hui wang

Monte Carlo Simulación con Aplicaciones a Finanzas

Chapman & Hall/CRC FINANCIAL MATHEMATICS SERIES

Monte Carlo Simulación con Aplicaciones a Finanzas

CHAPMAN & PASILLO/CRC

Serie Matemáticas Financieras

Objetivos y alcance:

El campo de las matemáticas financieras forma una porción en constante expansión del sector financiero. Esta serie tiene como objetivo capturar nuevos desarrollos y resumir lo que se conoce en todo el espectro de este campo. Incluirá una amplia gama de libros de texto, obras de referencia y manuales destinados a atraer tanto a académicos como a profesionales. Se recomienda encarecidamente la inclusión de código numérico y ejemplos concretos del mundo real.

Títulos publicados

Derivados al Estilo Americano; Valoración y Cómputo,*Templo de Jerome* Análisis, Geometría y Modelado en Finanzas: Métodos Avanzados en Valoración de Opciones, *Pierre Henry-Labordère*

Una introducción a la fijación de precios de opciones exóticas,*Pedro Buchen* Riesgo de Crédito: Modelos, Derivados y Gestión,*Niklas Wagner* música de fondo de ingeniería, *Alan Brace*

Modelado Financiero con Procesos Jump,*Rama Cont y Peter Tankov*

Modelado de tasas de interés: teoría y práctica,*Lixin Wu*

Introducción a la modelización del riesgo crediticio, segunda edición,*Christian Bluhm, Ludger Overbeck y Christoph Wagner*

Introducción al cálculo estocástico aplicado a las finanzas, segunda edición, *Damien Lamberton y Bernard Lapeyre*

Métodos y modelos de Monte Carlo en finanzas y seguros,*Ralf Korn, Elke Korn y Gerald Kroisandt*

Simulación de Monte Carlo con aplicaciones a las finanzas,*hui wang*

métodos numéricos para finanzas,*John AD Appleby, David C. Edelman y John JH Miller* Valoración de opciones: un primer curso de matemáticas financieras,*Hugo D. Junghenn* Optimización de Portafolio y Análisis de Rendimiento,*Jean-Luc Prigent* Gestión cuantitativa de fondos,*MAH Dempster, Georg Pflug y Gautam Mitra* Análisis de riesgo en finanzas y seguros, segunda edición,*Alejandro Melnikov* Modelado robusto de Libor y fijación de precios de productos derivados,*Juan Schoenmakers* Finanzas estocásticas: un enfoque numerario,*Jan Vécer* modelos financieros estocásticos,*douglas kennedy*

Análisis de Cartera de Crédito Estructurado, Canastas y CDOs,*Christian Bluhm y Ludger Overbeck*

Comprender el riesgo: la teoría y la práctica de la gestión de riesgos financieros,*david murphy*

Desentrañar la crisis crediticia,*david murphy*

Las propuestas para la serie deben enviarse a uno de los editores de la serie mencionados anteriormente o directamente a: **Prensa CRC, Grupo Taylor & Francis** 4to, Piso, Albert House 1-4 Singer Street

Londres EC2A 4BQ

Reino Unido

Chapman & Hall/CRC FINANCIAL MATHEMATICS SERIES

Monte Carlo Simulación con Aplicaciones a Finanzas

hui wang

Universidad marrón

Providencia, Rhode Island, Estados Unidos

CRC Press
Taylor & Francis Group
Boca Raton London New York

CRC Press is an imprint of the
Taylor & Francis Group, an **informa** business
A CHAPMAN & HALL BOOK

Prensa CRC
Grupo Taylor & Francis
6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300
Boca Raton, FL 33487-2742

Fecha de la versión: 20120518

Libro estándar internacional número 13: 978-1-4665-6690-3 (eBook - PDF)

Visite el sitio Web de Taylor & Francis en
http://www.taylorandfrancis.com

y el sitio web de CRC Press en
http://www.crcpress.com

Prefacio

Este libro puede servir como texto para un curso de un semestre sobre simulación Monte Carlo. El público objetivo son estudiantes avanzados de pregrado o estudiantes en programas de maestría que deseen aprender los conceptos básicos de este apasionante tema y sus aplicaciones a las finanzas.

El libro es en gran parte autónomo. El único requisito previo es cierta experiencia con probabilidad y estadística. El conocimiento previo sobre el precio de las opciones es útil pero no esencial. Como en cualquier estudio de simulación Monte Carlo, la codificación es una parte integral y no se puede ignorar. El libro contiene una gran cantidad de MATLAB© Rejercicios de codificacion Están diseñados de forma progresiva. manera tal que no se requiere experiencia previa con MATLAB.

Gran parte de las matemáticas del libro son informales. Por ejemplo, las variables aleatorias se definen simplemente como funciones en el espacio muestral, aunque deberían ser medibles con respecto a los valores apropiados.σ -álgebras; el intercambio del orden de las integraciones se realiza liberalmente, aunque debería estar justificado por el Teorema de Tonelli-Fubini. La motivación para hacerlo es evitar la jerga teórica de la medida técnica, que es de poca importancia en la práctica y no ayuda mucho a mejorar la comprensión del tema.

El libro es una extensión de las notas de clase que he desarrollado para un curso de pregrado sobre simulación de Monte Carlo en la Universidad de Brown. Quisiera agradecer a los estudiantes que tomaron el curso, así como a la División de Matemáticas Aplicadas de Brown, por su apoyo.

hui wang
Providencia, Rhode Island
enero, 2012

MathWorks, Inc.
3 Apple Hill Drive Natick, MA
01760-2098 EE. UU. Tel: 508
647 7000
Fax: 508-647-7001
Correo electrónico: info@mathworks.com
Web: www.mathworks.com

Contenido

Esta página se dejó en blanco intencionalmente

Capítulo 1

Repaso de probabilidad

La teoría de la probabilidad es la herramienta matemática esencial para el diseño y análisis de esquemas de simulación Monte Carlo. Se supone que el lector está algo familiarizado con los conceptos elementales de probabilidad, como las variables aleatorias y las distribuciones de probabilidad multivariadas. Sin embargo, en aras de la exhaustividad, utilizamos este capítulo para recopilar una serie de resultados básicos de la teoría de la probabilidad que se utilizarán repetidamente en el resto del libro.

1.1 Espacio de probabilidad

En la teoría de la probabilidad,espacio muestrales el conjunto de todos los resultados posibles. A lo largo del libro, el espacio muestral se denotará porΩ.Un elemento genérico del espacio muestral representa un resultado posible y se denomina punto de muestreo. Un subconjunto del espacio muestral se llamaevento.

1. El conjunto vacío se denota por$\emptyset$.
2. El complemento de un evento$A$se denota porA^c.
3. La intersección de eventos$A$yBse denota por$A \cap B$o simplementeAB.
4. La unión de hechos$A$yBse denota por$A \cup B$.

Amedida de probabilidad$PAGS$enΩes un mapeo de los eventos deΩa la linea real $\mathbb{R}$que satisface los siguientes tres axiomas:

(i)$PAGS(\Omega) = 1$.

(ii) $0 \leq$ PAGS(A)≤ 1 por cada eventoUNA.

(iii) Para cada secuencia demutuamente excluyenteseventos $\{A_1, A_2, \ldots\}$, eso es, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todos$i \neq j$,

$$\text{PAGS}\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{\text{norte}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{PAGS}\left(A_{\text{norte}}\right).$$

Lema 1.1.DejarPAGSser una medida de probabilidad. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. PAGS(A) +PAGS(A^c) =1para cualquier evento A.

2. PAGS(A∪b) =PAGS(A) +PAGS(b) -PAGS(AB) para cualquier evento A y B. Más generalmente,

$$\text{PAGS}(A_1 \cup \cdots \cup A_{\text{norte}}) = \sum_{i} \text{PAGS}(A_i) - \sum_{\text{yo}<j} \text{PAGS}(A_i A_j) + \sum_{\text{yo}<j<k} \text{PAGS}(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} \text{PAGS}(A_1 \cdots A_{\text{norte}})$$

para una colección arbitraria de eventos $A_1, \ldots, A_{\text{norte}}$.

Este lema se sigue inmediatamente de los tres axiomas. Dejamos la demostración al lector como ejercicio.

1.2 Independencia y probabilidad condicional

dos eventosAyBse dice que sonindependientesiPAGS(AB) =PAGS(A)·PAGS(B).Más generalmente, una colección de eventos$A_1, A_2, \cdots, A_{\text{norte}}$se dice que sonindependientesi

$$\text{PAGS}(A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_{\text{metro}}}) = \text{PAGS}(A_{k_1}) \cdot \text{PAGS}(A_{k_2}) \cdots \cdot \text{PAGS}(A_{k_{\text{metro}}})$$

para cualquier $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_{\text{metro}} \leq$ norte.

Lema 1.2.Suponga que los eventos A y B son independientes. Entonces también lo son los eventos A^c y B, A y B^c, y A^c y B^c. Resultados similares son válidos para una colección arbitraria de eventos independientes.

PAGSTECHO. Considere los eventosA^cyB.Ya que (A^cB)y (AB)son disjuntos y (A^cB)∪ (AB) = B,resulta que

$$\text{PAGS}(A^c B) + \text{PAGS}(AB) = \text{PAGS}(B).$$

Por la independencia de A y B, $PAGS(AB) = PAGS(A)PAGS(B)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} PAGS(A^cB) &= PAGS(b) - PAGS(AB) \\ &= PAGS(b) - PAGS(A)PAGS(B) \\ &= PAGS(B)[1 - PAGS(A)]\ PAGS(B) \\ &= PAGS(A^c). \end{aligned}$$

En otras palabras, A^c y B son independientes La prueba para otros casos es similar y por lo tanto se omite. ■

Considere dos eventos A y B con $PAGS(B) > 0$. Ella probabilidad condicional de A dado B se define como

$$PAGS(A|B) = \frac{PAGS(AB)}{PAGS(B)}. \qquad (1.1)$$

Cuando $PAGS(b) = 0$, la probabilidad condicional $PAGS(A|B)$ es indefinido. Sin embargo, siempre es cierto que

$$PAGS(AB) = PAGS(A|B)PAGS(B),$$

donde el lado derecho se define como 0 siempre que $PAGS(b) = 0$.

Lema 1.3. Dado cualquier evento B con $PAGS(B) > 0$, se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. Un evento A es independiente de B si y solo si $PAGS(A|B) = PAGS(A)$.

2. Para cualquier evento disjunto A y C,

$$PAGS(A \cup C|B) = PAGS(A|B) + PAGS(C|B).$$

3. Para cualquier evento A_1 y un$_2$,

$$PAGS(A_1A_2|B) = PAGS(A_1|B) \cdot PAGS(A_2|Un_1B).$$

PAGSTECHO. Todas estas afirmaciones se derivan directamente de la definición (1.1). Solo debemos dar la prueba de (3). El lado derecho es igual

$$\frac{PAGS(A_1B)}{PAGS(B)} \cdot \frac{PAGS(A_1A_2B)}{PAGS(A_1B)} = \frac{PAGS(A_1A_2B)}{PAGS(B)},$$

que es igual al lado izquierdo. Completamos la prueba. ■

Teorema 1.4. (Ley de la Probabilidad Total).Supongamos que $\{B_{norte}\}$es una partición del espacio muestral, es decir, $\{B_{norte}\}$son mutuamente excluyentes y$\cup_{norte} B_{norte} = \Omega$.Entonces para cualquier evento A,

$$PAGS(A) = \sum_{norte} PAGS(A \mid B_{norte}) PAGS(B_{norte}).$$

PAGSTECHO. Observa eso $\{AB_{norte}\}$son eventos disjuntos y$\cup_{norte} AB_{norte} = A$.Resulta que

$$PAGS(A) = \sum_{norte} PAGS(AB_{norte}) = \sum_{norte} PAGS(A \mid B_{norte}) PAGS(B_{norte}).$$

Completamos la prueba. ■

Ejemplo 1.1.Un inversionista ha comprado bonos de cinco bancos con calificación S&P AAA y tres bancos con calificación S&P A.

Calificación S&P	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Probabilidad	1	4	12	50	300	1100	2800

Probabilidad de incumplimiento anual en puntos básicos, 100 puntos básicos = 1%

Suponiendo que todos estos bancos son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que

(a) al menos uno de los bancos incumple?

(b) exactamente un banco incumple?

SSOLUCIÓN: La probabilidad de que al menos uno de los bancos incumpla es igual a

$$\begin{aligned} 1 - PAGS(\text{ninguno de los bancos incumple}) &= 1 - (1 - 0{,}0001)^5 \cdot (1 - 0{,}0012)^3 \\ &= 1 - 0.9999^5 \cdot 0.9988^3 \\ &= 40{,}94 \text{ pbs.} \end{aligned}$$

Observe que hay cinco formas igualmente probables de que exactamente un banco con calificación AAA incumpla y tres formas igualmente probables de que exactamente un banco con calificación A incumpla. Por lo tanto, la probabilidad de que exactamente un banco incumpla es igual a

$$5 \cdot 0.9999^4 \cdot 0.0001 \cdot 0.9988^3 + 3 \cdot 0.9999^5 \cdot 0.9988^2 \cdot 0{,}0012 = 40{,}88 \text{ pb.}$$

Las respuestas a (a) y (b) son casi idénticas porque la probabilidad de que más de un banco incumpla es insignificante. ■

Ejemplo 1.2.Un analista técnico ha desarrollado un modelo simple que utiliza los datos de los dos días anteriores para predecir el movimiento del precio de las acciones del día siguiente. Deje que "+" y "-" indiquen el movimiento del precio de las acciones en un día de negociación:

“+”	=	el precio de las acciones sube o permanece sin cambios,
“-”	=	el precio de las acciones baja.

A continuación se muestra la distribución de probabilidad.

(Ayer hoy)	Mañana +	Mañana −
(+, +)	0.2	0.8
(−, +)	0.4	0.6
(+, -)	0.7	0.3
(-, -)	0.5	0.5

Suponga que los movimientos del precio de las acciones ayer y hoy son (−, +). Calcule la probabilidad de que el movimiento del precio de las acciones sea “+” para

(a) mañana,

(b) pasado mañana.

SSOLUCIÓN: Defina los siguientes eventos:

A_1	=	el movimiento del precio de las acciones mañana es "+",
A_2	=	el movimiento del precio de las acciones pasado mañana es “+”, el
B	=	movimiento del precio de las acciones ayer y hoy es (−, +).

Entonces, la probabilidad de que el movimiento del precio de las acciones mañana sea “+” es

$$\text{PAGS}(A_1|B) = P(+|-,+) = 0.4.$$

Por el Lema 1.3, la probabilidad de que el movimiento del precio de las acciones pasado mañana sea “+” es

$$\begin{aligned}\text{PAGS}(A_2|B) &= \text{PAGS}(A_1A_2|B) + \text{PAGS}(A^c_1 A_2|B)\\ &= \text{PAGS}(A_1|B)\cdot\text{PAGS}(A_2|\text{Un}_1B) + \text{PAGS}(A^c_1|B)\cdot\text{PAGS}(A_2|\text{Un}^c_1B)\\ &= P(+|-,+)\cdot P(+|+,+) + P(-|-,+)\cdot P(+|+,-)\ 0.4\times 0,2\\ &= +\ 0,6\times 0,7\ 0,5.\\ &=\end{aligned}$$

1.3 Variables aleatorias

Avariable aleatoriaes un mapeo del espacio muestral a la línea realrlos función de distribución acumulativa (cdf) de una variable aleatoriaXes definido por

$$F(x) = PAGS(X \leq X)$$

para cada$X \in r$Siempre es no decreciente y continuo por la derecha. Es más,

$$\text{límite}_{X \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \text{límite}_{X \to +\infty} F(x) = 1.$$

1.3.1 Variables aleatorias discretas

Se dice que una variable aleatoria esdiscretosi puede asumir como mucho contablemente muchos valores posibles. Suponer que $\{X_1, X_2, \cdots\}$es el conjunto de todos los valores posibles de una variable aleatoriaX.La función

$$p(x_i) = PAGS(X = X_i), yo = 1, 2, \cdots$$

se llama elfunción de probabilidaddeX.losvalor esperado (oexpectativa, media)deXse define como

$$E[X] = \sum_i X_i p(x_i).$$

Más generalmente, dada cualquier función$h: R \to R$,el valor esperado de la variable aleatoria$h(X)$es dado por

$$E[h(X)] = \sum_i h(x_i) p(x_i).$$

Mientras que el valor esperado mide el promedio de una variable aleatoria, la medida más común de la variabilidad de una variable aleatoria es ladiferencia, que se define por

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = EX^2] - (EX])^2.$$

losDesviación EstándardeXes simplemente la raíz cuadrada de la varianza:

$$Estándar[X] = \sqrt{Var[X]}.$$

Entre las variables aleatorias discretas utilizadas con mayor frecuencia se encuentran las variables aleatorias de Bernoulli, las variables aleatorias binomiales y las variables aleatorias de Poisson.

1. Bernoulli con parámetropags. Una variable aleatoriaXque toma valores en {0, 1} y

$$PAGS(X = 1) = pags, PAGS(X = 0) = 1 - pags.$$

$$E[X] = p, Var[X] = p(1 - pags).$$

2. Binomial con parámetros (n, p). Una variable aleatoriaXque toma valores en {0, 1, . . . ,norte}y

$$PAGS(X = k) = \binom{norte}{k} pags^k (1 - pags)^{n-k}.$$

$$E[X] = np, \quad Var[X] = np(1 - pags).$$

3. Veneno con parámetroλ. Una variable aleatoriaXque toma valores en {0, 1, . . .} y

$$PAGS(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

$$E[X] = \lambda, \ Var[X] = \lambda.$$

Ejemplo 1.3. Compare los siguientes dos escenarios. Se supone que la probabilidad de incumplimiento de un banco con calificación B de S&P es de 1100 puntos básicos.

(a) Una empresa invierte 10 millones de dólares en bonos a 1 año emitidos por un banco con calificación B de S&P, con una tasa de interés anual del 10%. Calcule la expectativa y la desviación estándar del valor de estos bonos al vencimiento.

(b) Una empresa diversifica su cartera dividiendo 10 millones de dólares en partes iguales entre los bonos a 1 año emitidos por dos bancos S&P Brated diferentes. Suponga que los dos bancos son independientes y ofrecen la misma tasa de interés anual del 10%. Calcule la expectativa y la variación estándar del valor de estos bonos al vencimiento.

SSOLUCIÓN: DejarX (en millones) sea el valor de estos bonos al vencimiento.

(a) Es fácil ver que la distribución deXviene dada por la siguiente tabla:

Valor deX	11	0
Probabilidad	0.89	0.11

Por lo tanto,

$$E[X] = 11\times 0{,}89 + 0\times 0{,}11 = 9{,}79,$$

$$\text{Estándar}[X] = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{0.89\times 1.21^2 + 0.11\times(-9.79)^2} = 3.442.$$

(b) Si ambos bancos incumplen entonces $X = 0$. Si uno de los bancos incumple entonces $X = 5.5$. Si ninguno de los bancos incumple, entonces $X = 11$. Las probabilidades respectivas están dadas por la siguiente tabla:

Valor de X	11	5.5	0
Probabilidad	0,7921	0,1958	0,0121

Por ejemplo, hay dos formas igualmente probables de que uno de los bancos incumpla y, por lo tanto, la probabilidad de $X = 5.5$ es

$$2\times 0.11\times(1 - 0{,}11) = 0{,}1958$$

por la independencia. El valor esperado y la desviación estándar de X puede calcularse de manera similar.

$$E[X] = 11\times 0{,}7921 + 5{,}5\times 0.1958 + 0\times 0{,}0121 = 9{,}79,$$

$$\text{Estándar}[X] = \sqrt{\text{Var}[X]} = 2.434.$$

Estas dos estrategias de inversión tienen el mismo rendimiento esperado. Sin embargo, la desviación estándar o varianza de la segunda estrategia es significativamente menor que la de la primera estrategia. Si se define la varianza como la medida de riesgo, entonces la segunda estrategia tiene el mismo rendimiento esperado pero menos riesgo. En otras palabras, la diversificación reduce el riesgo. ■

Ejemplo 1.4. Considere el siguiente modelo para el precio de las acciones. Denotamos por S_i el precio en el i-paso de tiempo. Si el precio actual es S, luego, en el siguiente paso de tiempo, el precio sube a uS con probabilidad p o se mueve hacia abajo dS con probabilidad $1 - p$. Aquí $r < 1 < u$ se dan constantes positivas. Dado $S_0 = x$ y la distribución de S_n.

SOLUCIÓN: Supongamos que entre los primeros n pasos de tiempo hay k pasos en los que el precio de las acciones sube. Luego hay $(n - k)$ pasos en los que el precio de las acciones se mueve hacia abajo y

$$S_n = u^k d^{n-k} S_0 = u^k d^{n-k} x.$$

Dado que el número de pasos de tiempo en los que el precio de las acciones sube es una variable aleatoria binomial con parámetros*norte*y*pags,*la distribución deS_{norte}es dado por

$$PAGS(S_{norte} = tu^{k}d^{n-k}x) = \binom{norte}{k} pags^{k}(1 - pags)^{n-k},$$

por*k* =0, 1, . . . ,*norte.* ■

1.3.2 Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria*X*se ha dicho*continuo*si existe una función no negativa*f(x)*tal que

$$PAGS(X \in b) = \int_{B} f(x)dx$$

para cualquier subconjunto*B*⊆*r*La función*F*se dice que es el*densidad*de*X*y debe satisfacer la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

La relación entre la función de distribución acumulativa*F*y la densidad*F*es dado por

$$f(x) = F'(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{X} f(t)dt.$$

los*valor esperado* (o*expectativa, media*)de*X*se define como

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx.$$

En términos más generales, para cualquier función*h*:R→R,el valor esperado de*h(X)*es dado por

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx.$$

Como en el caso de la variable aleatoria discreta, la*diferencia*y*Desviación Estándar* de*X*se definen de la siguiente manera:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^{2}] = EX^{2}] - (EX])^{2},$$

$$Estándar[X] = \sqrt{Var[X]}.$$

Deberíamos analizar algunas de las variables aleatorias continuas más utilizadas en finanzas: variables aleatorias uniformes, variables aleatorias exponenciales, variables aleatorias normales y variables aleatorias lognormales.

1.Uniforme en [a, b].Una variable aleatoria$X$con densidad

$$f(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1} & \text{si} X \in [\text{una}, b], \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{b+a}{2}, \ Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2.exponencial con tasaλ.Una variable aleatoria$X$con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \text{mi}^{-\lambda x} & \text{si} X \geq 0, \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

$$E[X] = , \ \frac{1}{\lambda} \quad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.Normal con mediaμy varianzaσ^2:NORTE(μ, σ^2).Una variable aleatoria X con densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{mi}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad X \in r$$

$$E[X] = \mu, \ Var[X] = \sigma^2.$$

El caso especial dondeμ=0 yσ= 1 se conoce como elestándar normal.

