimador puntual y el intervalo de confianza del 95% para la cantidad de estado estacionario = $PAGS(X < 30) = MI[y_0(X < 30)]$, es decir, la probabilidad de que la posición del inventario sea menor a 30. La Tabla 4.3 muestra tres ciclos completos con los siguientes pares: $(R_1, t_1) = (2.39, 5.99)$, $(R_2, t_2) = (3.22, 3.68)$, y $(R_3, t_3) = (3.33, 5.04)$, donde $R = \int_{y_0}^{\infty} y_0(X_{t-30}) dt$. Las estadísticas resultantes son (redondeadas) = 0.61, $S_1=0.26$, $S_2=1.35$, $S_{12}=-0.44$, y $S_2=1.30$, lo que da un intervalo de confianza del 95% (0.61 ± 0.26) .

4.5 MÉTODO BOOTSTRAP

Supongamos que estimamos un número a través de algún estimador $H=H(\mathbf{X})$, donde $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_{\text{norte}})$, y el $\{X_i\}$ formar una muestra aleatoria de alguna distribución desconocida F . Se asume que H no depende del orden de los $\{X_i\}$. Para evaluar la calidad (p. ej., precisión) del estimador H , podríamos dibujar réplicas independientes $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ de \mathbf{X} y encontrar estimaciones de muestra para cantidades tales como la varianza del estimador

$$\text{Var}(H) = \text{MI}[H_2] - (\text{MI}[H])^2,$$

la *parcialidad* del estimador

$$\text{Sesgo} = \text{MI}[H] - \mu,$$

y el error cuadrático esperado, o *error cuadrático medio* (MSE)

$$\text{MSE} = \text{mi} \left[\left(H - \mu \right)^2 \right].$$

Sin embargo, puede llevar demasiado tiempo, o simplemente no ser factible, obtener dichas réplicas. Una alternativa es *volver a muestrear* los datos originales. Específicamente, dada una Salir $(X_1, \dots, X_{\text{norte}})$ de \mathbf{X} , extraemos una muestra aleatoria $X^*_1, \dots, X^*_{\text{norte}}$ de F pero de una aproximación a esta distribución. La mejor estimación que tenemos sobre F por motivos de $\{X_i\}$ es la *distribución empírica*, F_{norte} , que asigna masa de probabilidad $1/\text{norte}$ a cada punto X_i , $i=1, \dots, \text{norte}$. En el caso unidimensional, la función de distribución acumulativa de la distribución empírica viene dada por

$$F_{\text{norte}}(x) = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{j=1}^{\text{norte}} \mathbf{1}_{\{X_j \leq x\}}.$$

Extraer de esta distribución es trivial: para cada j , dibujar $u \sim \text{Unif}[0,1]$, dejar $j = U_{n+1}$, y regreso $X^*_j = X_j$. Tenga en cuenta que si el $\{X_i\}$ son todos diferentes, vector $\mathbf{X}^* = (X^*_1, \dots, X^*_{\text{norte}})$ puede tomar norte valores diferentes.

La lógica detrás de la idea de remuestreo es que la distribución empírica F_{norte} está cerca de la distribución real F y se acerca como norte se hace más grande. Por lo tanto, cualquier cantidad que dependa de F , como $\text{mi}[H(\mathbf{X})]$, donde h es una función, se puede aproximar por $\text{mi}[h(\mathbf{X})]$. Este último suele ser todavía difícil de evaluar, pero se puede estimar simplemente a través de la simulación de Monte Carlo como

$$\frac{1}{B} \sum_{i=1}^B h(H_i),$$

dónde H_1, \dots, H_B son copias independientes de $H=H(\mathbf{X})$. Este aparentemente auto-procedimiento de referencia se llama *arranque*—aludiendo al Barón von Münchhausen, quien salió de un pantano por sus propios medios. Por ejemplo, la estimación bootstrap de la expectativa de H es

$$\hat{\text{mi}}[H] = \overline{H^*} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B H_i,$$

que es simplemente la media muestral de $\{H_i\}$. De manera similar, la estimación bootstrap para $\text{Var}(H)$ es la varianza muestral

$$V_{\text{Arkansas}}(H) = \frac{1}{\text{segundo}-1} \sum_{i=1}^B (H_i - \overline{H^*})^2. \quad (4.32)$$

Quizás de mayor interés son los estimadores bootstrap para el sesgo y MSE, respectivamente $H^* - H$ y

$$\frac{1}{B} \sum_{i=1}^B (H_i^* - H)^2.$$

Tenga en cuenta que para estos estimadores, la cantidad desconocida se reemplaza con el estimador original H . Los intervalos de confianza se pueden construir de la misma manera. Discutimos dos variantes: la *normal* método y el *percentil* método. En el método normal, a $(1 - \alpha)$ El intervalo de confianza del 100% para está dado por

$$(H \pm z_{1-\alpha/2} S^*),$$

dónde S^* es la estimación bootstrap de la desviación estándar de H , es decir, la raíz cuadrada de (4.32). En el método percentil, los límites superior e inferior de $(1 - \alpha)$ Intervalo de confianza del 100% para están dados por el $1 - \alpha/2$ y $\alpha/2$ cuantiles de H , que a su vez se estiman a través de los cuantiles muestrales correspondientes de los muestra de arranque $\{H_i^*, i\}$.

PROBLEMAS

4.1 Deseamos estimar $\int_{-2}^2 \min_{-x/2} x dx = \int_{-2}^2 H(x) R(x) dx$ vía Montecarlo simulación usando dos enfoques diferentes: (A) definiendo $H(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \min_{-x/2} x$ y $R(x)$ pdf de $\text{latu}[-2, 2]$ distribución y (B) definición $H(x) = \text{pdf de } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ y $R(x)$ la $\text{NORTE}(0, 1)$ distribución.

- a) Para ambos casos, estimar a través del estimador de $\int_{-2}^2 \min_{-x/2} x dx$ en (4.10). Usar un tamaño de muestra $n_{\text{orte}} = 100$.
- b) Para ambos casos, estimar el error relativo de $\int_{-2}^2 \min_{-x/2} x dx$, usando $n_{\text{orte}} = 100$.
- c) Proporcione un intervalo de confianza del 95% para ambos casos, usando $n_{\text{orte}} = 100$.
- d) De b), evalúe qué tan grande n_{orte} debe ser tal que el ancho relativo del intervalo de confianza sea menor que 0.001, y realizar la simulación con este n_{orte} . Compare el resultado con el valor real de $\int_{-2}^2 \min_{-x/2} x dx$.

4.2 Demuestre que la función estructural del sistema de puentes de la figura 4.1 está dada por (4.11).

4.3 Considere el sistema de puentes en la Figura 4.1. Suponga que todas las confiabilidades de enlace son p_{ags} . Demuestre que la confiabilidad del sistema es $p_{\text{ags}}(2 + 2p_{\text{ags}} - 5p_{\text{ags}}^2 + 2p_{\text{ags}}^3)$.

4.4 Estime la confiabilidad del sistema de puente en la Figura 4.1 a través de (4.10) si las confiabilidades del enlace son $(p_{\text{ags1}}, \dots, p_{\text{ags5}}) = (0.7, 0.6, 0.5, 0.4, 0.3)$. Elija un tamaño de muestra tal que la estimación tenga un error relativo de aproximadamente 0.01.

4.5 Considere el siguiente rendimiento de muestra:

$$H(\mathbf{X}) = \min\{X_1 + X_2, X_1 + X_4 + X_5, X_3 + X_4\}.$$

Suponga que las variables aleatorias $X_i, i = 1, \dots, 5$ son iid con distribución común

(a) $\text{Gama}(\lambda_i, \beta)$, donde $\lambda = i\beta$.

(b) $\text{Ber}(p_{\text{ags}})$, donde $p_{\text{ags}} = 1/2$.

Ejecutar una simulación por computadora con $n_{\text{orte}} = 1000$ repeticiones y encuentre estimaciones puntuales e intervalos de confianza del 95% para $\text{MI}[H(\mathbf{X})]$.

4.6 Considere el orden de precedencia de las actividades en la Tabla 4.4. Suponga que las duraciones de las actividades (cuando realmente comenzaron) son independientes entre sí y todas tienen distribuciones exponenciales con parámetros 1.1, 2.3, 1.5, 2.9, 0.7 y 1.5, para las actividades 1, . . . , 6, respectivamente.

Tabla 4.4: Orden de precedencia de las actividades.

Actividad	1	2	3	4	5	6
Predecesor(es) -		- 1	2, 3	2, 3	5	6

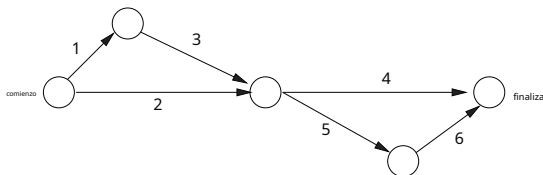


Figura 4.8: La red PERT correspondiente a la Tabla 4.4.

- Verifique que el gráfico PERT correspondiente esté dado por la figura 4.8.
- Identifique los cuatro caminos posibles de principio a fin.
- Estime la longitud esperada de la ruta crítica en (4.13) con un error relativo de menos del 5%.

4.7 Dejar $\{X_t, t=0,1,2, \dots\}$ ser un paseo aleatorio sobre los enteros positivos; ver Ejemplo 1.11. Suponer que $p=q=0.55$ y $q=0.45$. Dejar $X_0=0$. Dejar Y ser la posición máxima alcanzada después de 100 transiciones. Estime la probabilidad de que $Y \leq 15$ y proporcione un intervalo de confianza del 95% para esta probabilidad basado en 1000 repeticiones de Y .

4.8 Considera el $M/M/1$ cola. Dejar X_t sea el número de clientes en el sistema en ese momento $t=0$. Ejecutar una simulación por computadora del proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ con $\lambda=1$ y $\mu=2$, comenzando con un sistema vacío. Dejar X denote el número de estado estacionario de personas en el sistema. Encuentre estimaciones puntuales e intervalos de confianza para $E[X]$, utilizando los medios por lotes y los métodos regenerativos de la siguiente manera:

- Para el método de medios por lotes, ejecute el sistema durante un tiempo de simulación de 10,000, descartar las observaciones en el intervalo $[0,100]$, y usar $norte=30$ lotes.
- Para el método regenerativo, ejecute el sistema durante la misma cantidad de tiempo de simulación (10 000) y tome como puntos de regeneración los tiempos en los que un cliente que llega encuentra el sistema vacío.
- Para ambos métodos, encuentre el tiempo de simulación requerido que asegure un ancho relativo del intervalo de confianza que no exceda el 5%.

4.9 Dejar Z_{norte} sea el número de clientes en un $M/M/1$ sistema de colas, visto por el $norte$ -th cliente que llega, $norte=1,2, \dots$. Suponga que la tasa de servicio es $\mu=1$ y la tasa de llegada es $\lambda=0.6$. Dejar Z sea la longitud de la cola en estado estacionario (como la ve un cliente que llega lejos en el futuro). Tenga en cuenta que $Z_{norte}=X_{T_{norte}-}$, con X_t

como en el problema 4.8, y T_{norte} es la época de llegada del $norte$ -ésimo cliente. Aquí, " T_{norte} " denota el tiempo justo antes T_{norte} .

- a) Verifique que $MI[Z] = 1.5$.
- b) Explique cómo generar $\{Z_{norte}, norte=1,2, \dots\}$ utilizando un paseo aleatorio sobre los enteros positivos, como en el problema 4.7.
- c) Encuentre la estimación puntual de y un intervalo de confianza del 95% para usar el método de medias por lotes. Use un tamaño de muestra de 104 clientes y $norte=30$ lotes, tirando el primero $k=100$ observaciones.
- d) Haz lo mismo que en c) usando el método regenerativo en su lugar.
- mi) Evaluar la duración mínima de la ejecución de la simulación para obtener un intervalo de confianza del 95 % con un ancho absoluto w_a sin exceder el 5%.
- F) Repetir c), d) y e) con $\rho = 0.8$ y analice c), d) y e) como $\rho \rightarrow 1$.

4.10 La tabla 4.5 muestra una realización de una cadena de Markov, $\{X_t, t=0,1,2, \dots\}$, con espacio de estado $\{0,1,2,3\}$ comenzando en 0. Vamos X_t distribuirse de acuerdo con la distribución límite de esta cadena (suponiendo que la tenga).

Tabla 4.5: Una realización de la cadena de Markov.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
X_t	0	3	0	1	2	1	0	2	0	1	0	1	0	2	0

Encuentre el estimador puntual, y el intervalo de confianza del 95% para $MI[X]$ utilizando el método regenerativo.

4.11 Dejar W_{norte} ser el tiempo de espera del $norte$ -ésimo cliente en un *CURRO*1 cola, es decir, el tiempo total que el cliente pasa esperando en la cola (excluyendo así el tiempo de servicio). El proceso del tiempo de espera $\{W_{norte}, norte=1,2, \dots\}$ sigue el siguiente conocido Ecuación de Lindley.

$$W_{norte+1} = \text{máximo}\{W_{norte} + S_{norte} - A_{norte+1}, 0\}, \text{ } norte=1,2, \dots, \tag{4.33}$$

dónde $A_{norte+1}$ es el intervalo entre el $norte$ -th y $(norte+1)$ -st llegadas, S_{norte} es el tiempo de servicio del $norte$ -th cliente, y $W_1=0$ (el primer cliente no tiene que esperar y es atendido inmediatamente).

- a) Explique por qué se cumple la ecuación de Lindley.
- b) Encuentre la estimación puntual y el intervalo de confianza del 95% para el tiempo de espera esperado para el 4.º cliente en un *M/M/1* cola con $\rho = 0.5, (\lambda=1)$, comenzando con un sistema vacío. Usar $norte=5000$ repeticiones.
- c) Encuentre estimaciones puntuales e intervalos de confianza para el tiempo de espera promedio esperado para los clientes 21, \dots , 70 en el mismo sistema que en b). Usar $norte=5000$ repeticiones. Tenga en cuenta que la estimación puntual y el intervalo de confianza requeridos son para el siguiente parámetro:

$$E[W_{norte}] = \frac{1}{50} \sum_{norte=21}^{\infty} W_{norte}.$$

4.12 Ejecute una simulación por computadora de 1000 ciclos regenerativos del (s, s) modelo de inventario de políticas (ver Ejemplo 4.8), donde las demandas llegan de acuerdo con un Poisson

proceso con tasa 2 (es decir, $A \sim \text{Exp}(2)$) y el tamaño de cada demanda sigue una distribución de Poisson con media 2 (es decir, $D \sim \text{Poi}(2)$). Tomar $s=1$, $S=6$, tiempo de entrega $r=2$, y valor inicial $X_0=4$. Encuentre estimaciones puntuales e intervalos de confianza para la cantidad = $\text{PAGS}(2 - X_4)$, donde X es la posición del inventario en estado estacionario.

4.13 Simular la cadena de Markov $\{X_{\text{norte}}\}$ en el ejemplo 4.9, usando $\text{pags}_{11}=1/3$ y $\text{pags}_{22}=3/4$ para 1000 ciclos de regeneración. Obtenga un intervalo de confianza para el costo promedio a largo plazo.

4.14 Considere el Ejemplo 4.9 nuevamente, con $\text{pags}_{11}=1/3$ y $\text{pags}_{22}=3/4$. Definir $Y = (X_i, X_{i+1})$ y $H(Y) = C_{X_i, X_{i+1}}, F=0, 1, \dots$. Muestre que $\{Y_i\}$ es un proceso regenerativo. Encuentre la distribución límite/de estado estacionario correspondiente y calcule

$= \text{MI}[H(Y)]$, donde Y se distribuye de acuerdo con esta distribución límite. Compruebe si está contenido en el intervalo de confianza obtenido en el problema 4.13.

4.15 Considere la cola en tándem de la Sección 3.4.1. Dejar X_i y Y_i indicar el número de clientes en la primera y segunda colas a la vez t , incluidos aquellos que posiblemente estén siendo atendidos. Es $\{(X_t, Y_t), t \geq 0\}$ un proceso regenerativo? En caso afirmativo, especifique los tiempos de regeneración.

4.16 Considere el problema de reparación de máquinas del problema 3.5, con tres máquinas y dos instalaciones de reparación. Cada instalación de reparación puede aceptar solo una máquina defectuosa. Supongamos que las vidas son $\text{Exp}(1/10)$ distribuidos y los tiempos de reparación son $\text{tu}(0,8)$ distribuido. Dejar θ sea la probabilidad límite de que todas las máquinas estén fuera de servicio.

- a) Estimar θ a través del estimador regenerativo en (4.27) usando 1000 regenerativos ciclos de ción. Calcule el intervalo de confianza del 95% (4.30).
- b) Estime el sesgo y el MSE de usar el método bootstrap con un tamaño de muestra de $B=300$. [Sugerencia: los datos originales son $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{100})$, donde $X_i = (R_i, t_i), i = 1, \dots, 100$. Vuelva a muestrear estos datos utilizando la distribución empírica.]

c) Calcule los intervalos de confianza de arranque del 95 % para usar los métodos normal y percentil con $B=1000$ muestras de arranque.

Otras lecturas

El método regenerativo en un contexto de simulación fue introducido y desarrollado por Crane e Iglehart [4, 5]. En [3] se da un tratamiento más completo de los procesos regenerativos. Fishman [7] trata el análisis estadístico de los datos de simulación con gran detalle. Gross y Harris [8] es una referencia clásica sobre los sistemas de colas. Efron y Tibshirani [6] dan la introducción definitiva al método bootstrap. Una introducción moderna al modelado y cálculo estadístico se puede encontrar en [9].

