Fundamentos de Matemáticas
Programas de Matemáticas, Estadística, Ciencias de la Computación

Juan Carlos Riaño Rojas

Introducción

Se hará un estudio riguroso de los tipos de demostración, los conjuntos, las relaciones y las funciones. METODOLOGÍA: Se usarán las horas de clase magistral para que el profesor haga una exposición teórica de los conceptos más importantes y una presentación de problemas modelos; para complementar la teoría se desarrollarán ejercicios en clase y correspondiente a cada tema, el docente elaborará un taller de ejercicios para que, con su asesoría, sea resuelto por los estudiantes en monitoria. En lo posible, se asignaran tareas a los estudiantes para que sean resueltas usando algún software matemático.

Contenido

Unidad 1: Fundamentos Lógicos y Estructurales

Lógica proposicional y de predicados, demostraciones formales.Proposiciones, negación, tautologías, Demostración directa, por contradicción.

Unidad 2: Fundamentos con Enfoque Analítico

Conjuntos, operaciones y propiedades ZFC, estructuras matemáticas.

Unidad 3: Fundamentos y Estadística

Colecciones, sigma-álgebras, probabilidad axiomática, operaciones y propiedades.

Unidad 4: Fundamentos Algebraico-Estructurales

Relaciones reflexivas, simétricas, transitivas, Relaciones de equivalencia y órdenes parciales, Relaciones de equivalencia y de orden, poset, retículos.

Unidad 5: Fundamentos Funciones y Propiedades

funciones y homomorfismos, propiedades. Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas, Imagen directa e inversa de funciones

Evaluación

- Quices, Talleres, Trabajos, Participación en Clase y Monitorias: 25 %
- Examen 1: 25 % tema evaluado en lo posible semana 5, a evaluar capítulos 1-2.
- Examen 2: 25 % tema evaluado en lo posible semana 5, a evaluar capítulos 2-3.
- Examen 3: 25 % tema evaluado en lo posible semana 5, a evaluar capítulos 4-5.

En lo posible se harán tres parciales del 25 % cada uno y talleres que trabajos en clase o en monitoria que suman el otro 25 %. En todos los parciales debe llevar hojas cuadriculadas tipo examen. Se elige la mejor opción entre:

- Promediar entre 4 notas: 3 exámenes y Nota de ejercicios cuadernos de ejercicios, y bonos etc...
- Promediar las notas de examen y sumar a esta un porcentaje de una unidad respecto al estudiante que más tenga entre ejercicios, cuaderno de ejercicios, y bonos etc...

Nota: En los exámenes no se permite el uso de calculadora, ni celular por ello las maletas deben colocarse al frente del tablero guardando en el interior sus respectivos celulares... las evaluaciones serán grabadas por el aumento de fraude en los parciales pasado.

A lo largo del curso se realizarán **tres evaluaciones parciales**, cada una con un valor del **25 %** de la nota final. El **25 % restante** se obtendrá a partir de talleres, trabajos desarrollados en clase y actividades realizadas en monitoria.

En cada evaluación parcial, los estudiantes deberán utilizar **hojas cuadriculadas tipo examen**. La nota definitiva del curso se calculará tomando la **mejor opción** entre los siguientes esquemas de evaluación:

- El promedio de **cuatro notas**: las tres evaluaciones parciales y una nota correspondiente a talleres, cuaderno de ejercicios, actividades adicionales y posibles bonificaciones.
- El promedio de las **tres evaluaciones parciales**, al cual se sumará un porcentaje adicional basado en el desempeño de los estudiante que más trabajos y bonos obtengan quienes se les asignará una unidad, comparado con estos estudiante que obtenga el mejor resultado en talleres, cuaderno de ejercicios y bonificaciones, los restantes reciben un porcentaje proporcional.

Importante: Durante las evaluaciones **no está permitido el uso de calculadoras, celulares u otros dispositivos electrónicos**. Por esta razón, las maletas deberán colocarse en la parte frontal del salón, guardando en su interior los dispositivos electrónicos. Las evaluaciones podrán ser **grabadas**, como medida preventiva ante el aumento de casos de fraude académico en evaluaciones anteriores.

Talleres

Cada unidad cuenta con un banco de ejercicios: básicos, intermedios y avanzados.

Bibliografía

- Pinter, A Book of Abstract Algebra
- Bloch, A First Course in Abstract Mathematics
- Halmos, Naive Set Theory
- Velleman, How to Prove It
- Tao, Analysis I
- Muñoz, Introducción a la teoría de conjuntos.
- Jech, Set Theory

1. Lógica Matemática y Técnicas de Demostración

1.1. Ejercicios operatorios y técnicos

1. Construya la tabla de verdad de la proposición
$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$
y determine si es una tautología.

2. Determine si la proposición
$$(p \wedge (p \to q)) \to q$$
es lógicamente válida.

3. Simplifique la proposición
$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$$
utilizando leyes de De Morgan y equivalencias lógicas.

4. Determine si
$$(p \to q) \wedge (q \to r) \models (p \to r).$$

5. Escriba la negación lógica correcta de:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x < y^2.$$

6. Exprese en símbolos lógicos: *Existe un entero que es par y divisible por 3.*

7. Determine si las proposiciones

$$p \to q \quad \text{y} \quad \neg q \to \neg p$$

son lógicamente equivalentes.

8. Analice el valor de verdad de una proposición universal cuando existe un contraejemplo.

9. Clasifique como verdadera o falsa y justifique:

   a) Todo número primo impar es mayor que 2.

   b) Existe un número primo par distinto de 2.

