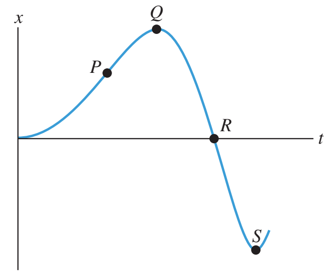
partícula, junto con flechas que representan la velocidad de la partícula en cada instante. En este capítulo, usaremos tanto las gráficas *x-t* como los diagramas de movimiento para ayudarle a entender el movimiento. Le recomendamos *dibujar* una gráfica *x-t* y un diagrama de movimiento como parte de la resolución de cualquier problema que implique movimiento.

Evalúe su comprensión de la sección 2.2 La figura 2.9 es una gráfica *x-t* del movimiento de una partícula. *a*) Ordene los valores de la velocidad v_x de la partícula en los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* del más positivo al más negativo. *b*) ¿En qué puntos v_x es positiva? *c*) ¿En cuáles puntos v_x es negativa? *d*) ¿En cuáles es cero? *e*) Ordene los valores de la *rapidez* de la partícula en los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* del más rápido al más lento.



2.9 Una gráfica *x-t* para una partícula.

2.3 Aceleración media e instantánea

Así como la velocidad describe la tasa de cambio de posición con el tiempo, la *aceleración* describe la tasa de cambio de velocidad con el tiempo. Al igual que la velocidad, la aceleración es una cantidad vectorial. En el movimiento rectilíneo, su única componente distinta de cero está sobre el eje en que ocurre el movimiento. Como veremos, en el movimiento rectilíneo la aceleración puede referirse tanto a aumentar la rapidez como a disminuirla.

Aceleración media

Consideremos otra vez el movimiento de una partícula en el eje *x*. Suponga que, en el tiempo t_1, la partícula está en el punto P_1 y tiene una componente *x* de velocidad (instantánea) v_{1x}, y en un instante posterior t_2 está en P_2 y tiene una componente *x* de velocidad v_{2x}. Así, la componente *x* de la velocidad cambia en $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definimos la **aceleración media** de la partícula al moverse de P_1 a P_2 como una cantidad vectorial cuya componente *x* es $a_{\text{med-}x}$ igual a Δv_x, el cambio en la componente *x* de la velocidad, dividido entre el intervalo de tiempo Δt:

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \text{(aceleración media, movimiento rectilíneo)} \tag{2.4}$$

En el movimiento rectilíneo a lo largo del eje *x*, por lo general llamaremos $v_{\text{med-}x}$ a la aceleración media. (Veremos otras componentes del vector de aceleración media en el capítulo 3.)

Si expresamos la velocidad en metros por segundo y el tiempo en segundos, la aceleración media está en metros por segundo por segundo, o bien (m/s)/s. Esto suele escribirse como m/s^2 y se lee "metros por segundo al cuadrado".

CUIDADO **Aceleración contra velocidad** ¡No confunda aceleración con velocidad! La velocidad describe el cambio de la posición de un objeto con el tiempo; nos indica con qué rapidez y en qué dirección se mueve el objeto. La aceleración describe cómo cambia la velocidad con el tiempo; es decir, nos dice cómo cambian la rapidez y la dirección del movimiento. Podría ser útil recordar la frase "aceleración es a velocidad lo que velocidad es a posición". También ayudaría imaginarse a usted mismo yendo en un automóvil con el cuerpo en movimiento. Si el auto acelera hacia delante y aumenta su rapidez, usted se sentiría empujado hacia atrás hacia su asiento; si acelera hacia atrás y disminuye su rapidez, se sentiría empujado hacia delante. Si la velocidad es constante y no hay aceleración, no sentiría sensación alguna. (Analizaremos la causa de estas sensaciones en el capítulo 4.)

Ejemplo 2.2 Aceleración media

Una astronauta sale de una nave espacial en órbita para probar una unidad personal de maniobras. Mientras se mueve en línea recta, su compañera a bordo mide su velocidad cada 2.0 s a partir del instante $t = 1.0$ s:

t	v_x	t	v_x
1.0 s	0.8 m/s	9.0 s	−0.4 m/s
3.0 s	1.2 m/s	11.0 s	−1.0 m/s
5.0 s	1.6 m/s	13.0 s	−1.6 m/s
7.0 s	1.2 m/s	15.0 s	−0.8 m/s

Calcule la aceleración media y diga si la rapidez de la astronauta aumenta o disminuye para cada uno de estos intervalos: *a*) $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s; *b*) $t_1 = 5.0$ s a $t_2 = 7.0$ s; *c*) $t_1 = 9.0$ s a $t_2 = 11.0$ s; *d*) $t_1 = 13.0$ s a $t_2 = 15.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitaremos la definición de aceleración media $a_{\text{med-}x}$. Para calcular los cambios en la rapidez, usaremos la idea de que la rapidez v es la magnitud de la velocidad instantánea v_x.

PLANTEAR: La figura 2.10 muestra nuestras gráficas. Usamos la ecuación (2.4) para determinar el valor de $a_{\text{med-}x}$ a partir del cambio de *velocidad* en cada intervalo de tiempo.

EJECUTAR: En la parte superior de la figura 2.10, graficamos la velocidad x en función del tiempo. En esta gráfica v_x-t, la pendiente de la línea que conecta los puntos inicial y final de cada intervalo es la aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ para ese intervalo. En la parte inferior de la figura 2.10, graficamos los valores de $a_{\text{med-}x}$. Obtenemos:

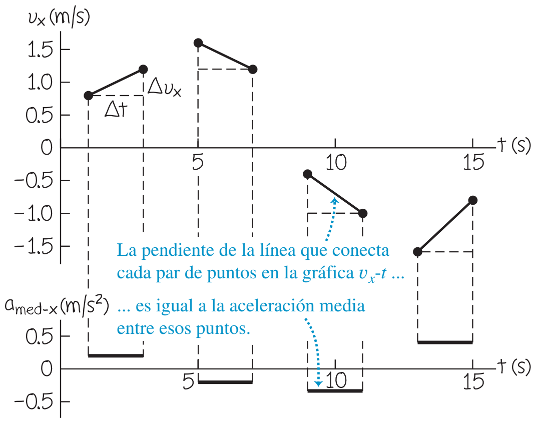
a) $a_{\text{med-}x} = (1.2\ \text{m/s} - 0.8\ \text{m/s})/(3.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s}) = 0.2\ \text{m/s}^2$. La rapidez (magnitud de la velocidad instantánea) aumenta de 0.8 m/s a 1.2 m/s.

b) $a_{\text{med-}x} = (1.2\ \text{m/s} - 1.6\ \text{m/s})/(7.0\ \text{s} - 5.0\ \text{s}) = -0.2\ \text{m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 1.2 m/s.

c) $a_{\text{med-}x} = [-1.0\ \text{m/s} - (-0.4\ \text{m/s})]/(11.0\ \text{s} - 9.0\ \text{s}) = -0.3\ \text{m/s}^2$. La rapidez aumenta de 0.4 m/s a 1.0 m/s.

d) $a_{\text{med-}x} = [-0.8\ \text{m/s} - (-1.6\ \text{m/s})]/(15.0\ \text{s} - 13.0\ \text{s}) = 0.4\ \text{m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 0.8 m/s.

2.10 Nuestra gráfica de velocidad contra tiempo (arriba) y aceleración media contra tiempo (abajo) para la astronauta.



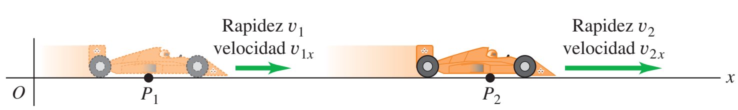
EVALUAR: Nuestro resultado indica que cuando la aceleración tiene la *misma* dirección (el mismo signo algebraico) que la velocidad inicial, como en los intervalos *a*) y *c*), la astronauta se mueve más rápidamente; cuando tiene la dirección *opuesta* (el signo opuesto) como en los intervalos *b*) y *d*), se frena. De manera que la aceleración positiva significa ir más rápido si la velocidad x es positiva [intervalo *a*)], pero frenar si la velocidad x es negativa [intervalo *d*)]. Asimismo, aceleración negativa implica ir más rápido si la velocidad x es negativa [intervalo *c*)], pero frenar si la velocidad x es positiva [intervalo *b*)].