REFERENCIAS

1. J. Abate y W. Whitt. Comportamiento transitorio del movimiento browniano regulado, I: A partir del origen. *Avances en probabilidad aplicada*, 19:560–598, 1987.
2. J. Abate y W. Whitt. Comportamiento transitorio del movimiento browniano regulado, II: Condiciones iniciales distintas de cero. *Avances en probabilidad aplicada*, 19:599–631, 1987.
3. S. Asmussen. *Probabilidad aplicada y colas*. John Wiley & Sons, Nueva York, 1987.

4. MA Crane y DL Iglehart. Simulación de sistemas estocásticos estables, I: Colas generales multiservidor. *Diario de la ACM*, 21:103–113, 1974.
5. MA Crane y DL Iglehart. Simulación de sistemas estocásticos estables, II: Cadenas de Markov. *Diario de la ACM*, 21:114–123, 1974.
6. B. Efron y R. Tibshirani. *Una introducción al Bootstrap*. Chapman & Hall, Nueva York, 1994.
7. GS Hombre-peñ. *Monte Carlo: Conceptos, Algoritmos y Aplicaciones*. Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
8. D. Gross y CM Harris. *Fundamentos de la teoría de colas*. John Wiley & Sons, Nueva York, 2ª edición, 1985.
9. DP Kroese y JCC Chan. *Modelado Estadístico y Cómputo*. Springer, Nueva York, 2014.
10. AM Law y WD Kelton. *Modelado y análisis de simulación*. McGraw-Hill, Nueva York, 3ª edición, 2000.

CAPÍTULO 5

CONTROLANDO LA VARIACIÓN

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se tratan aspectos teóricos y prácticos básicos de *reducción de varianza* técnicas. La reducción de la varianza puede verse como un medio de utilizar información conocida sobre el modelo para obtener estimadores más precisos de su desempeño. Generalmente, cuanto más sabemos sobre el sistema, más eficaz es la reducción de la varianza. Una forma de obtener esta información es a través de una simulación piloto del modelo. Los resultados de esta primera etapa de simulación se pueden usar para formular técnicas de reducción de la varianza que posteriormente mejorarán la precisión de los estimadores en la segunda etapa de simulación. Dos de las técnicas más efectivas para la reducción de la varianza son *muestreo de importancia* y *Montecarlo condicional*. Otras técnicas bien conocidas que pueden proporcionar una reducción moderada de la varianza incluyen el uso de variables comunes y antitéticas, variables de control y estratificación. El método de división, discutido en el Capítulo 9, es otro enfoque poderoso para la reducción de la varianza.

El capítulo está organizado de la siguiente forma. Comenzamos, en las secciones 5.2 a 5.5, con variables comunes y antitéticas, variables de control, Monte Carlo condicional y muestreo estratificado. La Sección 5.6 presenta el método de Monte Carlo multinivel para la estimación de las medidas de rendimiento de los procesos de difusión. La mayor parte de nuestra atención, desde la Sección 5.7 en adelante, se centra en *muestreo de importancia* y *Índice de probabilidad* técnicas. Usando el muestreo de importancia, a menudo se puede lograr una reducción sustancial (a veces dramática) de la varianza, en particular cuando se estiman probabilidades de eventos raros. en seg-

En la sección 5.7 presentamos dos técnicas alternativas basadas en el muestreo de importancia, denominadas *minimización de la varianzayentropía cruzada* métodos. Las secciones 5.8 a 5.10 analizan cómo se puede realizar el muestreo de importancia de forma secuencial/dinámica. La sección 5.11 presenta una manera simple, conveniente y unificadora de construir estimadores de muestreo de importancia eficientes: los llamados *razón de verosimilitud de transformación* (TLR) método. Finalmente, en la Sección 5.12 presentamos el *poner en pantalla* método para la reducción de la varianza, que también puede verse como una técnica de reducción de dimensiones. El objetivo de este método es identificar (descartar) los parámetros más importantes (cuello de botella) del sistema simulado que se utilizará en un procedimiento de estimación de muestreo de importancia.

5.2 VARIABLES ALEATORIAS COMUNES Y ANTITÉTICAS

Para motivar el uso de variables aleatorias comunes y antitéticas en la simulación, consideremos un ejemplo simple. Dejar X y Y ser variables aleatorias con cdfs conocidas, F_Y y $GRAMO$, respectivamente. Supongamos que necesitamos estimar $\mu = E[XY]$ mediante simulación. El estimador insesgado más simple para $E[XY]$ es $\bar{X}\bar{Y}$. Podemos simular X y Y a través del método de TI:

$$\begin{aligned} X &= F^{-1}(tu_1), \quad Y = g^{-1}(tu_2), \quad tu_1 \sim \text{tu}(0,1), \quad tu_2 \sim \text{tu}(0,1). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Es importante observar que X y Y no necesitan ser independientes. De hecho, desde

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2 \text{cov}(X, Y) \quad (5.2)$$

y dado que las cdf marginales de X y Y han sido prescritos, se sigue que la varianza de XY puede minimizarse maximizando la covarianza en (5.2). Nosotros decimos eso *variables aleatorias comunes* se usan en (5.1) si $tu_2 = tu_1$ y *variables aleatorias antitéticas* se usan si $tu_2 = 1 - tu_1$. Ya que ambos F^{-1} y $GRAMO^{-1}$ son funciones no decrecientes, al usar variables aleatorias comunes, claramente tenemos

$$\text{Cov}(F^{-1}(tu), g^{-1}(tu)) \geq 0$$

por $tu \sim \text{tu}(0,1)$. En consecuencia, se logra una reducción de la varianza, en el sentido de que el estimador $F^{-1}(tu) - GRAMO^{-1}(tu)$ tiene una varianza menor que la *crudo* *Montecarlo* (CMC) estimador $X - Y$, donde X y Y son independientes, con cdfs F_Y y $GRAMO$, respectivamente. De hecho, es bien sabido (p. ej., ver [44]) que el uso de variables aleatorias comunes maximiza la covarianza entre X y Y , para que $\text{Var}(X - Y)$ es *minimizado*. Del mismo modo, $\text{Var}(X + Y)$ se minimiza cuando las variables aleatorias antitéticas son usados.

Ahora considere la estimación de la varianza mínima de $E[H_1(X) - H_2(Y)]$, donde X y Y son variables unidimensionales con cdfs marginales conocidas, F_Y y $GRAMO$, respectivamente, y H_1 y H_2 son funciones monótonas de valor real. Matemáticamente, el problema se puede formular de la siguiente manera:

Dentro del conjunto de todas las cdf conjuntas bidimensionales de (X, Y) , fíjate un cdf conjunto, F , que minimiza $\text{Var}(H_1(X) - H_2(Y))$, sujeto a X y Y tener los cdfs prescritos F_Y y $GRAMO$, respectivamente.

Este problema ha sido resuelto por Gal, Rubinstein y Ziv [14], quienes demostraron que si H_1 y H_2 son monótonas en la *misma* dirección, entonces el uso de variables aleatorias comunes conduce a una reducción óptima de la varianza, es decir,

$$\min_F \text{Var}(H_1(X) - H_2(Y)) = \text{Var}(H_1[F^{-1}(tu)] - H_2[GRAMO^{-1}(tu)]). \quad (5.3)$$

La demostración de (5.3) utiliza el hecho de que si $H(tu)$ es una función monótona, entonces $H(F^{-1}(tu))$ es monótona también, ya que $F^{-1}(tu)$ es. Por simetría, si H_1 y H_2 son monótonos en *opuestas* direcciones, entonces el uso de variables aleatorias antitéticas (es decir, $tu_2 = 1 - tu_1$) produce una reducción óptima de la varianza.

Este resultado se puede generalizar aún más considerando la estimación de la varianza mínima de

$$MI[H_1(\mathbf{X}) - H_2(\mathbf{Y})], \quad (5.4)$$

dónde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{norte})$ y $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{norte})$ son vectores aleatorios con $X_i \sim F_i$ y $Y_i \sim GRAMO_i$, $i = 1, \dots, norte$, y las funciones H_1 y H_2 tienen un valor real y son monótonos en cada componente de \mathbf{X} y \mathbf{Y} . si los pares $\{(X_i, Y_i)\}$ son independientes y H_1 y H_2 son monótonas en la misma dirección (para cada componente), entonces la el uso de variables aleatorias comunes nuevamente conduce a una variación mínima. Es decir, tomamos $X = F^{-1}_i(tu_i)$ y $Y = GRAMO^{-1}_i(tu_i)$, $i = 1, \dots, norte$, dónde tu_1, \dots, tu_{norte} son independientes $tu(0,1)$ variables aleatorias distribuidas, o, simbólicamente,

$$\mathbf{X} = F^{-1}(\mathbf{tu}), \mathbf{Y} = GRAMO^{-1}(\mathbf{tu}). \quad (5.5)$$

Del mismo modo, si H_1 y H_2 son monótonas en direcciones opuestas, entonces es óptimo usar variables aleatorias antitéticas. último, si H_1 y H_2 son monótonamente crecientes con respecto a algunos componentes y monótonamente decrecientes con respecto a otros, entonces se obtiene una varianza mínima usando la combinación apropiada de variables aleatorias comunes y antitéticas.

Ahora describimos una de las principales aplicaciones de las variables aleatorias antitéticas. queremos estimar

$$= MI[H(\mathbf{X})],$$

dónde \mathbf{X} es un vector aleatorio con función de rendimiento de componente independiente, $H(\mathbf{X})$, es monótona en cada componente, tal función se da a continuación.

■ EJEMPLO 5.1 Ruta estocástica más corta

Considere el gráfico no dirigido en la figura 5.1, que representa el llamado *red puente*.

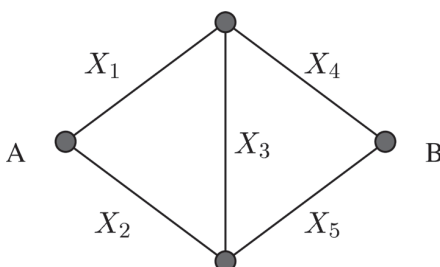


Figura 5.1: Determine el camino más corto desde A a B en una red puente.

Nuestro objetivo es estimar la longitud esperada del camino más corto entre nodos (vértices) A y B, donde las longitudes de los enlaces (bordes) son

variables aleatorias X_1, \dots, X_5 . tenemos $=MI[H(\mathbf{X})]$, dónde

$$H(\mathbf{X}) = \min\{X_1+X_4, X_1+X_3+X_5, X_2+X_3+X_4, X_2+X_5\}. \quad (5.6)$$

Tenga en cuenta que $H(\mathbf{X})$ no es decreciente en cada componente del vector \mathbf{X} .

Del mismo modo, la longitud del camino más corto $H(\mathbf{X})$ en una red arbitraria con longitudes de borde aleatorias $\{X_i\}$ Se puede escribir como

$$H(\mathbf{X}) = \min_{\substack{j=1, \dots, \text{pags} \\ i \in \text{PAGS}_j}} \sum X_i, \quad (5.7)$$

dónde PAGS_j es el j -ésima ruta completa desde la fuente hasta el sumidero de la red y pags es el número de caminos completos en la red. El rendimiento de la muestra es no decreciente en cada uno de los componentes.

Un estimador insesgado de $=MI[H(\mathbf{X})]$ es el estimador CMC, dado por

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X})_k, \quad (5.8)$$

dónde $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ es una muestra iid de la cdf (multidimensional) F . Un estimador insesgado alternativo de μ , para norte incluso, es

$$\hat{\mu}_{(a)} = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{k=1}^{\text{norte}/2} \{ H(\mathbf{X})_k + H(\mathbf{X}_{(a)}_k) \}, \quad (5.9)$$

dónde $\mathbf{X}_k = F^{-1}(\mathbf{tu}_k)$ y $\mathbf{X}_{(a)}_k = F^{-1}(\mathbf{1} - \mathbf{tu}_k)$, utilizando una notación similar a (5.5).

el estimador $\hat{\mu}_{(a)}$ se llama el *estimador antitético*. Ya que $H(\mathbf{X}) + H(\mathbf{X}_{(a)})$ es un caso particular de $H_1(\mathbf{X}) - H_2(\mathbf{Y})$ en (5.4) (con $H_2(\mathbf{Y})$ reemplazado por $-H(\mathbf{X}_{(a)})$),

inmediatamente obtenemos que $\text{Var}(\hat{\mu}_{(a)}) - \text{Var}(\hat{\mu})$. Es decir, el estimador antitético, $\hat{\mu}_{(a)}$, es más preciso que el estimador CMC, $\hat{\mu}$.

Para comparar las eficiencias de $\hat{\mu}_{(a)}$, podemos considerar su *variación de tiempo relativa*,

$$\varepsilon = \frac{T_{(a)} \text{Var}(\hat{\mu}_{(a)})}{T \text{Var}(\hat{\mu})}, \quad (5.10)$$

dónde $T_{(a)}$ y T son los tiempos de CPU requeridos para calcular los estimadores $\hat{\mu}_{(a)}$ y $\hat{\mu}$, respectivamente. Tenga en cuenta que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\mu}_{(a)}) &= \frac{\text{NORTE2}}{\text{norte}} (\text{Var}(H(\mathbf{X})) + \text{Var}(H(\mathbf{X}_{(a)})) + 2\text{Cov}[H(\mathbf{X}), H(\mathbf{X}_{(a)})]) \\ &= \text{Var}(\hat{\mu}) + \text{Cov}(H(\mathbf{X}), H(\mathbf{X}_{(a)}))/N. \end{aligned}$$

También, $T_{(a)} - T$, ya que el estimador antitético, $\hat{\mu}_{(a)}$, solo necesita *mitad* tantos números aleatorios como su contraparte CMC, $\hat{\mu}$. Despreciando esta ventaja de tiempo, la medida de eficiencia (5.10) se reduce a

$$\varepsilon = \frac{\text{Var}(\hat{\mu}_{(a)})}{\text{Var}(\hat{\mu})} = 1 + \frac{\text{cov}[H(\mathbf{X}), H(\mathbf{X}_{(a)})]}{\text{Var}(H(\mathbf{X}))}, \quad (5.11)$$

donde la covarianza es negativa y se puede estimar a través de la covarianza muestral correspondiente.

El uso de variables aleatorias comunes/antitéticas para el caso de componentes dependientes de $X_i Y_i$ para funciones estrictamente monótonas, H_1 y H_2 , se presenta en Rubinstein, Samorodnitsky y Shaked [39].

■ EJEMPLO 5.2 Ruta estocástica más corta (continuación)

Estimamos la longitud esperada del camino más corto para la red puente en el ejemplo 5.1 para el caso donde cada enlace tiene un peso exponencial con parámetro 1. Tomando un tamaño de muestra de $n_{\text{orte}} = 10.000$ obtiene la estimación CMC

$= 1.159$ con una varianza estimada de $5.6 \cdot 10^{-5}$, mientras que la estimación antitética es $= 1.164$ con una varianza estimada de $2.8 \cdot 10^{-5}$. Por lo tanto, la eficiencia ε del estimador (a) en relación con el estimador CMC es de aproximadamente 2.0.

■ EJEMPLO 5.3 Ecuación de Lindley

Considere la ecuación de Lindley para el tiempo de espera del $(n_{\text{orte}}+1)$ -st cliente en un *CURRO*1 cola:

$$W_{n_{\text{orte}}+1} = \text{máximo}\{W_{n_{\text{orte}}} + t_{n_{\text{orte}}}, 0\}, \quad W_1 = 0.$$

Véase también (4.33). Aquí $t_{n_{\text{orte}}} = S_{n_{\text{orte}}} - A_{n_{\text{orte}}+1}$, dónde $S_{n_{\text{orte}}}$ es el tiempo de servicio del n_{orte} -th cliente, y $A_{n_{\text{orte}}+1}$ es el tiempo entre llegadas entre el n_{orte} -th y $(n_{\text{orte}}+1)$ -st cliente. Ya que $W_{n_{\text{orte}}}$ es una función monótona de cada componente $A_2, \dots, A_{n_{\text{orte}}}$ y S_1, \dots, S_{n-1} , podemos obtener una reducción de la varianza usando variables aleatorias antitéticas.

5.3 VARIABLES DE CONTROL

los *variables de control* El método es una técnica de reducción de la varianza ampliamente utilizada. Consideremos primero el caso unidimensional. Dejar X_{α} un estimador insesgado de m , que se obtiene a partir de una ejecución de simulación. Una variable aleatoria C se llama un *control variable* por X si se correlaciona con X y su expectativa, r , es conocida. la variable de control C se utiliza para construir un estimador insesgado de m con una varianza menor que la de X . Este estimador,

$$X_{\alpha} = X - \alpha(C - r), \quad (5.12)$$

dónde α es un parámetro escalar, se llama *variable de control lineal*. la varianza de X_{α} es dado por

$$\text{Var}(X_{\alpha}) = \text{Var}(X) - 2\alpha \text{cov}(X, C) + \alpha^2 \text{Var}(C)$$

(ver, por ejemplo, el Problema 1.15). En consecuencia, el valor α que minimiza $\text{Var}(X_{\alpha})$ es

$$\alpha^* = \frac{\text{cov}(X, C)}{\text{Var}(C)}. \quad (5.13)$$

Típicamente, α se estima a partir de la covarianza y la varianza de la muestra correspondiente. Usando α^* , podemos escribir la varianza mínima como

$$\text{Var}(X_{\alpha^*}) = (1 - \rho_{XC}^2) \text{var}(X), \quad (5.14)$$

dónde ρ_{XC} denota el coeficiente de correlación de X y C . Note que cuanto más grande $|\rho_{XC}|$ es decir, mayor es la reducción de la varianza.