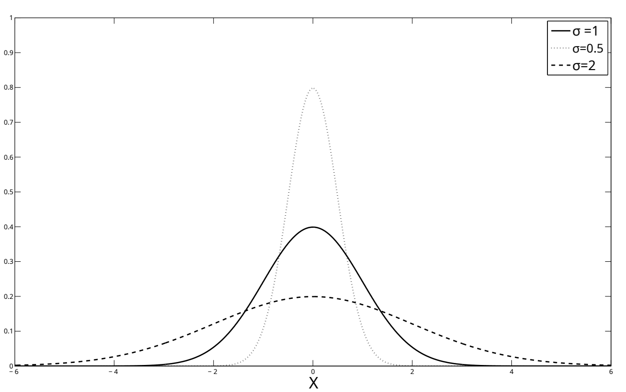


Figura 1.1: Densidad deNORTE$(0, \sigma^2)$.

Una propiedad importante de las distribuciones normales es que cualquier transformada lineal de una variable aleatoria normal sigue siendo normal. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se deja para el ejercicio 1.6.

Lema 1.5.Suponga que X es N(μ,σ^2). Sean a y b dos constantes arbitrarias. Entonces a + bX es normal con media a + bμy varianza $b^2\sigma^2$.

Un corolario inmediato del lema anterior es que siXes NORTE(μ,σ^2), después

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

es una variable aleatoria normal estándar. A lo largo del libro, usaremos Φ para denotar la función de distribución acumulativa de la normal estándar. Eso es,

$$\Phi(x) = \text{PAGS}(\text{NORTE}(0, 1) \leq x) = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{mi}^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Debido a la simetría de la densidad normal estándar, para cada$X \in R$

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1.$$

4.Lognormal con parámetrosμyσ^2: RegistroN(μ,σ^2).Una variable aleatoria positivaXcuyo logaritmo natural se distribuye normalmente con media μy varianzaσ^2. En otras palabras,

$$X = \text{mi}^Y, Y = N(\mu, \sigma^2).$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \quad \text{Var}[X] = \left(\text{mi}^{\sigma^2} - 1\right) \cdot \text{mi}^{2\mu + \sigma^2}.$$

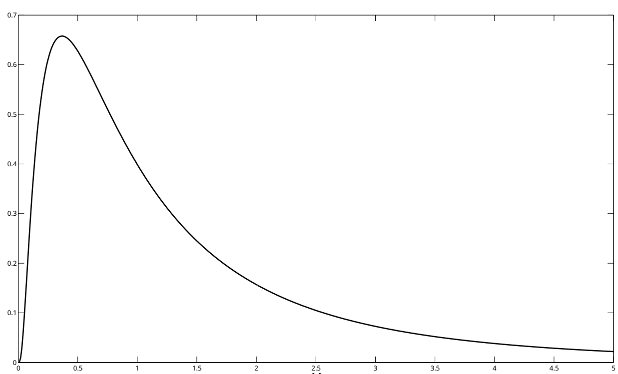


Figura 1.2: Densidad de LogN(0, 1).

Ejemplo 1.5. Valor en riesgo (VaR) mide, dentro de un nivel de confianza, la pérdida máxima que podría sufrir una cartera. Para ser más precisos, denote por$X$el cambio en el valor de mercado de una cartera durante un período de tiempo determinado. Entonces, para un nivel de confianza dado $1 -\alpha$dónde$\alpha \in (0, 1)$, el VaR está definido por

$$\text{PAGS}(X \leq \text{-VaR}) = \alpha.$$

En otras palabras, con probabilidad $1 -\alpha$, la pérdida máxima no superará el VaR.

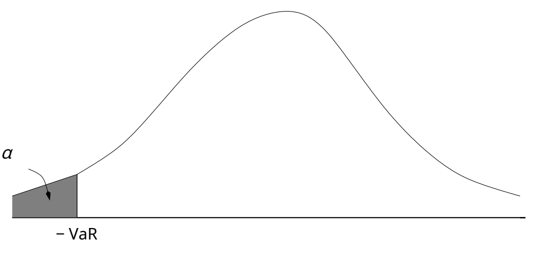


Figura 1.3: Valor en riesgo.

Existe una fórmula simple para el VaR cuando$X$se supone que es normal distribuido con mediaμy varianzaσ^2. Dado un nivel de confianza $1 -\alpha$,

$$\alpha = \text{PAGS}(X \leq \text{-VaR}) = \text{PAGS}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{-\text{Var} -\mu}{\sigma}\right).$$

Ya que $(X -\mu)/\sigma$es una variable aleatoria normal estándar, se sigue que

$$\frac{-\text{VaR}-\mu}{\sigma} = -z_\alpha,$$

dónde$z_\alpha$está determinada por $\Phi(-z_\alpha) = \alpha$. Por lo tanto, $\text{VaR} = z_\alpha\sigma-\mu$. ■

Ejemplo 1.6.La evaluación de opciones de compra a menudo involucra el cálculo de valores esperados tales comomi $[(S - K)^+]$, dónde$S$es el precio de la acción subyacente,$k$es una constante positiva dada, yX^+denota la parte positiva de$X$,eso es,$X^+=\text{máx}\{X,0\}$. Asumiendo que$S$se distribuye lognormalmente con parámetrosμyσ^2, calcule este valor esperado.

SSOLUCIÓN: Ya que$X =$Iniciar sesiónSse distribuye como$\text{NORTE}(\mu,\sigma^2)$, resulta que

$$\begin{aligned} E[(S - K)^+] &= \int_{\text{Iniciar sesión}k}^{\infty} (mi^x - k)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} mi^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\, dx \\ &= \int_{\theta}^{\infty}\left(mi^{\mu+\sigma z} - k\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} mi^{-\frac{z^2}{2}} dz, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado el cambio de variablex = $\mu+\sigma z$y deja

$$\theta = \frac{\text{Iniciar sesión}K - \mu}{\sigma}.$$

El cálculo directo arroja que

$$\begin{aligned}
\int_\theta^\infty \text{mi}^{\mu+\sigma z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{mi}^{-\frac{1}{2}z^2}dz &= \text{mi}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\int_\theta^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{mi}^{-\frac{1}{2}(z-\sigma)^2}dz \\
&= \text{mi}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\int_{\theta-\sigma}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{mi}^{-\frac{1}{2}z^2}dz \\
&= \text{mi}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\Phi(\sigma-\theta), \\
k\int_\theta^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{mi}^{-\frac{1}{2}z^2}dz &= K\Phi(-\theta).
\end{aligned}$$

Por eso,

$$E[(S - K)_+] = \text{mi}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}\Phi(\sigma-\theta) - K\Phi(-\theta). \qquad \blacksquare$$

1.4 Vectores aleatorios

Avector aleatorioes una colección de variables aleatorias definidas en el mismo espacio muestral. Los componentes de un vector aleatorio pueden ser discretos, continuos o mixtos. Por el momento, nos limitaremos a un vector aleatorio bidimensional (X, Y).La extensión a vectores aleatorios generales es obvia.

1. Vectores aleatorios discretos.Si ambos$X$yYson discretos, es conveniente definir elfunción de masa de probabilidad conjuntapor

$$p(x_i,y_j) = \text{PAGS}(X = X_i, y = y_j).$$

Las funciones de masa de probabilidad para$X$y para$Y$son los mismos que los funciones de masa de probabilidad marginal

$$\text{pags}_X(X_i) = \sum_j p(x_i,y_j), \qquad \text{pags}_Y(y_j) = \sum_i p(x_i,y_j),$$

respectivamente. Para cualquier función$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,el valor esperado de $h(X, Y)$es dado por

$$E[h(X, Y)] = \sum_{\text{yo}, j} h(x_i,y_j)p(x_i,y_j).$$

2. Vectores aleatorios continuos. X y Y se dice que sonconjuntamente continuo si existe un no negativofunción de densidad conjunta,decir $f(x, y)$, tal que

$$PAGS(X \in A, Y \in b) = \iint_{A \times B} f(x, y)\, dxdy$$

para cualquierun, $b \subseteq r$ Las funciones de densidad para X y para Y son los mismos que los funciones de densidad marginales

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy, \qquad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx,$$

respectivamente. Para cualquier función $h: R^2 \to R$, el valor esperado de $h(X, Y)$ es dado por

$$E[h(X, Y)] = \iint_{R^2} h(x, y) f(x, y)\, dxdy.$$

Dejar a y b sean dos constantes arbitrarias y consideremos la función $h(x, y) = ax + by$. Obtenemos el siguiente resultado inmediatamente.

Teorema 1.6. Para cualquier variable aleatoria X e Y, cualquier constante a y b,

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

1.4.1 Covarianza y Correlación

loscovarianzade variables aleatorias X y Y se define como

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

El cálculo directo produce que para cualquier variable aleatoria X, Y, Z y cualquier constantea B C, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X, X) &= \mathrm{Var}[X], \\
\mathrm{cov}(X, Y) &= \mathrm{cov}(Y, X), \\
\mathrm{cov}(una, X) &= 0, \\
\mathrm{cov}(aX + bY, Z) &= a\,\mathrm{cov}(X, Z) + b\,\mathrm{cov}(Y, Z), \text{ un} \\
\mathrm{cov}(X, aY + bZ) &= \mathrm{cov}(X, Y) + b\,\mathrm{cov}(X, Z).
\end{aligned}$$

Ahora podemos enunciar la fórmula de varianza para sumas de variables aleatorias. La prueba es una aplicación directa de las identidades anteriores y, por lo tanto, se omite.

Lema 1.7.Para cualquier variable aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_{norte}$,

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{yo=1}^{norte} X_i\right) = \sum_{yo=1}^{norte} \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{i6=j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$
$$= \sum_{yo=1}^{norte} \mathrm{Var}[X_i] + 2\sum_{yo<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j).$$

loscoeficiente de correlaciónentre variables aleatoriasXyYse define ser - estar

$$\beta = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var} X}\sqrt{\mathrm{Var} Y}}.$$

Se puede demostrar que $-1 \leq \beta \leq 1$ [34]. Si$\beta > 0$, entoncesXyYse dice que sonrelacionado positivamente,y si$\beta < 0$, entoncesXyYse dice que soncorrelacionado negativamente.En términos generales, las variables aleatorias correlacionadas positivamente tienden a aumentar o disminuir juntas, mientras que las variables aleatorias correlacionadas negativamente tienden a moverse en direcciones opuestas. Cuando$\beta = 0$,XyYse dice que son no correlacionado

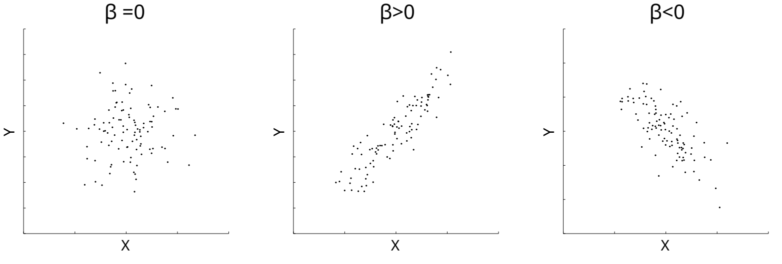


Figura 1.4: Muestras representativas de vector aleatorio (X, Y).

Ejemplo 1.7.Un administrador de cartera desea asignar $1 millón entre dos activos. Denotamos por$X_i$el regreso de lai-th activo, y asumir$E X_i] = r_i$ y $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2_i$ poryo =1, 2. El coeficiente de correlación entreX_1y X_2se supone que esβ. Se requiere que el rendimiento general esperado de la asignación no sea inferior a un nivel determinador$*$. Al gestor de cartera le gustaría elegir una asignación de este tipo con una variación mínima. Resuelve esto optimización de la varianza mediaproblema bajo el supuesto de que

$$r_1 = 0{,}2, r_2 = 0{,}1, \sigma^2_1 = 0{,}1, \sigma^2_2 = 0{,}4, \beta = -0.5, r_* = 0.15.$$

SSOLUCIÓN: Supongamos que la estrategia es invertir $\$w_i$ millones en eli-el activo. Después,

$$w_i \geq 0, w_1 + w_2 = 1.$$

El retorno de esta estrategia es $w_1X_1 + w_2X_2$. El rendimiento esperado y la varianza son, respectivamente,

$$\begin{aligned} E[w_1X_1 + w_2X_2] &= w_1r_1 + w_2r_2, \\ Var[w_1X_1 + w_2X_2] &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2\beta\sigma_1\sigma_2 w_1w_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema de optimización es minimizar

$$w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2\beta\sigma_1\sigma_2 w_1w_2$$

bajo las restricciones que

$$w_1r_1 + w_2r_2 \geq r_*, w_1 + w_2 = 1, w_i \geq 0.$$

Reemplazando los parámetros dados y sustituyendo $1 - w_1$ por w_2, el problema de optimización se reduce a minimizar

$$0.7w_1^2 - w_1 + 0.4 \text{ tal que } 0.5 \leq w_1 \leq 1.$$

Por lo tanto, la asignación óptima es $w_1^* = 5/7$ y $w_2^* = 1 - w_1^* = 2/7$. los el valor esperado y la desviación estándar del rendimiento de esta asignación son 0,1714 y 0,2070, respectivamente. ■

1.4.2 Independencia

Dos variables aleatorias X y Y se dice que son independientes si por alguna un, $b \subseteq R$

$$PAGS(X \in A, Y \in b) = PAGS(X \in A) \cdot PAGS(Y \in B).$$

Si X y Y son variables aleatorias discretas, entonces X y Y son independientes si y solo si la función de masa de probabilidad conjunta es igual al producto de las funciones de masa de probabilidad marginal:

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y).$$

Del mismo modo, si X y Y son conjuntamente continuas, entonces X y Y son independientes si y solo si la función de densidad conjunta es igual al producto de las funciones de densidad marginales:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

Lema 1.8.Suponga que X e Y son independientes. Después

1. $E[XY] = E[X]E[Y]$,
2. $Cov(X, Y) = 0$,
3. $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

PAGSTECHO. Asumir que$X$yYson conjuntamente continuos. Denotamos por$f(x, y)$ la densidad conjunta yF_X,$F_Y$los dos marginales. Resulta que

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \int\int_{R^2} xy\, f(x, y)\, dxdy \\
&= \int\int_{R^2} xy\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dxdy \\
&= \int_R x f_X(x)\, dx \int_R \text{si} f_Y(y)\, \text{día} \\
&= E[X]E[Y].
\end{aligned}
$$

(2) se sigue inmediatamente de (1), y (3) es una consecuencia de (2) y el Lema 1.7. La demostración para el caso discreto es similar. ■

Un resultado muy útil con respecto a las variables aleatorias normales es que cualquier combinación lineal de variables aleatorias normales independientes todavía se distribuye normalmente.

Lema 1.9.Suponga que $\{X_1, \ldots, X_{\text{norte}}\}$son independientes y $X_i$es normalmente distributado como $N(\mu_i, \sigma^2_i)$ para cada i. Entonces para cualquier constante $\{a_1, \ldots, a_{\text{norte}}\}$,

$$
\sum_{\text{yo}=1}^{\text{norte}} a_i X_i = \text{norte}\left(\sum_{\text{yo}=1}^{\text{norte}} a_i \mu_i, \sum_{\text{yo}=1}^{\text{norte}} a^2_i \sigma^2_i\right).
$$

La prueba se puede encontrar en muchos libros de texto de probabilidad; por ejemplo, [34, Capítulo 6]. Véase también el Ejercicio 1.14.

Ejemplo 1.8.Suponga que el pago de una opción depende de los precios de dos acciones, digamosS_1yS_2. Si$S_i$excede$k_i$para cada$i$,entonces el pago es una cantidad fija; de lo contrario, es cero. La evaluación de esta opción implicará el valor esperado de$h(S_1, S_2)$, dónde

$$
h(x_1, X_2) = \begin{cases} 1 & \text{si} X_i > k_i \text{poryo} = 1, 2, \text{en} \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}
$$

Asumir queS_1yS_2son independientes y$S_i$se distribuye lognormalmente como registro$N(\mu_i, \sigma^2_i)$.Calcule este valor esperado.

SSOLUCIÓN: Ya queS_1yS_2son independientes, podemos expresar el valor esperado como

$$E[h(S_1,S_2)] = PAGS(S_1>k_1,S_2>k_2) = PAGS(S_1>k_1)PAGS(S_2>k_2).$$

Tenga en cuenta que el registro$S_i$es$NORTE(\mu_i,\sigma_2 i)$.Se sigue que para cada$i$

$$PAGS(S_i>k_i) = PAGS(\text{Iniciar sesión}S_i>\text{Iniciar sesión}k_i) = \Phi\left(-\frac{\text{Iniciar sesión}k - \mu i}{\sigma_i}\right).$$

Por lo tanto,

$$E[h(S_1,S_2)] = \Phi\left(-\frac{\text{Iniciar sesión}k_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\Phi\left(-\frac{\text{Iniciar sesión}k_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right).$$ ■

1.5 Distribuciones condicionales

Considere dos variables aleatorias$X$yyEstamos interesados en la distribución condicional de$X$dado$Y = y$.Anteriormente en este capítulo hemos definido la probabilidad condicional de$A$dado$B$,a saber,

$$PAGS(A|B) = \frac{PAGS(AB)}{PAGS(B)},$$

si$PAGS(B) >0$. Por lo tanto, cuando ambos$X$yYson discretas, la distribución condicional de$X$dado$y = y$se puede definir de una manera sencilla:

$$PAGS(X = x|Y = y) = \frac{PAGS(X = x, Y = y)}{PAGS(y = y)}.$$

La dificultad surge, sin embargo, cuando$Y$es una variable aleatoria continua. En este caso, la definición anterior falla automáticamente ya que$PAGS(y = y) =0$. No obstante, conviene sustituir las funciones de masa de probabilidad por las funciones de densidad para definir de forma análoga una función de densidad condicional$f(x|y)$. El siguiente teorema se puede encontrar en muchos libros de texto de introducción a la probabilidad; véase, por ejemplo, [34, Capítulo 5].

Teorema 1.10.Suponga que X e Y son variables aleatorias continuas con densidad conjunta f (x, y). La densidad condicional de X dado Y = y es

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{F_Y(y)}.$$

Una vez que se obtiene la densidad condicional, es muy fácil expresar cantidades relacionadas con la distribución condicional. Por ejemplo, para cada conjunto $A \subseteq R$,

$$PAGS(X \in A | Y = y) = \int_A f(x|y)\, dx,$$

y para cualquier funcion $h: R \to R$,

$$E[h(X)|Y = y] = \int_R h(x) f(x|y)\, dx.$$

De manera análoga al Teorema 1.4, se puede escribir otra versión de la ley de probabilidad total en términos de variables aleatorias. La prueba es directa y por lo tanto se omite.

Teorema 1.11. (Ley de la Probabilidad Total).Para cualquier variable aleatoria X e Y y cualquier subconjunto $A \subseteq R$,

1. Y es discreta:

$$PAGS(X \in A) = \sum_j PAGS(X \in A | Y = y_j) P(Y = y_j).$$

2. Y es continua:

$$PAGS(X \in A) = \int_R PAGS(X \in A | Y = y)\, f_Y(y)\, día.$$

Observación 1.1.En el caso especial en que X y Y son independientes, la distribución condicional de X dado $y = y$ es siempre la distribución de X mismo, independientemente de y.

Ejemplo 1.9.Considere un modelo de riesgo crediticio de un factor donde las pérdidas se deben al incumplimiento de los deudores en los pagos contractuales. Supongamos que hay metro obligados y los i-el deudor incumple si y sólo si $X_i \geq X_i$ para alguna variable aleatoria X_i y nivel dado X_i. la variable aleatoria X_i se supone que toma la forma

$$X_i = \rho_i Z + \sqrt{1 - \rho_i^2}\, \varepsilon_i,$$

dónde $Z, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{metro}$ son variables aleatorias normales estándar independientes, y cada ρ_i es una constante dada que satisface $-1 < \rho_i < 1$. Calcule la probabilidad de que ninguno de los deudores incumpla.

SSOLUCIÓN: Tenga en cuenta que para cada i, la distribución de X_i es NORTE(0, 1), gracias al Lema 1.9. Por lo tanto,

$$PAGS(\text{la } i\text{-el deudor no incumple}) = PAGS(X_i < x_i) = \Phi(x_i).$$

Ya que X_i'tienen un componente común Z, no pueden ser independientes a menos que $\rho_i = 0$ por cada i. Por lo tanto, en general no es correcto escribir

$$PAGS(\text{sin defecto}) = \prod_{yo=1}^{metro} \Phi(x_i).$$

Sin embargo, X_i son independientes dados $Z = z$. Esta independencia condicional nos permite escribir

$$PAGS(\text{sin defecto} \mid Z = z) = \prod_{yo=1}^{metro} PAGS\left(\varepsilon_i < \frac{x_i - \rho_i z}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right) = \prod_{yo=1}^{metro} \Phi\left(\frac{x_i - \rho_i z}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right).$$

Ahora se sigue del teorema 1.11 que

$$PAGS(\text{sin defecto}) = \int_R \prod_{yo=1}^{metro} \Phi\left(\frac{x_i - \rho_i z}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} mi^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz.$$

No existe una fórmula de forma cerrada para esta probabilidad. A menudo se recurre a aproximaciones o simulación de Monte Carlo para producir estimaciones de tales cantidades. ■

Ejemplo 1.10. Otra medida popular de riesgo es la llamada pérdida de cola esperada. Dejar L ser la pérdida de valor de la cartera y $un > 0$ un umbral de pérdida dado. La pérdida de cola esperada se define como la expectativa condicional

$$\bar{L}_a = E[L \mid L > a].$$

Asumir que L se distribuye normalmente como NORTE(μ, σ^2). Calcular $\bar{L}_a$.

SSOLUCIÓN: El paso clave es derivar la distribución condicional de L dado $L > a$. Para dar un tratamiento general, asumimos temporalmente que L tiene una densidad arbitraria F. Denotamos por ϕ la densidad condicional. es natural que ϕ debe tomar la forma

$$\phi(x) = \begin{cases} ver\,(x) & \text{si } x > a, \\ 0 & \text{si } X \leq a, \end{cases}$$

dóndeCes una constante por determinar. Ya queϕes una densidad, debe satisfacer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, dx = 1.$$

Resulta que

$$c = \frac{1}{\int_a^{\infty} f(x)dx} = \frac{1}{PAGS(L > a)}.$$

Por lo tanto,

$$E[L|L > a] = \int_{-\infty}^{\infty} X\phi(x)\, dx = \frac{1}{PAGS(L > a)} \int_a^{\infty} xf(x)\, dx.$$

En particular, cuandoLse distribuye normalmente comoNORTE(μ,σ2), no es difícil comprobar quePAGS(L > a) = Φ (−θ), dóndeθ= (un -μ)/σ, y

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} xf(x)\, dx &= \int_a^{\infty} X\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} mi^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx \\
&= \int_{\theta}^{\infty} (\mu+\sigma z)\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} mi^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= \mu\Phi(-\theta) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} mi^{-\frac{1}{2}\theta^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la pérdida de cola esperada es

$$\bar{L}_a = E[L|L > a] = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\Phi(-\theta)} mi^{-\frac{1}{2}\theta^2}. \qquad \blacksquare$$

1.6 Expectativa Condicional

Considere dos variables aleatoriasXyylosexpectativa condicionaldeX dadoY,denotado por E[X|Y],es una función deYy por lo tanto una variable aleatoria en sí misma.E[X|Y]se puede determinar de la siguiente manera.