10. Identifique el error lógico en el siguiente argumento:

$$\text{Si } x^2 = 4 \text{ entonces } x = 2. \quad x = -2. \quad \text{Luego } x^2 \neq 4.$$

1.2. Ejercicios de deducción y demostración

26. Demuestre directamente que la suma de dos números pares es par.

27. Demuestre por contrapositiva: *Si n^2 es impar, entonces n es impar.*

28. Demuestre por contradicción que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

29. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Demuestre que si $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $|a| = |b|$.

30. Demuestre que no existe el menor número racional positivo.

31. Pruebe que para todo entero n,

$$n^2 \equiv 0 \text{ o } 1 \pmod{4}.$$

32. Demuestre que la suma de tres enteros consecutivos es divisible por 3.

33. Use inducción matemática para demostrar que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

34. Use inducción para probar que

$$2^n > n^2 \quad \text{para todo } n \geq 5.$$

35. Demuestre que todo entero mayor que 1 tiene un divisor primo.

1.3. Retos de alta dificultad (tipo olimpiada)

66. Demuestre que no existen enteros a, b tales que

$$a^2 = 2b^2 + 1.$$

67. Demuestre que si n^2 es divisible por 3, entonces n es divisible por 3.

68. Pruebe que para todo entero n,

$$n^3 - n \text{ es divisible por 3.}$$

69. Demuestre que no existen tres enteros consecutivos que sean cuadrados perfectos.

70. Sea p primo. Demuestre que si $p \mid ab$, entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.

71. Demuestre que existen infinitos números primos.

72. Encuentre el error lógico en una demostración que concluye que $1 = 2$.

73. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$n^2 + n \text{ es un número par.}$$

2. Fundamentos de Matemáticas – Banco Completo de Ejercicios

2.1. Unidad 1: Lógica Matemática y Técnicas de Demostración

1. Construya la tabla de verdad de

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

   y determine si es una tautología.

2. Determine si

$$(p \land (p \to q)) \to q$$

   es lógicamente válida.

3. Simplifique:

$$\neg(p \lor (\neg p \land q)).$$

4. Determine si

$$(p \to q) \land (q \to r) \models (p \to r).$$

5. Escriba la negación lógica de

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x < y^2).$$

6. Exprese en símbolos: *Existe un entero par divisible por* 3.

7. Determine si $p \to q$ es equivalente a $\neg q \to \neg p$.

8. Clasifique como verdadera o falsa y justifique:

   a) Todo primo impar es mayor que 2.

   b) Existe un primo par distinto de 2.

9. Demuestre directamente que la suma de dos enteros pares es par.

10. Demuestre por contrapositiva: si n^2 es impar, entonces n es impar.

11. Demuestre por contradicción que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

12. Pruebe que no existe el menor racional positivo.

13. Use inducción para demostrar

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

14. Use inducción para probar que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$.

15. Demuestre que existen infinitos números primos.

2.2. Unidad 2: Teoría de Conjuntos

16. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

17. Demuestre que

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

18. Pruebe que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

19. Demuestre que $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$.

20. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestre:

$$A \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (A \cap F).$$

21. Demuestre que $\mathcal{P}(A)$ tiene $2^{|A|}$ elementos cuando A es finito.

22. Demuestre que $\mathbb{N}$ es numerable.

23. Pruebe que $\mathbb{Z}$ es numerable.

24. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es numerable.
25. Demuestre que $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ no es numerable.
26. Pruebe que si A es infinito, entonces existe una inyección de $\mathbb{N}$ en A.
27. Demuestre que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable.
28. Pruebe que no existe una función sobreyectiva de un conjunto a su conjunto potencia.
29. Demuestre el principio del palomar.
30. Demuestre que toda familia finita de conjuntos no vacíos tiene intersección no vacía bajo condiciones adecuadas.

2.3. Unidad 3: Funciones

31. Determine si la relación dada define una función.
32. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
33. Demuestre que la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva.
34. Demuestre que una función biyectiva tiene inversa.
35. Demuestre que la inversa de una función biyectiva es biyectiva.
36. Sea $f : A \to B$. Demuestre que f es inyectiva si y solo si

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

37. Sea $f : A \to B$. Demuestre que f es sobreyectiva si y solo si $\mathrm{Im}(f) = B$.
38. Demuestre que la composición de funciones no es conmutativa en general.
39. Construya un ejemplo de función inyectiva no sobreyectiva.
40. Construya un ejemplo de función sobreyectiva no inyectiva.
41. Demuestre que si A es finito y $f : A \to A$ es inyectiva, entonces es biyectiva.
42. Demuestre que si A es finito y $f : A \to A$ es sobreyectiva, entonces es biyectiva.
43. Demuestre que la imagen de una unión es la unión de las imágenes.
44. Pruebe que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ y dé un contraejemplo para la igualdad.
45. Demuestre que $f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C)$.

2.4. Unidad 4: Relaciones y Estructuras

46. Determine si una relación dada es reflexiva, simétrica y transitiva.
47. Demuestre que la relación de congruencia módulo n es una relación de equivalencia.
48. Describa las clases de equivalencia módulo 5.
49. Demuestre que las clases de equivalencia forman una partición del conjunto.
50. Demuestre que toda partición induce una relación de equivalencia.
51. Determine si una relación dada es un orden parcial.
52. Demuestre que la relación $\subseteq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(A)$.
53. Construya el diagrama de Hasse de un conjunto parcialmente ordenado finito.
54. Determine si un orden parcial dado es total.
55. Demuestre que todo conjunto finito parcialmente ordenado tiene elementos maximales y minimales.
56. Dé un ejemplo de orden parcial sin elementos máximos.
57. Demuestre que la relación $\leq$ en $\mathbb{R}$ es un orden total.
58. Determine si una relación es antisimétrica.
59. Demuestre que un orden total es un orden parcial.
60. Analice si dos órdenes parciales pueden ser isomorfos.