Las fórmulas (5.12)–(5.14) se pueden extender fácilmente al caso de múltiples variables de control. Para ver esto, deja $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{metro})$ sea un vector (columna) de $metro$ variables de control con vector medio conocido $\mathbf{r} = \mathbf{MI}[\mathbf{C}] = (r_1, \dots, r_{metro})$, dónde $r = \mathbf{MI}[C]$. Entonces la versión vectorial de (5.12) se puede escribir como

$$X_a = X - \alpha(\mathbf{C} - \mathbf{r}), \quad (5.15)$$

dónde α es un $metro$ -vector dimensional de parámetros. El valor α que minimiza $\text{Var}(X_a)$ es dado por

$$\alpha = \Sigma^{-1} \mathbf{C} \sigma_{XC}, \quad (5.16)$$

donde Σ denota el $metro \times metro$ matriz de covarianza de \mathbf{C} y σ_{XC} denota el $metro \times 1$ vector cuyo i -th componente es la covarianza de X y C_i , $i = 1, \dots, metro$. La varianza mínima correspondiente se evalúa como

$$\text{Var}(X_a) = (1 - R^2_{XC}) \text{Var}(X), \quad (5.17)$$

dónde

$$R^2_{XC} = (\sigma_{XC})' \Sigma^{-1} \mathbf{C} \sigma_{XC} / \text{Var}(X)$$

es el cuadrado de los llamados *coeficiente de correlación múltiple* de X y \mathbf{C} . De nuevo el más grande $|R_{XC}|$ es decir, mayor es la reducción de la varianza. El caso donde X es un vector con componentes dependientes y el vector α se reemplaza por una matriz correspondiente se trata en Rubinstein y Marcus [36].

Los siguientes ejemplos ilustran varias aplicaciones del método de variables de control.

■ EJEMPLO 5.4 Ruta estocástica más corta (continuación)

Considere nuevamente el problema de estimación del camino más corto estocástico para la red puente en el ejemplo 5.1. Entre las variables de control que podemos utilizar están las longitudes de los caminos $PAGS_{ij}$, $j = 1, \dots, 4$, es decir, cualquiera (o todos) de

$$\begin{aligned} C_1 &= X_1 + X_4 \\ C_2 &= X_1 + X_3 + X_5 \\ C_3 &= X_2 + X_3 + X_4 \\ C_4 &= X_2 + X_5. \end{aligned}$$

Las expectativas de los $\{C_i\}$ son fáciles de calcular, y cada C_i se correlaciona positivamente con la longitud del camino más corto $H(\mathbf{X}) = \min\{C_1, \dots, C_4\}$.

■ EJEMPLO 5.5 Ecuación de Lindley (Continuación)

Considere la ecuación de Lindley para el proceso de tiempo de espera $\{W_{norte}, norte = 1, 2, \dots\}$ en el *CURRO*1 cola; ver Ejemplo 5.3. como variable de control de W_{norte} podemos tomar C_{norte} , definida por la relación de recurrencia

$$C_{norte+1} = C_{norte} + t_{Unorte}, \quad C_1 = 0,$$

dónde $t_{Unorte} = S_{norte} - A_{norte} + 1$, como en el proceso de tiempo de espera. Obviamente, C_{norte} y W_{norte} están altamente correlacionados. Es más, la expectativa $t_{norte} = MI[C_{norte}]$ es conocida. Está $t_{norte} = (norte - 1) (MI[S] - MI[A])$, dónde $MI[S]$ y $MI[A]$ son los tiempos esperados de servicio y entre llegadas, respectivamente. El proceso de control lineal correspondiente es

$$Y_{norte} = W_{norte} - a(C_{norte} - t_{norte}).$$

■ EJEMPLO 5.6 Redes de colas

Ahora volvemos a la estimación del rendimiento esperado en estado estacionario $= MI[X]$ en una red de colas. Por ejemplo, supongamos que X es el número constante de clientes en el sistema. Como un proceso aleatorio de control lineal, uno puede tomar

$$Y_t = X_t - a(C_t - t_t),$$

dónde X es el número de clientes en el sistema original, y C es el número de clientes en un auxiliar *markoviano* para la cual se conoce la distribución de estado estacionario. Esta última red debe estar sincronizada en el tiempo con la red original.

Con el fin de producir altas correlaciones entre los dos procesos, $\{X_t\}$ y $\{C_t\}$, es deseable que ambas redes tengan topologías similares y cargas similares. Además, deben utilizar un flujo común de números aleatorios para generar las variables de entrada. Expresiones para el rendimiento esperado en estado estacionario $t = MI[C]$, como el número esperado en el sistema en una red markoviana, se puede encontrar en [19].

5.4 MONTE CARLO CONDICIONAL

Dejar

$$= MI[H(\mathbf{X})] = \int H(\mathbf{X}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (5.18)$$

ser alguna medida de rendimiento esperada de un modelo de simulación por computadora, donde \mathbf{X} es la variable aleatoria de entrada (vector) con un pdf $f(\mathbf{X})$ y $H(\mathbf{X})$ es la medida de rendimiento de la muestra (variable aleatoria de salida). Supongamos que hay una variable aleatoria (o vector), $\mathbf{Y} \sim \text{grando}(\mathbf{y})$, tal que la expectativa condicional $MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y} = \mathbf{y}]$ se puede calcular analíticamente. Como, por (1.11),

$$= MI[H(\mathbf{X})] = E[E[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}]], \quad (5.19)$$

resulta que $MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}]$ es un estimador insesgado de . Además, fácilmente se ve que

$$\text{Var}(MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}]) - \text{Var}(H(\mathbf{X})), \quad (5.20)$$

entonces usando la variable aleatoria $MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}]$, en vez de $H(\mathbf{X})$, conduce a la reducción de la varianza. Así condicionando *siempre* conduce a la reducción de la varianza. Para demostrar (5.20), usamos la propiedad (vea el Problema 5.7) de que para cualquier par de variables aleatorias (U, V) ,

$$\text{Var}(tu) = MI[\text{Var}(U / V)] + \text{Var}(MI[U / V]). \quad (5.21)$$

Como los dos términos del lado derecho no son negativos, se sigue inmediatamente de (5.20). La idea condicional de Monte Carlo a veces se denomina *Rao-Blackwellización*. El algoritmo de Monte Carlo condicional se da a continuación.

Algoritmo 5.4.1: Montecarlo condicional

aporte : Método para generar $\mathbf{Y} \sim \text{gramo}$, función de rendimiento H , tamaño de la muestra $norte$. **producción**: Estimador $cde = MI[H(\mathbf{X})]$.
 1 Generar una muestra iid $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{norte} \sim \text{gramo}$.
 2 Calcular $MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}_k]$, $k=1, \dots, norte$ analíticamente.
 3 Establecer $c \leftarrow \frac{1}{norte} \sum_{k=1}^{norte} MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}_k]$.
 4 devolver c

El algoritmo 5.4.1 requiere que una variable aleatoria \mathbf{Y} ser encontrado, tal que $MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}=\mathbf{y}]$ se conoce analíticamente para todos \mathbf{y} . Además, para que el Algoritmo 5.4.1 sea de uso práctico, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- (a) \mathbf{Y} debe ser fácil de generar.
- (b) $MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}=\mathbf{y}]$ debe ser fácilmente computable para todos los valores de \mathbf{y} .
- (C) $MI[\text{Var}(H(\mathbf{X})/\mathbf{Y})]$ debe ser grande en relación con $\text{Var}(MI[H(\mathbf{X})/\mathbf{Y}])$.

■ EJEMPLO 5.7 sumas aleatorias

Considere la estimación de

$$= \text{PAGS}(S_R, X) = MI[y_{O(S_R, X)}],$$

dónde

$$S_R = \sum_{i=1}^R X_i,$$

R es una variable aleatoria con una distribución dada y la $\{X_i\}$ están iid con $X_i \sim F$ independiente de R . Dejar F_r sea la cdf de la variable aleatoria S_r para fijo $R=r$. Señalando que

$$F_r(X) = \text{PAGS} \left(\sum_{i=1}^r X_i, X \right) = MI \left[F \left(X - \sum_{i=2}^r X_i \right) \right],$$

obtenemos

$$= MI \left[MI[y_{O(S_R, X)}] \mid \sum_{i=2}^R X_i \right] = MI \left[F \left(X - \sum_{i=2}^R X_i \right) \right].$$

Por lo tanto, podemos tomar el siguiente estimador de $\text{PAGS}(S_R, X)$ basado en el condicionamiento:

$$c = \frac{1}{norte} \sum_{k=1}^{norte} \left(F \left(X - \sum_{i=2}^k X_{ki} \right) \right). \quad (5.22)$$

5.4.1 Reducción de varianza para modelos de confiabilidad

A continuación, presentamos dos técnicas de reducción de varianza para modelos de confiabilidad basados en condicionamiento. Como en el ejemplo 4.2 de la página 110, tenemos un sistema poco confiable de *norte* componentes, cada uno de los cuales puede funcionar o fallar, con una función de estructura H que determina el estado del sistema (funcionando o fallando) en función de los estados de los componentes. Los estados del componente X_1, \dots, X_{norte} se supone que son independientes, con confiabilidades $\{pags_i\}$ y faltas de fiabilidad $\{q_i\}$, donde $q_i = 1 - pags_i$. La probabilidad de falla del sistema, la falta de confiabilidad del sistema, es por lo tanto $r = P(AGS(H(\mathbf{X}) = 0))$. En aplicaciones típicas, la falta de confiabilidad es muy pequeña y es difícil de estimar a través de CMC.

5.4.1.1 Permutación Monte Carlo Permutation Monte Carlo es una técnica de Monte Carlo condicional para la estimación de la confiabilidad de la red (ver Elperin et al. [12]). Aquí los componentes son enlaces poco confiables en una red, como en el Ejemplo 4.2. el estado del sistema $H(\mathbf{X})$ es el indicador del evento de que ciertos nodos preseleccionados están conectados por enlaces en funcionamiento. Supongamos que necesitamos estimar la falta de confiabilidad del sistema $r = P(AGS(H(\mathbf{X}) = 0))$.

Para aplicar la idea condicional de Monte Carlo, vemos la red estática como una instantánea de una *dinámica* red a la vez $t=1$. En este sistema dinámico, los enlaces se reparan independientemente unos de otros con una tasa de tiempo de reparación exponencial de $m_i = 1/q_i$, $i=1, \dots, n$. En el momento $t=0$ todos los enlaces han fallado. El estado de los enlaces en el momento t viene dada por el vector \mathbf{X}_t . Tenga en cuenta que \mathbf{X}_t , $t \geq 0$ es un proceso de salto de Markov con espacio de estado $\{0, 1\}^{norte}$. Como la probabilidad de cada vínculo m_i estar operativo en el momento $t=1$ es $pags_{m_i}$, la confiabilidad de la red dinámica en el tiempo $t=1$ es exactamente igual a la confiabilidad de la red original.

Sea Π el orden en el que los enlaces se vuelven operativos, y dejar $S_0, S_0 + S_1, \dots, S_0 + \dots + S_{n-1}$ ser los momentos en que se construyen dichos vínculos. Π es una variable aleatoria que toma valores en el espacio de permutaciones del conjunto de enlaces $m_i = \{1, \dots, n\}$ — de ahí el nombre *permutación Montecarlo*. Para cualquier permutación $\pi = (m_{\pi 1}, m_{\pi 2}, \dots, m_{\pi norte})$, definir $m_{\pi 0} = m_{\pi 1} m_{\pi 2} \dots m_{\pi i-1}$ $\{m_{\pi i}\}_{i=1}^{norte}$. De este modo $m_{\pi i}$ corresponde al conjunto de enlaces que siguen fallando después Los enlaces han sido reparados. Dejar $b = b(\pi)$ sea el número de reparaciones requeridas (en el orden definido por π) para activar la red. Esto se llama el *número crítico o ancla de construcción* por π .

De la teoría de los procesos de salto de Markov (ver Sección 1.13.5), se sigue que

$$P(\Pi = \pi) = \prod_{i=1}^{norte} \frac{m_{\pi i}}{\lambda_{y0-i}} \quad (5.23)$$

dónde $\lambda = \sum_{m_i \in E} m_i$. METRO mineral importante, condicionado a Π los tiempos de permanencia S_0, \dots, S_{n-1} son independientes y cada uno S_i se distribuye exponencialmente con parámetro λ_i , $i=0, \dots, norte-1$. Al condicionar en Π , tenemos

$$T = \sum_{\pi} P(AGS[H(\mathbf{X}_1) = 0 / \Pi = \pi] P[\Pi = \pi] = MI[gramo(\pi)], \quad (5.24)$$

con

$$gramo(\pi) = P(AGS[H(\mathbf{X}_1) = 0 / \Pi = \pi]. \quad (5.25)$$

De las definiciones de S y b , vemos que $gramo(\pi)$ es igual a la probabilidad de que la suma de b variables aleatorias exponenciales independientes con tasas λ_i , $i=0, 1, \dots, b-1$

excede 1. Esto se puede calcular exactamente, por ejemplo, usando convoluciones. Específicamente, tenemos

$$gramo(\pi) = 1 - F_0 \cdots F_{b-1}(1),$$

dónde F es la cdf de la $\text{Exp}(\lambda_i)$ distribución y convolución de medios; eso es,

$$FG(t) = \int_0^t R(t-x) dGRAMO(X).$$

Alternativamente, se puede demostrar (por ejemplo, ver [30]) que

$$gramo(\pi) = (1, 0, \dots, 0) \text{mi}A(1, \dots, 1), \quad (5.26)$$

dónde A es la matriz con elementos diagonales $-\lambda_0, \dots, -\lambda_{b-1}$ y diagonal superior elementos $\lambda_0, \dots, \lambda_{b-2}$ y 0 en otros lugares. aquí mi se define como el *matriz exponencial* $\text{mi}_2(A_k/k!)$.

Sea $\Pi_1, \dots, \Pi_{norte}$ ser iid permutaciones aleatorias, cada una distribuida según Π ; después

$$\hat{r} = \frac{1}{norte} \sum_{k=1}^{norte} gramo(\Pi_k) \quad (5.27)$$

es un estimador insesgado para \bar{r} . Esto conduce al siguiente algoritmo para estimar la falta de fiabilidad \bar{r} .

Algoritmo 5.4.2: Permutación Montecarlo

aporte: Función de estructura H , falta de fiabilidad de los componentes $\{q_i\}$, tamaño de la muestra $norte$.

producción: Estimador \hat{r} de la falta de fiabilidad del sistema \bar{r} .

1 por $k=1$ **a** $norte$ **hacer**

2 Dibuje una permutación aleatoria Π según (5.23). Una manera simple, similar al Algoritmo 2.10.1, es dibujar $Y_{mi} \sim \text{Exp}(m_{mi})$, $m_i=1, \dots, norte$ independientemente y devuelva Π como los índices de los valores ordenados (crecientes).

3 Determinar el número crítico b y las tarifas λ_i , $i=1, \dots, segundo-1$. Evaluar la

4 probabilidad condicional $gramo(\Pi)$ exactamente, por ejemplo, a través de (5.26).

5 Entregue (5.27) como el estimador para \bar{r} .

6 devolver \hat{r}

5.4.1.2 Acondicionamiento mediante cortes mínimos El segundo método utilizado para estimar la falta de fiabilidad de manera eficiente, desarrollado por Ross [33], emplea el concepto de corte mínimo. Un vector de estado \mathbf{X} se llama un *vector de corte* si $H(\mathbf{X}) = 0$. Si además $H(\mathbf{y}) = 1$ para todos $\mathbf{y} > \mathbf{X}$, después \mathbf{X} se llama el *vector de corte mínimo*. Tenga en cuenta que $\mathbf{y} > \mathbf{X}$ significa que $y_i \geq x_i$, $i=1, \dots, norte$, con $y_i > x_i$ para algunos i . Si \mathbf{X} es un vector de corte mínimo, el conjunto $C = \{\mathbf{i}: X_i = 0\}$ se llama un *conjunto de corte mínimo*. Es decir, un conjunto mínimo de componentes cuyos *falla* asegura la falla del sistema. Si C_1, \dots, C_{metro} denoten todos los conjuntos de corte mínimos, el sistema está funcionando si y solo si está funcionando al menos un componente en cada uno de los conjuntos de corte. Resulta que $H(\mathbf{X})$ Se puede escribir como

$$H(\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^{metro} \left(\max_{i \in C_j} X_i \right) = \prod_{j=1}^{metro} \left(1 - \prod_{i \in C_j} (1 - X_i) \right). \quad (5.28)$$

Para proceder, necesitamos la siguiente proposición, que está adaptada de [33].