Paso 1.CalcularE[X|Y = y]por cada valor fijoy.Si uno sabe el distribución condicional deXdadoy = y,despuésE[X|Y = y]es simplemente el valor esperado de esta distribución condicional.

Paso 2.RespectoE[X|Y = y]como una función deyy escribeE[X|Y = y] = f (y). ReemplazaryporYpara obtenerE[X|Y].Eso es,

$$E[X|Y] = f(Y).$$

Un resultado muy importante es el siguientepropiedad de la torrede expectativas condicionadas.

Teorema 1.12. (Propiedad de la Torre).Para cualquier variable aleatoria X e Y,

$$E[E[X|Y]] = E[X].$$

PAGSTECHO. Mostraremos para el caso en queXyYtienen una función de densidad conjuntaf (x, y).La prueba para otros casos es similar y por lo tanto se omite. Por la definición de expectativa condicional,

$$\begin{aligned} E[E[X|Y]] &= \int_R E[X|Y = y]\, f_Y(y)\, \text{día} \\ &= \int_R \left[\int_R xf(x|y)\, dx\right] f_Y(y)\, \text{día} \\ &= \int_R \int_R xf(x, y)\, dxdy \\ &= \int_R xf_X(x)\, dx \\ &= EX]. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba. ■

Lema 1.13.Dadas las variables aleatorias X, Y, Z, las constantes a, b, c y cualquier función h :R→R,

1. $E[c|Y] = c$.
2. $E[h(Y)|Y] = h(Y)$.
3. $E[aX + bZ|Y] = aE[X|Y] + bE[Z|Y]$.
4. $E[h(Y)X|Y] = h(Y)E[X|Y]$.
5. $E[h(X)|Y] = E[h(X)]$, siempre que X e Y sean independientes.

La demostración de este lema se deja como ejercicio al lector.

Observación 1.2.A pesar deYse supone que es una variable aleatoria en nuestro trato con distribuciones condicionales y expectativas condicionales, en realidad puede ser mucho más general. Por ejemplo,Ypuede ser cualquier vector aleatorio. Todos los resultados que hemos establecido son válidos para el caso general.

Ejemplo 1.11.Los precios de las acciones a veces se modelan mediante distribuciones distintas de lognormal para ajustar los datos empíricos con mayor precisión. Por ejemplo, Merton [22] introdujo un modelo de difusión de salto para los precios de las acciones. Un caso especial del modelo de Merton supone que el precio de la acción subyacenteS satisface

$$S = \text{mi}^{Y}, Y = X_1 + \sum_{\text{yo}=1}^{X_2} Z_i,$$

dóndeX_1esNORTE(μ,σ^2),X_2es Poisson con parámetroλ,$Z_i$esNORTE$(0,\nu^2)$, y X_1,X_2, $\{Z_i\}$son todos independientes. La evaluación de las opciones de compra involucra valores esperados tales como

$$E[(S - K)^+],$$

dóndekes una constante positiva. Calcule este valor esperado.

SSOLUCIÓN: Para cadanorte≥0, podemos calcular el valor esperado condicional

$$v_{\text{norte}} = E[(S - K)^+ | X_2 = \text{norte}].$$

En efecto, condicionado aX_2=n, yse distribuye normalmente comoNORTE$(\mu,\sigma^2+\text{norte}\,\nu^2)$, y por lo tantoSse distribuye lognormalmente con parámetrosμy$\sigma^2+\text{norte}\,\nu^2$. Del ejemplo 1.6 se deduce que

$$v_{\text{norte}} = \text{mi}^{\mu+\frac{1}{2}(\sigma^2+n\nu^2)}\Phi\left(\sqrt{\sigma^2+\text{norte}\,\nu^2}-\theta_{\text{norte}}\right) - K\Phi(-\theta_{\text{norte}}), \qquad \theta_{\text{norte}} = \frac{\text{Iniciar sesión}K - \mu}{\sqrt{\sigma^2+\text{norte}\,\nu^2}}.$$

Por el Teorema 1.12 o la propiedad de la torre de las expectativas condicionales,

$$E[(S - K)^+] = E[E[(S - K)^+ | X_2]] = \sum_{n=0}^{\infty} v_{\text{norte}} \text{PAGS}(X_2 = n) = \text{mi}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} v_{\text{norte}} \frac{\lambda^{\text{norte}}}{\text{norte}!}.$$

Esto se puede evaluar numéricamente. ■

1.7 Teoremas clásicos del límite

Dos de los teoremas del límite más importantes en la teoría de la probabilidad son la ley fuerte de los grandes números y el teorema del límite central. Tienen numerosas aplicaciones tanto en la teoría como en la práctica. En particular, proporcionan la base teórica para los esquemas de simulación de Monte Carlo.

Una prueba rigurosa de estos dos teoremas está más allá del alcance de este libro y se puede encontrar en varios libros de texto de probabilidad avanzada como [2, 5]. Simplemente enunciaremos los teoremas sin demostración. En lo que sigue, el acrónimo "iid" significa "distribuido idénticamente independiente".

Teorema 1.14. (Ley Fuerte de los Grandes Números).si x_1,X_2,· · ·son iid variables aleatorias con mediaμ, después

$$\text{PAGS}\left\{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{\text{norte}}}{\text{norte}}\to\mu=1.\right\}$$

Teorema 1.15. (Teorema del límite central).si x_1,X_2,· · ·son iid variables aleatorias con mediaμy varianzaσ^2, entonces la distribución de

$$\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{\text{norte}}-\text{norte}\mu}{\sigma\sqrt{\text{norte}}}$$

converge a la distribución normal estándar. Es decir, para cualquier a$\in$R,

$$\text{PAGS}\left\{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{\text{norte}}-\text{norte}\mu}{\sigma\sqrt{\text{norte}}}\le a\right\}\to\int_{-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{mi}^{-\frac{1}{2}X^2}dx$$

como n$\to\infty$.

Ejercicios

Problemas de lápiz y papel

1.1DejarAyBser dos eventos tales que$A\subseteq B$.Muestra esa$PAGS(A)\leq PAGS(B)$.

1.2DejarAyBser dos eventos arbitrarios. Muestra esa$PAGS(A\cup B)\leq PAGS(A) + PAGS(B)$.

1.3DejarXsea una variable aleatoria y seaaybser dos constantes arbitrarias. Muestra esa

$$E[aX + b] = aE[X] + b, Var[aX + b] = a^2 Var[X].$$

1.4DejarXSea una variable aleatoria que se distribuye uniformemente en (0, 1). Demostrar que para cualquier constanteun <b,

$$Y = a + (b - a)X$$

se distribuye uniformemente en (a, b).

1.5Demuestre que la función de densidad de la distribución lognormal $LogN(\mu,\sigma^2)$ es dado por

$$f(x) = \frac{1}{X\sigma\sqrt{2\pi}} mi^{-\frac{(\text{Iniciar sesión}x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad X > 0.$$

1.6Asumir queXtiene distribucion$NORTE(\mu,\sigma^2)$. Dejaraybser dos constantes arbitrarias y$Y = a + bX$.

(a) Encuentre la función de distribución acumulada deYen términos de Φ.

(b) Calcule la densidad deYy mostrar queYse distribuye normalmente con mediaa $+ b\mu$y varianza$b^2\sigma^2$.

1.7Asumir queXes una variable aleatoria normal estándar. por una arbitraria$\theta\in \mathbb{R}$,muestra esa$MI[Exp\{\theta X\}] = Exp\{\theta^2/2\}$.

1.8Asumir queXse distribuye normalmente con mediaμy varianzaσ^2. por una arbitraria$\theta\in\mathbb{R}$,determinar$MI[Exp\{\theta X\}]$.

1.9Suponer queXes una variable aleatoria lognormal con distribución $LogN(\mu,\sigma^2)$.

(a) Dada una constanteun >0, ¿cuál es la distribución de¿hacha?

(b) Dada una constante$\alpha\in\mathbb{R}$,cual es la distribucion deX^α?

1.10Suponer queSse distribuye lognormalmente como $LogN(\mu,\sigma^2)$. Calcular

(a)$E[(K - S)^+]$y$MI[máx\{S, K\}]$,dóndekes una constante positiva;

(b)$E[(S^\alpha - k)]^+$,dóndeαykse dan constantes positivas.

1.11Suponga que la distribución de probabilidad de incumplimiento conjunta de dos bonos A y B es la siguiente.

Bono B	Bono A	
	Defecto	Ningún valor predeterminado
Defecto	0.05	0.10
Ningún valor predeterminado	0.05	0.80

Distribución de probabilidad de incumplimiento conjunto

(a) ¿Cuál es la probabilidad de incumplimiento del bono A?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de incumplimiento del bono B?

(c) Dado que el bono A incumple, ¿cuál es la probabilidad de que el bono B incumpla?

(d) ¿Los incumplimientos del bono A y del bono B son independientes, están correlacionados positiva o negativamente?

1.12 Dejar S_1 y S_2 ser los precios de dos activos. Asumir que $X =$ Iniciar sesión S_1 y $Y =$ Iniciar sesión S_2 tienen una función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} mi^{-\frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2)}, \qquad \text{por } x, y \in r$$

(a) ¿Cuál es la distribución de ¿X?

(b) ¿Cuál es la distribución de ¿Y?

c) ¿Cuál es la distribución de X dado $Y = y$?

(d) Determinar $E[X|Y]$.

(e) Determinar $ES_1|S_2]$ y use la propiedad de la torre para calcular $ES_1S_2]$.

(f) Calcular Cov(S_1,S_2).

El vector aleatorio (X, Y) es un ejemplo de vectores aleatorios conjuntamente normales; véase el Apéndice A.

1.13 Dejar X sea una variable aleatoria normal estándar. Supongamos que dado $x = x$, y se distribuye normalmente como $N(x,1)$. Encontrar Cov(X, Y). Insinuación: Utilice la propiedad de la torre para calcular $E[Y]$ y $E[XY]$.

1.14 Asumir que X y Y son dos variables aleatorias independientes. Muestra esa

(a) si X es binomial con parámetros (norte, pag) y Y es binomial con parámetros (m, p), después $X + Y$ es binomial con parámetros $(m + n, p)$;

(b) si X es Poisson con parámetro λ y Y es Poisson con parámetro μ, después $X + Y$ es Poisson con parámetro $\lambda+\mu$;

(c) si X tiene función de distribución acumulativa F y Y tiene densidad gramo, entonces para cualquier $z \in R$

$$PAGS(X + Y \leq z) = \int_R F(z - y)g(y)\, dy;$$

(d) si$X$tiene densidad$F$yYtiene densidad$gramo$,entonces la densidad de$X + Y$es dado por elconvolución $f*gramo$,dónde

$$(F*g)(z) = \int_R f(z-y)g(y)\,dy = \int_R g(z-x)f(x)\,dx;$$

(e) si$X$se distribuye normalmente como$NORTE(0,\sigma_1^2)$ yYse distribuye normalmente como$NORTE(0,\sigma_2^2)$, después$X + Y$se distribuye normalmente como$NORTE(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$;

(f) si$X$es exponencial con tasaλyYes exponencial con tasaμ, luego $\min\{X, Y\}$es exponencial con tasa$\lambda+\mu$.

1.15Asumir que$X_1, \ldots, X_{norte}$son variables aleatorias independientes y que para cada yo, $x_i$es lognormal con distribución $LogN(\mu_i,\sigma_i^2)$.Encuentre la distribución de la variable aleatoria producto$X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_{norte}$.

1.16Denotamos por$X_i$el cambio del valor de una cartera ali-día Asumir que $\{X_i\}$son variables aleatorias normales independientes e idénticamente distribuidas con distribución$NORTE(\mu,\sigma^2)$. Determinar el valor en riesgo en el nivel de confianza $1-\alpha$ por la pérdida total durante unmetro-período del día.

1.17Suponer que$L$,la pérdida del valor de una cartera, se distribuye lognormalmente con parámetrosμyσ^2. Dada una constanteun >0, calcule la pérdida de cola esperada

$$E[L\,|\,L > a].$$

1.18El concepto demaximización de la utilidadjuega un papel importante en el estudio de la economía y las finanzas. La configuración básica es la siguiente. Dejar$X$ser el rendimiento de una inversión. La distribución de$X$varía según la estrategia de inversión empleada. El objetivo es maximizar la utilidad esperada MI[tu(X)] eligiendo juiciosamente una estrategia, para algunos dadosfunción de utilidadtu que a menudo se supone que es cóncava y creciente.

Considere el siguiente problema de maximización de la utilidad con la función de utilidadtu(x) =Iniciar sesiónX.Un inversor tiene un capital de $ 1 millón y puede optar por invertir cualquier parte de él. Suponer queyes la cantidad invertida. Entonces con probabilidadpagsla cantidad invertida se duplicará, y con probabilidad 1 −pags la cantidad invertida se perderá. Dejar$X$ser la riqueza total al final. Asumiendopag >0.5, determine el valor deyque maximiza la utilidad esperada

MI[Iniciar sesiónX].

1.19Asumir que$X_1, \ldots, X_{norte}$son iid variables aleatorias con mediaμy varianza σ^2. Definir

$$\bar{X} = \frac{1}{norte}\sum_{yo=1}^{norte} X_i, \quad S^2 = \frac{1}{norte-1}\sum_{yo=1}^{norte}(X_i - \bar{X})^2.$$

Muestra esa$E[\bar{X}] = \mu$y$E[S^2] = \sigma^2$. $\bar{X}$ yS^2son estimaciones de muestra estándar paraμyσ^2, respectivamente.

1.20Asumir que $(X_1,Y_1), \ldots, (X_{norte}, Y_{norte})$son vectores aleatorios iid. Definir

$$R = \frac{1}{norte - 1} \sum_{yo=1}^{norte} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}), \qquad \bar{X} = \frac{1}{norte} \sum_{yo=1}^{norte} X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{norte} \sum_{yo=1}^{norte} Y_i.$$

Muestra esa$E[R] =$cov(X_i, Y_i)para cada$i$.

1.21Dejar$X_1, \ldots, X_{norte}$ser iid variables aleatorias con densidad común$F_\theta(X)$,dónde θes un parámetro desconocido. La densidad conjunta de $(X_1, \ldots, X_{norte})$es

$$\prod_{yo=1}^{norte} F_\theta(X_i).$$

losestimación de máxima verosimilituddеθse define como

$$\hat{\theta} = \arg\max_\theta \prod_{yo=1}^{norte} F_\theta(X_i).$$

Asumir que$X_1, \ldots, X_{norte}$son iid variables aleatorias normales con distribución NORTE(μ, σ^2). Muestre que la estimación de máxima verosimilitud de$\theta = (\mu, \sigma^2)$ es dado por

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{1}{norte} \sum_{yo=1}^{norte} X_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{norte} \sum_{yo=1}^{norte} (X_i - \bar{X})^2.$$

1.22Silver Wheaton (SLW) es una empresa minera que genera sus ingresos principalmente de las ventas de plata. iShares Silver Trust (SLV) es un fideicomiso de otorgante que proporciona un vehículo para que los inversores adquieran intereses en plata. La siguiente tabla contiene los precios de las acciones de SLW y SLV desde el 24 de octubre de 2011 hasta el 4 de noviembre de 2011.

Díai	1	2	3	4	5
SLW$_i$	31,24	32,21	33,40	34,46	35,97
SLV$_i$	30,86	32,42	32,50	32,92	34,27 6789
Díai					10
SLW$_i$	34,60	34,07	34,91	36,05	36,09
SLV$_i$	33,44	32,33	32,23	33,61	33,17

Precios de las acciones de SLW y SLV

DefinirX_i = registro (SLW$_{yo+1}$/SLW$_i$)yY_i=registro (SLV$_{yo+1}$/SLV$_i$)por$i$ = 1, . . . , 9. Suponga que (X_i, Y_i)son vectores aleatorios iid. Use los resultados del Ejercicio 1.19 y el Ejercicio 1.20 para estimar el coeficiente de correlación entre Xyy

1.23Una función$f : R \to R$se ha dichoconvexosi por alguna$\lambda \in [0, 1]$ y$X_1, X_2 \in R$,

$$f(\lambda X_1 + (1 - \lambda)X_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

DejarXsea una variable aleatoria arbitraria conμ=EX].Asumir queFes diferenciable enx =μ. Demuestra que para cualquierX

$$f(x) \geq f(\mu) + F'(\mu)(x - \mu),$$

y por lo tanto

$$E[f(X)] \geq f(E[X]).$$

Esta desigualdad se llamaLa desigualdad de Jensen.

MATLAB© RProblemas

Los tres mandamientos, “normcdf”, “norminv”,y "norma”,son funciones de MATLAB relevantes para las distribuciones normales. Para obtener la descripción detallada de, digamos, “norminv”, puede usar el comando MATLAB “ayudar a normalizar.”

“normcdf(x)”:devolver Φ(X).

“norminv(α)”: devuelve el valor deXtal que $\Phi(x) = \alpha$.

"normando":generar muestras a partir de distribuciones normales.

1.ACalcule el valor en riesgo del ejercicio 1.16 paraμ=0.1,σ= 1,metro =10, y α= 0.01.

1.BCalcule la pérdida de cola esperada en el ejercicio 1.17 paraμ=0,σ= 1, yun =2.

1.CGenere 10 muestras de cada una de las siguientes distribuciones.

(a) La distribución normal estándar.

(b) La distribución lognormal con parámetrosμ=1 yσ^2= 4.

(c) La distribución binomial con parámetros (20, 0.5). Usar "Binornd”.

(d) La distribución uniforme en (5, 7). Usar "rand”.

(e) La distribución de Poisson con parámetro 1. Utilice “poissrnd”.

(f) La distribución exponencial con tasa 2. Utilice “expandir”.

1.DUsa el comando “gráfico"para trazar las funciones de densidad de las distribuciones exponenciales con tasaλ= 1,λ= 0.5, yλ= 2, respectivamente. Use un tipo de línea diferente para cada curva de densidad y use el comando "leyenda"para colocar una leyenda en la imagen, similar a la Figura 1.1.

1.ESuponer queXes una variable aleatoria normal estándar y dadax = x, yse distribuye normalmente con mediaXy varianza uno. Genere 1000 muestras a partir de la distribución conjunta de (X, Y)y usa el comando “dispersión"para trazar sus muestras. SonXyYcorrelacionado positivamente o correlacionado negativamente? Véase también el Ejercicio 1.13.

1.FRepita el ejercicio 1.E excepto que, dadox = x, yse distribuye normalmente con media -Xy varianza uno. Al observar la gráfica de las muestras, ¿espera XyYestar relacionada positiva o negativamente? Verifique su respuesta calculando el valor teórico del coeficiente de correlación entreX yy

Capitulo 2

Movimiento browniano

El movimiento browniano fue descubierto en 1827 por el botánico inglés Robert Brown cuando estudiaba el movimiento de los granos de polen microscópicos suspendidos en una gota de agua. El fundamento matemático riguroso del movimiento browniano fue establecido por Norbert Wiener alrededor de 1923. Por esta razón, el movimiento browniano también se denomina proceso de Wiener. En finanzas matemáticas, el movimiento browniano se ha utilizado ampliamente en el modelado de precios de valores. La célebre fórmula de fijación de precios de opciones de Black-Scholes se derivó del supuesto de que el precio de las acciones subyacentes es un movimiento browniano geométrico.

El propósito de este capítulo es presentar el movimiento browniano y sus propiedades básicas. Sugerimos que el lector revise el Apéndice A antes de leer este capítulo, ya que las distribuciones normales multivariadas son indispensables para el estudio del movimiento browniano.

2.1 Movimiento browniano

Un proceso estocástico de tiempo continuo$W = \{W_t: t\geq 0\}$ es una colección de variables aleatorias indexadas por "tiempo"t.Por cada fijo$\omega\in\Omega$,el mapeo $t7\to W_t(\omega)$se llama unruta de muestraDecimosWes unmovimiento browniano estándar si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Cada ruta de muestra del procesoWes continuo

2.$W_0= 0$.

3. El proceso tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier secuencia

$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{norte}$, los incrementos

$$W_{t_1} - W_{t_0}, \quad W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, \quad W_{t_{norte}} - W_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

4. Para cualquier$s \geq 0$ y$t > 0$, el incremento$W_{m+t} - W_s$se distribuye normalmente con media 0 y varianza$t$.

Es inmediato de la definición que$W_t = W_t - W_0$se distribuye normalmente con media 0 y varianza$t$.

La figura 2.1 muestra algunas rutas de muestra representativas de un movimiento browniano estándar. Todos exhiben un cierto tipo de robustez. En realidad, se puede demostrar que con probabilidad uno, las trayectorias de las muestras de movimiento browniano no son diferenciables ni monótonas en ninguna parte [18].

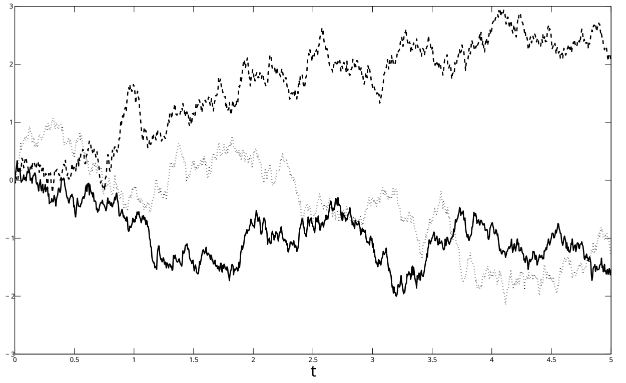


Figura 2.1: Ejemplos de trayectorias de movimiento browniano.

El siguiente lema se deriva directamente de la definición de movimiento browniano. Dejamos la demostración al lector.

Lema 2.1.Supongamos que $W = \{W_t : t \geq 0\}$es un movimiento browniano estándar. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

1. (Simetría) El proceso $-W = \{-W_t : t \geq 0\}$es un movimiento browniano estándar.

2. Arregle un s arbitrario > 0y definir $B_t = W_{t+t} - W_s$para $t \geq 0$.Entonces $B = \{B_t : t \geq 0\}$es un movimiento browniano estándar.

2.2 Máximo corriente del movimiento browniano

losfuncionamiento máximode un movimiento browniano estándarWA tiempotse define como

$$METRO_t = \underset{0\leq s\leq t}{máximo} W_s.$$

Es posible derivar analíticamente la distribución de$METRO_t$, así como la distribución conjunta de (W_t,$METRO_t$), a través de los llamadosprincipio de reflexióndel movimiento browniano.