Aceleración instantánea

Ya podemos definir la **aceleración instantánea** con el mismo procedimiento que seguimos para la velocidad instantánea. Como ejemplo, suponga que un piloto de carreras acaba de entrar en una recta como se muestra en la figura 2.11. Para definir la aceleración instantánea en P_1, tomamos el segundo punto P_2 en la figura 2.11 cada vez más cerca de P_1, de modo que la aceleración media se calcule en intervalos cada vez más cortos. *La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero*. En el lenguaje del cálculo, *la aceleración instantánea es la tasa instantánea de cambio de la velocidad con el tiempo*. Así,

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{(aceleración instantánea, movimiento rectilíneo)} \qquad (2.5)$$

2.11 Vehículo de Grand Prix en dos puntos de la recta.



Observe que la ecuación (2.5) es realmente la definición de la componente x del vector de aceleración o la **aceleración instantánea**; en el movimiento rectilíneo, las demás componentes de este vector son cero. A partir de aquí, al hablar de "aceleración" nos referiremos siempre a la aceleración instantánea, no a la aceleración media.

Ejemplo 2.3 Aceleraciones media e instantánea

Suponga que la velocidad v_x del auto en la figura 2.11 en el tiempo t está dada por

$$v_x = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2$$

a) Calcule el cambio de velocidad del auto en el intervalo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 3.0$ s. *b*) Calcule la aceleración media en este intervalo. *c*) Obtenga la aceleración instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando Δt primero como 0.1 s, después como 0.01 s y luego como 0.001 s. *d*) Deduzca una expresión para la aceleración instantánea en cualquier instante y úsela para obtener la aceleración en $t = 1.0$ s y $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo es similar al ejemplo 2.1 de la sección 2.2. (Recomendamos repasar ahora ese ejemplo.) Ahí, calculamos la velocidad media en intervalos cada vez más cortos considerando el cambio en el desplazamiento, y obtuvimos la velocidad instantánea diferenciando la posición en función del tiempo. En este ejemplo, determinaremos la aceleración *media* considerando cambios de velocidad en un intervalo de tiempo. Asimismo, obtendremos la aceleración *instantánea* diferenciando la velocidad en función del tiempo.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (2.4) de la aceleración media y la ecuación (2.5) de la aceleración instantánea.

EJECUTAR: a) Primero obtenemos la velocidad en cada instante sustituyendo cada valor de t en la ecuación. En el instante $t_1 = 1.0$ s,

$$v_{1x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(1.0\ \text{s})^2 = 60.5\ \text{m/s}$$

En el instante $t_2 = 3.0$ s,

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(3.0\ \text{s})^2 = 64.5\ \text{m/s}$$

El cambio en la velocidad Δv_x es

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64.5\ \text{m/s} - 60.5\ \text{m/s} = 4.0\ \text{m/s}$$

El intervalo de tiempo es $\Delta t = 3.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s} = 2.0$ s.

b) La aceleración media durante este intervalo es

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s}} = 2.0\ \text{m/s}^2$$

Durante el intervalo de $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s, la velocidad y la aceleración media tienen el mismo signo (positivo en este caso) y el auto acelera.

c) Cuando $\Delta t = 0.1$ s, $t_2 = 1.1$ s y obtenemos

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(1.1\ \text{s})^2 = 60.605\ \text{m/s}$$

$$\Delta v_x = 0.105\ \text{m/s}$$

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0.105\ \text{m/s}}{0.1\ \text{s}} = 1.05\ \text{m/s}^2$$

Repita este modelo con $\Delta t = 0.01$ s y $\Delta t = 0.001$ s; los resultados son $a_{\text{med-}x} = 1.005\ \text{m/s}^2$ y $a_{\text{med-}x} = 1.0005\ \text{m/s}^2$, respectivamente. Al reducirse Δt, la aceleración media se acerca a $1.0\ \text{m/s}^2$, por lo que concluimos que la aceleración instantánea en $t = 1.0$ s es $1.0\ \text{m/s}^2$.

d) La aceleración instantánea es $a_x = dv_x/dt$. La derivada de una constante es cero y la derivada de t^2 es $2t$. Con esto, obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2]$$
$$= (0.50\ \text{m/s}^3)(2t) = (1.0\ \text{m/s}^3)t$$

Cuando $t = 1.0$ s,

$$a_x = (1.0\ \text{m/s}^3)(1.0\ \text{s}) = 1.0\ \text{m/s}^2$$

Cuando $t = 3.0$ s,

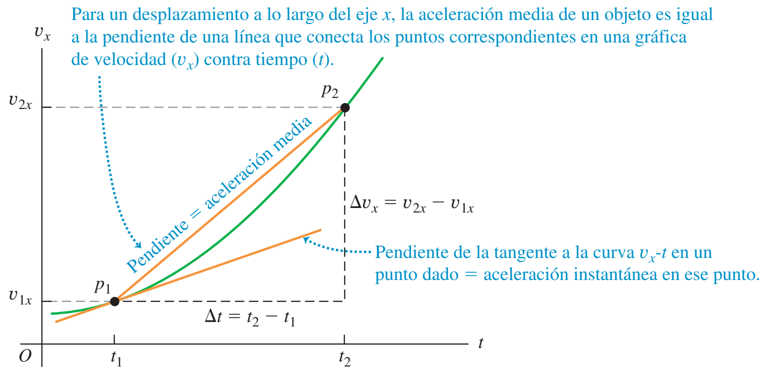
$$a_x = (1.0\ \text{m/s}^3)(3.0\ \text{s}) = 3.0\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: Observe que ninguno de los valores que obtuvimos en el inciso *d*) es igual a la aceleración media obtenida en *b*). La aceleración instantánea del auto varía con el tiempo. La tasa de cambio de la aceleración con el tiempo se suele denominar el "tirón".

Obtención de la aceleración en una gráfica v_x-t o una gráfica x-t

En la sección 2.2 interpretamos las velocidades media e instantánea en términos de la pendiente de una gráfica de posición contra tiempo. Igualmente, podemos entender mejor las aceleraciones media e instantánea graficando la velocidad instantánea v_x en el eje vertical y el tiempo t en el eje horizontal, es decir, usando una **gráfica v_x-t** (figura 2.12). Los puntos rotulados p_1 y p_2 corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la figura 2.11. La aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ durante este intervalo es la pendiente de la línea p_1p_2. Al acercarse P_2 a P_1 en la figura 2.11, p_2 se acerca a p_1 en la gráfica v_x-t de la figura 2.12, y la pendiente de la línea p_1p_2 se acerca a la pendiente de la tangente a la curva en el punto p_1. Así, *en una gráfica de velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto.* En la figura 2.12, las tangentes trazadas en

2.12 Gráfica v_x-t del movimiento de la figura 2.11.



diferentes puntos en la curva tienen pendientes diferentes, de manera que la aceleración instantánea varía con el tiempo.