3. Fundamentos de Matemáticas – Banco de Ejercicios

1. Construya la tabla de verdad de

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

y determine si es una tautología.

2. Determine si

$$(p \land (p \to q)) \to q$$

es lógicamente válida.

3. Simplifique usando leyes lógicas:

$$\neg(p \lor (\neg p \land q)).$$

4. Determine si
$$(p \to q) \wedge (q \to r) \models (p \to r).$$
5. Escriba la negación lógica de
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x < y^2).$$
6. Exprese en símbolos lógicos: Existe un entero par divisible por 3.
7. Determine si $p \to q$ es equivalente a $\neg q \to \neg p$.
8. Clasifique como verdadera o falsa y justifique:
   a) Todo primo impar es mayor que 2.
   b) Existe un primo par distinto de 2.
9. Demuestre directamente que la suma de dos enteros pares es par.
10. Demuestre por contrapositiva: si n^2 es impar, entonces n es impar.
11. Demuestre por contradicción que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
12. Pruebe que no existe el menor número racional positivo.
13. Use inducción matemática para demostrar
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
14. Use inducción para probar que $2^n > n^2$ para todo $n \geq 5$.
15. Demuestre que existen infinitos números primos.
16. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$
17. Demuestre que
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$
18. Pruebe que si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.
19. Demuestre que $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$.
20. Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos. Demuestre que
$$A \cap \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (A \cap F).$$
21. Demuestre que si A es finito, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

22. Demuestre que $\mathbb{N}$ es numerable.

23. Demuestre que $\mathbb{Z}$ es numerable.

24. Demuestre que $\mathbb{Q}$ es numerable.

25. Demuestre que $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ no es numerable.

26. Pruebe que el producto cartesiano de dos conjuntos numerables es numerable.

27. Demuestre que no existe una función sobreyectiva de un conjunto a su conjunto potencia.

28. Enuncie y demuestre el principio del palomar.

29. Demuestre que toda familia finita de conjuntos no vacíos tiene intersección no vacía bajo condiciones adecuadas.

30. Pruebe que si A es infinito, existe una inyección $\mathbb{N} \to A$.

31. Determine si una relación dada define una función.

32. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demuestre que si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

33. Demuestre que la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva.

34. Demuestre que una función biyectiva tiene inversa.

35. Demuestre que la inversa de una función biyectiva es biyectiva.

36. Demuestre que $f : A \to B$ es inyectiva si y solo si
$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

37. Demuestre que $f : A \to B$ es sobreyectiva si y solo si $\mathrm{Im}(f) = B$.

38. Construya un ejemplo de función inyectiva no sobreyectiva.

39. Construya un ejemplo de función sobreyectiva no inyectiva.

40. Demuestre que si A es finito y $f : A \to A$ es inyectiva, entonces es biyectiva.

41. Demuestre que si A es finito y $f : A \to A$ es sobreyectiva, entonces es biyectiva.

42. Demuestre que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

43. Pruebe que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ y dé un contraejemplo para la igualdad.

44. Demuestre que
$$f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C).$$

45. Demuestre que la composición de funciones no es conmutativa en general.
46. Determine si una relación dada es reflexiva, simétrica y transitiva.
47. Demuestre que la congruencia módulo n es una relación de equivalencia.
48. Describa las clases de equivalencia módulo 5.
49. Demuestre que las clases de equivalencia forman una partición.
50. Demuestre que toda partición induce una relación de equivalencia.
51. Determine si una relación dada es un orden parcial.
52. Demuestre que $\subseteq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(A)$.
53. Construya el diagrama de Hasse de un conjunto parcialmente ordenado finito.
54. Determine si un orden parcial dado es total.
55. Demuestre que todo conjunto parcialmente ordenado finito tiene elementos minimales y maximales.
56. Dé un ejemplo de orden parcial sin elementos maximales.
57. Demuestre que $\leq$ es un orden total sobre $\mathbb{R}$.
58. Determine si una relación es antisimétrica.
59. Demuestre que todo orden total es un orden parcial.
60. Analice cuándo dos órdenes parciales son isomorfos.

4. Retos de Fundamentos para Estadística

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible. Demuestre que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo intersecciones finitas.
2. Demuestre que si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra sobre Ω, entonces $\Omega \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \in \mathcal{F}$.
3. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de Ω. Demuestre que existe una única σ-álgebra mínima que contiene a $\mathcal{A}$.
4. Demuestre que la intersección arbitraria de σ-álgebras es una σ-álgebra.
5. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Demuestre que X es medible si y solo si
$$\{X < a\} \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R}.$$
6. Demuestre que si X es una variable aleatoria y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $g \circ X$ es medible.

7. Demuestre que si X y Y son variables aleatorias, entonces $X+Y$ y XY son variables aleatorias.

8. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Demuestre que

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \quad \text{si } A \subseteq B.$$

9. Demuestre que si (A_n) es una sucesión creciente de eventos, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

10. Demuestre que si (A_n) es una sucesión decreciente de eventos con $\mathbb{P}(A_1) < \infty$, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

11. Sea X una variable aleatoria discreta. Demuestre que

$$\sum_{x} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

12. Demuestre que la función de distribución

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

es monótona creciente y continua por la derecha.