Proposición 5.4.1 Dejar Y_1, \dots, Y_{metro} sea la variable aleatoria de Bernoulli $\sum_{j=1}^{metro} Y_j$ y de $a = MI[S] = \sum_{j=1}^{metro} a_j$. Dejar j sea una variable aleatoria uniforme discreta en $\{1, \dots, m\}$ independiente de Y_1, \dots, Y_{metro} . Por último, de R sea cualquier variable aleatoria que sea independiente de j . Después

$$PAGS(j=j / Y_j=1) = j, j=1, \dots, m, \quad (5.29)$$

y

$$MI[RS] = MI[S]MI[R/Y_j=1]. \quad (5.30)$$

Prueba. Para derivar la fórmula (5.29) escriba, usando la fórmula de Bayes

$$PAGS(j=j / Y_j=1) = \frac{\sum_{i=1}^{metro} PAGS(Y_i=1 / j=i) PAGS(j=i)}{\sum_{i=1}^{metro} PAGS(Y_i=1 / j=i) PAGS(j=i)}.$$

Teniendo en cuenta que $PAGS(Y_j=1 / j=j) = PAGS(Y_j=1 / j=j) = PAGS(Y_j=1) = a_j$, el resultado sigue. Para demostrar (5.30), escribimos

$$\begin{aligned} MI[RS] &= \sum_{j=1}^{metro} MI[R Y_j] = \sum_{j=1}^{metro} MI[R / Y_j=1] PAGS(Y_j=1) \\ &= a \sum_{j=1}^{metro} MI[R / Y_j=1] \frac{a_j}{a}. \end{aligned}$$

Ya que $a = MI[S]$ y, por (5.29), $\{a_j/a\}$ es la distribución condicional de j dado $Y_j=1$, (5.30) sigue. -

Aplicaremos Proposición 5.4.1 a la estimación de la falta de fiabilidad $r = PAGS(H(\mathbf{X}) = 0)$. Dejar $Y_j = \mathbb{I}_{\{i \in (1-X), j=1, \dots, m\}}$, donde, como antes, $\{C_j\}$ denota la colección de conjuntos de corte mínimo. De este modo, Y_j es el indicador del evento de que todos los componentes en C_j son *ha fallado*. Tenga en cuenta que $Y_j \sim \text{Ber}(a_j)$, con

$$a_j = \prod_{i \in C_j} q_i. \quad (5.31)$$

Dejar $S = \sum_{j=1}^{metro} Y_j$ y $a = MI[S] = \sum_{j=1}^{metro} a_j$. Por (5.28) tenemos $r = PAGS(S > 0)$, y por (5.30) se sigue que

$$r = MI[S] \mathbb{E} \left[\frac{Y_{O\{S>0\}}}{S} \middle| Y_j=1 \right] = \mathbb{E} \left[\frac{a_j}{S} \middle| Y_j=1 \right],$$

donde condicionado a $Y_j=1$ la variable aleatoria j toma el valor j con probabilidad a_j/a por $j=1, \dots, metro$. Esto conduce al siguiente algoritmo para estimar la falta de fiabilidad r :

Algoritmo 5.4.3: Acondicionamiento a través de cortes mínimos

aporte: Conjuntos de corte mínimo C_1, \dots, C_{metro} , fiabilidades de los componentes $\{pags_i\}$, muestra Tallanorte.

producción: Estimador de la falta de fiabilidad del sistema \hat{r} .

1 por $k=1$ **a** $norte$ **hacer**

2 Simular variable aleatoria j de acuerdo a $PAGS(j) = a_j/a, j=1, \dots, metro$. Establecer

3 X_i igual a 0 para todos $i \in C_j$ y generar los valores de todos los demás $X_i, i \in C_j$ de su correspondiente $Ber(pags_i)$ distribuciones.

4 Dejar S_k sea el número de conjuntos de corte mínimo que tienen todos sus componentes fallado (tenga en cuenta que S_{k-1}).

5 Establecer $\hat{r} = \text{norte}^{-1} \sum_{k=1}^{\text{norte}} S_k$ como \hat{r} como estimador de $r = PAGS(S > 0)$.

6 devolver \hat{r}

Fácilmente se ve que cuando a , el número medio de cortes mínimos fallidos, es muy pequeño, el estimador resultante tendrá una variación muy pequeña. Además, nosotros podríamos aplicar el muestreo de importancia al estimador condicional a para reducir aún más la varianza

5.5 MUESTREO ESTRATIFICADO

El muestreo estratificado está estrechamente relacionado tanto con el método de composición de la Sección 2.3.3 como con el método de Monte Carlo condicional discutido en la sección anterior. Como siempre, deseamos estimar

$$= MI[H(\mathbf{X})] = \int H(\mathbf{X}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X}.$$

Suponer que \mathbf{X} se puede generar a través del método de composición. Por tanto, suponemos que existe una variable aleatoria Y tomando valores en $\{1, \dots, m\}$, digamos, con probabilidades conocidas $\{pags_i, i=1, \dots, m\}$, y suponemos que es fácil muestrear a partir de la distribución condicional de \mathbf{X} dado Y . Los eventos $\{Y=y_o, y_o=1, \dots, metro\}$ forman subregiones inconexas, o *Estratos* (singular: estrato), del espacio muestral Ω , de ahí el nombre *estratificación*. Usamos la fórmula de condicionamiento (1.11) y escribimos

$$= E[H(\mathbf{X}) / Y] = \sum_{i=1}^{metro} pags_i MI[H(\mathbf{X}) / Y=i]. \quad (5.32)$$

Esta representación sugiere que podemos estimar a a través de lo siguiente *estratificado* *estimador de muestreo*

$$\hat{s} = \sum_{i=1}^{metro} \frac{1}{pags_i} \sum_{j=1}^{norte_i} H(\mathbf{X}_{y_o}), \quad (5.33)$$

dónde \mathbf{X}_{y_o} es la j -ésima observación de la distribución condicional de \mathbf{X} dado $Y=i$. Aquí $norte_i$ es el tamaño de muestra asignado a la i -ésimo estrato. La varianza del estimador de muestreo estratificado viene dada por

$$\text{Var}(\hat{s}) = \sum_{i=1}^{metro} \frac{pags_i}{norte_i} \text{Var}(H(\mathbf{X}) / Y=i) = \sum_{i=1}^{metro} \frac{pags_i \sigma_i^2}{norte_i} \quad (5.34)$$

dónde $\sigma_2 = \text{Var}(H(\mathbf{X}) / Y = i)$.

La forma en que deben elegirse los estratos depende mucho del problema en cuestión. Sin embargo, para una elección particular dada de los estratos, los tamaños de muestra $\{norte_i\}$ se puede obtener de manera óptima, como se indica en el siguiente teorema.

Teorema 5.5.1 (Sam estratificado óptimo) Suponiendo que un número máximo de $norte$ se pueden recolectar muestras, es decir, $\sum_{i=1}^{metro} norte_i = NORTE$, el valor óptimo de $norte_i$ es dado por

$$norte_i = \frac{pags_i \sigma_i}{\sum_{j=1}^{metro} pags_j \sigma_j}, \quad (5.35)$$

lo que da una varianza mínima de

$$\text{Var}(s) = \frac{1}{norte} \left[\sum_{i=1}^{metro} pags_i \sigma_i \right]^2. \quad (5.36)$$

Prueba: La prueba es sencilla y utiliza multiplicadores de Lagrange; se deja como ejercicio para el lector (vea el Problema 5.10).

El teorema 5.5.1 afirma que la varianza mínima se alcanza para tamaños de muestra $norte_i$ que son proporcionales a $pags_i \sigma_i$. Una dificultad es que aunque las probabilidades $pags_i$ se supone que son conocidas, las desviaciones estándar $\{\sigma_i\}$ suelen ser desconocidos. En la práctica, se estimaría la $\{\sigma_i\}$ de las ejecuciones "piloto" y luego proceda a estimar los tamaños de muestra óptimos, $norte_i$, de (5.35).

Un procedimiento de estratificación simple que puede lograr la reducción de la varianza sin que requiere un conocimiento previo de σ_2 y $H(\mathbf{X})$, se presenta a continuación.

Proposición 5.5.1 Deje que los tamaños de muestra $norte_i$ sean proporcional a $pags_i$, eso es, $norte_i = pags_i N$, $y_o = 1, \dots, metro$. Después

$$\text{Var}(s) = \text{Var}(s) - \text{MI}[\text{Var}(H(\mathbf{X}) / Y)].$$

Prueba: Sustituyendo $norte_i = pags_i N$ en (5.34) da $\text{Var}(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{metro} pags_i \sigma_i^2$. El resultado ahora sigue de

$$norte \text{Var}(s) = \text{Var}(H(\mathbf{X})) - \text{MI}[\text{Var}(H(\mathbf{X}) / Y)] = \sum_{i=1}^{metro} pags_i \sigma_i^2 = norte \text{Var}(s),$$

donde hemos usado (5.21) en la desigualdad.

La Proposición 5.5.1 establece que el estimador es más preciso que el estimador CMC. Efectúa la estratificación favoreciendo aquellos eventos $\{Y = i\}$ cuyas probabilidades $pags_i$ son los más grandes. Intuitivamente, esto no puede, en la mayoría de los casos, ser una asignación óptima, ya que la información sobre σ_2 y $H(\mathbf{X})$ se ignora.

En el caso especial de pesos iguales ($pags_i = 1/metro$ y $norte_i = \text{Nuevo México}$), el estimador (5.33) se reduce a

$$\hat{s} = \frac{1}{norte} \sum_{i=1}^{metro} \sum_{j=1}^{metro} H(\mathbf{X}_{y_o}), \quad (5.37)$$

y el método se conoce como *método de muestreo sistemática* (por ejemplo, véase Cochran [9]).

5.6 MONTE CARLO MULTINIVEL

Al estimar el valor esperado $E[Y] = MI[Y]$ de un funcional $Y = H(X)$ de un proceso de difusión $X = \{X_t\}$ (ver Sección 2.9) por simulación, hay típicamente dos fuentes de error: error de estimación y sesgo. Si un iid toma muestras Y_1, \dots, Y_{norte} se puede simular *exactamente* la distribución de Y , entonces su media muestral es un estimador de $MI[Y]$, y el error de estimación, como es habitual, se expresa en términos de la varianza muestral de la $\{Y_i\}$. Sin embargo, a menudo no es posible obtener copias exactas de Y porque Y podría depender de todo el camino (continuo) del proceso de difusión. Por ejemplo, X podría ser un proceso de Wiener en el intervalo $[0, 1]$ y Y su valor máximo. No es factible simular todo el proceso, pero es fácil simular el proceso en cualquier punto de la cuadrícula $0, 1/norte, 2/n, \dots, n/n$, vía Algoritmo 2.8.1 y aproximado $Y \approx \max_{0 \leq t \leq 1} X_t$ con $\tilde{Y} = \max_{i=0, \dots, norte} X_{i/n}$. Sin embargo, desde $MI[\tilde{Y}] < MI[Y]$, esto introduce un sesgo. Este sesgo llega a cero a medida que la cuadrícula se vuelve más fina; es decir, como $norte \rightarrow \infty$. Se introduce un sesgo similar cuando se simula una ecuación diferencial estocástica mediante el método de Euler; ver Algoritmo 2.9.1.

Por lo tanto, para obtener un pequeño error global, tanto el número de puntos de la cuadrícula, $norte+1$, y el tamaño de la muestra, $norte$, tiene que ser lo suficientemente grande. Sin embargo, tomando ambos $norte$ y $norte$ grande, digamos $norte=10^6$ y $norte=10^4$, puede dar lugar a simulaciones muy lentas. El método Monte Carlo multinivel de Giles [16] reduce significativamente el esfuerzo computacional requerido para obtener tanto un sesgo pequeño como un error de estimación, al simular el proceso en *múltiple* rejillas. Como tal, el método se parece a los métodos de redes múltiples en el análisis numérico [43].

Para explicar la metodología multinivel, consideramos primero el caso de dos niveles, que utiliza una cuadrícula fina y otra gruesa. Dejar $X_{(2)}$ ser una aproximación de X simulado en la rejilla fina, y dejar $Y_{(2)} = H(X_{(2)})$ sea el rendimiento correspondiente. Utilizando el *mismo* camino podemos generar una aproximación $X_{(1)}$ de X en la rejilla gruesa. Por ejemplo, la Figura 5.2 muestra dos caminos simulados, $X_{(2)}$ (sólido, negro) y $X_{(1)}$ (discontinua, roja), evaluada en una cuadrícula fina y una cuadrícula gruesa. La rejilla gruesa es un subconjunto de la rejilla fina, y $X_{(1)}$ simplemente se toma como el subvector de $X_{(2)}$ evaluados en los puntos de cuadrícula gruesos. Dejar $Y_{(1)}$ ser el rendimiento correspondiente.

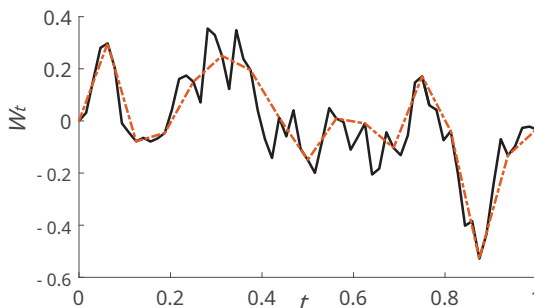


Figura 5.2: La línea sólida (negra) representa una aproximación del proceso de Wiener evaluado en una cuadrícula con tamaño de paso $1/64$. La ruta discontinua (roja) muestra la versión gruesa en una cuadrícula con un tamaño de paso $1/16$. las actuaciones $Y_{(1)}$ y $Y_{(2)}$ podrían ser, por ejemplo, las alturas máximas de los caminos.

Obviamente, $Y_{(2)}$ y $Y_{(1)}$ están altamente correlacionados positivamente. Por lo tanto, este último podría ser utilizado como *control variable* para el primero. Esto sugiere que la variable de control

$$\frac{1}{norte_2} \sum_{i=1}^{norte_2} \{ Y_{(2)} - a(Y_{(1)} - \text{mi}[Y_{(1)}]) \},$$

dónde $\{Y_{(1)}, Y_{(2)}\}$ son $norte_2$ copias independientes de $(Y_{(1)}, Y_{(2)})$.

Tenga en cuenta que cualquier

valor por a conducirá a la reducción de la varianza si la expectativa $\text{MI}[Y_{(1)}]$ es conocida.

Desafortunadamente, la expectativa no se conoce. Sin embargo, se puede reemplazar con un estimador.

$$\frac{1}{norte_1} \sum_{i=1}^{norte_1} \tilde{Y}_{(1)}$$

evaluada en el nivel más grueso, e independiente de $\{Y_{(1)}, Y_{(2)}\}$. Si, además, a es establecido en 1, entonces el estimador para $\text{MI}[Y]$ reduce a

$$\frac{1}{norte_1} \sum_{i=1}^{norte_1} \tilde{Y}_{(1)} + \frac{1}{norte_2} \sum_{i=1}^{norte_2} (Y_{(2)} - Y_{(1)}) = \text{ef } Z_1 + Z_2,$$

dónde Z_1 y Z_2 son independientes. El primer término, Z_1 , estima el rendimiento esperado en el nivel grueso, $\text{MI}[Y_{(1)}]$, y Z_2 estima el sesgo esperado entre los rendimientos de nivel fino y grueso; eso es, $\text{MI}[Y_{(2)}] - \text{MI}[Y_{(1)}]$. Ya que, la diferencia entre $\text{MI}[Y_{(2)}]$ y $\text{MI}[Y]$ aún puede ser significativo, puede ser ventajoso usar $K > 2$ cuadrículas, con tamaños de paso $1/norte_1 > \dots > 1/norte_K$, decir. Esto lleva a la estimador de nivel

$$= Z_1 + Z_2 + \dots + Z_K,$$

dónde Z_1, \dots, Z_K son independientes entre sí, con

$$Z_1 = \frac{1}{norte_1} \sum_{i=1}^{norte_1} Y_{(1)}$$

y

$$Z_k = \frac{1}{norte_k} \sum_{i=1}^{norte_k} (Y_{(k)} - Y_{(k-1)}), \quad k=2, \dots, K,$$

donde cada uno $Y_{(k)}$ se distribuye como $Y_{(k)} = H(\mathbf{X}_{(k)})$, y $\mathbf{X}_{(k)}$ es un camino obtenido utilizando el k grilla de k -ésimo nivel. Tenga en cuenta que ambos Z_k y Z_{k-1} contienen variables $\{Y_{(k-1)}\}$. Es importante darse cuenta de que estos se obtienen de *diferente* e independiente simulaciones. Para el caso de 2 niveles enfatizamos esta diferencia usando $Y_{(1)}$ y $Y_{(1)}$, respectivamente.