Para ilustrar, considere un nivel fijosegundo >0 y definir el primer tiempo de paso del movimiento browniano al nivelb:

$$T_b = \inf\{t \geq 0 : W_t = b\}.$$

Tenga en cuenta que$T_b$es aleatorio y

$$PAGS(METRO_t \geq b) = PAGS(T_b \leq t).$$

El principio de reflexión afirma que

$$PAGS(W_t \leq segundo \mid T_b \leq t) = PAGS(W_t \geq segundo \mid T_b \leq t) = \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

La intuición es la siguiente. El lema 2.1(2) básicamente establece que un browniano

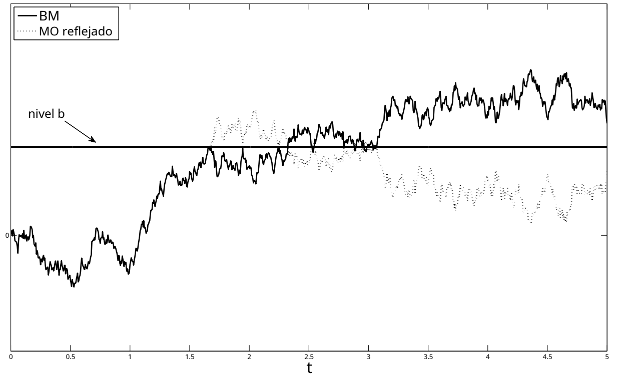


Figura 2.2: Movimiento browniano reflejado.

el movimiento comienza de nuevo en cualquier momento deterministas.Con un acto de fe, suponga que también comienza de nuevo en el momento aleatorioT_b. Por lo tanto, dado$T_b \leq yo$, por la simetría del movimiento browniano, para cada camino que llega a un punto arribaben el momentothay un camino "reflejado" que llega a un punto debajob en el momentot;vea el camino sólido y su reflejo, que está representado por el camino punteado, en la Figura 2.2. Ya que $\{W_t \geq b\} \subseteq \{T_b \leq t\}$,resulta que

$$PAGS(W_t \geq segundo \mid T_b \leq t) = \frac{PAGS(W_t \geq b,\ t_b \leq t)}{PAGS(T_b \leq t)} = \frac{PAGS(W_t \geq b)}{PAGS(T_b \leq t)}.$$

Por tanto, por (2.1)

$$PM_t \geq b) = PAGS(T_b \leq t) = 2PAGS(W_t \geq b) = 2\Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{t}}\right).$$

Tomar derivados con respecto aben ambos lados, llegamos a la densidad de$METRO_t$:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{2\pi t}}\, mi^{-\frac{1}{2t}X^2} \tag{2.2}$$

por$X \geq 0$.

En cuanto a la función de densidad conjunta de $(W_t, METRO_t)$, fijar arbitrariamente$a \leq b$y segundo >0. Análogamente a (2.1), tenemos

$$PAGS(W_t \leq un \mid T_b \leq t) = PAGS(W_t \geq 2segundo - un \mid T_b \leq t).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} PAGS(W_t \leq soy_t \geq b) &= PAGS(W_t \leq a_b \leq t)\ PAGS(W_t \geq 2 \\ &= segundo - un,\ T_b \leq t) \\ &= PAGS(W_t \geq 2b-a) \\ &= \Phi\left(-\frac{2segundo - un}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Tomar derivadosayben ambos lados, se deduce que la función de densidad conjunta de $(W_t, METRO_t)$es

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{2(2y-x)}{2\pi t^3}}\, mi^{-\frac{1}{2t}(2y-x)^2} \tag{2.3}$$

por$X \leq y$y$y \geq 0$.

Observación 2.1.La afirmación de que un movimiento browniano comienza de nuevo en el primer tiempo de paso$T_b$es consecuencia de lafuerte propiedad de Markov.La prueba es avanzada y bastante técnica; ver [18].

2.3 Derivados y precios de Black-Scholes

Los derivados financieros, como las opciones, derivan sus valores de los activos subyacentes. Por ejemplo, una opción de compra sobre una acción prescrita con precio de ejercicio ky madurezTconcede al tenedor de la opción el derecho a comprar la acción al precioken el momentotDenotamos por$S_t$el precio de las acciones en el momentot.Si al vencimiento el precio de la acción$S_T$está arribak,el tenedor puede ejercer la opción, es decir, comprar la acción al precioky venderlo inmediatamente al precio de mercadoS_T, para obtener una ganancia de$S_T - k$Si el precio de las acciones$S_T$está en o por debajok, entonces la opción caduca sin valor. En otras palabras, el pago de esta opción de compra en el momentoTes

$$(S_T - k)^+.$$

En general, un derivado financiero paga una cantidad aleatoriaXen una fecha de vencimiento dadatLa forma del pagoXpuede ser muy simple y solo depende del precio del activo subyacente en el momentoTcomo las opciones de compra, o puede ser muy complicado y depender de todo el historial del precio del activo hasta el momentotLa pregunta más fundamental en la teoría de los derivados financieros es sobre la evaluación: ¿cuál es el precio justo de un derivado con pago?Xy madurezT?

Para responder a la pregunta, necesitamos un modelo para el precio del activo subyacente. El modelo clásico de Black-Scholes asume que el precio del activo es un movimiento browniano geométrico,eso es,

$$S_t = S_0 \operatorname{Exp}\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\}, \tag{2.4}$$

dónde$W = \{W_t : t \geq 0\}$ es un movimiento browniano estándar, yS_0es el precio inicial o actual del activo. El par de parámetrosμy$\sigma > 0$ se dice que es elderivay volatilidad,respectivamente. A diferencia de un movimiento browniano, un movimiento browniano geométrico siempre es positivo. Además, por cada $t > 0$,$S_t$tiene distribución lognormal con distribución

$$\text{RegistroN}(\text{registro}S_0 + (\mu - \sigma^2/2)\text{yo}, \sigma^2 t).$$

Muchos problemas de fijación de precios admiten soluciones explícitas cuando el precio del activo subyacente se modela mediante un movimiento browniano geométrico.

En esta sección, evaluamos una serie de derivados financieros, asumiendo que el precio del activo subyacente es el movimiento browniano geométrico (2.4) con deriva

$$\mu = r, \tag{2.5}$$

dónderdenota eltipo de interés libre de riesgo.A lo largo del libro, siempre se supone que la tasa de interés se capitaliza continuamente. En la práctica, la tasa de interés libre de riesgo suele tomarse como el rendimiento de un bono cupón cero con un vencimiento similar.

El precio o el valor de un derivado financiero con pagoXy madurezTes dado por

$$v = E[e^{-rT}X]. \tag{2.6}$$

Por lo tanto, fijar el precio de un derivado financiero equivale a calcular un valor esperado. No es difícil entender el factor de descuento.mi^{-rT}en la fórmula de fijación de precios (2.6), ya que un dólar a la vezTvale la penami^{-rT}dólares en el tiempo 0. La verdadera pregunta es por quéequipararla deriva del precio del activo subyacente con la tasa de interés libre de riesgoR.De hecho, esto se deriva del principio libre de arbitraje, que es el tema del próximo capítulo. Por el momento, asumimos que la condición (2.5) y la fórmula de valoración (2.6) son válidas y las usamos para evaluar algunos derivados. Repetimos que, a menos que se especifique lo contrario, se supone que el precio del activo subyacente es un movimiento browniano geométrico con derivary volatilidadσ.

Ejemplo 2.1. (La fórmula de Black-Scholes).Una opción de compra con precio de ejercicio k y madurezTtiene recompensa $(S_T - k)^+$en el momentotCotice esta opción.

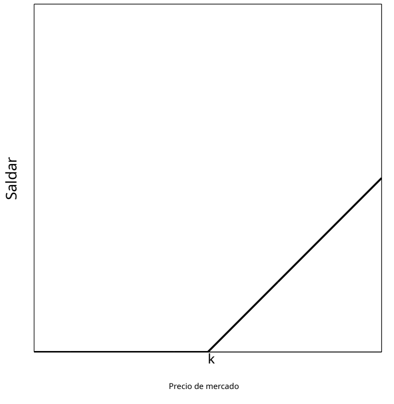


Figura 2.3: Pago de la opción de compra con precio de ejerciciok

SSOLUCIÓN: Gracias a la ecuación (2.6), el precio de la opción de compra viene dado por

$$v = E[e^{-rT}(S_T - k)^+].$$

Ya que$S_T$se distribuye logarítmicamente como LogN(logS_0+ (r -σ^2/2)T,σ^2T),del ejemplo 1.6 se sigue que

$$v = S_0\Phi(\sigma\sqrt{T} - \theta) - ke^{-rT}\Phi(-\theta),$$

dónde

$$\theta = \sqrt{\frac{1}{\sigma T}} \text{ Iniciar sesión } \frac{k}{S_0} + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{t}$$

El precio de la opción de compra se derivó por primera vez en el artículo seminal de Fischer Black y Myron Scholes [3]. Para futuras referencias, denotaremos el precio de la opción de compravpor

Llamada SVB(S_0,k, t, r,σ).

A veces simplemente usamos "BLS_Call" cuando no hay confusión sobre los parámetros. ■

Ejemplo 2.2.Una opción de venta con precio de ejercicioky madurezTotorga al tenedor de la opción el derecho a vender las acciones al precioken la madurezt Su pago es $(K - S_T)^+$. Determinar su precio.

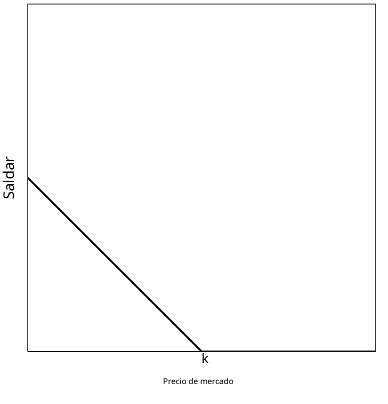


Figura 2.4: Pago de opción de venta con precio de ejerciciok

SSOLUCIÓN: De manera análoga al Ejemplo 2.1, deberíamos denotar el precio de la opción de venta por

Poner BLS(S_0,k, t, r,σ),

o simplemente “BLS Put” cuando no hay confusión sobre los parámetros. Observa eso

$$(S_T - k)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - k$$

Por tanto, gracias a (2.6) y al Ejercicio 2.9, llegamos a laparidad put-call, a saber,

$$\text{Compra BLS} - \text{Venta BLS} = E[e^{-rT}(S_T - K)] = S_0 - mi^{-rT}k$$

Resulta que

$$\text{Poner BLS} = mi^{-rT}K\Phi(\theta) - S_0\Phi(\theta - \sigma\sqrt{T}),$$

dóndeθes como se define en el Ejemplo 2.1. ■

Ejemplo 2.3.Una opción de compra binaria con vencimientoTpaga un dólar cuando el precio de las acciones en el momentoTestá en o por encima de cierto nivelky no paga nada de lo contrario. El pago se puede escribir en forma de una función indicadora:

$$X = 1_{\{S_T \geq K\}}.$$

Calcule el precio de esta opción.

SSOLUCIÓN: Es trivial que$E[X] = PAGS(S_T \geq K)$.Por lo tanto, el precio de la opción es

$$v = mi^{-rT}PAGS(S_T \geq K).$$

Desde registro$S_T$se distribuye normalmente con media logaritmo$S_0 + (r - \sigma^2/2)T$y varianza$\sigma^2 T$,resulta que

$$v = mi^{-rT}PAGS(\text{Iniciar sesión}S_T \geq \text{Iniciar sesión}K) = mi^{-rT}\Phi\left(-\frac{\text{Iniciar sesión}(K/S_0) - (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$ ■

Ejemplo 2.4.El comprador de unfuturocontrato está obligado a comprar el activo subyacente a un precio determinadopagsen un tiempo futuro especificadotA diferencia de las opciones, al celebrar el contrato, el comprador no necesita pagar ninguna prima. Sin embargo, en el momentoTel contrato debe ser honrado. Por lo tanto, el pago al comprador en el momentoTes

$$X = S_T - \text{pág}.$$

El precio futuropagsse elige de modo que el valor del contrato en la actualidad sea cero. ¿Cuál debe ser el valor de¿pags?

SSOLUCIÓN: El valor del contrato para el comprador en la actualidad es

$$E[e^{-rT}X] = E[e^{-rT}S_T] - mi^{-rT}pag = S_0 - mi^{-rT}pags.$$

Por lo tanto, para que el contrato tenga valor cero se debe tener

$$pag = mi^{RT}S_0.$$

Claramente, con esta elección de pag s el valor del contrato también es cero para el vendedor del contrato. ■

Ejemplo 2.5. Una opción asiática es una opción dependiente de la trayectoria cuyo pago depende del promedio del precio de las acciones subyacentes durante la vida de la opción. Considere una opción de compra de precio promedio monitoreada discretamente con pago

$$X = (\bar{S} - K)^+$$

en la madurez T, donde $\bar{S}$ es el promedio geométrico del precio de las acciones definido por

$$\bar{S} = \left(\prod_{yo=1}^{metro} S_{t_i} \right)^{1/metro}$$

para un conjunto dado de fechas de seguimiento $0 \leq t_1 < \cdots < t_{metro} \leq t$ Calcula el precio de esta opción.

SSOLUCIÓN: No es difícil ver que $\bar{S}$ tiene una distribución lognormal. Por cierto,

$$\text{registro } \bar{S} = \frac{1}{metro} \sum_{yo=1}^{metro} \text{Iniciar sesión } S_{t_i} = \text{Iniciar sesión} S_0 + \frac{1}{metro} \sum_{yo=1}^{metro} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i + \sigma W_{t_i} \right]$$

es una transformada lineal del vector aleatorio conjuntamente normal $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_{metro}})$ y por lo tanto normal en sí mismo (ver Apéndice A y Ejercicio 2.6). La media y la varianza de log $\bar{S}$ son

$$\bar{\mu} = \text{Iniciar sesión} S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \bar{t}, \text{ donde } \bar{t} = \frac{1}{metro} \sum_{yo=1}^{metro} t_i ,$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 &= \text{Var}\left(\frac{1}{metro} \sum_{yo=1}^{metro} \sigma W_{t_i} \right) \\
&= \frac{\sigma^2}{metro^2} \left[\sum_{yo=1}^{metro} \text{Var}(W_{t_i}) + 2 \sum_{yo<j} \text{cov}(W_{t_i}, W_{t_j}) \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{metro^2} \left[\sum_{yo=1}^{metro} t_i + 2 \sum_{yo<j} t_i \right] \\
&= \frac{\sigma^2}{metro^2} \sum_{yo=1}^{metro} (2m - 2yo + 1) t_i .
\end{aligned}$$

Por tanto, el precio de esta opción asiática es, gracias al Ejemplo 1.6,

$$v = E[e^{-rT}X] = mi^{-rT}\left[mi^{\bar{\mu}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2}\Phi(\bar{\sigma}-\theta) - K\Phi(-\theta)\right]$$

con $\theta = (\text{registro}K - \bar{\mu})/\bar{\sigma}$. ■

El siguiente ejemplo trata sobre el precio de una opción de compra retrospectiva. El cálculo se basa en el Lema 2.2, que es una versión preliminar del Teorema de Girsanov [18]. Tenga en cuenta que decimos que una función esDependiente del caminosi depende de las rutas de muestra del proceso relevante. Por ejemplo, si definimos

$$h(\text{ancho}_{[0,T]}) = \text{máximo}_{0\le t\le T} W_t - \min_{0\le t\le T} W_t - W_T,$$

despuéshes una función dependiente de la ruta y su valor depende de la ruta completa de la muestra$W_{[0,T]} = \{W_t : 0 \le t \le T\}$.

Lema 2.2.Dada una constante arbitrariaθ, sea $B = \{B_t : t \ge 0\}$sea un movimiento browniano con derivaθ. Eso es,

$$B_t = W_t + \theta t, \quad t \ge 0,$$

donde $W = \{W_t : t \ge 0\}$es un movimiento browniano estándar. Entonces para cualquier $T > 0$ y la función dependiente de la trayectoria h,

$$\text{E}\left[h(B_{[0,T]})\right] = mi\left[mi^{\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T} h(\text{ancho}_{[0,T]})\right].$$

PAGSTECHO. Ya que$W_T$se distribuye normalmente como$NORTE(0,T)$,de la propiedad de la torre se deduce que el lado derecho es igual a

$$\begin{aligned}
\text{lado derecho} &= \int_{R} mi\left[mi^{\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T} h(\text{ancho}_{[0,T]}) \,\middle|\, W_T = x\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} mi^{-\frac{1}{2T}x^2} dx \\
&= \int_{R} mi\left[h(\text{ancho}_{[0,T]}) \,\middle|\, W_T = x\right] \cdot f(x)\, dx, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

dónde

$$f(x) = mi^{\theta x - \frac{1}{2}\theta^2 T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} mi^{-\frac{1}{2T}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} mi^{-\frac{1}{2T}(x-\theta T)^2}.$$

Por otro lado, el Ejercicio 2.12 muestra que la distribución condicional de $\{B_t : 0 \le t \le T\}$dado$B_T = x$es el mismo que el de $\{W_t : 0 \le t \le T\}$dado $W_T = x$.Por lo tanto,

$$E\left[h(W_{[0,T]}) \,\middle|\, W_T = x\right] = mi\left[\text{media pensión}_{[0,T]}) \,\middle|\, B_T = x\right].$$

Ya que $f(x)$ es de hecho la densidad de B_T, la propiedad de la torre implica que la integral en (2.7) es igual

$$E\Big[E\big[h(B_{[0,T]})\,\big|\,B_T\big]\Big] = \text{mi}\big[\text{media pensión}_{[0,T]})\big].$$

Esto completa la prueba. ■

Ejemplo 2.6. Una opción de compra retrospectiva con precio de ejercicio fijo k y madurez T es una opción dependiente de la trayectoria, cuyo pago es

$$X = \Big(\text{máximo}_{0\le t\le T} S_t - k\Big)^+.$$

Asumiendo $K > S_0$, ¿cuál es el valor de esta opción en el tiempo cero?

SSOLUCIÓN: El valor de la opción es $v = E[e^{-rT}X]$. Para calcular este valor esperado, defina

$$B_t = W_t + \theta \text{yo}, \qquad \theta = \Big(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\Big) t.$$

Después,

$$X = \Big(\text{máximo}_{0\le t\le T} S_t - k\Big)^+ = \Big(S_0 \text{Exp}\Big\{\sigma \cdot \text{máximo}_{0\le t\le T} B_t\Big\} - k\Big)^+.$$

Por el Lema 2.2,

$$E[X] = E\Big[e^{\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}\Big(S_0 \text{mi}^{\sigma \text{METRO}_T} - k\Big)^+\Big], \qquad \text{METRO}_T = \text{máximo}_{0\le t\le T} W_t.$$

Resulta que

$$E[X] = \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \text{mi}^{\theta x - \frac{1}{2}\theta^2 T}(S_0 \text{mi}^{\sigma y} - k)^+ \cdot f(x, y)\, dx dy,$$

dónde $f(x, y)$ es la densidad conjunta de (W_T, METRO_T) dada por (2.3) con $t = T$. La evaluación de esta integral doble es bastante sencilla pero tediosa. Solo indicaremos el resultado y dejaremos los detalles al lector (el ejercicio 2.13 puede resultar útil para este esfuerzo):

$$\begin{aligned} v = {} & \text{Llamada SVB}(S_0, k, t, r, \sigma) \\ & + \frac{\sigma^2}{2r} S_0 \Big[\Phi(\theta_+) - \text{mi}^{-rT}\Big(\frac{k}{S_0}\Big)^{2r/\sigma^2}\Phi(\theta_-)\Big], \end{aligned}$$

dónde

$$\theta_\pm = \sqrt{\ } \frac{1}{\text{Iniciar}\ \sigma\text{conocimientos tradicionales}} \text{sesión} \frac{S}{\theta} + \left(\frac{\sigma}{2} \pm \frac{r}{\sigma}\right)\sqrt{t}$$

El lema 2.2 también se puede utilizar para evaluar otras opciones similares dependientes de la ruta, como las opciones retrospectivas con precio de ejercicio flotante y las opciones de barrera. Ver Ejercicio 2.14. ■

Ejemplo 2.7.Considere dos acciones cuyos precios están modelados por movimientos brownianos geométricos:

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \operatorname{Exp}\left\{\left(r - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) t + \sigma_1 W_t\right\}, \\ V_t &= V_0 \operatorname{Exp}\left\{\left(r - \frac{\sigma_2^2}{2}\right) t + \sigma_2 B_t\right\}. \end{aligned}$$

Por simplicidad, supongamos que$W$yBson dos movimientos brownianos estándar independientes. El pago de una opción de intercambio al vencimiento$T$es

$$(S_T - V_T)^+.$$

Calcule el precio de esta opción.

SSOLUCIÓN: El precio de esta opción es

$$v = E[e^{-rT}(S_T - V_T)^+] = mi^{-rT}\left[V_T\left(\frac{S_T}{V_T} - 1\right)\right]^+.$$

El cálculo directo produce que

$$\begin{aligned} mi^{-rT}V_T &= V_0 \operatorname{Exp}\left\{-\frac{\sigma_2^2}{2}T + \sigma_2 B_T\right\}, \\ \frac{S_T}{V_T} &= \frac{S_0}{V_0}\operatorname{Exp}\left\{\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2}T - \sigma_2 B_T + \sigma_1 W_T\right\}. \end{aligned}$$

Ya queW_Ty$B_T$son independientes$NORTE(0,T)$variables aleatorias, su función de densidad conjunta es igual

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2T}\right\}.$$

Por lo tanto, se puede expresarven términos de una integral con respecto a la densidadFy obtener

$$v = V_0 \iint_{R^2} \left[\frac{S_0}{V_0} \mathrm{Exp}\left\{ \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} T - \sigma_2 y + \sigma_1 X \right\} - 1 \right]^+ g(x, y)\, dxdy,$$

dónde

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y)\mathrm{Exp}\left\{ -\frac{\sigma_2^2}{2} T + \sigma_2 y \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \mathrm{Exp}\left\{ -\frac{X^2}{2T} \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \mathrm{Exp}\left\{ -\frac{(y - \sigma_2 T)^2}{2T} \right\}. \end{aligned}$$

Es interesante observar queg(x, y)en sí mismo es elfunción de densidad conjuntade dos variables aleatorias normales independientes, digamosXyY,dóndeXesNORTE(0,T) yYes NORTE(σ_2T, T).Por lo tanto, el preciovSe puede escribir como

$$\begin{aligned} v &= V_0 mi \left[\left(\frac{S_0}{V_0} \mathrm{Exp}\left\{ \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{2} T - \sigma_2 Y + \sigma_1 X - 1 \right\} \right)^+ \right] \\ &= V_0 mi \left[(tu - 1)^+ \right], \end{aligned}$$

dónde*tu*representa una variable aleatoria lognormal con distribución

$$\text{Iniciar sesión} \quad \text{Iniciar sesión} \left(\frac{S_0}{V_0} - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{2} T, \sigma_2^2 T + \sigma_1^2 T \right).$$

Alquiler$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, del ejemplo 1.6 se sigue que

$$v = S_0 \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \text{Iniciar sesión} \frac{S_0}{V_0} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right) - V_0 \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \text{Iniciar sesión} \frac{S_0}{V_0} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} \right).$$

El truco en este cálculo es el valor de la opción en términos del precio de las acciones.V_T.Esta técnica se llamacambio de numerario.Es muy útil en la evaluación de precios de opciones. ■

2.4 Movimientos brownianos multidimensionales

A los efectos de futuras referencias, damos la definición de un movimiento browniano multidimensional.