13. Demuestre que toda función de distribución define una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}$.

14. Sea X una variable aleatoria integrable. Demuestre que

$$\mathbb{E}[X] \geq 0 \quad \text{si } X \geq 0.$$

15. Demuestre la desigualdad de Markov.

16. Demuestre la desigualdad de Chebyshev.

17. Demuestre que si $X_n \to X$ casi seguramente, entonces $X_n \to X$ en probabilidad.

18. Dé un contraejemplo que muestre que la convergencia en probabilidad no implica convergencia casi segura.

19. Demuestre que la independencia de eventos es una relación simétrica pero no transitiva.

20. Sea (X, Y) un vector aleatorio. Demuestre que si X y Y son independientes, entonces

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y).$$

21. Demuestre que la independencia implica incorrelación, pero no recíprocamente.

22. Demuestre que la esperanza es una aplicación lineal.

23. Demuestre que si $X_n \to X$ en L^2, entonces $X_n \to X$ en probabilidad.

24. Demuestre que el estimador de la media muestral es insesgado.

25. Demuestre que la varianza de la media muestral disminuye con el tamaño de la muestra.

26. Demuestre la ley débil de los grandes números para variables i.i.d. con varianza finita.

27. Enuncie y demuestre una versión básica del teorema central del límite bajo hipótesis simplificadas.

28. Analice rigurosamente el error lógico en una demostración incorrecta del TLC.

29. Demuestre que la convergencia casi segura define una relación de equivalencia.

30. Demuestre que dos variables aleatorias iguales casi seguramente inducen la misma distribución.

5. Retos Aplicados de Matemáticas y Estadística para la Era de la Inteligencia Artificial

1. Considere un sistema de clasificación binaria modelado como una función

$$f : X \to \{0, 1\}.$$

Formule matemáticamente qué significa que el sistema sea determinista, y discuta las implicaciones estadísticas de esta hipótesis.

2. Modele un algoritmo de recomendación como una función aleatoria

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Explique qué significa que el algoritmo sea medible y por qué esta propiedad es esencial para evaluar su comportamiento.

3. Demuestre que dos modelos de IA que producen salidas iguales casi seguramente inducen la misma distribución de resultados, aunque sus arquitecturas internas sean distintas.

4. Un sistema de IA es entrenado con una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$. Formule rigurosamente el concepto de sobreajuste (overfitting) usando convergencia en probabilidad.

5. Demuestre que minimizar el error empírico no garantiza minimizar el error esperado. Construya un ejemplo matemático.

6. Modele un algoritmo de aprendizaje como una sucesión de funciones aleatorias (f_n). Analice bajo qué condiciones f_n converge a una función óptima.
7. Sea $\mathcal{H}$ un conjunto de hipótesis. Discuta, usando teoría de conjuntos, por qué la complejidad de $\mathcal{H}$ afecta la capacidad de generalización.
8. Pruebe que un modelo perfectamente preciso en los datos de entrenamiento puede fallar en datos no observados.
9. Modele el proceso de entrenamiento de una red neuronal como un problema de optimización estocástica y discuta las hipótesis necesarias para la convergencia.
10. Formule matemáticamente el sesgo algorítmico como una propiedad de una función aleatoria condicionada a subpoblaciones.
11. Demuestre que la independencia entre variables de entrada no implica independencia entre las salidas de un modelo no lineal.
12. Modele un sistema de IA como una caja negra y discuta, desde relaciones y funciones, qué significa interpretabilidad.
13. Sea X una variable aleatoria que representa la predicción de un modelo. Explique la diferencia entre precisión puntual y incertidumbre probabilística.
14. Demuestre que dos modelos con igual error promedio pueden tener distribuciones de error radicalmente distintas.
15. Analice matemáticamente por qué los modelos de IA pueden amplificar pequeñas perturbaciones en los datos de entrada.
16. Modele la noción de robustez de un algoritmo como estabilidad ante perturbaciones del dominio.
17. Discuta, usando desigualdades probabilísticas, cómo se cuantifica el riesgo de decisiones automatizadas.
18. Demuestre que aumentar la cantidad de datos no siempre reduce la varianza del estimador aprendido.
19. Analice matemáticamente el dilema entre sesgo y varianza en modelos de aprendizaje automático.
20. Modele un sistema de IA adaptativo como una sucesión dependiente de variables aleatorias y discuta los retos inferenciales.
21. Discuta desde teoría de la medida por qué no toda función "razonable" es aprendible a partir de datos.
22. Formule rigurosamente el concepto de explicabilidad como una relación entre entradas y salidas.

23. Demuestre que la agregación de múltiples modelos puede reducir la varianza, pero no necesariamente el sesgo.
24. Analice matemáticamente la diferencia entre correlación estadística y causalidad en sistemas de IA.
25. Modele un algoritmo de detección de anomalías y discuta los supuestos estadísticos implícitos.
26. Discuta desde probabilidad por qué los modelos predictivos pueden fallar ante cambios de distribución (dataset shift).
27. Analice la toma de decisiones automatizada como un problema de optimización bajo incertidumbre.
28. Modele el aprendizaje continuo como un proceso estocástico y discuta su estabilidad.
29. Discuta matemáticamente por qué no existe un modelo universal óptimo para todos los problemas.
30. Analice desde fundamentos matemáticos los límites teóricos del aprendizaje automático.