Para simplificar, supongamos que el proceso \mathbf{X} se va a simular en el intervalo $[0,1]$ y que el k -los puntos de cuadrícula de nivel son $0, 1/norte_k, 2/norte_k, \dots, 1$, con $norte_k = \text{METRO}_k$, dónde METRO_k es un entero pequeño, como $\text{METRO}_k = 4$. Es útil tomar el tamaño de la muestra $\{norte_k\}$ proporcional a los tamaños de paso $1/norte_k$; pero véase también la Observación 5.6.1. Esto conduce al siguiente algoritmo de Monte Carlo multinivel:

Algoritmo 5.6.1:Montecarlo multinivel

aporte :factor de malla $METRO$, número de niveles k , esfuerzo de simulación $norte$.
producción:Estimador $de = MI[H(X)]$.

```

1 por  $k=1$  a  $k$  hacer
2    $norte_k \leftarrow METRO_k$ 
3    $norte_k \leftarrow n/n_k$ 
4 por  $i=1$  a  $norte_k$  hacer
5   Generar  $X_{(1)_i}$  // la  $i$ -th camino en el nivel más grueso
6    $Y_{(1)_i} \leftarrow H(X_{(1)_i})$ 
7  $Z_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{norte_1} Y_{(1)_i} / NORTE_1$ 
8 por  $k=2$  a  $k$  hacer
9   por  $i=1$  a  $norte_k$  hacer // la  $i$ -th camino en el nivel  $k$ 
10    Generar  $X_{(k)_i}$ 
11    Embrutecer  $X_{(k)_i}$  a  $X_{(k-1)_i}$ 
12     $Y_{(k)_i} \leftarrow H(X_{(k)_i})$ 
13     $Y_{(k-1)_i} \leftarrow H(X_{(k-1)_i})$ 
14     $Z_k \leftarrow \sum_{i=1}^{norte_k} (Y_{(k)_i} - Y_{(k-1)_i}) / norte_k$ 
15  $\leftarrow \sum_{k=1}^K Z_k$ 
dieciséis devolver

```

■ EJEMPLO 5.8

Estimamos el máximo esperado de un proceso de Wiener en el intervalo $[0,1]$ mediante el Algoritmo 5.6.1, utilizando los siguientes parámetros: $METRO=4$, $k=10$, y $norte=106$. La Figura 5.2 muestra pares típicos de rutas que se generan en el nivel $k=3$ del algoritmo. La ruta sólida (negra) se genera en una cuadrícula con tamaño de paso $1/43=1/64$ y la ruta punteada (roja) es la versión gruesa, en la subcuadrícula con tamaño de paso $1/42=1/dieciséis$.

resultados típicos de Z_1, \dots, Z_{10} son 0.557, 0.1094, 0.0629, 0.0326, 0.0178, 0.0086, 0.00429, 0.0020, 0.0023, y 0, lo que sugiere que $k=10$ es lo suficientemente alto como para eliminar la mayor parte del sesgo. Complemento $\sqrt{\text{g el } \{Z_k\}}$ da la estimación

$= 0.7967$, que está cerca del valor exacto $= 2/\pi \approx 0.7978$ (por ejemplo, [24]). El tiempo de simulación fue de 1,5 segundos. Tenga en cuenta que la mayoría de las rutas (250.000 de un total de 333.337) se simulan en la cuadrícula más gruesa, con $METRO+1 = 5$ puntos, mientras que la cuadrícula más fina tiene solo 1 simulación. Por el contrario, simular 333 337 rutas con la resolución más alta (1 048 577 puntos) llevaría mucho tiempo.

Observación 5.6.1 (Elección de parámetros) La elección óptima para el número de niveles k , factor de cuadrícula $METRO$ y esfuerzo de simulación $norte$ depende en gran medida del problema. Valores comúnmente utilizados para $METRO$ son $METRO=4$ y $METRO=2$. Para un dado $METRO$, el número de niveles k debe elegirse lo suficientemente grande como para que $MI[Y_k]$ está lo suficientemente cerca de $MI[Y]$. Esto se puede evaluar investigando qué tan rápido $\{Z_k, k=2, 3, \dots, K\}$ converge a cero. El parámetro $norte$ regula el esfuerzo de simulación global. Al aumentar $norte$, se mejora la precisión del estimador. En [16] un análisis de complejidad asintótica es dado para el estimador de Monte Carlo multinivel como $k \rightarrow \infty$. La $\sqrt{\text{análisis}}$ sugiere que el tamaño de muestra óptimo $norte_k$ debe elegirse proporcional a $\sqrt{V_k/norte_k}$, donde V_k es la varianza de Z_k . los $\{V_k\}$ podría estimarse a través de una prueba piloto.

5.7 MUESTREO DE IMPORTANCIA

La técnica de reducción de varianza más fundamental es *muestreo de importancia*. Como veremos a continuación, el muestreo de importancia a menudo conduce a una reducción drástica de la varianza (a veces del orden de millones, en particular cuando se estiman las probabilidades de eventos raros), mientras que con todas las técnicas de reducción de la varianza mencionadas anteriormente solo se logra una reducción moderada, típicamente hasta a 10 veces, se puede lograr. El muestreo de importancia implica elegir una distribución de muestreo que favorezca las muestras importantes. Deja, como antes,

$$= \mathbb{E}[H(\mathbf{X})] = \int H(\mathbf{X}) F(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (5.38)$$

dónde H es el rendimiento de la muestra y F es la densidad de probabilidad de \mathbf{X} . Por razones que quedarán claras en breve, agregamos un subíndice F a la expectativa de indicar que se toma con respecto a la densidad F .

Dejar g como sea otra densidad de probabilidad tal que H F es *dominado* por g . Eso es, $g(\mathbf{X}) = 0 \Rightarrow H(\mathbf{X}) F(\mathbf{X}) = 0$. Usando la densidad g , podemos representar como

$$= \int H(\mathbf{X}) \frac{F(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} g(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \mathbb{E}_g \left[H(\mathbf{X}) \frac{F(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} \right], \quad (5.39)$$

donde el subíndice g significa que la expectativa se toma con respecto a g . Tal densidad se llama *muestreo de importancia* densidad, *propuesta* densidad, o *instrumental* densidad (como usamos g como instrumento para obtener información sobre F). En consecuencia, si $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ es una *muestra aleatoria* de g , eso es, $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ son iid vectores aleatorios con densidad g , después

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X})_k \frac{F(\mathbf{X})_k}{g(\mathbf{X})_k} \quad (5.40)$$

es un estimador insesgado de μ . Este estimador se llama *muestreo de importancia estimador*. La relación de densidades,

$$W(\mathbf{X}) = \frac{F(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})}, \quad (5.41)$$

se llama el *Índice de probabilidad*. Por esta razón, el estimador de muestreo de importancia también se denomina *estimador de razón de verosimilitud*. En el caso particular de que no haya cambio de medida, es decir, $g = F$, tenemos $W = 1$, y el estimador de razón de verosimilitud en (5.40) se reduce al estimador CMC habitual.

5.7.1 Muestras ponderadas

Las razones de verosimilitud solo necesitan ser conocidas *hasta una constante*, eso es, $W(\mathbf{X}) = c w(\mathbf{X})$ para alguna función conocida $w(\cdot)$. Ya que $\mathbb{E}_g[W(\mathbf{X})] = 1$, podemos escribir $\mathbb{E}_g[H(\mathbf{X})W(\mathbf{X})]$ como

$$= \frac{\mathbb{E}_g[H(\mathbf{X})w(\mathbf{X})]}{\mathbb{E}_g[w(\mathbf{X})]}.$$

Esto sugiere, como alternativa al estimador de razón de verosimilitud estándar (5.41), el siguiente *estimador de muestra ponderada*:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X})_k w_k}{\sum_{k=1}^{\text{norte}} w_k} \quad (5.42)$$

Aquí el $\{w_k\}$, con $w_k = w(\mathbf{X}_k)$, se interpretan como *pesos* de la muestra aleatoria $\{\mathbf{X}_k\}$, y la secuencia $\{\mathbf{X}_k, w_k\}$ se llama una *muestra ponderada (aleatoria)* de $\text{gramo}(\mathbf{X})$. Similar al estimador de razón regenerativa del Capítulo 4, el estimador de muestra ponderada (5.42) introduce algún sesgo, que tiende a 0 cuando n aumenta. En términos generales, podemos ver la muestra ponderada $\{\mathbf{X}_k, w_k\}$ como representación de $F(\mathbf{X})$ en el sentido de que $\text{mi}[H(\mathbf{X})] \approx w$ para cualquier función $H(\cdot)$.

5.7.2 Método de minimización de varianza

Dado que la elección de la importancia de la densidad de muestreo gramo está ligado de manera crucial a la varianza del estimador en (5.40), consideramos a continuación el problema de minimizar la varianza de con respecto a gramo , eso es,

$$\min_{\text{gramo}} \text{Var}_{\text{gramo}} H(\mathbf{X}) = \frac{H(\mathbf{X})}{\text{gramo}(\mathbf{X})}. \quad (5.43)$$

No es difícil probar (p. ej., véase Rubinstein y Melamed [37] y el Problema 5.14) que la solución del problema (5.43) es

$$\text{gramo}(\mathbf{X}) = \frac{H(\mathbf{X}) / f(\mathbf{X})}{\int H(\mathbf{X}) / f(\mathbf{X}) d\mathbf{X}}. \quad (5.44)$$

En particular, si $H(\mathbf{X}) > 0$ — que supondremos a partir de ahora — entonces

$$\text{gramo}(\mathbf{X}) = \frac{H(\mathbf{X}) f(\mathbf{X})}{\int H(\mathbf{X}) f(\mathbf{X}) d\mathbf{X}}. \quad (5.45)$$

y

$$\text{Var}_{\text{gramo}}(\cdot) = \text{Var}_{\text{gramo}}(H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X})) = \text{Var}_{\text{gramo}}(\cdot) = 0.$$

la densidad gramo según (5.44) y (5.45) se llama *densidad de muestreo de importancia óptima*.

■ EJEMPLO 5.9

Dejar $X \sim \text{Exp}(tu^{-1})$ y $H(X) = yO(X, y)$ para algunos $y > 0$. Deja f denotar el pdf de X . Considere la estimación de

$$\text{mi}[H(X)] = \int_0^\infty tu^{-1} \text{mi}_{-xu^{-1}} dX = \text{mi}_{-y} tu^{-1}.$$

Tenemos

$$\text{gramo}(X) = H(X) f(X)^{-1} = yO(X, y) tu^{-1} \text{mi}_{-xu^{-1}} \text{mi}_{tu^{-1}} = yO(X, y) tu^{-1} \text{mi}_{-(x-y)tu^{-1}}.$$

Por lo tanto, la distribución de muestreo de importancia óptima de X es el *desplazado* distribución exponencial. Tenga en cuenta que $H \cdot f$ está dominado por gramo , pero f en sí mismo no está dominado por gramo . Ya que gramo es óptimo, el estimador de razón de verosimilitud es constante. Es decir, con $n \rightarrow \infty$,

$$\hat{H(X)W(X)} = \frac{H(X)f(X)}{H(X)f(X)} = 1.$$

Es importante darse cuenta de que, aunque (5.40) es un estimador insesgado para *ningún* pdf g dominante H/f , no todos estos archivos PDF son apropiados. Una de las reglas principales para elegir una función de densidad de probabilidad de muestreo de importancia es que el estimador (5.40) debe tener una varianza finita. Esto es equivalente al requisito de que

$$\mathbb{E} \left[H_2(\mathbf{X}) \frac{F_2(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} \right] = \mathbb{E} \left[H_2(\mathbf{X}) \frac{F(\mathbf{X})}{g(\mathbf{X})} \right] < \infty. \quad (5.46)$$

Esto sugiere que g debe tener una "cola más clara" que f que, preferentemente, la razón de verosimilitud, g/f , debe estar acotado.

En general, la implementación de la densidad de muestreo de importancia óptima g según (5.44) y (5.45) es problemático. La principal dificultad radica en que, para derivar $g(\mathbf{X})$, necesitamos saber $\int h(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. ¡Pero es precisamente la cantidad que queremos estimar a partir de la simulación!

En la mayoría de los estudios de simulación, la situación es aún peor, ya que la expresión analítica para el rendimiento de la muestra H se desconoce de antemano. Para superar esta dificultad, podríamos realizar una prueba piloto con el modelo subyacente, obtener una muestra $H(\mathbf{X}_1), \dots, H(\mathbf{X}_{n_{\text{pilot}}})$, y luego usarlo para estimar g . Es importante tener en cuenta que el muestreo de una densidad construida artificialmente puede ser una tarea muy complicada y que requiere mucho tiempo, especialmente cuando g es una alta densidad dimensional.

Observación 5.7.1 (Degeneración del estimador de razón de verosimilitud)

El estimador de razón de vida en (5.40) sufre de una forma de degeneración en el sentido de que la distribución de $W(\mathbf{X})$ bajo la densidad de muestreo de importancia g puede volverse cada vez más sesgada a medida que la dimensionalidad n de \mathbf{X} aumenta. Eso es, $W(\mathbf{X})$ puede tomar valores cercanos a 0 con alta probabilidad, pero también puede tomar valores muy grandes con una probabilidad pequeña aunque significativa. En consecuencia, la varianza de $W(\mathbf{X})$ por debajo de g puede llegar a ser muy grande para grandes n . Como ejemplo de esta degeneración, suponga, por simplicidad, que los componentes en \mathbf{X} son iid, debajo de ambos f y g . Por lo tanto, ambos $F(\mathbf{X})$ y $g(\mathbf{X})$ son los productos de sus pdf marginales. Suponga que las fdp marginales de cada componente X son F y g , respectivamente. Entonces podemos escribir $W(\mathbf{X})$ como

$$W(\mathbf{X}) = \exp. \sum_{i=1}^n \ln \frac{f(X_i)}{g(X_i)}. \quad (5.47)$$

Usando la ley de los grandes números, la variable aleatoria $\sum_{i=1}^n \ln (f(X_i)/g(X_i))$ es aproximadamente igual a $n \mathbb{E}[\ln (f(X)/g(X))]$ para grande n . Por eso,

$$W(\mathbf{X}) \approx \exp \left\{ n \mathbb{E} \left[\ln \left(\frac{f(X)}{g(X)} \right) \right] \right\}. \quad (5.48)$$

Ya que $\mathbb{E}[\ln (f(X)/g(X))]$ no es negativo (consulte la página 31), la razón de verosimilitud $W(\mathbf{X})$ tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Sin embargo, por definición, la expectativa de $W(\mathbf{X})$ por debajo de g es siempre 1. Esto indica que la distribución de $W(\mathbf{X})$ se vuelve cada vez más sesgada cuando n se hace grande. Se han introducido varios métodos para prevenir esta degeneración. Ejemplos son las heurísticas de Doucet et al. [11], Liu [27] y Robert y Casella [32] y el llamado método de cribado. Esta última se presentará en las Secciones 5.12 y 8.2.2 y puede considerarse como una técnica de reducción de dimensiones.

cuando el pdf f pertenece a alguna familia paramétrica de distribuciones, a menudo es conveniente elegir la distribución de muestreo de importancia de la *misma* familia.

En particular, supongamos que $R(\cdot) = R(\cdot; \mathbf{tu})$ pertenece a la familia

$$\mathcal{F} = \{R(\cdot; \mathbf{v}), \mathbf{v} \in V\}.$$

Entonces, el problema de encontrar una densidad de muestreo de importancia óptima en esta clase se reduce a lo siguiente, *paramétrico* problema de minimización:

$$\text{var} \min_{\mathbf{v} \in V} (H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v})), \quad (5.49)$$

dónde $W(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v}) = R(\mathbf{X}; \mathbf{tu}) / R(\mathbf{X}; \mathbf{v})$. *Llamaremos al vector \mathbf{v} a la referencia-parámetro de encebasculante vectorial.* Desde debajo $R(\cdot; \mathbf{v})$ la expectativa = $\text{miv}[H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v})]$ es constante, la solución óptima de (5.49) coincide con la de

$$\min_{\mathbf{v} \in V} V(\mathbf{v}), \quad (5.50)$$

dónde

$$V(\mathbf{v}) = \text{miv}[H_2(\mathbf{X}) W_2(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v})] = \text{mitu}[H_2(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v})]. \quad (5.51)$$

Llamaremos a cualquiera de los problemas equivalentes (5.49) y (5.50) el *minimización de la varianza* (VM), y llamaremos al vector de parámetros \mathbf{v} que minimiza los programas (5.49)–(5.50) el *vector de parámetros de referencia de VM óptimo*. Nos referimos **atu** como el *nominal* parámetro.

La versión promedio muestral de (5.50)–(5.51) es

$$\min_{\mathbf{v} \in V} V(\mathbf{v}), \quad (5.52)$$

dónde

$$V(\mathbf{v}) = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{k=1}^{\text{norte}} [H_2(\mathbf{X}_k) W(\mathbf{X}_k; \mathbf{tu}, \mathbf{v})], \quad (5.53)$$

y la muestra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ es desde $R(\mathbf{X}; \mathbf{tu})$. Tenga en cuenta que tan pronto como la muestra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ está disponible, la función $V(\mathbf{v})$ se convierte en determinista.

Dado que en aplicaciones típicas ambas funciones $V(\mathbf{v})$ y $V(\mathbf{v})$ son convexas y diferenciables con respecto a \mathbf{v} , y dado que normalmente se pueden intercambiar los operadores de expectativa y diferenciación (ver Rubinstein y Shapiro [38]), las soluciones de los programas (5.50)–(5.51) y (5.52)–(5.53) se pueden obtener resolviendo (con respecto a \mathbf{v}) el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\text{mitu}[H_2(\mathbf{X}) \nabla W(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v})] = \mathbf{0} \quad (5.54)$$

y

$$\frac{1}{\text{norte}} \sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X}_k) \nabla W(\mathbf{X}_k; \mathbf{tu}, \mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (5.55)$$

respectivamente, donde

$$\nabla W(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v}) = \nabla \frac{R(\mathbf{X}; \mathbf{tu})}{R(\mathbf{X}; \mathbf{v})} = [\nabla \ln R(\mathbf{X}; \mathbf{v})] W(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v}),$$

el gradiente es con respecto a \mathbf{v} y la función $\nabla \ln R(\mathbf{X}; \mathbf{v})$ es la función de puntuación; ver (1.57). Tenga en cuenta que el sistema de ecuaciones no lineales (5.55) generalmente se resuelve utilizando métodos numéricos.

■ EJEMPLO 5.10

Considere estimar $\theta = \mathbb{E}[X]$, donde $X \sim \text{Exp}(tu-1)$. Elegir $q(x; v) = v^{-1} \text{Exp}(-xv^{-1})$, $X > 0$ como el pdf de muestreo de importancia, el programa (5.50) se reduce a

$$\min_v V(v) = \min_{v \geq tu} \frac{v}{tu} \int_0^\infty x_2 \text{mi}^{-(2tu-1-v-1)} x \, dx = \min_{v \geq tu} \frac{4}{2v - tu}.$$

El parámetro de referencia óptimo v^* es dado por

$$v^* = 2tu$$

Vemos eso v^* es exactamente dos veces mayor que tu . Resolviendo la versión promedio muestral (5.55) (numéricamente), se debe encontrar que, para grandes n , su solución óptima v^* estará cerca del parámetro verdadero v .