Considere un proceso de tiempo continuosegundo = {segundo$_t$: t≥0} dondeB$_t$es un d-vector aleatorio dimensional para cadat.Sea Σ = [Σ$_{yo}$]ser und×dmatriz definida positiva simétrica. El procesoBse dice que es unMovimiento browniano d-dimensional con matriz de covarianza Σsi se cumplen las siguientes condiciones:

1. Cada ruta de muestra del procesoBes continuo

2. B$_0$= 0.

3. El proceso tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier secuencia $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{norte}$, los incrementos

$$B_{t_1} - \text{segundo}_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_{norte}} - \text{segundo}_{t_{n-1}}$$

son vectores aleatorios independientes.

4. Para cualquiers≥0 yt >0, el incrementoB$_{m+t}$− segundo$_s$es un vector aleatorio conjuntamente normal con media 0 y matriz de covarianzatΣ.

De la definición se sigue inmediatamente queB$_t$es und-vector aleatorio dimensional conjuntamente normal con distribuciónNORTE(0,tΣ).

Cuando Σ =yo$_d$, decimosBes unMovimiento browniano estándar d-dimensional. En este caso, cada componente deBes un movimiento browniano estándar unidimensional en sí mismo, y todos estos componentes son independientes. Tenga en cuenta que, en general, los componentes de und-El movimiento browniano dimensional puede no ser independiente. Dos componentes, digamos eli-el componente y elj-th componente, son independientes si y solo si Σ$_{yo}$=0.

Ejercicios

Problemas de lápiz y papel

2.1Asumir que$X = (X_1, \ldots, X_d)'$es und-vector aleatorio normal dimensional con distribución$N(0, \Sigma)$. Dejar$A$Sea una matriz invertible tal que

$$AA' = \Sigma.$$

Encuentre la distribución de$Y = A^{-1}X$.

2.2Suponga que una cartera consta de dos activos y el cambio del valor de la cartera, denotado por$X$,Se puede escribir como

$$X = \beta X_1 + (1 - \beta)X_2,$$

dónde$X_i$denota el cambio de valor de la$i$-th activo y $0 \leq \beta \leq 1$. Suponga que (X_1, X_2) es un vector aleatorio conjuntamente normal con distribución

$$N\left(\begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right).$$

(a) Encuentre la distribución de$X$.

(b) ¿Cuál es el valor en riesgo en el nivel de confianza $1 - \alpha$por la pérdida total de la cartera?

(c) ¿Por qué valor deβ¿Se minimizará el valor en riesgo?

2.3Suponga que una cartera consta de dos activos y el valor total de la cartera es

$$Y = \beta S_1 + (1 - \beta)S_2,$$

dóndeβes el parámetro de asignación y $0 \leq \beta \leq 1$. Suponga que

$$S_1 = e^{X_1}, S_2 = e^{X_2},$$

dónde (X_1, X_2) es un vector aleatorio conjuntamente normal con distribución

$$N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}\right).$$

(a) Calcule $\mathrm{Var}[S_1]$ y $\mathrm{Var}[S_2]$.

(b) Determine la asignación óptimaβque minimiza $\mathrm{Var}[Y]$.

2.4El movimiento browniano puede considerarse como el límite de caminatas aleatorias simples. Considere una secuencia de variable aleatoria iid $\{X_i\}$tal que

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{2} = P(X_i = -1).$$

Arreglar un arbitrarionorte.Dejart$_{metro}$= m/npormetro =0, 1, . . . y definir un proceso estocástico de tiempo discretoW(norte)= {W(norte)$_{t_{metro}}$:metro =0, 1, . . .} dónde

$$W^{(norte)}_{t_{metro}} = \frac{1}{\sqrt{norte}} \sum_{yo=1}^{metro} X_i.$$

Muestra esaW(norte)tiene incrementos independientes y estacionarios, es decir, los incrementos

$$W^{(norte)}_{t_1} - W^{(norte)}_{t_0}, \cdots, W^{(norte)}_{t_{metro}} - W^{(norte)}_{t_{m-1}}, \cdots$$

son iid. Asumir quet_{metro}→t + hyt_k→tcomonorte→∞.Utilice el teorema del límite central para determinar la distribución límite de

$$W^{(norte)}_{t_{metro}} - W^{(norte)}_{t_k}$$

comonorte→∞.Explique intuitivamente queW(norte)converge a un movimiento browniano estándar.

2.5Suponer queWes un movimiento browniano estándar. Dada una constante arbitraria un >0, muestra quesegundo = {segundo$_t$: t≥0}, donde

$$B_t = \frac{1}{\sqrt{a}} W_{a}$$

es también un movimiento browniano estándar.

2.6Suponer queWes un movimiento browniano estándar. Demuestre que se cumplen los siguientes enunciados.

(a) La distribución condicional de$W_t$dadoW_s= xesN(x, t − s)para cualquier 0≤s < t.

(b) Para 0 <s < t,la distribución condicional de$W_s$dadoW_t= xes N(xs/t, s(t − s)/t).

(c) La covarianza deW_sy$W_t$ess∧t =min{calle}para cualquiercalle≥0.

(d) Para cualquier 0 <t_1<t_2<· · · <t_{norte}, el vector aleatorio (W_{t_1}, . . . ,$W_{t_{norte}}$)′es conjuntamente normal con distribuciónNORTE(0, Σ), donde Σ = [σ_{yo}]es un norte×norte matriz conσ_{yo}= t_i∧t_j.

(e) Para cualquiert≥0 yθ∈R,MI[Exp{θW_t}] =Exp{$\theta^2 t/2$}.

2.7DejarWsea un movimiento browniano estándar. Dado cualquier 0 =t_0<t_1<· · · <t_{metro} y constantesa_1,a_2, . . . ,a_{metro}, fiy las distribuciones de$\sum_{yo=1}^{metro} a_i(W_{t_i} - W_{t_{yo-1}})$y $\sum_{yo=1}^{metro} a_i W_{t_i}$.

2.8 DejarWsea un movimiento browniano estándar. Para cualquiert >0, determine la densidad del funcionamiento mínimoA tiempot

$$\mathrm{metro}_t = \min_{0 \le s \le t} W_s$$

y la densidad conjunta de (W_t, metro_t).

2.9 DejarS = $\{S_t\colon t \ge 0\}$ sea un movimiento browniano geométrico con derivaμy volatilidad σ. Dado cualquierT≥0, muestra que

$$E S_T] = \mathrm{mi}_{\mu T} S_0.$$

2.10 Demuestre que el precio de la opción call de Black-Scholes es BLS Call(S_0,k, t, r,σ)es monótonamente creciente con respecto a la volatilidadσ.

2.11 Suponga que el precio de un activo subyacente es un movimiento browniano geométrico

$$S_t = S_0 \mathrm{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\},$$

dónderes la tasa de interés libre de riesgo. Determine los precios de los siguientes derivados con vencimientoTy pagoX,en términos de la fórmula de precio de la opción de compra Black-Scholes “BLS Call”.

(a) Romper hacia adelanteX =máx$\{S_T, S_0 \mathrm{mi}^{RT}\}$.

(b) Opción de collarX =mínimo máximo$\{S_T, k_1\}, k_2\}$ con $0 < k_1 < k_2$.

(c) Opción de arranque hacia adelanteX = $(S_T - S_{T_0})^+$conT$_0$<t

(d) a horcajadas

$$X = \begin{cases} K - S_T & \text{si} S_T \le k, \\ S_T - k & \text{si} S_T \ge k \end{cases}$$

(e) Opción de compra de poder $(S^\beta_T - k)^+$para alguna constante positivaβ.

2.12 DejarWsea un movimiento browniano estándar. El procesosegundo = $\{\mathrm{segundo}_t\colon t \ge 0\}$, donde $B_t = W_t + \theta t$por alguna constanteθ, se dice que es un Movimiento browniano con deriva θ. Dado $0 < t_1 < \cdots < t_{\mathrm{norte}} < T$,Demostrar que la distribución condicional de $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_{\mathrm{norte}}})$dado$B_T$= xno depende de$\theta$. En particular, dejar θ=0, concluimos que la distribución condicional de $\{B_t\colon 0 \le t \le T\}$ dadoB_T= xes lo mismo que la distribución condicional de $\{W_t\colon 0 \le t \le T\}$ dadoW_T= x.

2.13 Por convención, sea Φ la función de distribución acumulativa de la distribución normal estándar. Dada cualquier constantea6=0 yθ, utilice la integración por partes para demostrar que

$$\int_\theta^\infty \mathrm{mi}^{\mathrm{hacha}}\Phi(-x)\,dx = -e^{a\theta}\frac{1}{a}\Phi(-\theta) + \int_\theta^\infty \frac{1}{a}\mathrm{mi}^{\mathrm{hacha}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{mi}^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{a}\mathrm{mi}^{a\theta}\Phi(-\theta) + \frac{1}{a}\mathrm{mi}^{\frac{1}{2}a^2}\Phi(-\theta + a).$$

Del mismo modo, cuandoun =0, muestra que

$$\int_\theta^\infty \Phi(-x)\,dx = -\theta\Phi(-\theta) + \int_\theta^\infty x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{mi}^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$
$$= -\theta\Phi(-\theta) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{mi}^{-\frac{1}{2}\theta^2}.$$

2.14Use el Lema 2.2 para determinar los precios de las siguientes opciones dependientes de la trayectoria con vencimiento$T$y pago$X$,suponiendo que el precio de la acción subyacente es un movimiento browniano geométrico con derivary volatilidadσ.

(a) Opción de venta al pasado con precio de ejercicio flotante:$X =$máximo$_{0\le t\le T} S_t - S_T$.

(b) Opción de venta al pasado con precio de ejercicio fijo$K$: $X = (K - \min_{0\le t\le T} S_t)^+$.

(c) Opción de compra down-and-out con precio de ejercicio$k$y barrera$b$ (asumir $S_0 > b$):

$$X = (S_T - k)^+ \cdot 1_{\{\min_{0\le t\le T} S_t \ge b\}}.$$

(d) Opción de compra up-and-in con precio de ejercicio$k$y barrera$b$ (asumir$S_0 < b$):

$$X = (S_T - k)^+ \cdot 1_{\{\text{máx.}_{0\le t\le T} S_t \ge b\}}.$$

2.15Suponer que$W$es un$d$-Movimiento browniano dimensional con matriz de covarianza Σ. Dejar$A$frijol$metro\times d$matriz y definir

$$B_t = VA_t.$$

Muestra esa$B$es un$metro$-movimiento browniano dimensional con matriz de covarianza $A\Sigma A'$.

2.16Suponer que (W, B)es un movimiento browniano bidimensional con covarianza matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

para algunos$\rho \in (-1, 1)$. Muestra esa (P, B)es un Brow- estándar bidimensional movimiento nian, donde

$$q_t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(W_t - \rho B_t).$$

En particular,qyBson movimientos brownianos estándar independientes.

2.17El movimiento browniano es el proceso continuo de tiempo continuo fundamental. Por otro lado, el proceso de salto de tiempo continuo fundamental es el proceso de Poisson. Una forma de construir unProceso de Poisson $N = \{N_t : t \ge 0\}$con intensidadλ es como sigue. Dejar $\{X_{norte}\}$sea una secuencia de iid variable aleatoria exponencial con tasaλ. Dejar$S_0 = 0$ y para$norte \ge 1$

$$S_{norte} = \sum_{yo=1}^{norte} X_i.$$

Definir para cualquier $t \geq 0$

$$N_t = k, \qquad \text{si } S_k \leq t < S_{k+1}.$$

Muestra esa

(a) N tiene incrementos independientes, es decir, para cualquier n y $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, los incrementos

$$N_{t_1} - N_{t_0}, \cdots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$$

son independientes;

(b) $N_{t+s} - N_s$ es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λt para cualquier $s \geq 0$ y $t > 0$. En particular, N_t es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λt.

Una observación muy útil para analizar los procesos de Poisson es la propiedad sin memoria de distribuciones exponenciales. Es decir, para cualquier $t, s \geq 0$,

$$P(X > t + s \,|\, X > t) = P(X > s)$$

cuando X se distribuye exponencialmente.

MATLAB© R Problemas

2.A Escribe una función usando el "función" Comando para calcular el precio de una opción de compra a partir de la fórmula Black-Scholes, a saber, BLS Call. La función debe tener parámetros de entrada.

$$\begin{aligned} r &= \text{tasa de interés libre de riesgo,} \\ \sigma &= \text{volatilidad,} \\ T &= \text{madurez,} \\ k &= \text{precio de ejercicio,} \\ S_0 &= \text{precio inicial de las acciones.} \end{aligned}$$

El resultado de la función es el precio de Black-Scholes de la opción de compra correspondiente. Guarde esta función como un archivo ".m" file.

(a) Calcule el precio de una opción de compra con $S_0 = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0{,}2$, $T = 0{,}5$ y precio de ejercicio $k = 45, 50, 55$, respectivamente.

(b) Considere una opción de compra con $S_0 = 50$, $r = 0.05$, $k = 50$, y $T = 0.5$. Grafique el precio de esta opción de compra con respecto a la volatilidad σ para $0 < \sigma \leq 0.5$. Suponga que en la actualidad el precio de mercado de la opción de compra es de $3. Encuentre el valor de la volatilidad de su gráfico tal que

$$\text{Llamada BLS } (50, 50, 0.5, 0.05, \sigma) = \text{precio de mercado } \$3.$$

Se dice que esta volatilidad es la volatilidad implícita.

(c) Considere una opción de compra conS_0= 50,r =0.05,k =50, yσ= 0,2. Grafique el precio de esta opción de compra con respecto al vencimiento$T$por 0≤ T≤1. ¿Es esta una función creciente?

2.BEscribe una función usando el “función"Comando para calcular el precio de una opción de venta a partir de la fórmula Black-Scholes, a saber, BLS Put. La función debe tener parámetros de entrada.

$$\begin{aligned} r &= \text{tasa de interés libre de riesgo,} \\ \sigma &= \text{volatilidad,} \\ T &= \text{madurez,} \\ k &= \text{precio de ejercicio,} \\ S_0 &= \text{precio inicial de las acciones.} \end{aligned}$$

El resultado de la función es el precio de Black-Scholes de la opción de venta correspondiente. Guarde esta función como un archivo “.m”file.

(a) Calcule el precio de una opción de venta conS_0= 50,r =0.05,σ= 0,2, T =0,5 y precio de ejerciciok =45, 50, 55, respectivamente.

(b) Considere una opción de venta conk =50,r =0.05,σ= 0.2, yT =0.5. Grafique el precio de esta opción de venta con respecto al precio inicial de las accionesS_0 por 40≤S_0≤60. ¿Es una función creciente o una función decreciente?

(c) Considere una opción de venta conS_0= 50,r =0.05,k =50, yσ= 0,2. Grafique el precio de esta opción de venta con respecto al vencimiento$T$por 0≤ T≤ 1. ¿Es una función creciente o una función decreciente?

(d) Considere una opción de venta conS_0= 50,r =0.05,k =50, yT =0.5. Grafique el precio de esta opción de venta con respecto a la volatilidadσpara 0 < σ≤0.5. ¿Es una función creciente o una función decreciente? Suponga que en la actualidad el precio de mercado de la opción de venta es de $2. Encuentre la volatilidad implícita de su gráfica. Es decir, determine el valor de la volatilidad tal que

Poner BLS (50, 50, 0.5, 0.05,σ) =precio de mercado $2.

Capítulo 3

Precios libres de arbitraje

Queda abierta una pregunta del Capítulo 2: ¿por qué es apropiado equiparar la deriva del precio de las acciones con la tasa de interés libre de riesgo?r?Debe enfatizarse que esta pregunta es significativa solo en el contexto de la fijación de precios de derivados financieros. Claramente, no es cierto si consideramos los movimientos del precio de las acciones en el mundo real; en general, uno esperaría que la deriva o la tasa de crecimiento de una acción fuera más alta que la tasa de interés libre de riesgo debido al riesgo asociado con la acción.

El propósito de este capítulo es explicar la idea clave, el principio libre de arbitraje, detrás de la fijación de precios de los derivados financieros. Trabajaremos con los modelos de fijación de precios de activos de árbol binomial, no solo porque se usan ampliamente en la práctica, sino también porque proporcionan probablemente el entorno más simple para ilustrar el mecanismo de fijación de precios libre de arbitraje. La respuesta a la pregunta abierta del Capítulo 2 se vuelve transparente una vez que uno se da cuenta de que un movimiento browniano geométrico puede aproximarse mediante árboles binomiales.

3.1 Principio libre de arbitraje

Considere una opción de compra con precio de ejercicioky madureztSe supone que el precio mundial real del activo subyacente es un movimiento browniano geométrico con derivaμy volatilidadσ:

$$S_t = S_0 \operatorname{Exp}\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\},$$

dóndeW = $\{W_t : t \geq 0\}$ es un movimiento browniano estándar. Es tentador establecer el precio de la opción de compra como el valor esperado de su pago descontado

$$E[e^{-rT}(S_T - k)^+]. \tag{3.1}$$

Si esto fuera correcto, entonces el precio de una opción de compra sería más alto si el activo subyacente tiene una tasa de crecimiento o una deriva más altas, en igualdad de condiciones.

Desafortunadamente, este enfoque intuitivo esnocorrecto. Como demostraremos más adelante, si el precio de la opción se determina de esta manera, se pueden construir carteras que generenarbitrajeoportunidades. Por arbitraje, nos referimos a una cartera cuyo proceso de valor$X = \{X_t\}$satisface$X_0 = 0$ y

$$PAGS(X_T \geq 0) = 1, PAGS(X_T > 0) > 0.$$

losprincipio libre de arbitrajeestipula que no hay oportunidades de arbitraje o comida gratis en un mercado financiero. Este principio no está lejos de la verdad. En la vida real, el mercado a veces exhibe arbitraje. Pero no puede sostenerse por sí mismo y solo durará un período de tiempo muy corto; tan pronto como se descubra y explote, se retira del mercado.

Resulta que, en condiciones de mercado apropiadas, para un derivado financiero, el único precio que es consistente con el principio libre de arbitraje es el valor esperado del pago descontado, donde el valor esperado se toma como si la deriva del precio del activo subyacente fuera igual a la tasa de interés libre de riesgo. Es decir, la fórmula de fijación de precios correcta para (digamos) una opción de compra con precio de ejercicio$k$y madurez$T$debería seguir siendo (9.5). Pero en lugar de un browniano geométrico con derivaμ, el precio del activo subyacente se trata como un movimiento browniano geométrico con derivar:

$$S_t = S_0 \operatorname{Exp}\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\}.$$

Por lo tanto, el precio de la opción debenodependen de la verdadera deriva del activo subyacente.

Dado que el precio se deriva sobre el principio libre de arbitraje, se denomina precio precio libre de arbitraje.Pero, ¿cuál es la motivación para la fijación de precios sin arbitraje? En principio, los precios de los activos son el resultado del equilibrio entre la demanda y la oferta. Este enfoque de fijación de precios de equilibrio se usa a menudo en economía para estudiar los precios de los activos.endógenamente.Sin embargo, para llevarlo a cabo con éxito es necesario caracterizar la preferencia y la actitud frente al riesgo de cada uno de los agentes participantes en el mercado. Claramente esto no es muy práctico. Por lo tanto, en ingeniería financiera se adopta un enfoque diferente y más práctico. Suponiendo que los precios de un conjunto de activos, como las acciones, se dan exógenamente,uno trata de determinar los precios de otros activos, como las opciones, basándose en el supuesto de que el mercado está libre de arbitraje. En este sentido, el precio libre de arbitraje es un precio relativo mecanismo. Se puede encontrar una investigación exhaustiva sobre la fijación de precios de derivados en [7, 16].

A menos que se especifique lo contrario, se supone que los derivados financieros considerados sonEuropeo,es decir, sólo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento. Por el contrario, si un derivado puede ejercerse en cualquier momento antes o en la fecha de vencimiento, se dice que esAmericano.El valor de un derivado financiero estadounidense es obviamente al menos tanto como el de su contraparte europea. Consulte el Apéndice B para conocer los precios de los derivados estadounidenses.

Observación 3.1.El mecanismo de fijación de precios a veces se denominafijación de precios neutral al riesgo,ya que el valor esperado se toma en un mundo artificial donde todos los activos riesgosos tienen la misma tasa de crecimiento que la cuenta de ahorro libre de riesgo, o equivalentemente, todos los inversionistas son neutrales al riesgo.

Observación 3.2.A lo largo del libro, suponemos que el mercado financiero no tiene fricciones en el sentido de que no hay restricciones ni costos de transacción en la compra/venta de cualquier número de instrumentos financieros.

3.2 Fijación de precios de activos con árboles binomiales

En un modelo de fijación de precios de activos de árbol binomial, el precio del activo subyacente evoluciona de la siguiente manera. Si el precio del activo en el paso de tiempo actual esS,luego, en el siguiente paso de tiempo, el precio subirá aa nosotroscon probabilidadpagsy bajar adScon probabilidadq =1 -pags.Aquítuydse les dan constantes positivas tales qued < u.Para todos los modelos de árbol binomial, usamosS_{norte}para denotar el precio del activo alnorte-paso de tiempo.

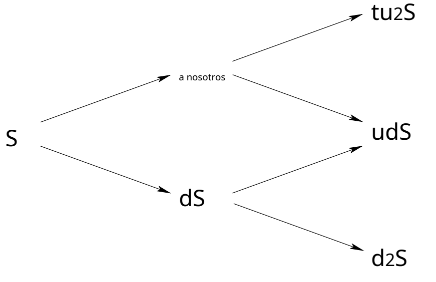


Figura 3.1: Un modelo de árbol binomial.

Aunque un modelo de árbol binomial parece demasiado simplista en comparación con la dinámica del precio de las acciones en el mundo real, resulta ser una aproximación razonable.

aproximación en muchas ocasiones y tiene una manejabilidad computacional superior. La figura 3.1 muestra un modelo de árbol binomial de dos períodos.

3.2.1 Un ejemplo preliminar

En cierto sentido, la fijación de precios sin arbitraje es unadeterministateoría de precios hecha a partir de modelos probabilísticos. Para ser más concreto, considere un modelo de árbol binomial de un período donde el precio actual de las acciones esS_0= 10 ytu =1/re = 2. La tasa de interés libre de riesgorse toma como 0 por conveniencia. Considere también una opción de compra con precio de ejerciciok =14 y madurezT =1. El pago de la opción en el momentoT =1 es

$$X = (S_1 - 14)_+.$$

¿Cuál debería ser el precio o el valor de esta opción en el momento 0?

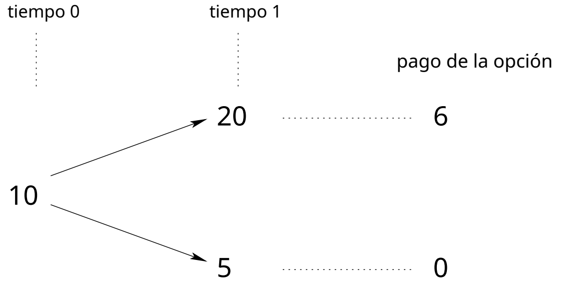


Figura 3.2: Un modelo de fijación de precios binomial de un período.