6. 100 Retos Tipo Olimpiada Universitaria Internacional (Fundamentos Matemáticos, Estadística e IA)

1. Demuestre que no existen enteros a, b tales que $a^2 - 2b^2 = 3$.
2. Pruebe que si n^2 es divisible por 4, entonces n es par.
3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente. Demuestre que $f(n) \geq n$ para todo n.
4. Demuestre que toda función inyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es sobreyectiva sobre su imagen.
5. Pruebe que no existe una función biyectiva entre un conjunto finito y uno infinito.
6. Demuestre que si A es infinito numerable, entonces $\mathcal{P}(A)$ no es numerable.
7. Sea X una variable aleatoria no negativa. Pruebe que $\mathbb{E}[X] = 0$ implica $X = 0$ c.s.
8. Demuestre que la convergencia casi segura implica convergencia en probabilidad.
9. Dé un ejemplo donde la convergencia en probabilidad no implique convergencia casi segura.
10. Pruebe que la independencia de eventos no es transitiva.
11. Demuestre que si X e Y son independientes, entonces $g(X)$ y $h(Y)$ lo son para funciones medibles.

12. Demuestre que toda relación de equivalencia induce una partición única.
13. Demuestre que toda partición induce una relación de equivalencia.
14. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado finito. Demuestre que existe un elemento minimal.
15. Demuestre que un orden total es necesariamente un orden parcial.
16. Pruebe que no existe un máximo en $(\mathbb{Q}, \leq)$.
17. Sea $f : A \to B$. Demuestre que f es inyectiva si y solo si $f^{-1}(f(X)) = X$ para todo $X \subseteq A$.
18. Pruebe que $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ para toda función f.
19. Demuestre que una función biyectiva preserva cardinalidad.
20. Pruebe que la composición de funciones biyectivas es biyectiva.
21. Demuestre que no toda función tiene inversa.
22. Sea (X_n) una sucesión i.i.d. con varianza finita. Demuestre la Ley Débil de los Grandes Números.
23. Pruebe que la varianza de la media muestral es inversamente proporcional al tamaño de la muestra.
24. Demuestre que dos variables incorreladas no necesariamente son independientes.
25. Construya un ejemplo explícito de lo anterior.
26. Demuestre que una función continua de una variable aleatoria es medible.
27. Pruebe que toda función monótona es medible.
28. Demuestre que una función de distribución es continua por la derecha.
29. Pruebe que toda función de distribución define una medida de probabilidad.
30. Demuestre la desigualdad de Markov.
31. Demuestre la desigualdad de Chebyshev.
32. Demuestre que L^2-convergencia implica convergencia en probabilidad.
33. Sea f_n una sucesión de clasificadores. Analice cuándo f_n converge casi seguramente.
34. Demuestre que minimizar el error empírico no garantiza minimizar el error esperado.
35. Construya un ejemplo matemático de sobreajuste.
36. Demuestre que no existe un clasificador universal óptimo para todas las distribuciones.

37. Pruebe que el conjunto de funciones aprendibles es estrictamente menor que el conjunto de todas las funciones.
38. Modele un algoritmo como función aleatoria y discuta su estabilidad.
39. Demuestre que pequeñas perturbaciones en la entrada pueden amplificarse en funciones no lineales.
40. Analice matemáticamente la noción de robustez.
41. Demuestre que agregar modelos puede reducir la varianza.
42. Pruebe que la agregación no necesariamente reduce el sesgo.
43. Demuestre que dos modelos con mismo riesgo esperado pueden tener comportamientos distintos.
44. Modele la interpretabilidad como una relación matemática.
45. Analice el sesgo algorítmico como una propiedad condicional.
46. Demuestre que independencia de datos no implica independencia de predicciones.
47. Pruebe que correlación no implica causalidad.
48. Modele el aprendizaje continuo como un proceso estocástico.
49. Analice la estabilidad de dicho proceso.
50. Demuestre que no toda función es aprendible desde datos finitos.
51. Discuta límites teóricos del aprendizaje automático.
52. Demuestre que el espacio de hipótesis infinito requiere regularización.
53. Pruebe que la regularización introduce sesgo.
54. Analice el compromiso sesgo-varianza matemáticamente.
55. Modele la toma de decisiones como optimización bajo incertidumbre.
56. Demuestre que el riesgo esperado es una esperanza matemática.
57. Analice cambios de distribución (dataset shift).
58. Demuestre que un modelo entrenado puede fallar bajo cambio de medida.
59. Modele el concepto de generalización.
60. Pruebe que generalización no es garantizada sin hipótesis estructurales.
61. Analice el papel de la complejidad del modelo.

62. Demuestre que más datos no siempre implican mejor estimación.
63. Construya un contraejemplo.
64. Modele la IA como sistema dinámico.
65. Analice estabilidad y convergencia.
66. Demuestre que no existe aprendizaje sin supuestos.
67. Analice el papel de la aleatoriedad en el aprendizaje.
68. Pruebe que la esperanza es un operador lineal.
69. Demuestre que la varianza no es lineal.
70. Analice el rol de la probabilidad en decisiones automatizadas.
71. Modele matemáticamente la incertidumbre epistémica.
72. Modele matemáticamente la incertidumbre aleatoria.
73. Analice diferencias formales entre ambas.
74. Demuestre que la predicción puntual pierde información.
75. Pruebe que modelos probabilísticos contienen más información.
76. Analice límites matemáticos de la IA explicable.
77. Demuestre que no toda decisión automatizada es justificable matemáticamente.
78. Analice la ética algorítmica desde restricciones matemáticas.
79. Modele equidad como restricción formal.
80. Demuestre incompatibilidades entre nociones de equidad.
81. Analice el futuro de la IA desde límites matemáticos.

7. Aplicaciones Reales de los Fundamentos Matemáticos en Ciencia, Estadística e Inteligencia Artificial

- **Verificación formal de software crítico (Lógica matemática).** En sistemas aeroespaciales, bancarios y de infraestructura digital, los algoritmos se modelan mediante lógica proposicional y lógica de predicados para demostrar formalmente propiedades como corrección, seguridad y ausencia de estados inválidos. Empresas como Amazon Web Services y agencias espaciales utilizan demostraciones formales para certificar protocolos.