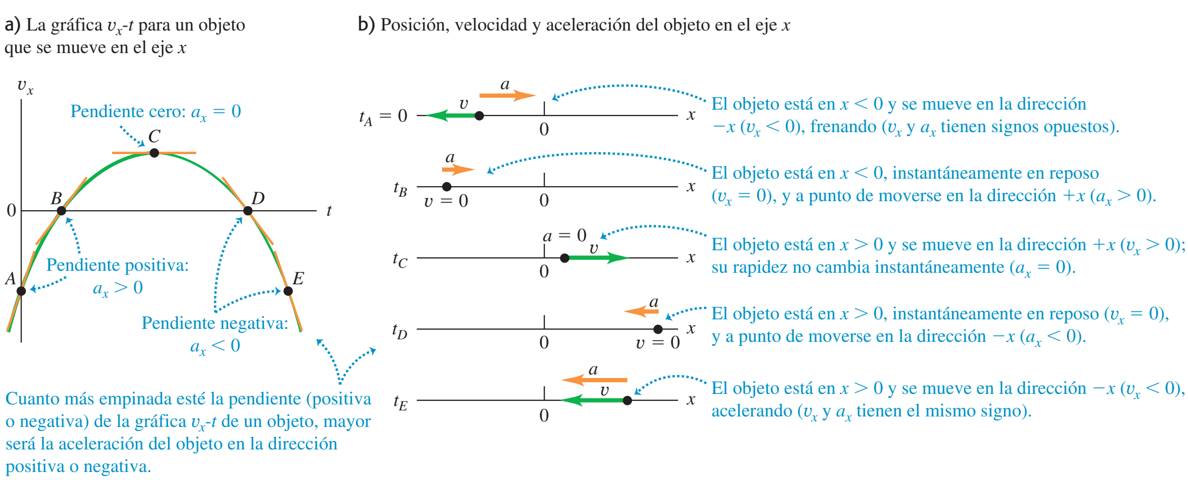
CUIDADO **Los signos de aceleración y velocidad** En sí mismo, el signo algebraico de la aceleración *no* nos indica si el cuerpo está acelerando o frenando; hay que comparar los signos de la velocidad y la aceleración. Si v_x y a_x tienen el *mismo* signo, el cuerpo está acelerando; si ambas son positivas, el cuerpo se mueve en la dirección positiva con rapidez creciente. Si ambas son negativas, el cuerpo se mueve en la dirección negativa con velocidad cada vez más negativa, y la rapidez aumenta nuevamente. Si v_x y a_x tienen signos *opuestos*, el cuerpo está frenando. Si v_x es positiva y a_x negativa, el cuerpo se mueve en dirección positiva con rapidez decreciente; si v_x es negativa y a_x positiva, el cuerpo se mueve en dirección negativa con una velocidad cada vez menos negativa, y nuevamente está frenando. La figura 2.13 ilustra algunas de tales posibilidades.

Frecuentemente llamamos "desaceleración" a una reducción de rapidez. Dado que esto puede implicar a_x positiva o negativa, dependiendo del signo de v_x, evitaremos este término.

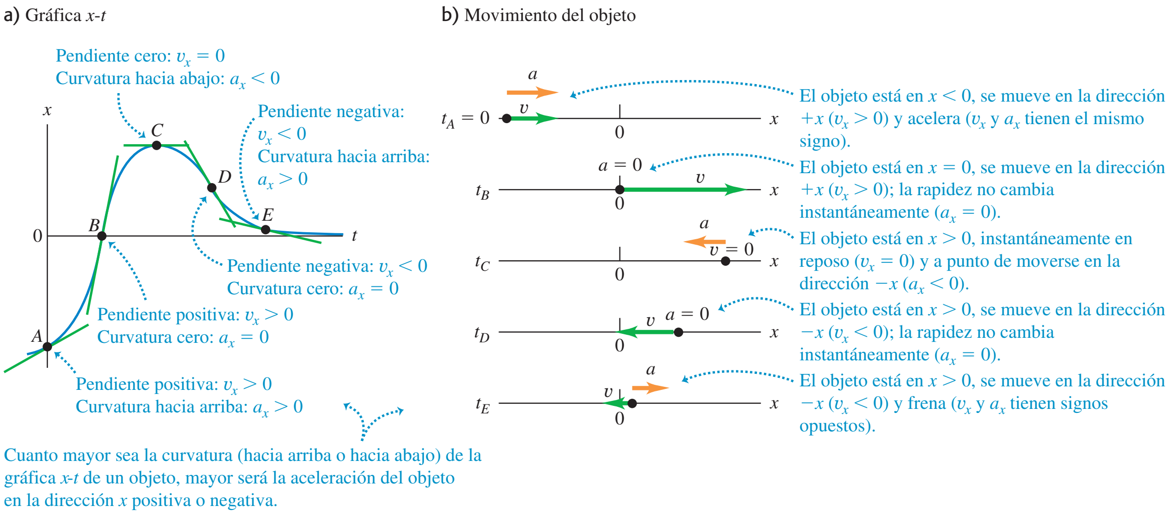
También podemos conocer la aceleración de un cuerpo a partir de una gráfica de su *posición* contra tiempo. Dado que $a_x = dv_x/dt$ y $v_x = dx/dt$, escribimos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.6}$$

2.13 a) Gráfica v_x-t del movimiento de una partícula diferente de la que se muestra en la figura 2.8. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la aceleración en ese punto. b) Diagrama de movimiento que indica la posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes rotulados en la gráfica v_x-t. Las posiciones son congruentes con la gráfica v_x-t; por ejemplo, de t_A a t_B la velocidad es negativa, así que en t_B la partícula está en un valor más negativo de x que en t_A.



2.14 a) La misma gráfica *x-t* de la figura 2.8a. La velocidad es igual a la *pendiente* de la gráfica, y la aceleración está dada por *su concavidad* o *curvatura*. b) Diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en cada uno de los instantes rotulados en la gráfica *x-t*.



Es decir, a_x es la segunda derivada de x con respecto a t. La segunda derivada de cualquier función se relaciona directamente con la *concavidad* o *curvatura* de la gráfica de la función. En un punto donde la curva *x-t* sea cóncava hacia arriba (curvada hacia arriba), la aceleración es positiva y v_x aumenta; donde la curva *x-t* sea cóncava hacia abajo, la aceleración es negativa y v_x disminuye. Donde la gráfica *x-t* no tenga curvatura, como en un punto de inflexión, la aceleración es cero y la velocidad es constante. Estas tres posibilidades se ilustran en la figura 2.14.

Examinar la curvatura de una gráfica *x-t* es una manera sencilla de decidir qué *signo* tiene la aceleración. Esta técnica es menos útil para determinar valores numéricos de la aceleración, ya que es difícil medir con exactitud la curvatura de una gráfica.

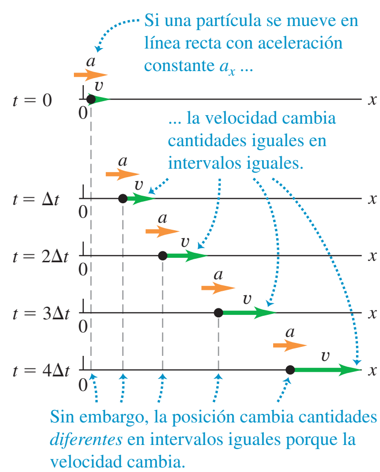
Evalúe su comprensión de la sección 2.3 Observe otra vez la gráfica *x-t* de la figura 2.9 al final de la sección 2.2. *a*) ¿En cuál de los puntos P, Q, R y S la aceleración a_x es positiva? *b*) ¿En cuáles es negativa? *c*) ¿En cuáles parece ser cero? *d*) En cada punto decida si la rapidez aumenta, disminuye o se mantiene constante.

2.4 Movimiento con aceleración constante

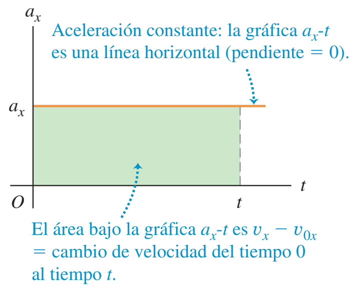
El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con aceleración *constante*. En este caso, la velocidad cambia al mismo ritmo todo el tiempo. Se trata de una situación muy especial, aun cuando ocurre a menudo en la naturaleza; un cuerpo que cae tiene aceleración constante si los efectos del aire no son importantes. Lo mismo sucede con un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal áspera. El movimiento rectilíneo con aceleración casi constante se da también en la tecnología, como cuando un jet de combate es lanzado con catapulta desde la cubierta de un portaviones.

La figura 2.15 es un diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de una partícula que se mueve con aceleración constante. Las figuras 2.16 y 2.17 representan este movimiento con gráficas. Puesto que la aceleración a_x es constante, la **gráfica a_x-*t*** (aceleración contra tiempo) de la figura 2.16 es una línea horizontal. La gráfica de velocidad contra tiempo, v_x-*t*, tiene *pendiente* constante porque la aceleración es constante; por lo tanto, es una línea recta (figura 2.17).

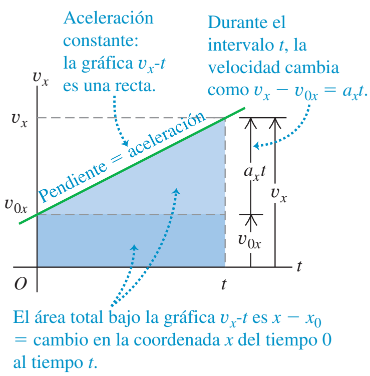
2.15 Diagrama de movimiento para una partícula que se mueve en línea recta en la dirección $+x$ con aceleración positiva constante a_x. Se muestran la posición, velocidad y aceleración en cinco instantes equiespaciados.