Precios libres de arbitraje:Considere una cartera que consta de una acción de la opción de compra yXacciones de la acción subyacente. Tenga en cuenta que el valor de la cartera enT =1 es 20x +6 si el precio de las acciones sube a 20 o 5X si el precio de las acciones cae a 5. Por lo tanto, si elegimosXde modo que

$$20x +6 = 5X o x = -0.4,$$

entonces el valor de la cartera es fifijoa las 20x +6 = 5x = -2 en la madurez,no importa cómo se mueva el precio de las acciones.

Suponga que el precio de la opción de compra esvat =0. Entonces el valor de la cartera ent =0 es 10x + v = −4 +v.Dado que la tasa de interésres igual a 0, esperamos que

$$- 4 + v = -2 \text{ o } v = 2.$$

Es decir, la opción vale $2 en el tiempo 0. De hecho, siv6=2, se pueden construir carteras que conduzcan al arbitraje:

1. v >2. En este caso, la opción está sobrevalorada. Comenzando con cero riqueza inicial, venda una acción de la opción de compra y compre 0.4 acciones de la acción, lo que produce una posición de efectivo dev -4. Al vencimiento, la posición de efectivo sigue siendov -4 desder =0. Ahora, vender las acciones y respetar la opción de compra siempre producirá $2 sin importar cuál sea el precio de las acciones al vencimiento. Por lo tanto, el valor total de la cartera se convierte env -2 > 0 a la vezT =1. Esto es un arbitraje.

2. v <2. En este caso, la opción está infravalorada. Comenzando con cero riqueza inicial, compre una acción de la opción de compra y venda 0.4 acciones de la acción, lo que produce una posición de efectivo de 4 −v.Al vencimiento, la posición de efectivo sigue siendo 4 −vya quer =0. Ahora, cumplir con la posición corta en la acción y ejercer la opción de compra siempre producirá −$2 sin importar cuál sea el precio de la acción al vencimiento. Por lo tanto, el valor total de la cartera se convierte en 2 −v >0 a la vezT =1. Esto es nuevamente un arbitraje.

3.2.2 Fórmula general de precios

Ahora considere un modelo de árbol binomial general de un período conS_0=S. Nos gustaría cotizar una opción con vencimientoT =1 y pago

$$X = \begin{cases} C_{tu} & \text{si} S_1 = \text{a nosotros}, \\ C_d & \text{si} S_1 = dS; \end{cases}$$

véase la figura 3.3. Supongamos que un dólar a la vezt =0 valeRdólares a la vezt =1. Se requiere por el principio libre de arbitraje (ver Ejercicio 3.1) que

$$\text{re} < R < \text{tu}.$$

Construya una cartera con una acción de la opción yXacciones de la acción subyacente para que la cartera tenga un valor fijo al vencimiento, independientemente del precio de la acción. Eso es,

$$\text{a nosotros}\cdot X + C_{tu} = dS\cdot X + C_d \quad \text{o} \quad x = -\frac{C_{tu} - C_d.}{\text{EE.UU.} - dS}$$

Supongamos que el precio de la opción esven el momentot =0. Entonces el valor de la cartera en el momentot =0 esv + xS.Desde un dólar a la vezt =0 valeR dólares a la vez$t$ =1, se sigue que

$$(v + xS)R = uS{\cdot}X + C_{tu},$$

lo que implica

$$v = \frac{1}{R}\left(\frac{R - re}{tu - re} \cdot C_{tu} + \frac{tu - R}{tu - re} \cdot C_d\right).$$

Se sugiere al lector imitar el ejemplo de la Sección 3.2.1 y verificar la existencia de oportunidades de arbitraje cuando la opción tiene un precio diferente. Tenga en cuenta que los parámetros$pags$y$q$desempeñarnopapel en el precio de la opción.

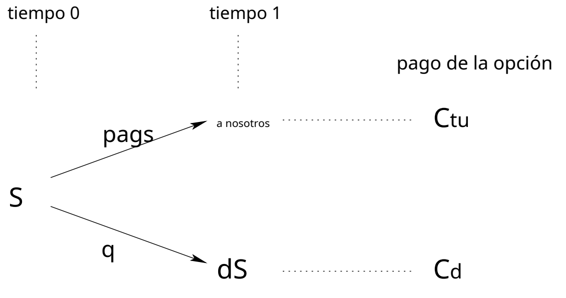


Figura 3.3: Un modelo de fijación de precios binomial general de un período.

Probabilidad neutral al riesgo:Observe que el precio de la opción se puede escribir como el valor esperado del pago de la opción descontada bajo la probabilidad neutral al riesgo

$$(pags_*, q_*) = \left(\frac{R - re}{tu - re}, \frac{tu - R}{tu - re}\right). \tag{3.2}$$

Es decir, el precio de la opción es

$$v = mi\left[\frac{1}{R}X\right] = \frac{1}{R}\left(pags_* C_{tu} + q_* C_d\right),$$

donde el valor esperado se toma como si el precio de las acciones subiera a a nosotroscon probabilidad$pags_*$y bajar adScon probabilidad$q_* = 1 - pags_*$; véase la figura 3.4.

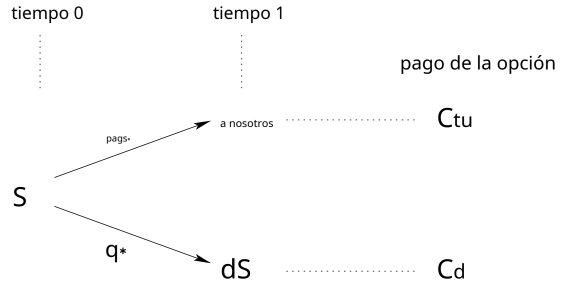


Figura 3.4: Árbol binomial bajo la probabilidad neutral al riesgo.

Resumen.

1. Las probabilidades del mundo real (pag q)no juegan ningún papel en el precio de las opciones.

2. El precio de una opción es el valor esperado del pago de la opción descontada al vencimiento, bajo la probabilidad neutral al riesgo.

3. La probabilidad neutral al riesgo está determinada por la estructura del modelo de árbol binomial y la tasa de interés, y es independiente del pago de la opción.

4. Bajo la probabilidad neutral al riesgo, la tasa de crecimiento del precio del activo subyacente es igual a la tasa de interés libre de riesgo:

$$ES_1] = pags_* \cdot \text{Estados Unidos} + q_* \cdot dS = \left(\frac{R - re}{tu - re} \cdot \text{Estados Unidos +} \frac{tu - R}{tu - re} \cdot dS \right) = RS.$$

5.Replicación:Comenzando con una riqueza inicial que es igual al precio de la opción, uno puede construir una cartera que consiste en efectivo y el activo subyacente, y cuyo valor al vencimiento replica completamente el pago de la opción. En efecto, a partir devdólares, uno puede comprar

$$d = \frac{C_{tu} - C_d}{\text{EE.UU.} - dS}$$

acciones del activo subyacente en el momentot =0. La posición de efectivo en el momento 0 se convertirá env -*d*S.En el momentot =1, el valor de la cartera es

$$R(v - dS) + dS_1 = \begin{cases} C_{tu} & \text{si} S_1 = \text{a nosotros,} \\ C_d & \text{si} S_1 = dS. \end{cases}$$

3.2.3 Modelos de árbol binomial multiperíodo

La generalización a modelos de árboles binomiales multiperíodos es sencilla. Considere un árbol binomial connorteplazos y una opción con vencimiento$T =$ norte y pago$X$.Los parametrostu, re,yRse definen como antes.

La conclusión es que el precio de esta opción en el momento$t = 0$ es el ex- valor esperado del pago de la opción descontada

$$v = mi\left[\frac{1}{R_{norte}} X\right], \qquad (3.3)$$

donde el valor esperado se toma bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Es decir, el precio de las acciones tiene probabilidad$pags_*$subir por un factortuy probabilidad$q_* = 1 - pags_*$bajar por un factor$d$en cada paso de tiempo. Las probabilidades $(pags_*, q_*)$están dadas por (3.2).

Para verificar la fórmula de fijación de precios (3.3) y, al mismo tiempo, introducir un algoritmo recursivo útil para calcular el valor esperado, nos especializamos en un modelo de árbol binomial de tres períodos, como se muestra en la figura 3.5.

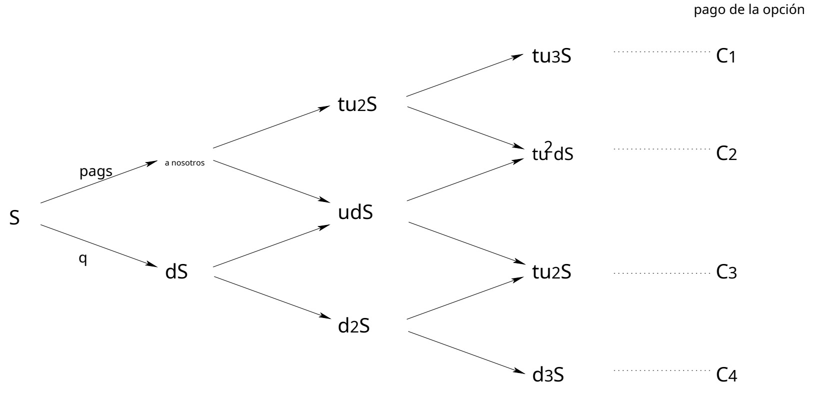


Figura 3.5: Un modelo de árbol binomial de tres períodos.

Ahora define$V_i$ser el valor de la opción en el$i$-paso de tiempo. Consulte la Figura 3.6. En general,$V_i$es una función del precio de las accionesS_iy por lo tanto una variable aleatoria en sí misma. Por ejemplo,$V_2 = a$cuando$S_2 = tu_2 S$y$V_1 = mi$cuando $S_1 = dS$. los valores deV_i, o $\{un, b, \cdots, f\}$,puede obtenerse recursivamente hacia atrás en el tiempo.

1.En el momento$t = 2$:

$$un = \frac{1}{R}(pags_{*} do_{1} + q_{*} c_{2}),\ b = \frac{1}{R}(pags_{*} C_2 + q_{*} C_3), c = \frac{1}{R}(pag_{*} C_3 + q_{*} C_4).$$

2.En el momentot =1:

$$\text{re} = \frac{1}{R}(\text{pags}_* \text{un} + q_* \;\; b), \text{ mi} = \frac{1}{R}(\text{pags}_* b + q_* C).$$

3.En el momentot =0:

$$f = \frac{1}{R}(\text{pags}_* \text{re} + q_* \text{mi}).$$

En resumen, el valor de la opciónVsatisface la ecuación recursiva hacia atrás

$$V_3 = X, \qquad V_i = \text{mi}\left[\frac{1}{R} V_{yo+1} \middle| S_i\right], \quad yo = 2, 1, 0.$$

De la propiedad de la torre (Teorema 1.12) se sigue que para cadayo =0, 1, 2

$$E[V_i] = \text{mi}\left[\frac{1}{R} V_{yo+1}\right].$$

Por lo tanto,

$$f = V_0 = \text{mi}\left[\frac{1}{R^3} V_3\right] = \text{mi}\left[\frac{1}{R^3} X\right].$$

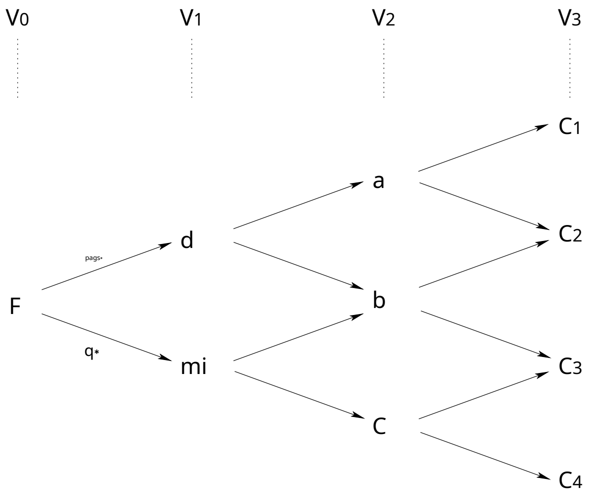


Figura 3.6: El proceso de valor de la opción.

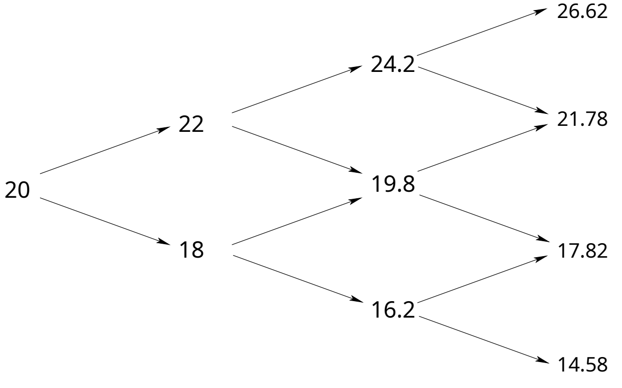
Obsérvese que con una riqueza inicial deV_0, se puede construir una cartera que consta de efectivo y acciones, y cuyo valor en el tiempot =3 replica completamente el pago de la opción. De hecho, en el momentot =0, es posible construir una cartera cuyo valor ent =1 es exactamenteV_1, como se describe en el resumen de la Sección 3.2.2. De manera completamente análoga, se puede ajustar la cartera ent =1 (el ajuste debe depender de si S_1=a nosotrosS_1=dS)para que el valor de la cartera se repliqueV_2 at =2, y así sucesivamente. Ahora se sigue inmediatamente queV_0es el único precio de la opción que es consistente con el principio libre de arbitraje. De hecho, si el precio de la opción esvyv6=V_0, entonces uno puede construir oportunidades de arbitraje:

1. v > V_0: vender una acción de la opción y comprar una cartera replicante.

2. v < V_0: compre una acción de la opción y venda dicha cartera replicante.

Esto justifica la fórmula de fijación de precios (3.3) paranorte =3. El tratamiento para un modelo de árbol binomial multiperíodo general es completamente análogo.

Ejemplo 3.1.Considere un modelo de árbol binomial donde cada paso representa 2 meses en tiempo real ytu =1.1,re =0.9,S_0= 20.



Suponga que la tasa de interés libre de riesgo es del 12% anual. Calcular el precio de una opción de compra con vencimientoT =6 meses y precio de ejerciciok =21

SSOLUCIÓN: La tasa de interés libre de riesgo para cada período de 2 meses es 0.12/6 = 0.02. Por lo tanto, el factor de descuento es

$$\frac{1}{R} = \text{mi}^{-0.02} = 0{,}98,$$

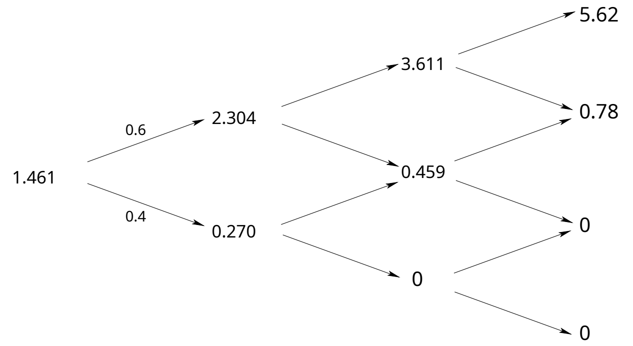


Figura 3.7: El valor de la opción.

y la medida de probabilidad neutral al riesgo viene dada por

$$\text{pags}_*= \frac{R - re}{tu - re} =0.6, \qquad q_*= \frac{tu - R}{tu - re} =0.4.$$

El precio de esta opción de compra en el momento$t =0$ es 1,461; ver Figura 3.7. El valor de la opción en cada nodo se obtiene hacia atrás en el tiempo. ■

3.3 El modelo Black-Scholes

Considere el modelo Black-Scholes donde se supone que el precio de la acción subyacente es un movimiento browniano geométrico

$$S_t= S_0\text{Exp}\left\{\left(\mu- \frac{\sigma^2}{2}\right) t +\sigma W_t\right\}. \tag{3.4}$$

El objetivo es explicar por qué uno debe reemplazar la derivaμpor la tasa de interés libre de riesgo$r$cuando se trata de precios de derivados.

La idea es usar árboles binomiales para aproximar el movimiento browniano geométrico. Hay muchas maneras de lograr esta aproximación. Usaremos la siguiente versión.

1. Aproximación binomial. Supongamos que la fecha de vencimiento es$T$Divida el intervalo de tiempo $[0,T]$dentro$n$ortepiezas de igual longitud$\Delta t = T/n$. Eventualmente enviaremos$n$ortehasta el infinito. Considere un árbol binomial de aproximación con$n$orteperíodos, donde cada período corresponde aΔten tiempo real. El precio de las acciones subirá por un factor$u$tucon probabilidad $p$agsy baja por un factor$d$con probabilidad$q =1 - p$agsen cada periodo de tiempo. Los parametros$p$ag u tuy$d$se determinará de manera que coincida

la distribución de los incrementos del movimiento browniano geométrico $\{S_t\}$ durante un intervalo de tiempo de longitudΔt.Aunque es imposible hacer una coincidencia completa, la idea es al menos hacer coincidir el valor esperado y la varianza. Esto lleva a

$$\begin{aligned} Se^{\mu\Delta t} &= \text{pags}\cdot\text{Estados Unidos} + q\cdot dS, \text{pag}\cdot (\\ S^2 mi^{(2\mu+\sigma^2)\Delta t} &= \text{a nosotros})^2 + q\cdot (dS)^2. \end{aligned}$$

Para resolver las tres incógnitas imponemos una no esencial condición

$$tu = \frac{1}{d}$$

De estas tres ecuaciones obtenemos (ver Observación 3.3)

$$tu = mi^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad re = mi^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad pag = \frac{mi^{\mu\Delta t} - re}{tu - re}. \qquad (3.5)$$

Se puede argumentar que este árbol binomial se aproxima al movimiento browniano geométrico$S$como$norte\to\infty$ [18, Principio de Invariancia de Donsker]. Véase también el Ejercicio 3.5.

2.Probabilidad neutral al riesgo.Dado que cada período de tiempo en el árbol binomial corresponde aΔten tiempo real,

$$R = mi^{r\Delta t}.$$

Por lo tanto, las probabilidades neutrales al riesgo $(pags^*, q^*)$son dados por

$$pags^* = \frac{R - re}{tu - re} = \frac{mi^{r\Delta t} - re}{tu - re}, \qquad q^* = 1 - pags^*.$$

El precio de una opción con pago$X$y madurez$T$es

$$v = mi\left[\frac{1}{R^{norte}}X\right] = E[e^{-rT}X],$$

donde el valor esperado se toma bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo.

3.La dinámica de $\{S_t\}$bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo.Comparando la fórmula (3.5) con la fórmula de$pags^*$, la única diferencia es que μes reemplazado por$R$.Por lo tanto, bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo, el árbol binomial se aproxima a un movimiento browniano geométrico con derivar$y$ volatilidadσ. En otras palabras, como límite de los árboles binomiales, el precio de las acciones $\{S_t\}$es un movimiento browniano geométrico con derivar$y$ volatilidadσ bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo.

Resumen:El precio de una opción con pago$X$y madurez$T$es el valor esperado del pago de la opción descontada, es decir,

$$v = E[e^{-rT}X].$$

El valor esperado se toma con respecto a la medida de probabilidad neutral al riesgo, bajo la cual el precio de la acción es un movimiento browniano geométrico con derivar:

$$S_t = S_0 \text{Exp}\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right\}.$$

La discusión anterior también sugiere una aproximación de árbol binomial para $\{S_t\}$ bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo: dividir el intervalo de tiempo [0,T] dentronorte subintervalos de igual longitud$\Delta t = T/n$y establecer

$$tu = mi^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ re = mi^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad pags^* = \frac{mi^{r\Delta t} - re}{tu - re}.$$

Observación 3.3.La solución es sólo aproximada y no exacta. Se puede verificar que el valor esperado coincida perfectamente, pero la varianza solo coincide con el pedidoΔt.Resulta que no es necesaria una coincidencia perfecta, y la aproximación sigue siendo válida con la elección de parámetros en (3.5).

Ejercicios

Problemas de lápiz y papel

3.1 Demuestre que el principio libre de arbitraje implicare < R < tupara un modelo de precios de activos de árbol binomial.

3.2 Suponga que la tasa de interés libre de riesgo esr =10% anual. Precio de los siguientes derivados financieros utilizando un árbol binomial de dos períodos contu = 1.1 yre =0.9. Se supone que el precio inicial del activo subyacente es S_0= 50.

(a) Una opción de compra con precio de ejerciciok =48 y madurezT =2 meses

(b) Una opción de venta con precio de ejerciciok =50 y madurezT =3 meses

(c) Un diferencial vertical con pagoX = $(S_T-48)^+ - (S_T-52)^+$y madurezT =6 meses

(d) Un straddle con pagoX = $(50 - S_T)^+ + (S_T-50)^+$y madurez T =4 meses

3.3 Considere una opción de venta con vencimientoT =6 meses y precio de ejerciciok = 19. El precio inicial de la acción subyacente esS_0= 20. Suponga que la tasa de interés libre de riesgo esr =12% anual. Nos gustaría aproximar el precio de la opción de venta con diferentes árboles binomiales. Para todos los árboles binomiales asumimos quetu =1.1 yre =0.9.

(a) Ponga precio a la opción de venta utilizando un árbol binomial de un período.

(b) Comenzando con una riqueza inicial igual al precio que calculó en la parte (a), componga una cartera que consista en efectivo y acciones para replicar completamente el pago de la opción de venta.

(c) Ponga precio a la opción de venta usando un árbol binomial de dos períodos, cada período representando 3 meses en tiempo real.

(d) Comenzando con una riqueza inicial igual al precio que calculó en la parte (c), componga una cartera que consista en efectivo y acciones para replicar completamente el pago de la opción de venta. Determina lo siguiente.

i. Las posiciones iniciales de efectivo y acciones en el momentot =0

ii. Las posiciones de efectivo y acciones en el momentot =1 cuando el precio de las acciones sube a a nosotros$_0$

iii. Las posiciones de efectivo y acciones en el momentot =1 cuando el precio de las acciones baja adS_0

3.4 Considere una opción de compra con vencimientoT =6 meses y precio de ejerciciok = 19. El precio inicial de la acción subyacente esS_0= 20. Nos gustaría aproximar el precio de esta opción de compra usando un árbol binomial de dos periodos contu =1.1 yre =0.9. En el primer período, la tasa de interés libre de riesgo es r_1= 6% anual, pero en el segundo período la tasa de interés libre de riesgo se convierte en r_2= 8% anual. Ponga precio a esta opción y construya una cartera replicante que consista en efectivo y acciones.