- **Asistentes de prueba y razonamiento automático.** Herramientas como `Lean`, `Coq` e `Isabelle` emplean sistemas deductivos basados en reglas lógicas para verificar demostraciones matemáticas y programas, usando cuantificadores, inferencia y demostración por contradicción.

- **Modelado matemático de bases de datos (Teoría de conjuntos).** Las bases de datos relacionales representan información como conjuntos, relaciones y funciones. Las consultas se formulan mediante operaciones sobre subconjuntos, productos cartesianos y proyecciones.

- **Sesgo algorítmico y equidad (Relaciones y probabilidad).** El sesgo en sistemas automatizados se formula matemáticamente mediante probabilidades condicionadas:

  $$P(\hat{Y} = 1 \mid A = a_1) \neq P(\hat{Y} = 1 \mid A = a_2),$$

  donde A representa un atributo sensible y $\hat{Y}$ la decisión del modelo.

- **Sistemas de ranking y recomendación (Órdenes parciales).** Motores de búsqueda y sistemas de recomendación inducen órdenes parciales sobre conjuntos de opciones, ya que no todos los elementos son comparables entre sí.

- **Optimización multiobjetivo.** En economía, ingeniería e IA se utilizan órdenes parciales para identificar soluciones eficientes (óptimos de Pareto), donde no existe un único máximo global.

- **Diagnóstico médico probabilístico (Probabilidad).** Los sistemas de apoyo clínico estiman probabilidades condicionadas del tipo

  $$P(\text{enfermedad} \mid \text{datos clínicos}),$$

  utilizando variables aleatorias, distribuciones y modelos probabilísticos.

- **Detección de fraude financiero.** Las transacciones se modelan como variables aleatorias; el fraude se detecta mediante análisis de eventos raros y desviaciones significativas respecto a distribuciones esperadas.

- **Entrenamiento de modelos de aprendizaje automático (Estadística matemática).** El entrenamiento se basa en muestras aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ para estimar riesgos poblacionales, esperanzas y varianzas, usando la Ley de los Grandes Números.

- **Sobreajuste (Overfitting).** Un modelo puede minimizar el error empírico sin minimizar el error esperado, fenómeno explicado mediante varianza del estimador y convergencia en probabilidad.

- **Optimización estocástica y aprendizaje iterativo.** Los algoritmos de entrenamiento generan sucesiones de funciones (f_n) cuya convergencia se estudia mediante convergencia casi segura, en probabilidad o en L^2.

- **Cambio de distribución (Dataset shift).** Cuando la distribución de los datos cambia, los modelos entrenados bajo una medida previa pueden fallar, fenómeno formalizado como cambio de medida probabilística.
- **Decisiones automatizadas bajo incertidumbre.** La toma de decisiones en IA se formula como un problema de optimización bajo incertidumbre, donde el riesgo se expresa como una esperanza matemática.
- **Límites matemáticos del aprendizaje automático.** Desde teoría de conjuntos y probabilidad se demuestra que no toda función es aprendible a partir de datos finitos y que no existe un modelo universal óptimo.
- **Interpretabilidad y explicabilidad.** La explicabilidad de un modelo se estudia como una relación matemática entre entradas y salidas, sujeta a restricciones formales de complejidad y estructura.
- **Impacto de la IA en la revolución industrial actual.** Los fundamentos matemáticos permiten diseñar, auditar y regular sistemas de IA, garantizando confiabilidad, equidad y límites formales al comportamiento automático.

8. Casos Reales Avanzados de Aplicación de Fundamentos Matemáticos en Estadística, Ciencia e IA

1. **Verificación formal de protocolos de consenso distribuido.** Los protocolos de consenso (como Paxos o Raft) usados en sistemas financieros y de bases de datos distribuidas se modelan mediante lógica de predicados para demostrar propiedades como seguridad y vivacidad:
$$\forall t\ (\text{commit}(t) \Rightarrow \exists! v \text{ válido}),$$
garantizando matemáticamente que no existan estados inconsistentes.
2. **Control de errores en compiladores y lenguajes formales.** Los compiladores modernos utilizan gramáticas formales y sistemas lógicos para demostrar que la traducción de un programa preserva su semántica, evitando errores catastróficos en software crítico.
3. **Modelado de grafos de conocimiento (Knowledge Graphs).** Los grafos de conocimiento usados por Google y motores semánticos se modelan como relaciones ternarias
$$R \subseteq E \times R \times E,$$
donde la inferencia automática se basa en propiedades transitivas, simetría y clausura lógica.
4. **Inferencia causal en políticas públicas.** La inferencia causal se formula usando probabilidades condicionadas contrafactuales:
$$P(Y \mid do(X = x)),$$
lo cual requiere distinguir rigurosamente correlación de causalidad, un problema puramente matemático-estadístico.

5. **Evaluación de riesgos en seguros y finanzas.** Las primas de seguros se calculan como valores esperados condicionados:

$$\mathbb{E}[L \mid \text{perfil del cliente}],$$

donde L es una variable aleatoria de pérdida, utilizando teoría de la esperanza y varianza.

6. **Modelos de predicción climática.** Los modelos climáticos integran campos aleatorios espacio-temporales y requieren hipótesis de estacionariedad y convergencia para garantizar estabilidad en simulaciones a largo plazo.