■ EJEMPLO 5.11 Ejemplo 5.9 (Continuación)

Considere nuevamente estimar $\theta = \text{PAGS}_{tu}(X; \gamma) = \exp(-\gamma tu^{-1})$. En este caso, usando la familia $\{q(x; v), v > 0\}$ definido por $q(x; v) = v^{-1} \text{Exp}(Xv^{-1})$, $X > 0$, podemos reducir el programa (5.50) a

$$\min_v V(v) = \min_{v \geq tu} \frac{v}{\gamma} \int_0^\infty \text{mi}^{-(2tu-1-v-1)} x \, dx = \min_{v \geq tu} \frac{v \text{mi}^{-\gamma(2tu-1-v-1)}}{(2v - tu)}.$$

El parámetro de referencia óptimo v^* es dado por

$$v^* = \frac{1}{\gamma} \left\{ \gamma + tu + \gamma^2 + tu^2 = \gamma + \frac{\sqrt{4\gamma^2 + 4\gamma^2 tu + tu^2}}{2} \right\} \frac{tu}{2} + O((tu/\gamma)^2),$$

dónde $O(X_2)$ es una función de X_2 tal que

$$\lim_{X_2 \rightarrow 0} \frac{O(X_2)}{X_2} = \text{constante}.$$

Vemos que por $\gamma \rightarrow 0$, v^* es aproximadamente igual a tu .

Es importante notar que en este caso la versión de muestra (5.55) (o (5.52) – (5.53)) tiene sentido sólo para pequeños γ , en particular para aquellos γ para lo cual $\exp(-\gamma tu^{-1})$ es una probabilidad de evento raro, dí dónde $\gamma tu^{-1} > 10^{-4}$. Para muy pequeño, un muestra tremendamente grande n es necesario (debido a la función de indicador $\gamma O(X_2)$), y por lo tanto el estimador de muestreo de importancia es inútil. Discutiremos la estimación de probabilidades de eventos raros con más detalle en el Capítulo 8.

Observe que el problema VM (5.50) también se puede escribir como

$$\min_{v \in V} V(v) = \min_{v \in V} \min_{w \in W} H_2(X) W(X; tu, v) W(X; tu, w), \quad (5.56)$$

dónde w es un parámetro de referencia arbitrario. Note que (5.56) se obtiene de (5.51) multiplicando y dividiendo el integrando por $q(x; w)$. Ahora reemplazamos el valor esperado en (5.56) por su contraparte muestral (estocástica) y luego tomamos el

solución óptima del programa Monte Carlo asociado como estimador de \mathbf{v} . Específicamente, la contrapartida estocástica de (5.56) es

$$\min_{\mathbf{v} \in V} \mathcal{V}(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{norte}}} \frac{1}{\sum_{k=1}^{\text{norte}}} H_2(\mathbf{X}_k) W(\mathbf{X}_k; \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) W(\mathbf{X}_k; \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad (5.57)$$

dónde $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ es una muestra iid de $\mathcal{R}; \mathbf{w}$ y \mathbf{w} es una elección apropiada *prueba* parámetro. Resolviendo el programa estocástico (5.57) se obtiene una estimación, digamos $\hat{\mathbf{v}}$, de \mathbf{v} . En algunos casos puede ser útil *iterar* este procedimiento, es decir, utilizar $\hat{\mathbf{v}}$ como vector de prueba en (5.57), para obtener una mejor estimación.

Una vez que el parámetro de referencia $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}$ se determina, estimador $\hat{\mathbf{v}}$ se estima a través de la de razón de verosimilitud

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\text{norte}}} H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}_k; \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (5.58)$$

dónde $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ es una muestra aleatoria de $\mathcal{R}; \mathbf{v}$. Por lo general, el tamaño de la muestra *norte* en (5.58) es mayor que la utilizada para estimar el parámetro de referencia. Llamamos a (5.58) el *razón de verosimilitud estándar* (SLR) estimador.

5.7.3 Método de entropía cruzada

Un enfoque alternativo para elegir un vector de parámetros de referencia "óptimo" en (5.58) se basa en la entropía cruzada de Kullback-Leibler, o simplemente *entropía cruzada* (CE), mencionado en (1.53). Para mayor claridad, repetimos que la distancia CE entre dos pdfs *gramo* y *h* viene dada (en el caso continuo) por

$$\begin{aligned} D(g, h) &= \int \frac{g(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} \ln \left(\frac{g(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} \right) d\mathbf{X} = \int \frac{g(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} \ln \left(\frac{g(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} \right) d\mathbf{X} \\ &= \int g(\mathbf{X}) \ln \left(\frac{g(\mathbf{X})}{h(\mathbf{X})} \right) d\mathbf{X} - \int g(\mathbf{X}) \ln(h(\mathbf{X})) d\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Recordar que $D(g, h) \geq 0$, con igualdad si y solo si $g = h$.

La idea general es elegir la importancia de la densidad de muestreo, digamos h , tal que la distancia CE entre la densidad de muestreo de importancia óptima g_{opt} en (5.44) y h es mínimo. Llamamos a esto el *pdf óptimo CE*. Así, este pdf resuelve lo siguiente *funcional* programa de optimización:

$$\min_h D(g_{\text{opt}}, h).$$

Si optimizamos sobre todas las densidades h , entonces es inmediato desde $D(g_{\text{opt}}, h) \geq 0$ que la pdf óptima de CE coincide con la pdf óptima de VM g_{opt} .

Al igual que con el enfoque VM en (5.49) y (5.50), nos limitaremos a la familia paramétrica de densidades $\{\mathcal{R}; \mathbf{v}\}$, $\mathbf{v} \in V$, que contiene la densidad "nominal" $\mathcal{R}; \mathbf{t}$. El método CE ahora tiene como objetivo resolver el *paramétrico* problema de optimización

$$\min_{\mathbf{v}} D(g_{\text{opt}}, \mathcal{R}; \mathbf{v}).$$

Como el primer término del lado derecho de (5.59) no depende de \mathbf{v} , minimizando la distancia Kullback-Leibler entre g_{opt} y $\mathcal{R}; \mathbf{v}$ es equivalente a

maximizando con respecto a \mathbf{v} ,

$$\int H(\mathbf{X}) R(\mathbf{X}; \mathbf{t}; \mathbf{u}) \text{ en } R(\mathbf{X}; \mathbf{v}) d\mathbf{X} = \text{mitu}[H(\mathbf{X}) \text{ en } R(\mathbf{X}; \mathbf{v})],$$

donde hemos supuesto que $H(\mathbf{X})$ es no negativo. Argumentando como en (5.50), encontramos que el vector de parámetros de referencia óptimo \mathbf{CEv} se puede obtener de la solución del siguiente programa simple:

$$\underset{\mathbf{v}}{\text{máximo}} D(\mathbf{v}) = \underset{\mathbf{v}}{\text{máx. mitu}}[H(\mathbf{X}) \text{ en } R(\mathbf{X}; \mathbf{v})]. \quad (5.60)$$

Dado que normalmente $D(\mathbf{v})$ es convexa y diferenciable con respecto a \mathbf{v} (véase Rubinstein y Shapiro [38]), la solución de (5.60) puede obtenerse resolviendo

$$\text{mitu}[H(\mathbf{X}) \nabla \text{ en } R(\mathbf{X}; \mathbf{v})] = \mathbf{0}, \quad (5.61)$$

siempre que los operadores de expectativa y diferenciación puedan intercambiarse. La contrapartida muestral de (5.61) es

$$\frac{1}{\text{norte}} \sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X}_k) \nabla \text{ en } R(\mathbf{X}_k; \mathbf{v}) = \mathbf{0}. \quad (5.62)$$

Por analogía con el programa VM (5.50), llamamos (5.60) el *programa CE*, y llamamos al vector de parámetros \mathbf{v} que minimiza el programa (5.63) el *vector de parámetros de referencia CE óptimo*.

Argumentando como en (5.56), se ve fácilmente que (5.60) es equivalente al siguiente programa:

$$\underset{\mathbf{v}}{\text{máximo}} D(\mathbf{v}) = \underset{\mathbf{v}}{\text{máx. miw}}[H(\mathbf{X}) W(\mathbf{X}; \mathbf{t}; \mathbf{u}, \mathbf{w}) \text{ en } R(\mathbf{X}; \mathbf{v})], \quad (5.63)$$

dónde $W(\mathbf{X}; \mathbf{t}; \mathbf{u}, \mathbf{w})$ es de nuevo la razón de verosimilitud y \mathbf{w} es un *arbitrario* parámetro de inclinación. Similar a (5.57), podemos estimar \mathbf{v} como la solución del programa estocástico

$$\underset{\mathbf{v}}{\text{máximo}} D(\mathbf{v}) = \underset{\mathbf{v}}{\text{máx.}} \frac{1}{\text{norte}} \sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X}_k) W(\mathbf{X}_k; \mathbf{t}; \mathbf{u}, \mathbf{w}) \text{ en } R(\mathbf{X}_k; \mathbf{v}), \quad (5.64)$$

dónde $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{\text{norte}}$ es una muestra aleatoria de $R(\cdot; \mathbf{w})$. Como en el caso de VM, mencionamos la posibilidad de *iterando* este procedimiento, es decir, usando la solución de (5.64) como parámetro de prueba para la siguiente iteración.

Dado que en aplicaciones típicas la función D en (5.64) es convexa y diferenciable con respecto a \mathbf{v} (ver [38]), la solución de (5.64) puede obtenerse resolviendo (con respecto a \mathbf{v}) el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{\text{norte}} \sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X}_k) W(\mathbf{X}_k; \mathbf{t}; \mathbf{u}, \mathbf{w}) \nabla \text{ en } R(\mathbf{X}; \mathbf{v}) = \mathbf{0}_{,k} \quad (5.65)$$

donde está el gradiente con respecto a \mathbf{v} .

Nuestros extensos estudios numéricos muestran que para dimensiones moderadas *norte*, decir *nortes* 50, las soluciones óptimas de los programas CE (5.63) y (5.64) (o (5.65)) y sus contrapartes VM (5.56) y (5.57) suelen ser casi las mismas. Sin embargo,

para problemas de alta dimensión ($norte > 50$), encontramos numéricamente que la importancia estimador de muestreo en (5.58) basado en la actualización de VM $devs$ supera a su contraparte CE tanto en varianza como en sesgo. Este último es causado por la degeneración de W , a la que encontramos que la CE es más sensible.

La ventaja del programa CE es que a menudo se puede resolver *analíticamente*. En particular, esto sucede cuando la distribución de \mathbf{X} pertenece a una familia exponencial de distribuciones; véase la Sección A.3 del Apéndice. Específicamente (ver (A.16)), para una familia exponencial unidimensional parametrizada por la media, el parámetro óptimo de CE *essiempre*

$$\nu_* = \frac{\text{mitu}[H(\mathbf{X})\mathbf{X}]}{\text{mitu}[H(\mathbf{X})]} = \frac{\text{mi}_w[\mathcal{W}(\mathbf{X}; tu, tu)H(\mathbf{X})\mathbf{X}]}{\text{mi}_w[H(\mathbf{X})\mathcal{W}(\mathbf{X}; tu, tu)]}, \quad (5.66)$$

y la correspondiente fórmula de actualización basada en muestras es

$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_k) \mathcal{W}(\mathbf{X}_k; tu, tu) \mathbf{X}_k}{\sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_k) \mathcal{W}(\mathbf{X}_k; tu, tu)} \quad (5.67)$$

respectivamente, donde X_1, \dots, X_{norte} es una muestra aleatoria de la densidad $\mathcal{F}(\cdot; w)$ y w es un parámetro arbitrario. La versión multidimensional de (5.67) es

$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_k) \mathcal{W}(\mathbf{X}_k; \{ \mathbf{X}_k, \dots, \mathbf{X}_{norte} \}, \mathbf{u} w) \mathbf{X}_k}{\sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_k) \mathcal{W}(\mathbf{X}_k; \mathbf{tu}, \mathbf{w})} \quad (5.68)$$

por $i=1, \dots, norte$, dónde X_{ki} es el i -ésima componente del vector \mathbf{X}_k , y \mathbf{tu} y \mathbf{w} son vectores de parámetros.

Obsérvese que port $\mathbf{u} = \mathbf{w}$ (sin término de razón de verosimilitud \mathcal{W}), (5.68) se reduce a

$$\hat{\nu} = \frac{\sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_k) \mathbf{X}_k}{\sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_k)} \quad (5.69)$$

dónde $\mathbf{X}_k \sim \mathcal{F}(\mathbf{X}; \mathbf{tu})$.

Obsérvese también que debido a la degeneración de W , uno siempre preferiría el estimador (5.69) a (5.68), especialmente para problemas de alta dimensión. Pero como veremos más adelante, esto no siempre es factible, particularmente cuando se estiman probabilidades de eventos raros en el Capítulo 8.

■ EJEMPLO 5.12 Ejemplo 5.10 (Continuación)

Considere nuevamente la estimación de $\nu = MI[X]$, donde $X \sim \text{Exp}(tu^{-1})$ y $\mathcal{F}(X; \nu) = \nu^{-1} \text{Exp}(X\nu^{-1})$, $X > 0$. Resolviendo (5.61), encontramos que el parámetro de referencia óptimo ν_* es igual a

$$\nu_* = \frac{\text{mitu}[X^2]}{\text{mitu}[X]} = 2tu$$

De este modo, ν_* es exactamente igual que ν . Para el promedio muestral de (5.61), debemos encontrar que para grandes $norte$ su solución óptima $\hat{\nu}$ está cerca del parámetro óptimo $\nu_* = 2tu$.

■ EJEMPLO 5.13Ejemplo 5.11 (Continuación)

Considere nuevamente la estimación de $\theta = \text{PAGS}_{tu}(X; \gamma) = \exp(-\gamma u^{-1})$. En este caso, encontramos fácilmente de (5.66) que el parámetro de referencia óptimo es $v^* = \gamma + tu$. Tenga en cuenta que similar al caso de VM, para γ y tu , el parámetro de referencia óptimo es aproximadamente γ .

Tenga en cuenta que en el ejemplo anterior, similar al problema de la VM, la versión de ejemplo de CE (5.65) es significativa solo cuando γ se elige tal que θ es una probabilidad de evento raro. Di cuando $\gamma > 10^{-4}$. En el Capítulo 8 presentamos un procedimiento general para estimar probabilidades de eventos raros de la forma $\theta = \text{PAGS}_{tu}(\mathcal{S}(\mathbf{X}) ; \gamma)$ para una función arbitraria $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ y nivel γ .

■ EJEMPLO 5.14Distribuciones discretas de soporte finito

Dejar X sea una variable aleatoria discreta con soporte finito, es decir, X sólo puede tomar un número finito de valores, digamos $a_1, \dots, a_{\text{metro}}$. Dejar $tu = \text{PAGS}(X = a_i)$, $i = 1, \dots, \text{metro}$ y definir $\mathbf{tu} = (tu_1, \dots, tu_{\text{metro}})$. La distribución de X está así trivialmente parametrizado por el vector \mathbf{tu} . Podemos escribir la densidad de X como

$$P(X; \mathbf{tu}) = \sum_{i=1}^{\text{metro}} tu_i y_{O\{X=a_i\}}$$

De la discusión al comienzo de esta sección, sabemos que los parámetros óptimos de CE y VM *coincidir*, ya que optimizamos sobre *todas* densidades en $\{a_1, \dots, a_{\text{metro}}\}$. De (5.44) la densidad óptima de VM (y CE) viene dada por

$$\begin{aligned} P(X; \mathbf{v}^*) &= \sum \frac{H(X) P(X; \mathbf{tu})}{x H(X) P(X; \mathbf{tu})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\text{metro}} H(a_i) tu_i y_{O\{X=a_i\}}}{\text{mi}_{\mathbf{tu}}[H(X)]} \\ &= \sum_{i=1}^{\text{metro}} \frac{H(a_i) tu_i}{\text{mi}_{\mathbf{tu}}[H(X)]} y_{O\{X=a_i\}} \\ &= \sum_{i=1}^{\text{metro}} \left(\frac{\text{mi}_{\mathbf{tu}}[H(X) y_{O\{X=a_i\}}]}{\text{mi}_{\mathbf{tu}}[H(X)]} \right) y_{O\{X=a_i\}}, \end{aligned}$$

de modo que

$$v^* = \frac{\text{mi}_{\mathbf{tu}}[H(X) y_{O\{X=a_i\}}]}{\text{mi}_{\mathbf{tu}}[H(X)]} = \frac{\text{mi}_{\mathbf{w}}[H(X) \mathcal{W}(X; \mathbf{tu}, \mathbf{w}) y_{O\{X=a_i\}}]}{\text{mi}_{\mathbf{w}}[H(X) \mathcal{W}(X; \mathbf{tu}, \mathbf{w})]} \quad (5.70)$$

para cualquier parámetro de referencia \mathbf{w} , siempre que $\text{mi}_{\mathbf{w}}[H(X) \mathcal{W}(X; \mathbf{tu}, \mathbf{w})] > 0$.

el vector \mathbf{v}^* puede estimarse a partir de la contrapartida estocástica de (5.70), es decir, como

$$\hat{v}^* = \frac{\sum_{k=1}^{\text{norte}} H(X_k) \mathcal{W}(X_k; \mathbf{tu}, \mathbf{w}_k) y_{O\{X_k=a_i\}}}{\sum_{k=1}^{\text{norte}} H(X_k) \mathcal{W}(X_k; \mathbf{tu}, \mathbf{w}_k)} \quad (5.71)$$

dónde $X_1, \dots, X_{\text{norte}}$ es una muestra iid de la densidad $P(\cdot; \mathbf{w})$.