2.16 Gráfica aceleración-tiempo (a_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x.



2.17 Gráfica velocidad-tiempo (v_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x. La velocidad inicial v_{0x} también es positiva en este caso.



Cuando la aceleración a_x es constante, la aceleración media $a_{\text{med-}x}$ para cualquier intervalo es a_x. Esto vuelve sencillo derivar las ecuaciones para la posición x y la velocidad v_x como funciones del tiempo. Para encontrar una expresión para v_x primero sustituimos $a_{\text{med-}x}$ por a_x en la ecuación (2.4):

$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \tag{2.7}$$

Sean ahora $t_1 = 0$ y t_2 cualquier instante posterior t. Simbolizamos con v_{0x} la componente x de la velocidad en el instante inicial $t = 0$; la componente x de la velocidad en el instante posterior t es v_x. Entonces, la ecuación (2.7) se convierte en

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \qquad \text{o}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \tag{2.8}$$

Podemos interpretar la ecuación como sigue. La aceleración a_x es la tasa constante de cambio de velocidad, es decir, el cambio en la velocidad por unidad de tiempo. El término $a_x t$ es el producto del cambio en la velocidad por unidad de tiempo, a_x, y el intervalo de tiempo t; por lo tanto, es el cambio *total* de la velocidad desde el instante inicial $t = 0$ hasta un instante posterior t. La velocidad v_x en cualquier instante t es entonces la velocidad inicial v_{0x} (en $t = 0$) más el cambio en la velocidad $a_x t$ (véase la figura 2.17).

Otra interpretación de la ecuación (2.8) es que el cambio de velocidad $v_x - v_{0x}$ de la partícula entre $t = 0$ y un tiempo posterior t es igual al *área* bajo la gráfica a_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.16, el área bajo la gráfica a_x-t es el rectángulo verde con lado vertical a_x y lado horizontal t. El área del rectángulo es $a_x t$, que por la ecuación (2.8) es igual al cambio en velocidad $v_x - v_{0x}$. En la sección 2.6 veremos que aun cuando la aceleración no sea constante, el cambio de velocidad durante un intervalo es igual al área bajo la curva a_x-t, aunque en tal caso la ecuación (2.8) no es válida.

Ahora deduciremos una ecuación para la posición x en función del tiempo cuando la aceleración es constante. Para ello, usamos dos expresiones distintas para la velocidad media $a_{\text{med-}x}$ en el intervalo de $t = 0$ a cualquier t posterior. La primera proviene de la definición de $v_{\text{med-}x}$, ecuación (2.2), que se cumple sea constante o no la aceleración. La *posición inicial* es la posición en $t = 0$, denotada con x_0. La posición en el t posterior es simplemente x. Así, para el intervalo $\Delta t = t - 0$ y el desplazamiento $\Delta x = x - x_0$, la ecuación (2.2) da

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x - x_0}{t} \tag{2.9}$$

También podemos obtener otra expresión para $v_{\text{med-}x}$ que sea válida sólo si la aceleración es constante, de modo que la gráfica v_x-t sea una línea recta (como en la figura 2.17) y la velocidad cambie a ritmo constante. En este caso, la velocidad media en cualquier intervalo es sólo el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo. Para el intervalo de 0 a t,

$$v_{\text{med-}x} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \tag{2.10}$$

(Esto *no* se cumple si la aceleración varía y la gráfica v_x-t es una curva, como en la figura 2.13.) También sabemos que, con aceleración constante, la velocidad v_x en un instante t está dada por la ecuación (2.8). Sustituyendo esa expresión por v_x en la ecuación (2.10),

$$\begin{aligned} v_{\text{med-}x} &= \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t) \\ &= v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

ActivPhysics Online

1.1 Análisis del movimiento con diagramas
1.2 Análisis del movimiento con gráficas
1.3 Predicción de un movimiento con base en gráficas
1.4 Predicción de un movimiento con base en ecuaciones
1.5 Estrategias para resolver problemas de cinemática
1.6 Esquiador en competencia de descenso

Por último, igualamos las ecuaciones (2.9) y (2.11) y simplificamos el resultado:

$$v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t} \qquad \text{o}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.12)$$

Esta ecuación (2.12) indica que si, en el instante $t = 0$, una partícula está en x_0 y tiene velocidad v_{0x}, su nueva posición x en un t posterior es la suma de tres términos: su posición inicial x_0, más la distancia $v_{0x}t$ que recorrería si su velocidad fuera constante, y una distancia adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ causada por el cambio de velocidad.

Una gráfica de la ecuación (2.12), es decir, una gráfica *x-t* para movimiento con aceleración constante (figura 2.18a), siempre es una *parábola*. La figura 2.18b muestra tal gráfica. La curva interseca el eje vertical (x) en x_0, la posición en $t = 0$. La pendiente de la tangente en $t = 0$ es v_{0x}, la velocidad inicial, y la pendiente de la tangente en cualquier t es la velocidad v_x en ese instante. La pendiente y la velocidad aumentan continuamente, así que la aceleración a_x es positiva. Usted puede también ver esto porque la gráfica de la figura 2.18b es cóncava hacia arriba (se curva hacia arriba). Si a_x es negativa, la gráfica *x-t* es una parábola cóncava hacia abajo (tiene curvatura hacia abajo).

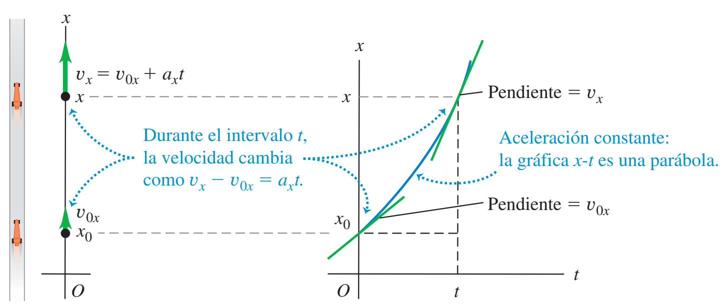
Si hay aceleración cero, la gráfica *x-t* es una recta; si hay una aceleración constante, el término adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ en la ecuación (2.12) para x en función de t curva la gráfica en una parábola (figura 2.19*a*). Podemos analizar la gráfica v_x-*t* de la misma forma. Si hay aceleración cero, esta gráfica es una línea horizontal (la velocidad es constante); sumar una aceleración constante da una pendiente para la gráfica v_x-*t* (figura 2.19b).

ActivPhysics ONLINE

1.8 Los cinturones de seguridad salvan vidas
1.9 Frenado con derrape
1.10 Auto arranca y luego se detiene
1.11 Resolución de problemas con dos vehículos
1.12 Auto alcanza a camión
1.13 Cómo evitar un choque por atrás

a) Un auto de carreras se mueve en la dirección x con aceleración constante

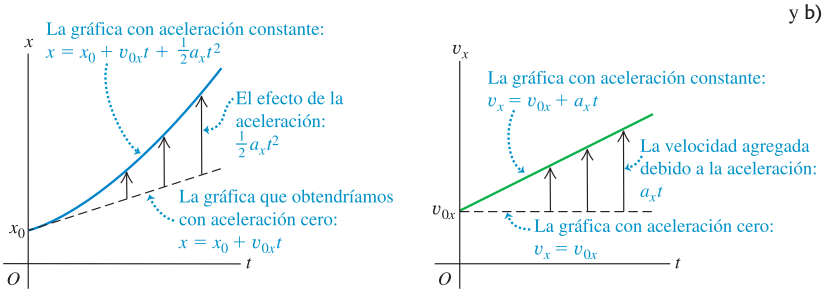
b) La gráfica *x-t*



2.18 a) Movimiento rectilíneo con aceleración constante. b) Una gráfica de posición contra tiempo (*x-t*) para este movimiento (el mismo movimiento que se muestra en las figuras 2.15, 2.16 y 2.17). En este caso, la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} y la aceleración a_x son todas positivas.

a) Una gráfica *x-t* para un objeto que se mueve con aceleración constante positiva

b) La gráfica v_x-*t* para el mismo objeto



2.19 a) Cómo una aceleración constante influye en a) la gráfica *x-t* y b) la gráfica v_x-*t* de un cuerpo.