7. **Análisis de estabilidad de redes neuronales profundas.** Las redes profundas se analizan como composiciones de funciones no lineales

$$f = f_n \circ \cdots \circ f_1,$$

donde pequeñas perturbaciones en la entrada pueden amplificarse, estudiadas mediante continuidad y Lipschitzianidad.

8. **Optimización convexa en entrenamiento de modelos.** Muchos algoritmos de aprendizaje se reducen a problemas de minimización de funciones convexas, donde la existencia y unicidad del mínimo se demuestra formalmente.

9. **Sistemas de detección de anomalías industriales.** El comportamiento normal de sensores se modela mediante distribuciones multivariadas, y las anomalías se detectan como eventos de baja probabilidad:

$$P(X \in A) < \varepsilon.$$

10. **Análisis de confiabilidad en redes eléctricas.** La confiabilidad se modela mediante variables aleatorias dependientes y teoría de grafos, evaluando la probabilidad de fallos en cascada.

11. **Aprendizaje federado y privacidad.** El aprendizaje federado se modela como una agregación de estimadores:

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} w_i \hat{\theta}_i,$$

analizando consistencia, sesgo y varianza sin acceso a datos centrales.

12. **Teoría de colas en sistemas de tráfico y telecomunicaciones.** Los sistemas de tráfico se modelan mediante procesos estocásticos para optimizar tiempos de espera y capacidad.

13. **Evaluación de modelos de lenguaje.** Los modelos de lenguaje se evalúan como aproximaciones a distribuciones de probabilidad sobre secuencias, donde la entropía mide incertidumbre y calidad predictiva.

14. **Detección de cambios estructurales en datos económicos.** Se utilizan pruebas estadísticas para detectar cambios en la distribución subyacente de series temporales económicas.

15. **Sistemas de recomendación justos.** La equidad se formula como restricciones matemáticas:
$$P(\hat{Y} = 1 \mid A = a) = P(\hat{Y} = 1),$$
lo cual genera incompatibilidades formales demostrables.

16. **Robustez adversarial.** Los ataques adversariales se modelan como perturbaciones δ tales que
$$f(x) \neq f(x + \delta),$$
analizando límites teóricos de robustez.

17. **Modelos epidemiológicos.** Los modelos SIR se formulan como sistemas dinámicos con parámetros estimados estadísticamente.

18. **Auditoría matemática de algoritmos.** La auditoría algorítmica se basa en demostrar propiedades estadísticas del comportamiento del sistema bajo distintos escenarios.

19. **Predicción energética y consumo.** El consumo energético se modela mediante regresión y procesos estocásticos para optimizar la distribución.

20. **Límites teóricos de la automatización.** Desde teoría de conjuntos y estadística se demuestra que existen problemas no resolubles por sistemas automáticos basados en datos finitos.

9. Talleres, Proyectos Evaluables y Rúbricas: Fundamentos Matemáticos Aplicados

1. **Taller 1: Verificación Formal de Algoritmos**

   Ejercicios

   a) Formule en lógica de predicados la propiedad de corrección de un algoritmo.

   b) Demuestre que la propiedad de seguridad implica ausencia de estados inválidos.

   c) Pruebe por contradicción que un protocolo no puede confirmar dos valores distintos.

   Proyecto evaluable Modelar formalmente un protocolo de consenso distribuido y demostrar corrección y seguridad.

   Rúbrica

   - Formalización lógica correcta
   - Rigor de las demostraciones

- Claridad matemática

2. **Taller 2: Conjuntos, Relaciones y Bases de Datos**

   Ejercicios

   a) Modele una base de datos como una familia de relaciones.

   b) Demuestre que una clave primaria induce una función inyectiva.

   c) Pruebe que una relación no funcional puede generar ambigüedad.

   Proyecto evaluable Diseñar un modelo matemático completo de una base de datos relacional real.

   Rúbrica

   - Uso correcto de teoría de conjuntos
   - Coherencia del modelo relacional
   - Argumentación matemática

3. **Taller 3: Órdenes Parciales y Ranking**

   Ejercicios

   a) Demuestre que la relación de preferencia es un orden parcial.

   b) Construya el diagrama de Hasse correspondiente.

   c) Pruebe que no existe máximo global.

   Proyecto evaluable Modelar un sistema real de ranking multiobjetivo y analizar su estructura de orden.

   Rúbrica

   - Correcta identificación del orden
   - Análisis estructural
   - Rigor deductivo

4. **Taller 4: Probabilidad y Riesgo**

   Ejercicios

   a) Defina formalmente una variable aleatoria de riesgo.

   b) Demuestre la desigualdad de Chebyshev.

   c) Aplique el resultado a un sistema real.

   Proyecto evaluable Evaluar el riesgo probabilístico de un sistema financiero o médico.

   Rúbrica

   - Modelación probabilística

- Uso correcto de desigualdades
- Interpretación matemática

5. **Taller 5: Estadística Matemática y Generalización**

   Ejercicios

   a) Demuestre la Ley Débil de los Grandes Números.

   b) Analice la varianza de la media muestral.

   c) Explique matemáticamente el sobreajuste.

   Proyecto evaluable Analizar el desempeño estadístico de un modelo predictivo real.

   Rúbrica

   - Rigor estadístico
   - Correcto uso de convergencia
   - Profundidad analítica

6. **Taller 6: Convergencia y Procesos Iterativos**

   Ejercicios

   a) Defina convergencia casi segura y en probabilidad.

   b) Demuestre la implicación entre ambas.

   c) Analice una sucesión de modelos aprendidos.

   Proyecto evaluable Estudiar la convergencia matemática de un algoritmo de entrenamiento iterativo.