Un resultado similar es válido para un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{norte})$, donde X_1, \dots, X_{norte} son variables aleatorias discretas independientes con soporte finito, caracterizadas por los vectores de parámetros $\mathbf{tu}_1, \dots, \mathbf{tu}_{norte}$. Debido al supuesto de independencia, el problema CE (5.63) se separa en *nortes* subproblemas del formulario anterior, y todos los componentes del parámetro de referencia CE óptimo $\mathbf{v}^* = (\mathbf{v}_1^*, \dots, \mathbf{v}_{norte}^*)$, que ahora es un vector de vectores, se sigue de (5.71). Nota que en este caso los parámetros óptimos de referencia de VM y CE no suelen ser iguales, ya que no estamos optimizando el CE sobre todas las densidades. Ver, sin embargo, la Proposición 4.2 en Rubinstein y Kroese [35] para un caso importante donde *hacer* coinciden y producen un estimador de razón de verosimilitud de varianza cero.

La regla de actualización (5.71), que involucra distribuciones discretas de soporte finito, y en particular la distribución de Bernoulli, se usará ampliamente para problemas de optimización combinatoria más adelante en este libro.

■ EJEMPLO 5.15 Ejemplo 5.1 (Continuación)

Considere la red de puentes en la Figura 5.1, y sea

$$S(\mathbf{X}) = \min\{X_1 + X_4, X_1 + X_3 + X_5, X_2 + X_3 + X_4, X_2 + X_5\}.$$

Ahora queremos estimar la probabilidad de que el camino más corto desde el nodo *A* al nodo *B* tiene una longitud de al menos y ; es decir, con $H(\mathbf{X}) = y \mathbf{O}_{\{S(\mathbf{X}) \geq y\}}$, queremos estimar

$$= \text{MI}[H(\mathbf{X})] = \text{PAGS}_{\mathbf{tu}}(S(\mathbf{X}) - y) = \text{mitu}[y \mathbf{O}_{\{S(\mathbf{X}) \geq y\}}].$$

Suponemos que los componentes $\{X_i\}$ son independientes, que $X_i \sim \text{Exp}(tu_i)$, $i = 1, \dots, 5$, y eso y se elige tal que $y \geq 10^{-2}$. Así aquí el

Fórmula de actualización CE (5.68) y su caso particular (5.69) (con $\mathbf{w} = \mathbf{tu}$) aplicar.

Mostraremos que esto produce una reducción sustancial de la varianza. La razón de verosimilitud en este caso es

$$\begin{aligned} W(\mathbf{X}; \mathbf{tu}, \mathbf{v}) &= \frac{P(\mathbf{X}; \mathbf{tu})}{P(\mathbf{X}; \mathbf{v})} = \frac{\prod_{i=1}^5 \frac{1}{tu_i} e^{-X_i/tu_i}}{\prod_{i=1}^5 \frac{1}{v_i} e^{-X_i/v_i}} \\ &= \exp - \sum_{i=1}^5 \left(\frac{1}{X_i tu_i} - \frac{1}{v_i} \right) \prod_{i=1}^5 \frac{v_i}{tu_i} \end{aligned} \quad (5.72)$$

Como ejemplo concreto, dejemos que el *nominal* vector de parámetros \mathbf{tu} sea igual a (1, 1, 0.3, 0.2, 0.1) y dejemos $y = 1.5$. Veremos que esta probabilidad es aproximadamente 0.06

Tenga en cuenta que la longitud típica de un camino desde *A* a *B* es más pequeño que $y = 1.5$; por lo tanto, el uso de muestreo por importancia en lugar de CMC debería ser beneficioso. La idea es estimar el vector de parámetros óptimo \mathbf{v}^* sin *que* usando razones de verosimilitud, es decir, usando (5.69), ya que las razones de verosimilitud, como en (5.68) (con \mathbf{w} , digamos adivinando un vector de prueba inicial \mathbf{w}), normalmente haría que el estimador de \mathbf{v}^* inestable, especialmente para problemas de alta dimensión.

Denotamos por $\hat{\mathbf{v}}^i$ el estimador CE de \mathbf{v}^* obtenido de (5.69). Podemos iterar (repetir) este procedimiento, digamos para T iteraciones, usando (5.68), y comenzando con $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{v}}^1, \hat{\mathbf{v}}^2, \dots$. Una vez que el vector de referencia final $\hat{\mathbf{v}}^T$ se obtiene, entonces

estimación a través de una *más grande* muestra de $f(\mathbf{X}; \hat{\mathbf{v}})$, decir del tamaño $norte_1$, usando el estimador SLR (5.58). Tenga en cuenta, sin embargo, que para problemas de alta dimensión, iterar de esta manera podría conducir a un estimador final inestable $\hat{\mathbf{v}}$. En resumen, una sola iteración con (5.69) a menudo puede ser la mejor alternativa.

La Tabla 5.1 presenta el desempeño del estimador (5.58), a partir de $\mathbf{w}=\mathbf{t}=\mathbf{u}=(1,1,0.3,0.2,0.1)$ y luego iterando (5.68) tres veces. Tenga en cuenta nuevamente que en la primera iteración generamos una muestra $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{norte}$ de $f(\mathbf{X}; \mathbf{t})$ y luego aplicar (5.69) para obtener una estimación $\hat{\mathbf{v}}=(\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_5)$ del vector de parámetros de referencia óptimo \mathbf{CE}^* . Los tamaños de muestra para actualizar $\hat{\mathbf{v}}$ y calcular el estimador fueron $norte=10$ y $norte_1=10$, respectivamente. En la tabla RE denota el error relativo estimado.

Tabla 5.1: Iterando el vector de cinco dimensiones $\hat{\mathbf{v}}$.

Iteración	$\hat{\mathbf{v}}$					RE	
0	1	1	0.3	0.2	0.1	0.0643	0.0121
1	2,4450	2,3274	0,2462	0,2113	0,1030	0,0631	0,0082
2	2,3850	2,3894	0,3136	0,2349	0,1034	0,0644	0,0079
3	2,3559	2,3902	0,3472	0,2322	0,1047	0,0646	0,0080

Tenga en cuenta que $\hat{\mathbf{v}}$ ya convergieron después de la primera iteración, por lo que usar razones de verosimilitud en las iteraciones 2 y 3 no agregó nada a la calidad de $\hat{\mathbf{v}}$. También se deduce de los resultados de la Tabla 5.1 que CE supera a CMC (compare los errores relativos 0.008 y 0.0121 para CE y CMC, respectivamente). Para obtener un error relativo similar de 0,008 con CMC se necesitaría un tamaño de muestra de aproximadamente $2.5 \cdot 10$ en lugar de 10; así obtuvimos una reducción por un factor de 2,5 al utilizar el procedimiento de estimación CE. Como veremos en el Capítulo 8 para probabilidades más pequeñas, se puede lograr una reducción de la varianza de varios órdenes de magnitud.

5.8 MUESTREO DE IMPORTANCIA SECUENCIAL

Muestreo de importancia secuencial (SIS), también llamado *muestreo de importancia dinámica*, es simplemente un muestreo de importancia llevado a cabo de manera secuencial. Para explicar el procedimiento SIS, considere el rendimiento esperado en (5.38) y su razón de verosimilitud estimador en (5.40), con $f(\mathbf{X})$ el “objetivo” y $gramo(\mathbf{X})$ la muestra de importancia, o propuesta, pdf. Supongamos que (1) \mathbf{X} es descomponible, es decir, se puede escribir como un vector $\mathbf{X}=(X_1, \dots, X_{norte})$, donde cada uno de los X_i puede ser multidimensional, y (2) es fácil de muestrear de $gramo(\mathbf{X})$ secuencialmente. Específicamente, supongamos que $gramo(\mathbf{X})$ es de la forma

$$gramo(\mathbf{X}) = gramo_1(X_1)gramo_2(X_2 | X_1) \cdots gramo_{norte}(X_{norte} | X_1, \dots, X_{n-1}), \tag{5.73}$$

donde es fácil generar X_1 de la densidad $gramo_1(X_1)$, y condicionado a $X_1=x_1$, el segundo componente de la densidad $gramo_2(X_2 | X_1)$, y así sucesivamente, hasta obtener un solo vector aleatorio \mathbf{X} de $gramo(\mathbf{X})$. Repitiendo esto independientemente $norte$ veces, cada vez que toma muestras de $gramo(\mathbf{X})$, obtenemos una muestra aleatoria $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{norte}$ de $gramo(\mathbf{X})$ y un

estimador de según (5.40). Para simplificar aún más la notación, abreviamos (X_1, \dots, X_t) a $\mathbf{X}_{1:t}$ para todos t . En particular, $\mathbf{X}_{1:norte} = \mathbf{X}$. Típicamente, t puede verse como un parámetro de tiempo (discreto) y $\mathbf{X}_{1:t}$ como un camino o trayectoria. Por la regla del producto de probabilidad (1.4), la pdf objetivo $F(\mathbf{X})$ también se puede escribir secuencialmente, es decir,

$$F(\mathbf{X}) = F(X_1)F(X_2/X_1) \cdots F(X_{norte}/\mathbf{X}_{1:n-1}). \quad (5.74)$$

De (5.73) y (5.74) se sigue que podemos escribir la razón de verosimilitud en producto

forma como

$$W(\mathbf{X}) = \frac{F(X_1)F(X_2/X_1) \cdots F(X_{norte}/\mathbf{X}_{1:n-1})}{\text{gramo}_1(X_1)\text{gramo}_2(X_2/X_1) \cdots \text{gramo}_{norte}(X_{norte}/\mathbf{X}_{1:n-1})} \quad (5.75)$$

o si $W(\mathbf{X}_{1:t})$ denota la razón de verosimilitud hasta el momento t , recursivamente como

$$W_t(\mathbf{X}_{1:t}) = t u_t W_{t-1}(\mathbf{X}_{1:t-1}), \quad t=1, \dots, \text{norte}, \quad (5.76)$$

con peso inicial $W_0(\mathbf{X}_{1:0}) = 1$ y pesos incrementales $tu_t = F(X_t)/\text{gramo}_t(X_t)$ y

$$t u_t = \frac{F(X_t/\mathbf{X}_{1:t-1})}{\text{gramo}_t(X_t/\mathbf{X}_{1:t-1})} = \frac{F(\mathbf{X}_{1:t})}{F(\mathbf{X}_{1:t-1})\text{gramo}_t(X_t/\mathbf{X}_{1:t-1})}, \quad t=2, \dots, \text{norte} \quad (5.77)$$

Para actualizar recursivamente la razón de verosimilitud, como en (5.77), necesitamos conocer las fdp marginales $F(\mathbf{X}_{1:t})$. Esto puede no ser fácil cuando F no tiene una estructura de Markov, ya que requiere integrar $F(\mathbf{X})$ general $X_{t+1}, \dots, X_{norte}$. En cambio, podemos introducir una secuencia de *auxiliar* pdf $F_1, F_2, \dots, F_{norte}$ que son fácilmente evaluables y tales que cada $F_t(\mathbf{X}_{1:t})$ es una buena aproximación a $F(\mathbf{X}_{1:t})$. El pdf final F_{norte} debe ser igual al original F . Ya que

$$F(\mathbf{X}) = \frac{F_1(X_1)F_2(\mathbf{X}_{1:2})}{1 \quad F_1(X_1)} \cdots \frac{F_{norte}(\mathbf{X}_{1:norte})}{F_{n-1}(\mathbf{X}_{1:n-1})}, \quad (5.78)$$

tenemos como generalización de (5.77) el peso de actualización incremental

$$t u_t = \frac{F_t(\mathbf{X}_{1:t})}{F_{t-1}(\mathbf{X}_{1:t-1})\text{gramo}_t(X_t/\mathbf{X}_{1:t-1})} \quad (5.79)$$

para $t=1, \dots, \text{norte}$, donde ponemos $F_0(\mathbf{X}_{1:0}) = 1$. Resumiendo, el método SIS se puede escribir de la siguiente manera:

Algoritmo 5.8.1: Método SIS

aporte: Tamaño de la muestra $norte$, pdf $\{F_t\}$ y $\{\text{gramo}_t\}$, función de rendimiento H .

producción: Estimador de $\pi = \text{mi}[H(\mathbf{X})] = \text{MI}[H(\mathbf{X}_{1:norte})]$.

1 **por** $k=1$ **a** $norte$ **hacer**

2 $X_1 \sim \text{gramo}_1(X_1)$

3 $W_1 \leftarrow \frac{F_1(X_1)}{\text{gramo}_1(X_1)}$

4 **por** $t=2$ **a** $norte$ **hacer**

5 $X_t \sim \text{gramo}_t(X_t/\mathbf{X}_{1:t-1})$ // simular el siguiente componente

6 $W_t \leftarrow W_{t-1} \frac{F_t(\mathbf{X}_{1:t})}{F_{t-1}(\mathbf{X}_{1:t-1})\text{gramo}_t(X_t/\mathbf{X}_{1:t-1})}$

7 $W_{(k)} \leftarrow W_{norte}$

8 $\mathbf{X}_{(k)} \leftarrow \mathbf{X}_{1:norte}$

9 **devolver** $norte^{-1} \sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_{(k)}) W_{(k)}$

Observación 5.8.1 Tenga en cuenta que los pesos incrementales $t u_i$ solo hay que definir *hasta una constante*, decir C_i , para cada t . En este caso, la razón de verosimilitud $W(\mathbf{X})$ también se conoce hasta una constante, digamos $W(\mathbf{X}) = C W(\mathbf{X})$, donde $1/C = \text{mi}_{\text{gramo}}[W(\mathbf{X})]$ puede estimarse a través de la media muestral correspondiente. En otras palabras, cuando se desconoce la constante de normalización, aún podemos estimar utilizando el estimador de muestra ponderada (5.42) en lugar del estimador de razón de verosimilitud (5.40).

■ EJEMPLO 5.16 Paseo aleatorio sobre los enteros

Considere la caminata aleatoria sobre los enteros del ejemplo 1.10 (en la página 20), con probabilidades p y q para saltar hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. Suponer que $p < q$, de modo que el paseo tenga una deriva hacia $-\infty$. Nuestro objetivo es estimar la probabilidad de un evento raro de alcanzar el estado k antes del estado 0, a partir del estado $0 < k < K$, donde K es un número grande. Como paso intermedio, considere primero la probabilidad de alcanzar k exactamente n pasos, es decir, $\text{PAGS}(X_n = k) = \text{MI}[Y_n | A_n]$, donde $A_n = \{X_n = k\}$. Tenemos

$$P(\mathbf{X}_{1:n}) = P(X_1 = k) P(X_2 = k | X_1) P(X_3 = k | X_2) \dots P(X_n = k | X_{n-1}),$$

donde las probabilidades condicionales son p (para saltos hacia arriba) o q (para saltos hacia abajo). Si simulamos la caminata aleatoria con diferentes probabilidades hacia arriba y hacia abajo, p y q , entonces el pdf de muestreo de importancia $\text{gramo}(\mathbf{X}_{1:n})$ tiene la misma forma que $P(\mathbf{X}_{1:n})$ arriba. Por lo tanto, el peso de importancia después del paso t se actualiza a través del peso incremental

$$t u_t = \frac{P(\mathbf{X}_{1:t})}{\text{gramo}(\mathbf{X}_{1:t})} = \begin{cases} p/q & \text{si } X_t = X_{t-1} + 1, \\ q/p & \text{si } X_t = X_{t-1} - 1. \end{cases}$$

La probabilidad $\text{PAGS}(A_n)$ ahora se puede estimar a través del muestreo de importancia como

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_i Y_i | A_n = k, \quad (5.80)$$

donde los caminos $\mathbf{X}_{1:n}$, $n = 1, \dots, N$, se generan a través de gramo , más bien que P . W_i es la razón de verosimilitud de la i -ésima tal camino. Volviendo a la estimación de $\text{PAGS}(A_n)$, sea t la primera vez que 0 es alcanzado. Escribimos $Y_t = H(\mathbf{X}_{1:t})$, tenemos

$$\begin{aligned} \text{mi}[Y_t | A_n] &= \text{mi}[H(\mathbf{X}_{1:t})] = \sum_{n=1}^{\infty} \text{MI}[H(\mathbf{X}_{1:t}) | Y_t = 1] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{X}_{1:n}} H(\mathbf{X}_{1:n}) Y_t | A_n P(\mathbf{X}_{1:n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{X}_{1:n}} \frac{P(\mathbf{X}_{1:n})}{\text{gramo}(\mathbf{X}_{1:n})} \frac{Y_t | A_n}{\text{gramo}(\mathbf{X}_{1:n})} \\ &= \text{mi}_{\text{gramo}}[H(\mathbf{X}_{1:t})] = \text{mi}_{\text{gramo}}[W_t Y_t | A_n], \end{aligned}$$

con W la razón de verosimilitud de $\mathbf{X}_{1:t}$, que se puede actualizar en cada momento t multiplicando con cualquier $p_{\tilde{q}}/p_q$ para pasos hacia arriba y hacia abajo, respectivamente. Tenga en cuenta que $o_{(t=norte)}$ es de hecho una función de $\mathbf{X}_{norte} = (X_1, \dots, X_{norte})$. Esto conduce al mismo estimador que (5.80) con el determinista $norte$ reemplazado por el estocástico t . Puede demostrarse (p. ej., véase [5]) que elegir $p_{\tilde{q}} = p_q$, eso es, intercambiándolas probabilidades, da un estimador eficiente para .