3.5 La justificación intuitiva de que el árbol binomial definido por (3.5) se aproxima al movimiento browniano geométrico (3.4) es muy similar al ejercicio 2.4. El árbol binomial tiene norte periodos, cada periodo representando $\Delta t = T/n$ en tiempo real. Denotamos por B_{metro} el valor del árbol en el metro-th período para $0 \leq metro \leq norte$. Claramente $B_0 = S_0$. Dejar $t_{metro} = metro\Delta t$ por metro $=0, 1, \ldots, norte$, y definir un proceso de tiempo discreto $X = \{X_{t_{metro}} = segundo_{metro}\}$. Tenga en cuenta que el registro X se puede escribir de la siguiente manera

Moda:

$$\text{Iniciar sesión} X_{t_{metro}} = \text{Iniciar sesión} S_0 + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{yo=1}^{metro} Y_i$$

dónde Y_i son variables aleatorias iid con

$$PAGS(Y_i = +1) = p = \frac{mi^{\mu\Delta t} - re}{tu - re}, \quad PAGS(Y = -1) = 1 - pags.$$

(a) Demuestre que $\{\log X_{t_{metro}} : metro = 0, 1, \ldots, norte\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios. Eso es,

$$\text{Iniciar sesión} X_{t_1} - \text{registro} X_{t_0}, \ldots, \text{Iniciar sesión} X_{t_{norte}} - \text{Iniciar sesión} X_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias iid.

(b) Identifique el límite de $MI[\text{Iniciar sesión} X_{t_{metro}}]$ y $Var[\text{registro} X_{t_{metro}}]$ cuando $t_{metro} \to t$.

(c) A la luz del teorema del límite central, suponga que como $t_{metro} \to t$, $X_{t_{metro}}$ converge a una distribución normal. Argumente que la distribución límite es la misma que la distribución de $\log S_t$.

(d) Explique intuitivamente que $\{X_{t_{metro}}\}$ converge a $\{S_t\}$ en el intervalo $[0,T]$.

MATLAB© R Problemas

3.A Escribe una función usando el "función" comando para cotizar opciones de compra y venta con el mismo precio de ejercicio y vencimiento, a través del método del árbol binomial. Guarde esta función como un archivo ".m". La función debe incluir los siguientes parámetros como entrada:

tu	=	factor por el cual el precio de la acción sube en cada período,
d	=	factor por el cual el precio de la acción sube en cada período,
norte	=	número de períodos,
S_0	=	precio inicial de las acciones,
r	=	tasa de interés libre de riesgo,
T	=	vencimiento,
k	=	precio de ejercicio.

La salida de la función debe ser el precio de la opción de compra y el precio de la opción de venta. Observe que en un modelo de árbol binomial, los posibles valores del precio de las acciones en elNORTE-el período son

$$S_0 tu^i d^{n-i}, \text{ yo = norte, norte -1, ..., 0.}$$

En la programación, es posible que desee utilizar matrices. Hay varios comandos de MAT-LAB para inicializar una variable como matriz. Por ejemplo,

“ceros(m,n)”:devuelve unmetro×nortematriz con cada entrada 0,

“unos(m,n)”:devuelve unmetro×nortematriz con cada entrada 1,

“ojo(n)”:devuelve unnorte×nortematriz de identidad.

3.BSupongamos que el precio de las accionesSes un movimiento browniano geométrico bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo:

$$S_t = S_0 \text{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\}$$

con el precio inicialS_0= 20. Usa la aproximación del árbol binomial con norte = 30, 60, 120 periodos, respectivamente, para cotizar las opciones call y put con precio de ejerciciok =20 y madurezT =1 año, suponiendo que la tasa de interés libre de riesgo esr =8% anual yσ= 0,3. Compare sus resultados con los precios teóricos de Black-Scholes, es decir, BLS Call y BLS Put.

Capítulo 4

Simulación del Monte Carlo

La simulación Monte Carlo es una herramienta muy flexible y poderosa para estimar integrales y valores esperados. Dado que la mayor parte del análisis cuantitativo en finanzas o gestión de riesgos implica calcular cantidades que, de hecho, son valores esperados, la simulación de Monte Carlo se usa ampliamente en la industria financiera. Este capítulo pretende dar una introducción rápida a la simulación de Monte Carlo, así como sus ventajas y desventajas.

4.1 Conceptos básicos de la simulación Monte Carlo

Considere la cuestión genérica de estimar el valor esperado de una función de alguna variable aleatoria X:

$$\mu = E[h(X)].$$

Un esquema simple de simulación de Monte Carlo se puede dividir aproximadamente en dos pasos:

1. Generar muestras o variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente (iid) $X_1, X_2, \ldots, X_{norte}$, que tienen la misma distribución que X.

2. La estimación del valor esperado μ se define como el promedio de la muestra

$$\hat{\mu} = \frac{1}{norte}\left[h(x)_1 + h(x)_2 + \cdots + h(X_{norte})\right].$$

A veces simplemente nos referimos a las muestras $X_1, X_2, \ldots, X_{norte}$ comocopias iiddeX. El número de muestrasnortees eltamaño de la muestra,que generalmente se elige para ser un gran número. se debe notar que μ, la cantidad que deseamos estimar, es un fi desconocidofijonúmero, mientras que la estimación de Monte Carlo$\hat{\mu}$es un variable aleatoria.El valor de$\hat{\mu}$variará dependiendo de las muestras.

Es posible diseñar muchos algoritmos de simulación Monte Carlo diferentes para estimar el mismo valor esperadoμ. Mencionamos brevemente un par de alternativas.

(a)Muestreo de importancia:Asumiendo que$X$admite una densidad$f$,podemos escribir

$$\mu = \int_{R} h(x)\, f(x)\, dx.$$

Considere una función de densidad arbitraria distinta de cero$g(x)$.Resulta que

$$\mu = \int_{R} h(x) \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)\, dx = \text{mi}\left[h(Y) \frac{f(y)}{g(Y)} \right],$$

dónde$Y$es una variable aleatoria con densidadgramo.La correspondiente estimación de Monte Carlo paraμes

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{\text{yo}=1}^{\text{norte}} h(Y_i) \frac{f(y)_i}{g(Y_i)},$$

dónde$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\text{norte}}$son copias iid de$y$

(b)Variaciones de control:Supongamos que hay una variable aleatoria$Y$tal que $E[Y] = 0$. Entonces uno puede escribir

$$\mu = E[h(X) + Y].$$

La correspondiente estimación de Monte Carlo paraμes

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{\text{yo}=1}^{\text{norte}} [h(X_i) + Y_i],$$

dónde $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_{\text{norte}}, Y_{\text{norte}})$son copias iid de (X, Y).

Todos estos diferentes esquemas de Monte Carlo se pueden describir genéricamente de la siguiente manera. Dejar$H$sea una variable aleatoria tal que$\mu = E[H]$.Entonces la correspondiente estimación de Monte Carlo viene dada por

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{\text{yo}=1}^{\text{norte}} H_i,$$

dónde$H_1, H_2, \ldots, H_{\text{norte}}$son copias iid de$h$

El principio subyacente de la simulación Monte Carlo es la ley fuerte de los grandes números. Es decir, como el tamaño de la muestranortetiende al infinito,

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\text{norte}}(H_1 + H_2 + \cdots + H_{\text{norte}}) \to E[H] = \mu$$

con probabilidad uno. Por lo tanto, la estimación$\hat{\mu}$se espera que esté cerca del valor realμcuandonortees largo.

Observación 4.1.Dado que una probabilidad se puede expresar como un valor esperado, la simulación de Monte Carlo también se usa comúnmente para estimar probabilidades. Por ejemplo, para cualquier subconjunto$A \subseteq R$,uno puede escribir

$$\text{PAGS}(X \in A) = E\left[h(X)\right],$$

dóndehes una función indicadora definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} X \in A, \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

En este caso, la estimación simple de Monte Carlo para$\text{PAGS}(X \in A)$es solo la proporción de muestras que caen en el conjuntoUNA.

4.2 Error estándar e intervalo de confianza

DejarμSea la cantidad desconocida de interés yHuna variable aleatoria tal que$\mu = E[H]$.Una estimación de Monte Carlo paraμes

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\text{norte}} \sum_{\text{yo}=1}^{\text{norte}} H_i,$$

dónde$H_1, H_2, \ldots, H_{\text{norte}}$son copias iid dehComo hemos mencionado, la ley fuerte de los grandes números afirma que$\hat{\mu}$esta cerca deμcuandonortees largo. ¿Pero qué tan cerca? Ya que$\hat{\mu}$es una variable aleatoria, también lo es el error$\hat{\mu} - \mu$. Por lo tanto, lo que realmente estamos buscando es la distribución de este error, no el límite de error en el sentido habitual.

Denotamos porσ^2_Hla varianza dehSe sigue de la teoría del límite central recuerda que como$\text{norte} \to \infty$,

$$\frac{H_1 + H_2 + \cdots + H_{\text{norte}} - \text{norte}\mu}{\sigma_H \sqrt{\text{norte}}} = \frac{\sqrt{\text{norte}}(\hat{\mu} - \mu)}{\sigma_H}$$

converge a la distribución normal estándar. Es decir, por cada $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{PAGS}\left\{\frac{\sqrt{\text{norte}}(\hat{\mu}-\mu)}{\sigma_H} \leq a\right\} \to \Phi(a). \tag{4.1}$$

En otras palabras, el error $\hat{\mu}-\mu$ tiene una distribución aproximadamente normal con media 0 y varianza σ^2_H/norte. Este análisis asintótico también produce confi-intervalos de baile para la estimación de Monte Carlo $\hat{\mu}$. Más precisamente, se sigue de (4.1) que el $1-\alpha$ intervalo de confianza para μ es aproximadamente

$$\hat{\mu} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma_H}{\sqrt{\text{norte}}},$$

dónde $z_{\alpha/2}$ se define por la ecuación $\Phi(-z_{\alpha/2}) = \alpha/2$. Los intervalos de confianza son aleatorio intervalos un $1-\alpha$ intervalo de confianza tiene probabilidad $1-\alpha$ de cubrir el verdadero valor μ. Tenga en cuenta que el ancho de un intervalo de confianza disminuye a medida que aumenta el tamaño de la muestra. Si se cuadruplica el tamaño de la muestra, el ancho se reduce a la mitad.

En la práctica, la desviación estándar σ_H rara vez se conoce. En cambio, la desviación estándar de la muestra

$$s_H = \sqrt{\frac{1}{\text{norte}-1}\sum_{yo=1}^{\text{norte}}(H_i-\hat{\mu})^2} = \sqrt{\frac{1}{\text{norte}-1}\left(\sum_{yo=1}^{\text{norte}} H_i^2 - \text{norte}\,\hat{\mu}^2\right)}$$

se usa en lugar de σ_H. Esta sustitución es adecuada ya que s_H converge a σ_H con probabilidad uno cuando el tamaño de la muestra norte tiende a infinito y, por lo tanto, el teorema del límite central sigue siendo válido si σ_H es reemplazado por s_H. El empírico $1-\alpha$ el intervalo de confianza se convierte así en

$$\hat{\mu} \pm z_{\alpha/2}\frac{s_H}{\sqrt{\text{norte}}}.$$

La cantidad $s_H/\sqrt{\text{norte}}$ a menudo se dice que es el Error estándar de $\hat{\mu}$. Eso es,

$$\mathrm{SE} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{yo=1} H_i^2 - \text{norte}\,\hat{\mu}^2\right)}.$$

Por lo tanto, el intervalo de confianza del 95% comúnmente utilizado es solo la estimación $\hat{\mu}$ más/menos el doble del error estándar (tenga en cuenta que $z_{0.025} \approx 2$). En la simulación de Monte Carlo, se acostumbra informar tanto la estimación como el error estándar.

Observación 4.2.la varianza de$H$determina el ancho de un intervalo de confianza y, en cierto sentido, el tamaño del error$\hat{\mu}-\mu$. Dado un tamaño de muestra fijo, cuanto menor sea la varianza, más estrecho será el intervalo de confianza y, por lo tanto, más precisa será la estimación. Esto conduce al siguiente criterio: al comparar dos estimaciones, la que tiene la menor varianza es más eficiente. Naturalmente, tal declaración es una gran simplificación de los criterios de eficiencia más científicos que también tienen en cuenta el esfuerzo computacional de generar muestras [11]. No obstante, es un principio rector valioso y se utilizará a lo largo del libro para analizar la eficiencia de varios esquemas de Monte Carlo.

Observación 4.3.Las estimaciones de Monte Carlo que hemos discutido hasta ahora son todas imparcial,eso es,

$$\mathrm{MI}[\hat{\mu}] = \mu.$$

La imparcialidad es una propiedad deseable, pero no siempre es alcanzable. Por ejemplo, considere estimar el precio de una opción de compra retrospectiva con pago

$$\left(\text{máximo}_{0\leq t\leq T} S_t - k \right)^+$$

en la madureztExcepto en raras ocasiones, es imposible simular exactamente el máximo de una ruta de muestra de tiempo continuo. En cambio, a menudo se usa el análogo de tiempo discreto

$$\text{máximo}_{\text{yo}=1,\dots,\text{metro}} S_{t_i}, \quad t_i = iT/m$$

como una aproximación. La estimación simple de Monte Carlo para el precio es solo la media muestral de copias iid de

$$\mathrm{mi}^{-rT} \left(\text{máximo}_{\text{yo}=1,\cdots,\text{metro}} S_{t_i} - k \right)^+$$

bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Esta estimación tiene un sesgo negativo ya que

$$\text{máximo}_{\text{yo}=1,\dots,\text{metro}} S_{t_i} \leq \text{máximo}_{0\leq t\leq T} S_t.$$

Tenga en cuenta que el sesgo es muy diferente del error aleatorio de una estimación de Monte Carlo. Si bien este último disminuye cuando el tamaño de la muestra aumenta, el sesgo solo puede reducirse aumentando el parámetro de discretización.metro.

4.3 Ejemplos de simulación Monte Carlo

Primero estudiamos algunos ejemplos simples para ilustrar la estructura básica y las técnicas de la simulación Monte Carlo. Para cada ejemplo, informamos no solo la estimación sino también el error estándar porque este último indica qué tan preciso es el primero.

Ejemplo 4.1. SimularW_T.Considere el problema de estimar el precio de una opción de compra bajo el supuesto de que el precio de la acción subyacente es un movimiento browniano geométrico.

SSOLUCIÓN: Recuerde que el precio de una opción de compra con precio de ejercicio$k$y madurez$T$es

$$v = E[e^{-rT}(S_T - k)^+],$$

dónde$r$es la tasa de interés libre de riesgo. El valor esperado se toma bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo, donde el precio de la acción es una figura geométrica. Movimiento browniano con derivar:

$$S_T = S_0 \operatorname{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma W_T\right\}.$$

Para generar muestras del pago de la opción, basta con generar muestras deW_T. Ya que$W_T$se distribuye normalmente con media 0 y varianza T,uno puede escribir$W_T = \sqrt{T}Z$para alguna variable aleatoria normal estándar$z$

Pseudocódigo:

por$yo = 1, 2, \ldots, norte$

generar$Z_i$de$NORTE(0, 1)$

establecer$Y_i = S_0 \operatorname{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma \sqrt{T} Z_i\right\}$

establecer$X_i = mi^{-rT}(Y_i - k)^+$

calcule la estimación $\hat{v} = \frac{1}{norte}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{norte})$

calcule el error estándar $SE = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{yo=1}^{norte} X_i^2 - Nevada^2\right)}$.

Los resultados de la simulación se reportan en la Tabla 4.1 con los parámetros dados por

$$S_0 = 50, r = 0.05, \sigma = 0,2, T = 1.$$

A modo de comparación, los valores teóricos se calculan a partir de la fórmula Black-Scholes BLS Call; ver Ejemplo 2.1.

Tabla 4.1: Simulación de Monte Carlo para opciones de compra

	Tamaño de la muestranorte =2500			Tamaño de la muestranorte =10000		
Precio de ejerciciok	40	50	60	40	50	60
Valor teórico	12,2944	5,2253	1,6237	12,2944	5.2253	1.6237
Estimación de MC	12.2677	5.2992	1.6355	12.3953	5.2018	1.6535
SE	0.1918	0.1468	0.0873	0.0964	0.0727	0.0438

Tenga en cuenta que los errores estándar de las estimaciones caen aproximadamente un 50% cuando el tamaño de la muestra se cuadruplica. ■

Ejemplo 4.2. Simule una ruta de muestra de movimiento browniano.Considere una opción de compra de precio promedio monitoreada discretamente cuyo pago al vencimientoTes

$$\left(\frac{1}{\text{metro}}\sum_{yo=1}^{\text{metro}} S_{t_i} - k\right)^+ ,$$

donde $0 < t_1 < \cdots < t_{\text{metro}} = T$son un conjunto fijo de fechas. Suponga que bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo,

$$S_t = S_0 \text{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}$$

Estimar el precio de la opción.

SSOLUCIÓN: El problema clave es generar copias iid de la ruta de muestra de tiempo discreto $(S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t_{\text{metro}}})$. They debe simularse secuencialmente ya que

$$S_{t_{yo+1}} = S_{t_i} \text{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{yo+1} - t_i) + \sigma(W_{t_{yo+1}} - W_{t_i})\right\},$$

y $(W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_{\text{metro}}} - W_{t_{m-1}})$ sonindependientevariables aleatorias normales. A continuación se muestra el pseudocódigo para generarunaruta de muestra

Pseudocódigo:

poryo =1, . . . ,metro

generar$Z_i$de$\text{NORTE}(0, 1)$

establecer$S_{t_i} = S_{t_{yo-1}} \text{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_i - t_{yo-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{yo-1}}\, Z_i\right\}$

calcular el pago descontado$X = mi^{-rT}\left(\frac{1}{\text{metro}}\sum_{yo=1}^{\text{metro}} S_{t_i} - k\right)^+ .$

El algoritmo Monte Carlo repetirá los pasos anterioresnorteveces para obtener norte caminos de muestra ynortecopias iid de$X$,decir$X_1, \ldots, X_{norte}$. La estimación y su error estándar están dados por

$$\hat{v} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

$$SE = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\hat{v}^2\right)}.$$

Los resultados de la simulación se reportan en la Tabla 4.2. Los parámetros están configurados para ser

$$S_0 = 50, r = 0.05, \sigma = 0{,}2, T = 1, \text{metro} = 12, t_i = \frac{i}{12}.$$

La fórmula explícita para el precio de la opción no está disponible.

Tabla 4.2: Simulación de Monte Carlo para opciones call de precio promedio

	Tamaño de la muestranorte =2500			Tamaño de la muestranorte =10000		
Precio de ejerciciok	40	50	60	40	50	60
Estimación CM	10,7487	3,0730	0,3837	10,8810	3,0697	0,3490
SE	0,1183	0,0846	0,0332	0,0597	0,0422	0,0152

Como en el ejemplo anterior, los errores estándar de las estimaciones se reducen aproximadamente a la mitad cuando el tamaño de la muestra se cuadruplica. ■

Ejemplo 4.3. Simule vectores aleatorios normales conjuntos en 2D.Estime el precio de una opción de compra con margen cuyo pago al vencimiento$T$es

$$(X_T - Y_T - k)^+,$$

dónde $\{X_t\}$y $\{Y_t\}$son los precios de dos activos subyacentes. Suponga que bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo,

$$X_t = X_0 \text{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)t + \sigma_1 W_t\right\},$$

$$Y_t = Y_0 \text{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)t + \sigma_2 B_t\right\},$$

dónde (W, B)es un movimiento browniano bidimensional con matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

SSOLUCIÓN: Por supuesto (W_T, B_T) es un vector aleatorio conjuntamente normal con media 0 y matriz de covarianza

$$T \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Si los dos movimientos brownianos W y B no están correlacionados (es decir, si $\rho = 0$), entonces la simulación es sencilla: uno podría simplemente muestrear dos variables aleatorias normales estándar independientes Z_1 y Z_2, y deja

$$\begin{aligned} X_T &= X_0 \mathrm{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_1\sqrt{T}Z_1\right\}, \\ Y_T &= Y_0 \mathrm{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_2\sqrt{T}Z_2\right\}. \end{aligned}$$

Cuando $\rho \neq 0$, la simulación es más complicada. Recuerda que si Z_1 y Z_2 son dos variables aleatorias normales estándar independientes, entonces

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

es un vector aleatorio normal estándar bidimensional (consulte el Apéndice A). Por lo tanto, para cualquier 2×2 matriz $C = [C_{yo}]$, el vector aleatorio

$$R = CZ = \begin{bmatrix} C_{11}Z_1 + C_{12}Z_2 \\ C_{21}Z_1 + C_{22}Z_2 \end{bmatrix}$$

es conjuntamente normal con media 0 y matriz de covarianza CC'. Si existe una matriz C tal que

$$CC' = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

después $\sqrt{T}R$ tendrá la misma distribución que (W_T, B_T) y podemos dejar

$$\begin{aligned} X_T &= X_0 \mathrm{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_1\sqrt{T}R_1\right\}, \\ Y_T &= Y_0 \mathrm{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_2\sqrt{T}R_2\right\}. \end{aligned}$$

Hay muchas opciones de C que satisfacen (4.2). Una particularmente conveniente es cuando C es una matriz triangular inferior:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

En este caso

$$CC' = \begin{bmatrix} C_{11}^2 & C_{11}C_{21} \\ C_{21}C_{11} & C_{21}^2+C_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Tomando $C_{11}= 1$, llegamos a

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}.$$

A continuación se muestra el pseudocódigo para estimar el precio de la opción de compra con margen.

Pseudocódigo:

establecer $C_{11}= 1, C_{21}=\rho, C_{22}=$ por $\sqrt{1-\rho^2}$

yo $=1, 2, \ldots,$ norte

generar Z_1 y Z_2 de NORTE(0, 1)

establecer $R_1=C_{11}Z_1$ y $R_2=C_{21}Z_1+C_{22}Z_2$

establecer $X_i=X_0\operatorname{Exp}\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T+\sigma_1\sqrt{T}R_1\right\}$

establecer $Y_i= Y_0\operatorname{Exp}\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T+\sigma_2\sqrt{T}R_2\right\}$

calcular el pago descontado $H_i= mi^{-rT}(X_i- Y_i- k)^+$

calcule la estimación $\hat{v}= \frac{1}{\text{norte}}(H_1 + H_2+\cdots+H_{\text{norte}})$

calcule el error estándar $SE =\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{yo=1}^{\text{norte}}H_i^2- n\hat{v}^2\right)}$.

Los resultados de la simulación se reportan en la Tabla 4.3. Los parámetros están dados por

$$X_0= 50, Y_0= 45, r =0.05, \sigma_1= 0{,}2, \sigma_2= 0{,}3, \rho= 0{,}5, T =1.$$

Tabla 4.3: Simulación de Monte Carlo para opciones de compra con margen

	Tamaño de la muestra norte =2500			Tamaño de la muestra norte =10000		
Precio de ejercicio k	0	5	10	0	5	10
Estimación MC	7.9593	4.9831	2.7024	7.9019	5.0056	2.8861
SE	0,1680	0,1330	0,0990	0,0838	0,0683	0,0521

La matriz C es un caso especial de la Factorización de Cholesky. Se puede generalizar para simular vectores aleatorios normales conjuntos de mayor dimensión. Continuaremos la discusión en el Capítulo 5. ■

Deberíamos dar un par de ejemplos para demostrar que ni todas las estimaciones de Monte Carlo toman la forma de un promedio de muestra, ni la construcción de un esquema de Monte Carlo eficiente es siempre automática. El primer ejemplo se refiere a la estimación del valor en riesgo, que es esencialmente un cuantil de una distribución desconocida. La dificultad allí es la construcción de intervalos de confianza. El segundo ejemplo trata sobre la estimación de la probabilidad de una gran pérdida en un modelo de riesgo de crédito. Tales probabilidades suelen ser muy pequeñas, lo que hace que el esquema simple de Monte Carlo sea bastante ineficiente o incluso inviable.