   Rúbrica

   - Precisión en definiciones
   - Demostraciones correctas
   - Aplicación al caso real

7. **Taller 7: Cambio de Distribución**

   Ejercicios

   a) Defina formalmente cambio de medida.

   b) Demuestre que el riesgo esperado puede variar.

   c) Construya un contraejemplo.

   Proyecto evaluable Evaluar el impacto de dataset shift en un sistema predictivo real.

   Rúbrica

   - Formalización correcta

- Calidad del contraejemplo
- Análisis crítico

8. **Taller 8: Límites Matemáticos de la IA**

   Ejercicios

   a) Demuestre que no toda función es aprendible.

   b) Analice el rol de la cardinalidad.

   c) Discuta límites teóricos del aprendizaje.

   Proyecto evaluable Ensayo matemático riguroso sobre los límites formales de la IA.

   Rúbrica

   - Profundidad teórica
   - Corrección matemática
   - Argumentación lógica

10. Problemas Reales Abiertos y Aplicados para Estadísticos, Matemáticos y Científicos de la Computación

1. **Generalización fuera de distribución (Estadística teórica).** Sea $(X,Y) \sim P$ la distribución de entrenamiento y $(X,Y) \sim Q$ la distribución en producción con $P \neq Q$. Caracterice condiciones necesarias y suficientes bajo las cuales un estimador $\hat{f}_n$ entrenado bajo P mantiene riesgo acotado bajo Q.

2. **Identificabilidad estadística.** Dado un modelo paramétrico $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, determine condiciones bajo las cuales θ es identificable a partir de muestras finitas. Construya un ejemplo real donde la identificabilidad falla.

3. **Sesgo y varianza en alta dimensión.** Sea $p \gg n$. Analice el comportamiento asintótico de la varianza del estimador cuando $p/n \to \infty$. Explique por qué más datos no necesariamente reducen error.

4. **Inferencia causal sin experimentos aleatorios.** Dado un conjunto observacional, determine bajo qué hipótesis estructurales es posible identificar $P(Y \mid do(X = x))$.

5. **Imposibilidad de explicabilidad total.** Pruebe que no existe una función explicativa simple que sea fiel para toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aprendida desde datos.

6. **Complejidad del espacio de hipótesis (CS teórica).** Sea $\mathcal{H}$ infinito. Determine condiciones bajo las cuales la minimización empírica converge uniformemente al riesgo esperado.

7. **Aprendizaje con datos dependientes.** Sea (X_t) un proceso estocástico no i.i.d. Analice cómo falla la Ley de los Grandes Números clásica y proponga condiciones alternativas.

8. **Robustez adversarial.** Dado un clasificador f, determine el conjunto de perturbaciones δ tales que
$$f(x) \neq f(x + \delta),$$
y discuta límites matemáticos de robustez global.

9. **Imposibilidad de equidad simultánea.** Demuestre que no pueden satisfacerse simultáneamente dos nociones estadísticas de equidad bajo distribuciones distintas de base.

10. **Estimación bajo censura y truncamiento.** Modele un proceso de recolección de datos donde las observaciones están censuradas. Analice el sesgo inducido en el estimador.

11. **Optimización no convexa en redes profundas.** Explique por qué la convergencia empírica no implica convergencia al óptimo global.

12. **Teoría de colas en redes reales.** Modele matemáticamente un sistema de colas con llegadas dependientes y servidores heterogéneos.

13. **Aprendizaje federado e inconsistencia estadística.** Sea $\hat{\theta} = \sum w_i \hat{\theta}_i$. Determine cuándo $\hat{\theta}$ es consistente y cuándo no.

14. **Detección de cambios estructurales.** Dada una serie temporal, determine estadísticamente el instante donde cambia la ley generadora.

15. **Imposibilidad de predicción perfecta.** Pruebe que para ciertas clases de procesos no existe predictor consistente universal.

16. **Entropía y modelos de lenguaje.** Modele un modelo de lenguaje como una distribución sobre secuencias y analice límites de compresión.

17. **Regularización y pérdida de información.** Demuestre que toda regularización introduce sesgo estructural.

18. **Auditoría matemática de algoritmos.** Defina criterios matemáticos verificables para auditar un sistema automático de decisión.

19. **Sistemas dinámicos y aprendizaje continuo.** Modele el aprendizaje continuo como un sistema dinámico estocástico y analice estabilidad.

20. **Límites computacionales del aprendizaje.** Relacione complejidad computacional y aprendibilidad estadística.

21. **Estimación bajo ruido adversarial.** Determine cotas inferiores para el error de estimación bajo ruido no aleatorio.

22. **Interacción humano–algoritmo.** Modele matemáticamente la retroalimentación entre decisiones humanas y modelos predictivos.
23. **Imposibilidad de modelos universales.** Demuestre que no existe un algoritmo de aprendizaje óptimo para todas las distribuciones.
24. **Inferencia bajo datos faltantes no aleatorios.** Analice sesgo e inconsistencia cuando la ausencia de datos depende de la variable de interés.
25. **Modelos probabilísticos mal calibrados.** Determine condiciones bajo las cuales un predictor es mal calibrado aun con bajo error.
26. **Teoría de la información y privacidad.** Analice el compromiso entre privacidad diferencial y precisión estadística.
27. **Predicción en sistemas complejos.** Explique por qué ciertos sistemas son inherentemente impredecibles aun con datos masivos.
28. **Formalización matemática de la confianza en IA.** Defina matemáticamente qué significa confiar en una predicción automática.
29. **Límites epistemológicos del aprendizaje automático.** Discuta, con argumentos matemáticos, qué conocimiento no puede extraerse de datos.