Así como el cambio de velocidad de la partícula es igual al área bajo la gráfica a_x-t, el desplazamiento (es decir, el cambio de posición) es igual al área bajo la gráfica v_x-t. Específicamente, el desplazamiento $x - x_0$ de la partícula entre $t = 0$ y cualquier instante t posterior es igual al área bajo la curva v_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.17 el área bajo la gráfica se dividió en un rectángulo oscuro con lado vertical v_{0x}, lado horizontal t y un triángulo rectángulo claro con lado vertical $a_x t$ y lado horizontal t. El área del rectángulo es $v_{0x}t$, y la del triángulo, $\frac{1}{2}(a_x t)(t) = \frac{1}{2} a_x t^2$, así que el área total bajo la curva v_x-t es

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

lo que concuerda con la ecuación (2.12).

El desplazamiento durante un intervalo siempre puede obtenerse del área bajo la curva v_x-t, incluso si la aceleración *no* es constante, aunque en tal caso la ecuación (2.12) no sería válida. (Demostraremos esto en la sección 2.6.)

Podemos comprobar si las ecuaciones (2.8) y (2.12) son congruentes con el supuesto de aceleración constante derivando la ecuación (2.12). Obtenemos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_x t$$

que es la ecuación (2.8). Diferenciando otra vez, tenemos simplemente

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

que concuerda con la definición de aceleración instantánea.

Con frecuencia es útil tener una relación entre posición, velocidad y aceleración (constante) que no incluya el tiempo. Para obtenerla, despejamos t en la ecuación (2.8), sustituimos la expresión resultante en la ecuación (2.12) y simplificamos:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \tfrac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Transferimos el término x_0 al miembro izquierdo y multiplicamos la ecuación por $2a_x$:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

Por último, al simplificar obtenemos

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.13)$$

Podemos obtener una relación más útil igualando dos expresiones para $v_{\text{med-}x}$, ecuaciones (2.9) y (2.10), y multiplicando por t. Al hacerlo, obtenemos

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad \text{(sólo aceleración constante)} \qquad (2.14)$$

Observe que la ecuación (2.14) no contiene la aceleración a_x. Esta ecuación es útil cuando a_x es constante pero se desconoce su valor.

Las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) son las *ecuaciones del movimiento con aceleración constante*. Con ellas, podemos resolver *cualquier* problema que implique movimiento rectilíneo de una partícula con aceleración constante.

En el caso específico de movimiento con aceleración constante ilustrado en la figura 2.15 y graficado en las figuras 2.16, 2.17 y 2.18, los valores de x_0, v_{0x} y a_x son positivos. Vuelva a dibujar las figuras para los casos en que una, dos o las tres cantidades sean negativas.

Un caso especial de movimiento con aceleración constante se da cuando la aceleración es *cero*. La velocidad es entonces constante, y las ecuaciones del movimiento se convierten sencillamente en

$$v_x = v_{0x} = \text{constante}$$
$$x = x_0 + v_x t$$

Estrategia para resolver problemas 2.1 Movimiento con aceleración constante

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes*: En casi todos los problemas de movimiento rectilíneo, usted podrá usar las ecuaciones de aceleración constante, aunque a veces se topará con situaciones en que la aceleración *no es* constante. En tales casos, necesitará otra estrategia (véase la sección 2.6).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Primero decida dónde está el origen de las coordenadas y cuál dirección es positiva. A menudo lo más sencillo es colocar la partícula en el origen en $t = 0$; así, $x_0 = 0$. Siempre es útil un diagrama de movimiento que muestre las coordenadas y algunas posiciones posteriores de la partícula.
2. Recuerde que elegir la dirección positiva del eje determina automáticamente las direcciones positivas de la velocidad y la aceleración. Si x es positiva a la derecha del origen, v_x y a_x también serán positivas hacia la derecha.
3. Replantee el problema con palabras y luego traduzca su descripción a símbolos y ecuaciones. ¿*Cuándo* llega la partícula a cierto punto (es decir, cuánto vale t)? ¿*Dónde* está la partícula cuando tiene cierta velocidad (esto es, cuánto vale x cuando v_x tiene ese valor)? El ejemplo 2.4 pregunta "¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?" En símbolos, esto indica "¿Cuánto vale x cuando $v_x = 25$ m/s?"
4. Haga una lista de las cantidades como x, x_0, v_x, v_{0x}, a_x y t. En general, algunas serán conocidas y otras no. Escriba los valores de las conocidas y decida cuáles de las variables son las incógnitas. No pase por alto información implícita. Por ejemplo, "un automóvil está parado ante un semáforo" implica $v_{0x} = 0$.

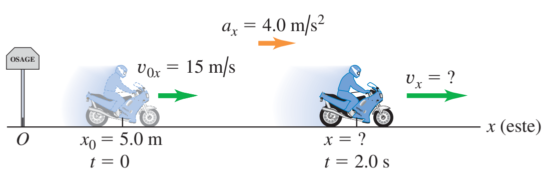
EJECUTAR *la solución:* Elija una de las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) que contenga sólo una de las incógnitas. Despeje la incógnita usando sólo símbolos, sustituya los valores conocidos y calcule el valor de la incógnita. A veces tendrá que resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Examine sus resultados para ver si son lógicos. ¿Están dentro del intervalo general de valores esperado?

Ejemplo 2.4 Cálculos de aceleración constante

Un motociclista que viaja al este cruza una pequeña ciudad de Iowa y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad (figura 2.20). Su aceleración constante es de 4.0 m/s^2. En $t = 0$, está a 5.0 m al este del letrero, moviéndose al este a 15 m/s. *a*) Calcule su posición y velocidad en $t = 2.0$ s. *b*) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?

2.20 Un motociclista que viaja con aceleración constante.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El enunciado del problema nos dice que la aceleración es constante, así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante.

PLANTEAR: Tomamos el letrero como origen de coordenadas ($x = 0$) y decidimos que el eje $+x$ apunta al este (figura 2.20, que también es un diagrama de movimiento). En $t = 0$, la posición inicial es $x_0 = 5.0$ m y la velocidad inicial es $v_{0x} = 15$ m/s. La aceleración constante es $a_x = 4.0$ m/s^2. Las variables desconocidas en el inciso *a*) son los valores de la posición x y la velocidad v_x en el instante posterior $t = 2.0$ s; la incógnita en el inciso *b*) es el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s.

continúa

EJECUTAR: *a*) Podemos hallar la posición x en $t = 2.0$ s usando la ecuación (2.12) que da la posición x en función del tiempo t:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5.0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 \\ &= 43\text{ m} \end{aligned}$$

Podemos hallar la velocidad v_x en ese instante con la ecuación (2.8), que da la velocidad v_x en función del tiempo t:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ &= 15\text{ m/s} + (4.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = 23\text{ m/s} \end{aligned}$$

b) Queremos encontrar el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s, pero no sabemos el momento en que el motociclista lleva tal velocidad. Por lo tanto, utilizamos la ecuación (2.13), que incluye x, v_x y a_x pero no incluye t:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Despejando x y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \\ &= 5.0\text{ m} + \frac{(25\text{ m/s})^2 - (15\text{ m/s})^2}{2(4.0\text{ m/s}^2)} \\ &= 55\text{ m} \end{aligned}$$

Un método alterno aunque más largo para la mima respuesta sería usar la ecuación (2.8) para averiguar primero en qué instante $v_x = 25$ m/s:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{así que}$$

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{25\text{ m/s} - 15\text{ m/s}}{4.0\text{ m/s}^2} = 2.5\text{ s}$$

Dado el tiempo t, podemos calcular x usando la ecuación (2.12):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5.0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2.5\text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0\text{ m/s}^2)(2.5\text{ s})^2 \\ &= 55\text{ m} \end{aligned}$$

EVALUAR: ¿Son lógicos los resultados? Según lo que calculamos en el inciso *a*), el motociclista acelera de 15 m/s (unas 34 mi/h o 54 km/h) a 23 m/s (unas 51 mi/h o 83 km/h) en 2.0 s, mientras recorre una distancia de 38 m (unos 125 ft). Ésta es una aceleración considerable, pero una motocicleta de alto rendimiento bien puede alcanzarla.