Ejemplo 4.4. Simular valor en riesgo.Denotamos por$X_i$la rentabilidad diaria de una cartera. Asumir que$X = \{X_1, X_2, \ldots\}$ es uncadena de Markov,es decir, la distribución condicional deX_{yo+1}dado $(X_i, X_{yo-1}, \ldots, X_1)$ solo depende de$X_i$para cada$i$.Dejar$X$ser heterocedástico condicional autorregresivo (ARCH) en el sentido de que dado$X_i = x$, x_{yo+1}se distribuye normalmente con media cero y varianza$\beta_0 + \beta_1 X^2$para algunos$\beta_0 > 0$ y $0 < \beta_1 < 1$. El retorno total dentro de unmetro-el período del día es

$$S = \sum_{yo=1}^{metro} X_i.$$

Asumiendo queX_1es una variable aleatoria normal estándar, estimar el valor en riesgo en el nivel de confianza $1 - pags$.

SSOLUCIÓN: La simulación de una cadena de Markov se realiza secuencialmente como la distribución deX_{yo+1}depende del valor deX_i. A continuación se muestra el pseudocódigo para generar una muestra de$S$:

Pseudocódigo para una muestra del retorno total$S$:

generarX_1de$NORTE(0, 1)$ para

$yo = 2, 3, \ldots, metro$

generar$Z$de$NORTE(0, 1)$

establecer$X_i = \sqrt{\beta_0 + \beta_1 X^2_{yo-1}} \cdot Z$

establecer$S = \sum_{yo=1}^{metro} X_i$.

El esquema de Monte Carlo repetirá los pasos anteriores$norte$tiempos para generar norte copias iid de$S$,decir$S_1, \ldots, S_{norte}$. Recuerde que el valor en riesgo (VaR) en el nivel de confianza $1 - pags$es definido por

$$PAGS(S \leq -VaR) = pags.$$

Por lo tanto, tiene sentido estimar el VaR por un número $\hat{x}$ tal que la fracción de muestras en o por debajo del nivel $-\hat{x}$, es decir,

$$\frac{\text{número de muestras entre } \{S_1, \ldots, S_{\text{norte}}\} \text{ en o por debajo de } -\hat{x}}{\text{norte}},$$

esta cerca depags.Considera elestadísticas de pedidos $\{S_{(1)}, \ldots, S_{(\text{norte})}\}$, que es una permutación de $\{S_1, \ldots, S_{\text{norte}}\}$en orden creciente:

$$S_{(1)} \leq S_{(2)} \leq \cdots \leq S_{(\text{norte})}.$$

Una elección común para $\hat{x}$ es dejark = [np] (la parte entera denotario público)y establecer

$$-\hat{x} = S_{(k)}.$$

Tenga en cuenta que $\hat{x}$ no es el promedio de la muestra ni una estimación imparcial.

La dificultad aquí radica en la construcción de intervalos de confianza para esta estimación. Aunque existen varios enfoques, solo describiremos un método simple basado en las estadísticas de pedidos, que funciona mejor cuando el tamaño de la muestranortees largo. Supongamos que uno está interesado en un $1-\alpha$ intervalo de confianza. El objetivo es encontrar números enteros.$k_1 < k_2$tal que

$$\text{PAGS}(S_{(k_1)} \leq -\text{VaR} < S_{(k_2)}) = 1-\alpha. \tag{4.3}$$

Si esto se puede hacer exactamente o aproximadamente, entonces $(-S_{(k_2)}, -S_{(k_1)}]$sirve como $1-\alpha$intervalo de confianza. Con este fin, observe que el lado izquierdo de (4.3) es simplementePAGS($k_1 \leq y < k_2$), dóndeYdenota el número de muestras que son menores o iguales a $-$VaR. Ya queYes binomial con parámetros (n, p), esta probabilidad es igual

$$\sum_{j=k_1}^{k_2-1} \binom{\text{norte}}{j} (1-\text{pags})^j \text{pags}^{n-j}.$$

Cuandonortees grande, una evaluación directa de esta suma es difícil. Sin embargo, uno puede usar la aproximación normal de las distribuciones binomiales (vea el Ejercicio 4.1) para concluir que

$$\text{PAGS}(S_{(k_1)} \leq -\text{VaR} < S_{(k_2)}) \approx 1 - \Phi\left(\frac{k_1 - \text{notario público}}{\sqrt{\text{notario público}(1-\text{pags})}}\right) - \Phi\left(-\frac{k_2 - \text{notario público}}{\sqrt{\text{notario público}(1-\text{pags})}}\right),$$

lo que lleva a la siguiente elección dek_1yk_2(tomando parte entera si es necesario):

$$k_1 = np - \sqrt{np(1-p)}\, z_{\alpha/2}, \qquad k_2 = np + \sqrt{np(1-p)}\, z_{\alpha/2}.$$

Los resultados de la simulación se reportan en la Tabla 4.4, dadaβ_0=β_1= 0,5 y metro =10. Estimamos el valor en riesgo en el nivel de confianza 1 −pagsy dé un intervalo de confianza del 95% parap =0,05, 0,02, 0,01, respectivamente. El tamaño de la muestra esnorte =10000.

Tabla 4.4: Simulación de Monte Carlo para valor en riesgo

pags	0.05	0.02	0.01
k	500	200	100
(k_1,k_2)	(458,542)	(173, 227)	(80,120)
Estimar $\hat{x}$	4.9978	6.4978	7.7428
IC del 95 %	[4.8727, 5.1618]	[6.3381,6.6835]	[7.4650, 8.0430]

La probabilidad en (4.3) no depende de la distribución subyacente de S.Por esta razón, se dice que los intervalos de confianza construidos aquí son distribucion gratisono paramétrico ■

Ejemplo 4.5. Dificultad para estimar probabilidades pequeñas.Considere el modelo de riesgo crediticio de cartera de un factor en el ejemplo 1.9. Dejar$C_k$denote la pérdida por incumplimiento delk-el obligado. Entonces la pérdida total es

$$L = \sum_{k=1}^{metro} C_k 1_{\{X_k \geq X_k\}} \quad .$$

Estime la probabilidad de queLexcede un umbral grande dadoH.

SSOLUCIÓN: El algoritmo de simulación es sencillo.

Pseudocódigo:

poryo =1, 2, . . . ,norte

generar muestras independientesZ,ε_1,. . . ,ε_{metro}deNORTE(0, 1)

calcularX_k=$\rho_k Z + \sqrt{1 - \rho^2_k}\,\varepsilon_k$pork =1, . . , metro

calcular$L = \sum_{k=1}^{metro} C_k 1_{\{X_k \geq X_k\}}$

establecerH_i=1 siL > h;establecerH_i=0 de lo contrario

calcule la estimación $\hat{v} = \frac{1}{norte}(H_1 + H_2 + \cdots + H_{norte})$

calcule el error estándar $SE = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{yo=1}^{norte} H_i^2 - Nevada^2\right)}$.

Establecermetro $=3, C_1 = 2, C_2 = 1, C_3 = 4, \rho_1 = 0{,}2, \rho = 0{,}5, \rho_3 = 0{,}8$. Se supone que los niveles son$X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2$. Los resultados de la simulación se reportan en la Tabla 4.5, donde también hemos incluido

$$\text{Error Relativo Empírico} = \frac{\text{Error estándar}}{\text{Estimar}}.$$

Tabla 4.5: Simulación de Monte Carlo para un modelo de riesgo de crédito

	Tamaño de la muestranorte =2500 1			Tamaño de la muestranorte =10000		
Límiteh		2	4	1	2	4
Estimación de MC	0.1840	0.0476	0.0136	0.1780	0.0528	0.0150
SE	0.0078	0.0043	0.0023	0.0038	0.0022	0.0012
RE	4,24%	9,03%	16,91%	2,13%	4,17%	8,00%
	Tamaño de la muestranorte =10000			Tamaño de la muestranorte =40000		
Límiteh	681068					10
Estimación CM	0,0028	0,0000	0,0000	0,0032	0,0000	0,0000
SE	0.0005	0.0000	0.0000	0.0003	0.0000	0.0000
RE	18,87%	Yaya	Yaya	8,76%	Yaya	Yaya

Una observación interesante es que como el umbral$h$aumenta, la probabilidad disminuye y la calidad de las estimaciones se deteriora. La razón es que solo para una fracción muy pequeña de muestras la pérdida total excederá el umbral grande$H$. Con tan pocos resultados, la estimación no puede ser precisa. Por lo tanto, el Monte Carlo simple es ineficiente para estimar probabilidades pequeñas; véase también el ejercicio 4.2. Claramente, se necesita un esquema de Monte Carlo más eficiente para estimar cantidades tan pequeñas. ■

4.4 Resumen

La simulación Monte Carlo es una herramienta muy útil para el análisis cuantitativo de modelos financieros. Es muy adecuado para la computación paralela y su flexibilidad puede acomodar modelos complicados que de otro modo serían inaccesibles.

La simulación Monte Carlo es un algoritmo aleatorio. Una ejecución diferente de simulación producirá una estimación diferente. Es muy diferente de aquellos esquemas numéricos deterministas para evaluar integrales, que suelen estar diseñados para problemas de dimensiones reducidas. Dado que muchos de los problemas de fijación de precios en la ingeniería financiera son intrínsecamente problemas de evaluación de integrales de dimensiones grandes o infinitas, estos algoritmos deterministas no son adecuados para este tipo de tareas. Por el contrario, el teorema del límite central afirma que√en el error estándar de una estimación de Monte Carlo decae en el orden deO(1/ norte)con respecto al tamaño de la muestran, independientemente de la dimensión.

Pero el método Monte Carlo no está exento de defectos. Aunque a menudo es posible mejorar la eficiencia de un Monte Carlo sc dado√hemo, poco se puede hacer para acelerar la convergencia por encima de la tasaO(1/norte).A menudo se requiere un tamaño de muestra grande para lograr un nivel de precisión deseable.

Finalmente, el diseño de los esquemas de Monte Carlo no es tan sencillo como podría pensarse. Esto es especialmente cierto cuando la cantidad de interés está asociada con eventos de pequeñas probabilidades, que es un escenario común en el análisis de riesgos. Aquí hay que ser muy cauteloso, ya que no es raro que una estimación aparentemente muy precisa (es decir, una estimación con un error estándar muy pequeño; véase el ejercicio 4.F, por ejemplo) pueda estar muy alejada del valor real. Siempre que sea posible, se debe proporcionar una justificación teórica de un esquema de Monte Carlo.

Ejercicios

Problemas de lápiz y papel

4.1Suponer que$X_1, \ldots, X_{norte}$son iid variables aleatorias de Bernoulli con parámetro pags.Después

$$S_{norte}=X_1+\ldots+X_{norte}$$

es una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p).Utilice el teorema del límite central para explicar que, cuandonortees grande, la distribución binomial con parámetros (norte, pag)se puede aproximar por la distribución normal con media notario públicoy varianzanotario público(1 -pags).es decir, por$X \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{PAGS}\left(\frac{S_{norte}-np}{\sqrt{\text{notario público}(1-\text{pags})}} \le X\right) \approx \Phi(X).$$

4.2Suponer que$X_1, \ldots, X_{norte}$son iid variables aleatorias de Bernoulli con parámetro desconocidopags.La media

$$\bar{X} = \frac{1}{norte}(X_1 + \cdots + X_{norte})$$

se puede utilizar para estimarpags.

(a) ¿Cuáles son el valor esperado y la desviación estándar de $\bar{X}$?

(b) Escriba un intervalo de confianza del 95% parapags.

(c) Defina el error relativo como

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Desviación estándar de } \bar{X}}{\text{Valor esperado de } \bar{X}}.$$

¿Qué tan grande debenorteser tal que el error relativo sea a lo sumo del 5%?

4.3En una clase de 100 estudiantes, se le pide a cada estudiante que ejecute una simulación para estimar el precio de una opción y proporcione un intervalo de confianza del 95 %, independientemente de los demás. ¿Cuál es la distribución del número de intervalos de confianza que cubren el verdadero valor del precio de la opción? ¿Es probable que todos los intervalos de confianza cubran el verdadero valor del precio de la opción?

4.4Dejar$X$sea una variable aleatoria con densidad$f(x)$.Es fácil ver que estimando la integral

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)\, f(x)\, dx$$

equivale a estimar el valor esperado$E[h(X)]$.Utilice esta observación para diseñar esquemas de Monte Carlo para estimar las siguientes integrales:

$$\int_0^\infty \text{mi}^{-x}\text{pecado}(x)\, dx, \qquad 4\int_0^1 \sqrt{1-X^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{X}}\text{mi}^{-x^2}dx.$$

Escriba el pseudocódigo (debe informar tanto la estimación como el error estándar).

4.5Dejar$\hat{\mu}$ser una estimación de alguna cantidad desconocidaμ. La diferenciaMI[$\hat{\mu}$] -μ se dice que es elparcialidadde$\hat{\mu}$. loserror cuadrático medio (MSE) de$\hat{\mu}$se define como MI[($\hat{\mu}$−μ)^2]. Muestra esa

$$\text{MSE} = (\text{Sesgo de}\hat{\mu})^2 + \text{Var}[\hat{\mu}].$$

En general, es beneficioso asignar el presupuesto computacional para equilibrar el sesgo y la varianza. La regla general es hacer que el sesgo y la desviación estándar de la estimación sean aproximadamente del mismo orden [11].

4.6Muestras de un vector aleatorio (X, Y)a menudo se puede dibujar de manera secuencial: una primera muestraXde su distribución marginal y luego muestrasY de su distribución condicional dadaX.Explique que es esencialmente lo que se ha hecho en el ejemplo 4.3 para simular el vector aleatorio normal conjunto R = (R_1,R_2) con media 0 y matriz de covarianza Σ.

4.7DejarW = {W_t: t≥0} sea un movimiento browniano estándar. Considere el vector aleatorio (W_t, m_t),dóndeMETRO$_t$es el máximo corriente deWA tiempoyo,eso es,

$$\text{METRO}_t = \text{máximo}_{0\leq s\leq t} W_s.$$

Demuestre que la distribución condicional deMETRO$_T$dadoW$_T$= xes idéntico a la distribución de

$$\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 + 2TY}\right),$$

dóndeYes una variable aleatoria exponencial de tasa uno. Use este resultado para diseñar un esquema para extraer muestras de

(a) (W_T, m_T);

(b) (W_{t_1},METRO$_{t_1}$,W_{t_2},METRO$_{t_2}$, . . . ,$W_{t_{metro}}$, $m_{t_{metro}}$)dado 0 <t_1<t_2<· · · <t_{metro}= T;

(C) (B_T, m^B_T),dóndeB_t= W_t+θtes movimiento browniano con derivaθyMETRO^B es el máximo corriente deB,eso es,

$$\text{METRO}^B_t = \text{máximo}_{0\leq s\leq t} B_s;$$

(d) (B_{t_1},METRO$^B_{t_1}$, B_{t_2},METRO$^B_{t_2}$, . . . , $B_{t_{metro}}$, $m^B_{t_{metro}}$)dado 0 <t_1<t_2<· · · <t_{metro}= t

Escribe el pseudocódigo.Insinuación:Recuerde el ejercicio 2.12 para (c) y (d).

4.8Considere los siguientes dos esquemas de Monte Carlo para estimarμ= E[h(X) + f(X)].El tamaño total de la muestra es de 2norteen ambos esquemas.

(a)Esquema I: Use los mismos números aleatorios.Generar 2nortecopias iid deX,decir {X_1, . . . ,X_{2norte}}.la estimación es

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2norte}\sum_{yo=1}^{2norte}[h(X_i) + f(X_i)].$$

(b)Esquema II: Usar Diferentes Números Aleatorios.Escribeμ=E[h(X)] + E[f (X)] y estimar los dos valores esperados por separado. Generar 2nortecopias iid de X,decir $\{X_1, \ldots, X_{norte}, Y_1, \ldots, Y_{norte}\}$.la estimación es

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{norte}\sum_{yo=1}^{norte} h(X_i) + \frac{1}{norte}\sum_{yo=1}^{norte} (Y_i).$$

Demuestra que ambos$\hat{\mu}_1$y$\hat{\mu}_2$son estimaciones no sesgadas paraμ, pero$\hat{\mu}_1$siempre tiene una varianza menor porque

$$\mathrm{Var}[\hat{\mu}_1] - \mathrm{Var}[\hat{\mu}_2] = -\frac{1}{2norte}\mathrm{Var}[h(X) - f(X)] \leq 0.$$

Este ejercicio muestra que si uno quiere estimar el precio de un instrumento financiero como straddle (la combinación de una opción de compra y una opción de venta con el mismo precio de ejercicio), es beneficioso usar los mismos números aleatorios para estimar su precio en conjunto en lugar de estimar los precios de compra y venta por separado.

MATLAB© RProblemas

En los Ejercicios 4.A – 4.C, suponga que el precio de la acción subyacente es un movimiento browniano geométrico bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo:

$$S_t = S_0 \mathrm{Exp}\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\},$$

dóndeWes un movimiento browniano estándar yres la tasa de interés libre de riesgo.

4.AEscriba una función para estimar el precio de una opción de venta binaria con vencimiento Ty pago

$$X = 1_{\{S_T \leq K\}}.$$

Los parámetros de entrada sonS_0,r,σ,k, t,y el tamaño de la muestranorte.La función debe generar la estimación del precio y su error estándar. Reporte sus resultados para

$$S_0 = 30, r = 0.05, \sigma = 0,2, k = 30, T = 0.5, norte = 10000.$$

Comparar con el valor teórico del precio de la opción.

4.BEscriba una función para estimar el precio de una opción call down-and-out monitoreada discretamente con vencimientoTy pago

$$(S_T - k)^+ \cdot 1_{\{\min(S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t.m.}) \geq b\}}.$$

Las fechas de seguimiento$t_1, \ldots, t_{metro}$están preespecificados y $0 < t_1 < \cdots < t_{metro}$= t La función debe tener los siguientes parámetros como entrada

$$S_0, r, \sigma, T, K, b, m, (t_1, \ldots, t_{metro}), norte,$$

dóndenortedenota el tamaño de la muestra. La salida de la función debe incluir la estimación del precio de la opción y el error estándar. Reporte sus resultados para

$$S_0 = 50, r = 0.10, \sigma = 0,2, T = 1, k = 50, \text{segundo} = 45,$$
$$\text{metro} = 12, t_i = iT/m, n = 10000.$$

4.CConsidere una opción de venta retrospectiva con precio de ejercicio y vencimiento flotantes T, cuyo pago es

$$X = \text{máximo}_{0 \leq t \leq T} S_t - S_T.$$

(a) Escriba una función para estimar el precio de esta opción retrospectiva, donde el máximo del precio de la acción se aproxima por

$$\text{máx}(S_{t_0}, S_{t_1}, \ldots, S_{t_{\text{metro}}})$$

para algunos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{\text{metro}} = t$Sea la entrada de la función

$$S_0, r, \sigma, t, m, (t_0, t_1, \ldots, t_{\text{metro}}), \text{norte},$$

dóndenortees el tamaño de la muestra. ¿La estimación es imparcial? Si no es así, ¿el sesgo es positivo o negativo?

(b) Escriba una función que produzca una estimación no sesgada del precio de la opción de venta retrospectiva. La entrada de la función debe serS_0,r, t,σ,norte. Insinuación:Use el Ejercicio 4.7 (a) y el Lema 2.2, o use el Ejercicio 4.7 (c).

(c) Reporte sus estimaciones y errores estándar de (a) y (b) con los parámetros dados por

$$S_0 = 20, r = 0.03, \sigma = 0,2, T = 0.5, \text{norte} = 10000.$$

Para la parte (a) sea$t_i = iT/m$y$\text{metro} = 10$, 100, 1000, respectivamente.

4.DSupongamos que el precio de las acciones$S$es un movimiento browniano geométrico con saltos:

$$S_t = S_0 \text{Exp}\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t + \sum_{yo=1}^{\text{norte}_t} Y_i\right\},$$

dónde$W$es un movimiento browniano estándar,norte = $\{n_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con tasaλ, yY_i's son iid variables aleatorias normales con distribución NORTE$(0, \nu^2)$. Asumir que$W, N, \{Y_i\}$son independientes Escribe una función para estimar la probabilidad

$$\text{PAGS}\left(\text{máximo}_{1 \leq i \leq \text{metro}} S_{t_i} \geq b\right),$$

donde $0 < t_1 < \cdots < t_{\text{metro}} = T$son fechas predeterminadas y$b$es un umbral dado. La función debe tener parámetros de entrada.

$$S_0, \mu, \sigma, \lambda, \nu, b, t, m, (t_1, \ldots, t_{\text{metro}}), \text{norte},$$

dóndenortees el tamaño de la muestra. Reporte su estimación y su error estándar para

$$S_0 = 50, \mu = 0.1, \sigma = 0{,}2, \lambda = 2, \nu = 0{,}3, \text{segundo} = 55, T = 1,$$

$$\text{metro} = 50, t_i = iT/m, n = 10000.$$

4.ELa configuración es análoga al Ejemplo 4.4. Considere el siguiente modelo GARCH: para cada$i \geq 1$,$X_{yo+1} = \sigma_{yo+1} Z_{yo+1}$, dónde$Z_{yo+1}$es una variable aleatoria normal estándar independiente de $\{X_1, \ldots, X_i\}$y

$$\sigma^2_{yo+1} = \beta_0 + \beta_1 X^2_i + \beta_2 \sigma^2_i.$$

Asumiendo queX_1se distribuye normalmente como$NORTE(0, \sigma^2_1)$ para alguna constanteσ_1, escriba una función para estimar el valor en riesgo del rendimiento total

$$S = \sum_{yo=1}^{metro} X_i$$

en el nivel de confianza $1 - pags$.Los parámetros de entrada de la función deben ser

$$\sigma_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, m, p, n,$$

dóndenortedenota el tamaño de la muestra. Reporte sus estimaciones e intervalos de confianza del 95% para

$$\sigma_1 = 1, \beta_0 = 0{,}5, \beta_1 = 0{,}3, \beta_2 = 0{,}5, \text{metro} = 10, \text{norte} = 10000,$$

y$p = 0{,}05$, $0{,}01$, respectivamente.

4.FConsidere el problema de estimar$MI[\mathrm{Exp}\{\theta Z - \theta^2/2\}]$ para alguna constanteθ y variable aleatoria normal estándar$z$Use el esquema simple de Monte Carlo con tamaño de muestra$norte = 1, 000, 000$. Informe los resultados de su simulación para$\theta = 6$ y$\theta = 7$, respectivamente. Explique por qué sus resultados son inconsistentes con el valor teórico, que es uno (vea el Ejercicio 1.7).Insinuación:El valor esperado Se puede escribir como

$$\int_R mi^{\theta x - \frac{1}{2}\theta^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} mi^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

para que rango de$X$¿De dónde proviene la mayor parte de la contribución a la integral? ¿Puedes confiar en los errores estándar?