■ EJEMPLO 5.17 Contar caminatas autoevasivas

El paseo aleatorio autoevitable, o simplemente *caminata de auto-evitacion*, es un modelo matemático básico para cadenas poliméricas. Para simplificar, nos ocuparemos sólo del caso bidimensional. Cada paseo autoevitable está representado por un camino. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_{norte})$, donde X_i representa la posición bidimensional del i -ésima molécula de la cadena polimérica. La distancia entre moléculas adyacentes se fija en 1, y el requisito principal es que la cadena no se corte a sí misma. Suponemos que la caminata comienza en el origen. En la Figura 5.3 se da un ejemplo de una caminata de autoevitación de 130 de longitud.

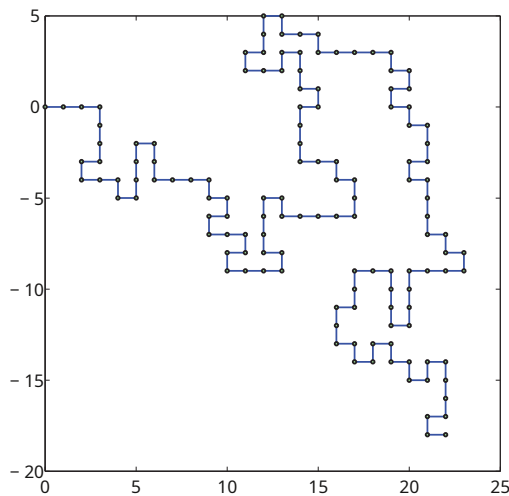


Figura 5.3: Una caminata aleatoria de longitud autoevitante $norte=130$.

Una de las principales preguntas con respecto al modelo de caminata autoevitable es: ¿cuántas caminatas autoevitables hay de longitud $norte$? Dejar X ser el conjunto de paseos autoevasivos de longitud $norte$. El número exacto de caminatas autoevitables hasta $norte=72$ se puede encontrar en <http://www.ms.unimelb.edu.au/~iwan/saw/series/sqsaw.ser>. Las primeras 20 entradas son las siguientes:

norte	$ X^* $	norte	$ X^* $	norte	$ X^* $	norte	$ X^* $
0	1	5	284	10	44100	15	6416596
1	4	6	780	11	120292	dieciséis	17245332
2	12	7	2172	12	324932	17	46466676
3	36	8	5916	13	881500	18	124658732
4	100	9	16268	14	2374444	19	335116620

Deseamos estimar $|X^*|$ vía Montecarlo. El enfoque crudo de Monte Carlo es usar aceptación-rechazo de la siguiente manera:

1. Generar una muestra aleatoria $\mathbf{X}_{(1)}, \dots, \mathbf{X}_{(norte)}$ distribuido uniformemente en el conjunto X de todas las caminatas aleatorias de longitud $norte$. Este conjunto tiene $|X| = 4^{norte}$ elementos. Generación de las muestras de X es fácil.

2. Estimar el número deseado $|X^*|$ como

$$|X^*| = |X| \frac{1}{norte} \sum_{k=1}^{norte} y_{\{\mathbf{X}_{(k)} \in X^*\}}, \quad (5.81)$$

dónde $y_{\{\mathbf{X}_{(k)} \in X^*\}}$ denota el indicador del evento $\{\mathbf{X}_{(k)} \in X^*\}$. Tenga en cuenta que de acuerdo con (5.81) aceptamos el punto generado $\mathbf{X}_{(k)}$ si $\mathbf{X}_{(k)} \in X^*$ y rechazarlo de otra manera.

Desafortunadamente, para grandes $norte$ el evento $\{\mathbf{X}_{(k)} \in X^*\}$ es muy raro. El rechazo de la aceptación no tiene sentido si no hay muestras aceptables. En su lugar, podríamos optar por utilizar el muestreo por importancia. En particular, dejaremos un pdf de muestreo de importancia definido en algún conjunto X y dejaremos $X^* \subset X$; después $|X^*|$ se puede escribir como

$$|X^*| = \sum_{\mathbf{x} \in X} y_{\{\mathbf{x} \in X^*\}} \frac{gramo(\mathbf{x})}{gramo(\mathbf{x})} = m_{\text{igramo}} \frac{y_{\{\mathbf{x} \in X^*\}}}{gramo(\mathbf{x})} \quad (5.82)$$

Para estimar $|X^*|$ a través de Monte Carlo, extraemos una muestra aleatoria $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{norte}$ de $gramo$ y toma el estimador

$$|X^*| = \frac{1}{norte} \sum_{k=1}^{norte} \frac{y_{\{\mathbf{X}_{(k)} \in X^*\}}}{gramo(\mathbf{X}_{(k)})} \quad (5.83)$$

La mejor opción para $gramo$ es $gramo(\mathbf{X}) = 1/|X|$, $\mathbf{X} \in X$; en palabras, $gramo(\mathbf{X})$ es la función de densidad de probabilidad uniforme sobre el conjunto discreto X . Por debajo $gramo$ -el estimador tiene varianza cero, por lo que sólo *requiere una muestra*. Claramente, tal $gramo$ -es inviable. Afortunadamente, el problema de conteo SAW presenta una *secuencia* de importancia densidad de muestreo $gramo$. Este pdf está definido por lo siguiente *un paso adelante* procedimiento:

Algoritmo 5.8.2: One-Step-Look-Ahead

aporte : Longitud del camino *norte*.
producción : Caminata autoevitable de longitud *norte*, o \emptyset (no se encontró tal ruta).
1 Dejar $X_0 \leftarrow (0,0)$ y $t \leftarrow 1$.
2 **por** $t=1$ **a** *norte* **hacer**
3 Dejar d_t Sea el número de vecinos de X_{t-1} que aún no han sido visitados. **si** $d_t > 0$ **después**
4 | Elegir X_t con probabilidad $1/d_t$ de sus vecinos. **más**
5 |
6 |
7 | **devolver** \emptyset // sin sierra de longitud *norte* fundar
sdevolver X_1, \dots, X_{norte}

Tenga en cuenta que el procedimiento genera una caminata de auto-evitación X de longitud *norte* o \emptyset . Dejar $gram(X)$ sea la pdf discreta correspondiente. Entonces, para cualquier paseo autoevasivo X de longitud *norte*, tenemos por la regla del producto (1.4) que

$$gram(X) = \frac{1}{d_1} \frac{1}{d_2} \cdots \frac{1}{d_{norte}} = \frac{1}{w(X)},$$

dónde

$$w(X) = d_1 \cdots d_{norte}. \quad (5.84)$$

El algoritmo de conteo de caminatas autoevitables a continuación ahora se sigue directamente de (5.83).

Algoritmo 5.8.3: Contar caminatas autoevasivas

aporte : Longitud del camino *norte*.
producción : Estimador $/X_*/$ del número de caminatas autoevasivas de longitud *norte*.
1 generar independientemente *norte* caminos $X_{(1)}, \dots, X_{(norte)}$ a través de la anticipación de un paso procedimiento.
2 Por cada caminata autoevitable $X_{(k)}$, calcular $w(X_{(k)})$ como en (5.84). Si \emptyset es devuelto, conjunto $w(X_{(k)}) \leftarrow 0$.
3 **devolver** $\frac{1}{norte} \sum_{k=1}^{norte} w(X_{(k)})$

La eficiencia del método simple de anticipación de un paso se deteriora rápidamente a medida que *norte* se vuelve grande. Se vuelve poco práctico simular caminatas de más de 200. Esto se debe al hecho de que, si en cualquier paso el punto X_{t-1} no tiene vecinos desocupados ($d_t=0$), luego el “peso” $w(X)$ es cero y no contribuye en nada a la estimación final de $/X_*$. Este problema puede ocurrir al principio de la simulación, lo que hace que cualquier acumulación secuencial posterior sea inútil. Los algoritmos de mejor rendimiento no se reinician desde cero, sino que reutilizan recorridos parciales exitosos para crear recorridos nuevos. Estos métodos generalmente dividen las caminatas parciales autoevitables en varias copias y las continúan como si se hubieran construido de forma independiente desde cero. Nos referimos a [27] para una discusión de estos algoritmos más avanzados. Revisaremos este ejemplo en el Capítulo 9, donde se usa el método de división para estimar el número de SAW.

5.9 MUESTREO DE IMPORTANCIA SECUENCIAL

Un problema común con el muestreo de importancia secuencial (Algoritmo 5.8.1) es que la distribución del peso de importancia W_t se vuelve muy sesgado como t aumenta, dando como resultado una probabilidad alta de un peso muy pequeño y una probabilidad pequeña de un peso muy grande; véase también la Observación 5.7.1. Como consecuencia, la mayoría de los $norte$ las muestras no contribuirán significativamente al estimador final en (5.41).

Una forma de corregir este problema es *volver a muestrear* muestras de alto peso. Para explicar el procedimiento de remuestreo, primero damos la versión paralela del Algoritmo 5.8.1. En lugar de simular todo $norte$ componentes de $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_{norte})$ y repitiendo este proceso $norte$ veces, podemos simular $norte$ copias del primer componente X_1 , luego simular $norte$ copias de los segundos componentes $X_{1:2} = (X_1, X_2)$, y así. Para mejorar aún más la generalidad del Algoritmo 5.8.1, asumimos que cada pdf auxiliar F_t es conocida hasta una constante de normalización C_t ; véase también la Observación 5.8.1. En particular, suponemos que el producto $C_t F_t(\mathbf{X}_{1:t})$ puede evaluarse explícitamente, mientras que $C_t F_t(\mathbf{X}_{1:t})$ podría no. Si F_{norte} es conocido, podemos establecer $C_{norte} = 1$ y utilice el estimador de razón de verosimilitud ordinaria (5.41) para estimar. Si C_{norte} es desconocido, debemos usar el estimador ponderado (5.42). Es decir, en la línea 8 a continuación volver

$$\left(\sum_{k=1}^{norte} W_{norte}^{(k)} \right)^{-1} \sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_{1:norte}) W_{norte}^{(k)}.$$

Algoritmo 5.9.1: SIS paralelo

aporte : Tamaño de la muestra $norte$, archivos PDF no normalizados $\{C_t F_t\}$ y pdf $\{g_{t|t-1}\}$, actuación función H .

producción : Estimador de $\mathbb{E}[H(\mathbf{X})] = \mathbb{E}[H(\mathbf{X}_{1:norte})]$.

```

1 por  $k=1$  a  $norte$  hacer
2    $X_1^{(k)} \sim g_{1|0}(x_1)$  // simular el primer componente
3    $W_1^{(k)} \leftarrow \frac{C_1 F_1(X_1^{(k)})}{g_{1|0}(X_1^{(k)})}$ 
4 por  $t=2$  a  $norte$  hacer
5   por  $k=1$  a  $norte$  hacer
6      $X_t^{(k)} \sim g_{t|t-1}(X_t | \mathbf{X}_{1:t-1}^{(k)})$  // simular el siguiente componente
7      $W_t^{(k)} \leftarrow W_{t-1}^{(k)} \frac{C_t F_t(\mathbf{X}_{1:t}^{(k)})}{g_{t|t-1}(\mathbf{X}_t^{(k)} | \mathbf{X}_{1:t-1}^{(k)})}$ 
8 devolver  $norte^{-1} \sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_{1:norte}^{(k)}) W_{norte}^{(k)}$ 

```

Tenga en cuenta que en cualquier etapa $t=1, \dots, norte$ las "partículas ponderadas" $\{\mathbf{X}_{1:t}^{(k)}, W_t^{(k)}\}_{k=1}^{norte}$ puede proporcionar la función de estimador $\sum_{k=1}^{norte} H(\mathbf{X}_{1:t}) W_t^{(k)}$ (demuestre $\mathbb{E}[H(\mathbf{X}_{1:t})]$) para cualquier imparcial H_t de $\mathbf{X}_{1:t}$. Dejar $\{\mathbf{X}_{1:t}^{(k)}, W_t^{(k)}\}_{k=1}^{norte}$ ser una muestra de tamaño $norte$ elegido con re-colocación desde $\{\mathbf{X}_{1:t-1}^{(k)}, W_{t-1}^{(k)}\}_{k=1}^{norte}$ con probabilidades proporcionales a $\{W_{t-1}^{(k)}\}_{k=1}^{norte}$, y deja $W_t = norte^{-1} \sum_{k=1}^{norte} W_t^{(k)}$. Después,

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{Y}_t^{(k)}) W_t^{(k)} \right] = \text{mi} W_t = \sum_{k=1}^{\text{norte}} \left[H(\mathbf{Y}_t^{(k)}) / \mathbf{X}_{(1:t)}^{(1)} \dots \mathbf{X}_{(1:t)}^{(\text{norte})} W_t^{(1)} \dots W_t^{(\text{norte})} \right] \\
 & = \text{mi} \left[W_t \sum_{j=1}^{\text{norte}} \sum_{i=1}^{\text{norte}} \frac{H(\mathbf{X}_{(1:t)}^{(j)}) W_t^{(j)}}{\text{noroeste}} \right] = \text{mi} \left[\sum_{j=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X}_{(1:t)}^{(j)}) W_t^{(j)} \right] \quad (5.85)
 \end{aligned}$$

Esto sugiere que reemplazamos las variables $\{\mathbf{X}_{(k)1:t}, W_{(k)t}^{(k)}\}_{k=1}^{\text{norte}}$ por $\{\mathbf{Y}_{(k)t}, \overline{W}_{(k)t}^{(k)}\}_{k=1}^{\text{norte}}$ y continuar con el algoritmo de muestreo de importancia secuencial. Este tipo de remuestreo se llama *remuestreo de arranque*. Cuando los pesos de importancia son todos idénticos, esto corresponde a *muestreo aleatorio simple con reemplazo*.

Agregar un paso de remuestreo de este tipo al Algoritmo 5.9.1 para cada t da como resultado *remuestreo de importancia secuencial* (SIR) Algoritmo 5.9.2. Se puede demostrar que el estimador ponderado devuelto por el algoritmo es asintóticamente imparcial y asintóticamente normal [7].

Tenga en cuenta que la adición de un paso de remuestreo puede dar como resultado un peor estimador. Por ejemplo, si H es una función positiva, entonces la densidad de muestreo de importancia óptima es $\text{gramo} \propto H \cdot f$ y el estimador de muestreo de importancia resultante tiene varianza cero. Si se agrega un paso de remuestreo, el estimador resultante puede tener una varianza distinta de cero.

Algoritmo 5.9.2: Algoritmo SIR con remuestreo Bootstrap

aporte: Tamaño de la muestra norte , archivos PDF no normalizados $\{C_i F_i\}$ y pdf $\{\text{gramo}\}$, actuación función H .

producción: Estimador de $\text{MI}[H(\mathbf{X})] = \text{MI}[H(\mathbf{X}_{1:\text{norte}})]$.

```

1 por  $k=1$  a  $\text{norte}$  hacer
2    $X_{(1)}^{(k)} \sim \text{gramo}(X_1)$  // simular el primer componente
3    $W_{(1)}^{(k)} \leftarrow \frac{C_1 F_1(X_{(1)}^{(k)})}{\text{gramo}(X_{(1)}^{(k)})}$ 
4 por  $t=2$  a  $\text{norte}$  hacer
5    $\mathbf{Y}_{(t-1)}^{(1)}, \dots, \mathbf{Y}_{(t-1)}^{(\text{norte})} \leftarrow$  muestras iid de  $\mathbf{X}_{(1)}$   $1:t-1, \dots, \mathbf{X}_{(1:t-1)}^{(\text{norte})}$ , con probabilidades
      proporcional a  $W_{(1:t-1)}^{(1)}, \dots, W_{(1:t-1)}^{(\text{norte})}$  // volver a muestrear
6    $\overline{W}_{t-1} \leftarrow \text{norte}^{-1} \sum_{k=1}^{\text{norte}} W_{(t-1)}^{(k)}$  // calcula el peso promedio
7   por  $k=1$  a  $\text{norte}$  hacer
8      $X_{(t)}^{(k)} \sim \text{gramo}(X_t / \mathbf{Y}_{(1:t-1)}^{(k)})$  // simular el siguiente componente
9      $\mathbf{X}_{(1:t)}^{(k)} \leftarrow (\mathbf{Y}_{(k)}^{(1:t-1)}, X_{(t)}^{(k)})$ 
10     $W_{(t)}^{(k)} \leftarrow W_{t-1}^{(k)} \frac{C_t F_t(\mathbf{X}_{(1:t)}^{(k)})}{C_{t-1} F_{t-1}(\mathbf{Y}_{(k)}^{(1:t-1)}) \text{gramo}(X_{(t)}^{(k)} / \mathbf{Y}_{(1:t-1)}^{(k)})}$  // actualizar el peso
11 devolver  $(\sum_{k=1}^{\text{norte}} W_{(norte)}^{(k)})^{-1} \sum_{k=1}^{\text{norte}} H(\mathbf{X}_{(1:norte)}^{(k)}) W_{(norte)}^{(k)}$ 

```

Hay varias otras formas en las que se puede llevar a cabo el paso de remuestreo. por ejemplo, en el *enriquecimiento* El método de [42] remuestreo se realiza haciendo n Copias de $\mathbf{X}_{(k)}$ por algún entero $n > 0$. Una generalización natural del enriquecimiento es para dividir cada partícula $\mathbf{X}_{(k)}$ en un número aleatorio R_k de copias, por ejemplo, con algunos expectativa fija n que no tiene que ser un número entero. La elección natural es