Al comparar nuestros resultados del inciso *b*) con los del inciso *a*), notamos que el motociclista alcanza una velocidad $v_x = 25$ m/s en un instante posterior y después de recorrer una distancia mayor, que cuando el motociclista tenía $v_x = 23$ m/s. Esto suena lógico porque el motociclista tiene una aceleración positiva y, por ende, se incrementa su velocidad.

Ejemplo 2.5 Dos cuerpos con diferente aceleración

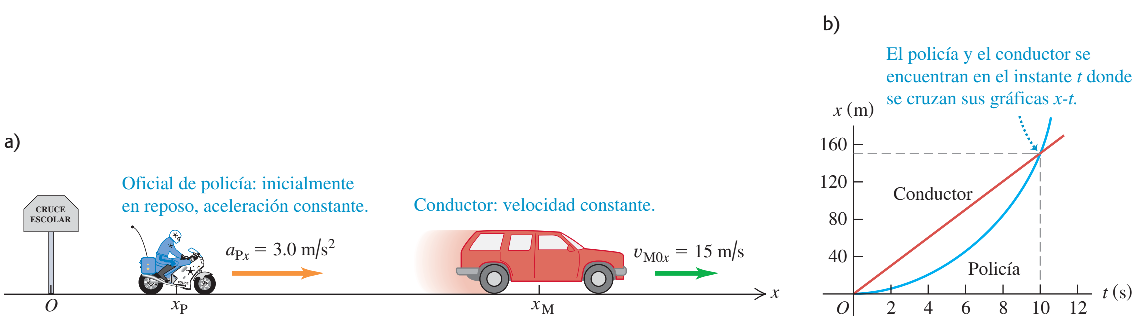
Un conductor que viaja a rapidez constante de 15 m/s (unas 34 mi/h) pasa por un cruce escolar, cuyo límite de velocidad es de 10 m/s (unas 22 mi/h). En ese preciso momento, un oficial de policía en su motocicleta, que está parado en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de 3.0 m/s^2 (figura 2.21a). *a*) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el oficial de policía alcance al infractor? *b*) ¿A qué rapidez va el policía en ese instante? *c*) ¿Qué distancia total habrá recorrido cada vehículo hasta ahí?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El oficial de policía y el conductor se mueven con aceleración constante (cero en el caso del conductor), así que podemos usar las fórmulas que ya dedujimos.

PLANTEAR: Tomamos como origen el cruce, así que $x_0 = 0$ para ambos, y tomamos como dirección positiva a la derecha. Sea x_P la posición del policía y x_M la del conductor en cualquier instante. Las velocidades iniciales son $v_{P0x} = 0$ para el policía y $v_{M0x} = 15$ m/s para el conductor; las respectivas aceleraciones constantes son $a_{Px} = 3.0$ m/s^2 y $a_{Mx} = 0$. Nuestra incógnita en el inciso *a*) es el tiempo tras el cual el policía alcanza al conductor, es decir, cuando los dos vehículos están en la misma posición. En el inciso *b*) nos interesa la rapidez v del policía (la magnitud de su velocidad) en el tiempo obtenido en el inciso *a*). En el inciso *c*) nos interesa la posición de cualesquiera de los vehículos en ese tiempo. Por lo tanto, usaremos la ecuación (2.12) (que relaciona posición y tiempo) en los

2.21 a) Movimiento con aceleración constante que alcanza a movimiento con velocidad constante. b) Gráfica de x contra t para cada vehículo.



incisos *a*) y *c*), y la ecuación (2.8) (que relaciona velocidad y tiempo) en el inciso *b*).

EJECUTAR: *a*) Buscamos el valor del tiempo t cuando el conductor y el policía están en la misma posición. Aplicando la ecuación (2.12), $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, a cada vehículo, tenemos:

$$x_M = 0 + v_{M0x}t + \frac{1}{2}(0)t^2 = v_{M0x}t$$

$$x_P = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Puesto que $x_M = x_P$ en el tiempo t, igualamos las dos expresiones y despejamos t:

$$v_{M0x}t = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

$$t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15\ \text{m/s})}{3.0\ \text{m/s}^2} = 10\ \text{s}$$

Hay *dos* instantes en que los vehículos tienen la misma coordenada x. El primero, $t = 0$, es cuando el conductor pasa por el cruce donde está estacionada la motocicleta. El segundo, $t = 10$ s, es cuando el policía alcanza al conductor.

b) Queremos la magnitud de la velocidad del policía v_{Px} en el instante t obtenido en *a*). Su velocidad en cualquier momento está dada por la ecuación (2.8):

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3.0\ \text{m/s}^2)t$$

Usando $t = 10$ s, hallamos $v_{Px} = 30$ m/s. Cuando el policía alcanza al conductor, va al doble de su rapidez.

c) En 10 s, la distancia recorrida por el conductor es

$$x_M = v_{M0x}t = (15\ \text{m/s})(10\ \text{s}) = 150\ \text{m}$$

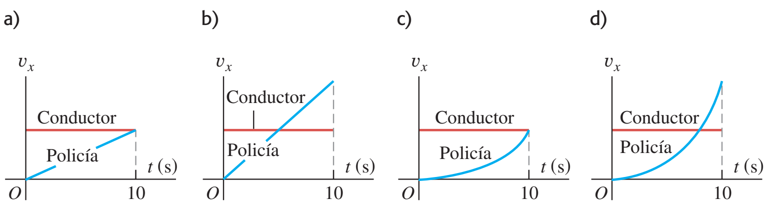
y la distancia que el policía recorre es

$$x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}(3.0\ \text{m/s}^2)(10\ \text{s})^2 = 150\ \text{m}$$

Esto comprueba que cuando el policía alcanza al conductor, ambos han recorrido la misma distancia.

EVALUAR: La figura 2.21b muestra las gráficas de x contra t para ambos vehículos. Aquí vemos también que hay dos instantes en que la posición es la misma (donde se cruzan las gráficas). En ninguno de ellos los dos vehículos tienen la misma velocidad (es decir, las gráficas se cruzan con distinta pendiente). En $t = 0$, el policía está en reposo; en $t = 10$ s, la rapidez del policía es del doble que la del conductor.

Evalúe su comprensión de la sección 2.4 Se muestran cuatro posibles gráficas v_x-t para los dos vehículos del ejemplo 2.5. ¿Cuál es la gráfica correcta?



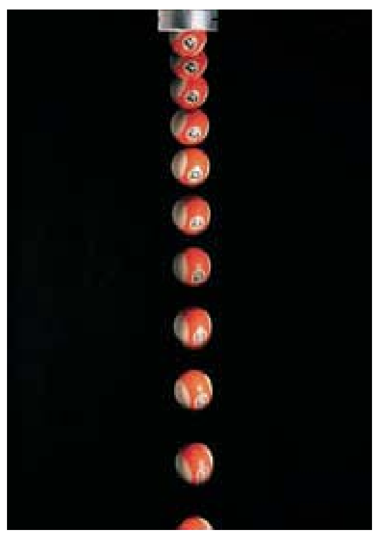
2.5 Cuerpos en caída libre

El ejemplo más conocido de movimiento con aceleración (casi) constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Dicho movimiento ha interesado a filósofos y científicos desde la Antigüedad. En el siglo IV a.C., Aristóteles pensaba (erróneamente) que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso. Diecinueve siglos después, Galileo (véase la sección 1.1) afirmó que los cuerpos caían con una aceleración constante e independiente de su peso.

Los experimentos muestran que si puede omitirse el efecto del aire, Galileo está en lo cierto: todos los cuerpos en un lugar específico caen con la misma aceleración hacia abajo, sea cual fuere su tamaño o peso. Si además la distancia de caída es pequeña en comparación con el radio terrestre, y si ignoramos los pequeños efectos debidos a la rotación de la Tierra, la aceleración es constante. El modelo idealizado que surge de tales supuestos se denomina **caída libre**, aunque también incluye el movimiento ascendente. (En el capítulo 3 extenderemos el estudio de la caída libre para incluir el movimiento de proyectiles, que se mueven tanto horizontal como verticalmente.)

La figura 2.22 es una fotografía de una pelota que cae tomada con una lámpara estroboscópica que produce una serie de destellos intensos a intervalos iguales. En cada destello, la película registra la posición de la pelota. Como los intervalos entre

2.22 Fotografía con múltiples destellos de una pelota en caída libre.



1.7 Se deja caer limonada desde un globo aerostático

1.10 Caída de un saltador con garrocha

destellos son iguales, la velocidad media de la pelota entre dos destellos es proporcional a la distancia entre las imágenes correspondientes en la fotografía. El aumento en las distancias muestra que la velocidad cambia continuamente: la pelota acelera hacia abajo. Al medir cuidadosamente constatamos que el cambio de velocidad es el mismo en cada intervalo, así que la aceleración de la pelota en caída libre es constante.

La aceleración constante de un cuerpo en caída libre se llama **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con la letra g. Por lo regular, usaremos el valor aproximado de g cerca de la superficie terrestre:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2$$
$$= 32 \text{ ft/s}^2 \qquad \text{(valor aproximado cerca de la superficie terrestre)}$$

El valor exacto varía según el lugar, así que normalmente sólo lo daremos con dos cifras significativas. Dado que g es la magnitud de una cantidad vectorial, siempre es *positiva*. En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad se debe a la fuerza de atracción de la Luna, no de la Tierra, y $g = 1.6 \text{ m/s}^2$. Cerca de la superficie del Sol, $g = 270 \text{ m/s}^2$.

En los ejemplos que siguen usamos las ecuaciones para aceleración constante que dedujimos en la sección 2.4. Sugerimos al lector que repase las estrategias de resolución de problemas de esa sección antes de estudiar estos ejemplos.

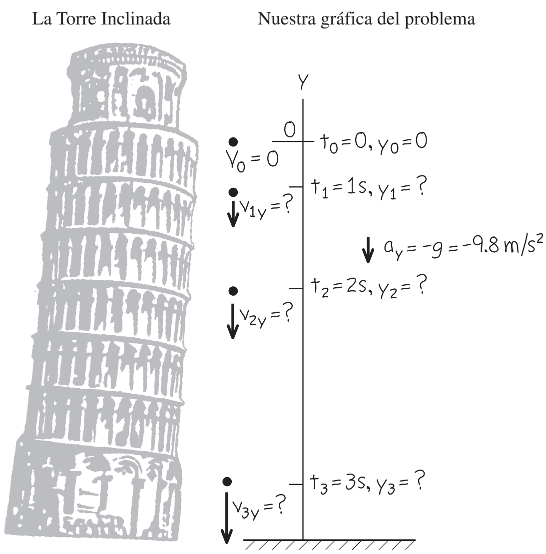
Ejemplo 2.6 Moneda en caída libre

Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su posición y su velocidad después de 1.0, 2.0 y 3.0 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: "Cae libremente" significa "tiene una aceleración constante debida a la gravedad", así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante en la determinación de nuestras incógnitas.

2.23 Una moneda en caída libre desde reposo.



PLANTEAR: El lado derecho de la figura 2.23 muestra nuestro diagrama de movimiento para la moneda. El movimiento es vertical, de manera que usamos un eje de coordenadas vertical y llamaremos a la coordenada y en vez de x. Sustituiremos todas las x de las ecuaciones para aceleración constante por y. Tomaremos el origen O como el punto de partida y la dirección hacia arriba como positiva. La coordenada inicial y_0 y la velocidad inicial v_{0y} son ambas cero. La aceleración es hacia abajo, en la dirección y negativa, así que $ay = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$. (Recuerde que por definición g *siempre* es positiva.) Por lo tanto, nuestras incógnitas son los valores de y y v_y en los tres instantes especificados. Para obtenerlos usamos las ecuaciones (2.12) y (2.8), sustituyendo x por y.

EJECUTAR: En un instante t después de que se suelta la moneda, su posición y su velocidad son

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4.9 \text{ m/s}^2)t^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9.8 \text{ m/s}^2)t$$

Cuando $t = 1.0$ s, $y = (-4.9 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = -4.9$ m y $v_y = (-9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s}) = -9.8$ m/s; después de 1 s, la moneda está 4.9 m debajo del origen (y es negativa) y tiene una velocidad hacia abajo (v_y es negativa) con magnitud de 9.8 m/s.

La posición y la velocidad a los 2.0 s y 3.0 s se obtienen de la misma forma. ¿Puede usted demostrar que $y = -19.6$ m y $v_y = -19.6$ m/s en $t = 2.0$ s, y que $y = -44.1$ m y $v_y = -29.4$ m/s en $t = 3.0$ s?

EVALUAR: Todos los valores que obtuvimos para v_y son negativos porque decidimos que el eje $+y$ apuntaría hacia arriba; pero bien podríamos haber decidido que apuntara hacia abajo. En tal caso, la aceleración habría sido $a_y = +g$ y habríamos obtenido valores positivos para v_y. No importa qué eje elija; sólo asegúrese de decirlo claramente en su solución y confirme que la aceleración tenga el signo correcto.

Ejemplo 2.7 Movimiento ascendente y descendente en caída libre

Imagine que usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota sale de la mano, en un punto a la altura del barandal de la azotea, con rapidez ascendente de 15.0 m/s, quedando luego en caída libre. Al bajar, la pelota libra apenas el barandal. En este lugar, $g = 9.8\ \text{m/s}^2$. Obtenga *a*) la posición y velocidad de la pelota 1.00 s y 4.00 s después de soltarla; *b*) la velocidad cuando la pelota está 5.00 m sobre el barandal; *c*) la altura máxima alcanzada y el instante en que se alcanza; y *d*) la aceleración de la pelota en su altura máxima.

SOLUCIÓN

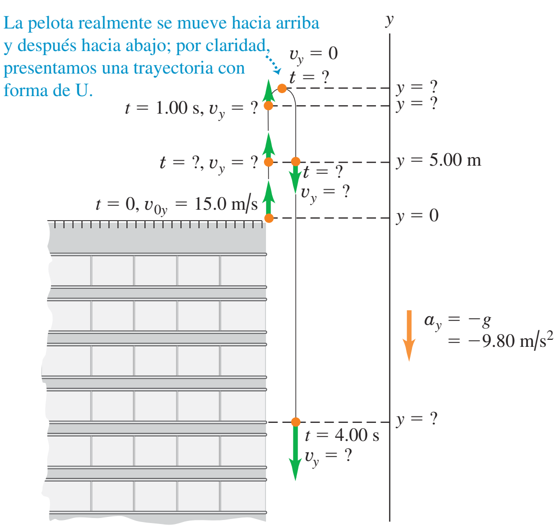
IDENTIFICAR: Las palabras "caída libre" en el enunciado del problema implican que la aceleración es constante y debida a la gravedad. Las incógnitas son la posición [en los incisos *a*) y *c*)], la velocidad [en los incisos *a*) y *b*)] y la aceleración [en el inciso *d*)].

PLANTEAR: En la figura 2.24 (que también es un diagrama de movimiento para la pelota), la trayectoria descendente se muestra desplazada un poco a la derecha de su posición real por claridad. Sea el origen el barandal, donde la pelota sale de la mano, y sea la dirección positiva hacia arriba. La posición inicial y_0 es cero, la velocidad inicial v_{0y} es $+15.0$ m/s y la aceleración es $a_Y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$. Usaremos otra vez las ecuaciones (2.12) y (2.8) para calcular la posición y la velocidad, respectivamente, en función del tiempo. En el inciso *b*), nos piden hallar la velocidad en cierta *posición,* no en cierto *tiempo,* así que nos convendrá usar la ecuación (2.13) en esa parte.

EJECUTAR: *a*) La posición y y la velocidad v_y, en cualquier instante t una vez que se suelta la pelota están dadas por las ecuaciones (2.12) y (2.8), cambiando las x por y:

$$y = y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$
$$= (0) + (15.0\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} + (-g)t$$
$$= 15.0\ \text{m/s} + (-9.80\ \text{m/s}^2)t$$

2.24 Posición y velocidad de una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba.



Cuando $t = 1.00$ s, estas ecuaciones dan

$$y = +10.1\ \text{m} \qquad v_y = +5.2\ \text{m/s}$$

La pelota está 10.1 m sobre el origen (y es positiva) y se mueve hacia arriba (v_y es positiva) con rapidez de 5.2 m/s, menor que la rapidez inicial porque la pelota frena mientras asciende.

Cuando $t = 4.00$ s, las ecuaciones para y y v_y en función del tiempo t dan

$$y = -18.4\ \text{m} \qquad v_y = -24.2\ \text{m/s}$$

La pelota pasó su punto más alto y está 18.4 m *debajo* del origen (y es negativa); tiene velocidad *hacia abajo* (v_y es negativa) de magnitud 24.2 m/s. Conforme sube, la pelota pierde rapidez, luego la gana al descender; se mueve a la rapidez inicial de 15.0 m/s cuando pasa hacia abajo por su punto de lanzamiento (el origen) y continúa ganando rapidez conforme desciende por debajo de este punto.

b) La velocidad v_y en cualquier posición y está dada por la ecuación (2.13) cambiando las x por y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 + 2(-g)(y - 0)$$
$$= (15.0\ \text{m/s})^2 + 2(-9.80\ \text{m/s}^2)y$$

Con la pelota a 5.00 m sobre el origen, $y = +5.00$ m, así que

$$v_y^2 = (15.0\ \text{m/s})^2 + 2(-9.80\ \text{m/s}^2)(5.00\ \text{m}) = 127\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v_y = \pm 11.3\ \text{m/s}$$

Obtenemos *dos* valores de v_y, pues la pelota pasa dos veces por el punto $y = +5.00$ m (véase la figura 2.24), una subiendo con v_y positiva y otra bajando con v_y negativa.

c) En el instante en que la pelota llega al punto más alto, está momentáneamente en reposo y $v_y = 0$. La altura máxima y_1 puede obtenerse de dos formas. La primera es usar la ecuación (2.13) y sustituir $v_y = 0$, $y_0 = 0$ y $a_y = -g$:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)(y_1 - 0)$$
$$y_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(15.0\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = +11.5\ \text{m}$$

La segunda consiste en calcular el instante en que $v_y = 0$ usando la ecuación (2.8), $v_y = v_{0y} + a_y t$, y sustituir este valor de t en la ecuación (2.12), para obtener la posición en ese instante. Por la ecuación (2.8), el instante t_1 en que la pelota llega al punto más alto es

$$v_y = 0 = v_{0y} + (-g)t_1$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15.0\ \text{m/s}}{9.80\ \text{m/s}^2} = 1.53\ \text{s}$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación (2.12) obtenemos

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (0) + (15\ \text{m/s})(1.53\ \text{s})$$
$$+ \frac{1}{2}(-9.8\ \text{m/s}^2)(1.53\ \text{s})^2 = +11.5\ \text{m}$$

Observe que la primera forma de hallar la altura máxima es más sencilla, ya que no es necesario calcular primero el tiempo.

continúa

d) **CUIDADO** **Un error acerca de la caída libre** Es un error común pensar que en el punto más alto del movimiento en caída libre la velocidad es cero *y* la aceleración es cero. Si fuera así, ¡la pelota quedaría suspendida en el punto más alto en el aire para siempre! Recuerde que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad. Si la aceleración fuera cero en el punto más alto, la velocidad de la pelota ya no cambiaría y, al estar instantáneamente en reposo, permanecería en reposo eternamente.

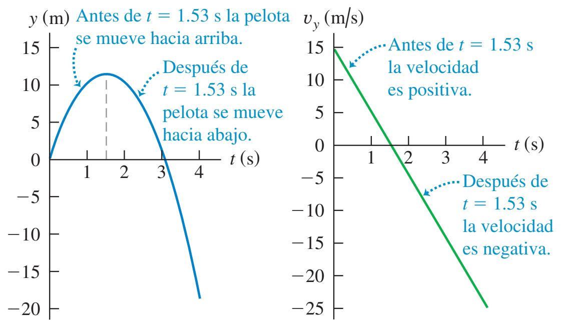
De hecho, en el punto más alto la aceleración sigue siendo $a_y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$, la misma que cuando está subiendo y cuando está bajando. Por ello, la velocidad de la pelota está cambiando continuamente, de valores positivos a valores negativos, pasando por cero.

EVALUAR: Una forma útil de verificar cualquier problema de movimiento consiste en dibujar las gráficas de posición y de velocidad en función del tiempo. La figura 2.25 muestra estas gráficas para este problema. Como la aceleración es constante y negativa, la gráfica y-t es una parábola con curvatura hacia abajo, y la gráfica v_y-t es una recta con pendiente negativa.

2.25 a) Posición y b) velocidad en función del tiempo para una pelota lanzada hacia arriba con una rapidez inicial de 15 m/s.

a) Gráfica y-t (la curvatura es hacia abajo porque $a_y = -g$ es negativa)

b) Gráfica v_y-t (recta con pendiente negativa porque $a_y = -g$ es constante y negativa)



Ejemplo 2.8 ¿Dos soluciones o una?

Determine el instante en que la pelota del ejemplo 2.7 está 5.00 m por debajo del barandal.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de nuevo de un problema de aceleración constante. La incógnita es el tiempo en que la pelota está en cierta posición.

PLANTEAR: Otra vez elegimos el eje y como en la figura 2.24, así que y_0, v_{0y} y $a_y = -g$ tienen los mismos valores que en el ejemplo 2.7. De nuevo, la posición y en función del tiempo t está dada por la ecuación (2.12):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Queremos despejar t con $y = -5.00$ m. Puesto que la ecuación incluye t^2, es una ecuación *cuadrática* en t.

EJECUTAR: Primero replanteamos la ecuación en la forma cuadrática estándar para una x desconocida, $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}g\right)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

entonces, $A = g/2$, $B = -v_{0y}$ y $C = y - y_0$. Usando la fórmula cuadrática (véase el Apéndice B), vemos que esta ecuación tiene *dos* soluciones:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(g/2)(y - y_0)}}{2(g/2)} \\ &= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}}{g} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores $y_0 = 0$, $v_{0y} = +15.0$ m/s, $g = 9.80\ \text{m/s}^2$ y $y = -5.00$ m, obtenemos

$$t = \frac{(15.0\ \text{m/s}) \pm \sqrt{(15.0\ \text{m/s})^2 - 2(9.80\ \text{m/s}^2)(-5.00\ \text{m} - 0)}}{9.80\ \text{m/s}^2}$$

$$t = +3.36\ \text{s} \qquad \text{o} \qquad t = -0.30\ \text{s}$$

Para decidir cuál de éstas es la respuesta correcta, la pregunta clave es: "¿son lógicas estas respuestas?" La segunda, $t = -0.30$ s, simplemente es absurda; ¡se refiere a un instante 0.30 s *antes* de soltar la pelota! Lo correcto es $t = +3.36$ s. La pelota está 5.00 m debajo del barandal 3.36 s *después* de que sale de la mano.

EVALUAR: ¿De dónde salió la "solución" errónea $t = -0.30$ s? Recuerde que la ecuación $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$ se basa en el supuesto de que la aceleración es constante para *todos* los valores de t, positivos, negativos o cero. Tal cual, esta ecuación nos diría que la pelota se ha estado moviendo hacia arriba en caída libre desde los albores del tiempo, y pasó por la mano en $y = 0$ en el instante especial que decidimos llamar $t = 0$, y después continuó su caída libre. Sin embargo, todo lo que esta ecuación describa como sucedido antes de $t = 0$ es ficción pura, ya que la pelota entró en caída libre sólo después de salir de la mano en $t = 0$; la "solución" $t = -0.30$ s es parte de tal ficción.

Repita estos cálculos para determinar cuándo la pelota está 5.00 m *sobre* el origen ($y = +5.00$ m). Las dos respuestas son $t = +0.38$ s y $t = +2.68$ s; ambos son valores positivos de t y se refieren al movimiento real de la pelota una vez soltada. El primer instante es cuando la pelota pasa por $y = +5.00$ m de subida, y el segundo, cuando pasa por ahí de bajada. (Compare esto con el inciso *b*) del ejemplo 2.7.)

Determine también los instantes en que $y = +15.0$ m. En este caso, ambas soluciones requieren obtener la raíz cuadrada de un número negativo, así que *no hay* soluciones reales. Esto es lógico; en el inciso *c*) del ejemplo 2.7 vimos que la altura máxima de la pelota es $y = +11.5$ m, así que *nunca* llega a $y = +15.0$ m. Aunque una ecuación cuadrática como la (2.12) siempre tiene dos soluciones, a veces una o ambas soluciones no tienen sentido físico.