

Capítulo 2

Análisis por Envoltura de Datos (DEA)

1. INTRODUCCIÓN

El Análisis por Envoltura de Datos (DEA: Data Envelopment Analysis) es una metodología basada en modelos de programación lineal, propuesta por primera vez en 1978 por Charnes, Cooper y Rhodes, para estudiar la eficiencia relativa de una serie de unidades de decisión.

La historia del Análisis por Envoltura de Datos comienza en 1.978, en la conferencia de Edwuard Rhodes “Data Envelopment Analysis and Approaches for Measuring the Efficiency of Decision-Education”. El problema consistía en evaluar la eficiencia relativa de una serie de escuelas que llevaba aparejado el manejo de múltiples parámetros de entrada y salida, sin emplear las técnicas tradicionales utilizadas hasta la fecha, fundamentadas esencialmente en modelos económicos de estudios en los precios. La respuesta a este problema representó la primera formulación matemática de DEA, en su variante CCR.

DEA nace como una técnica para evaluar la eficiencia de una serie de elementos, denominados usualmente Unidades de toma de Decisión, en adelante DMU: Decision Making Unit, empleándose para dicha evaluación múltiples entradas y salidas para cada una de las DMU's consideradas. Las DMU's deben ser comparables: tanto sus entradas como sus salidas deben ser medibles en unidades homogéneas para todas ellas.

La metodología DEA requiere de un importante primer paso consistente en la identificación del conjunto de posibilidades de producción del problema, esto es, definir los posibles puntos de operación. Las dos alternativas más frecuentes son las tecnologías denominadas Retornos de Escala Constante (Constant Return to Scale, CRS) y Retornos de Escala Variables (Variable Return to Scale, VRS). La tecnología CRS considera como unidad admisible dentro del problema cualquier combinación lineal de las DMUs observadas, mientras que en la tecnología VRS sólo se consideran admisibles las combinaciones lineales convexas.

Un segundo paso consiste en la selección del modelo DEA adecuado al problema a resolver. Existen multitud de modelos DEA, todos ellos con el mismo objetivo: encontrar un punto admisible de mayor productividad con el que puedan compararse las diferentes DMUs del problema. De esta forma, dada una cierta DMU_0 , se formula un modelo de programación lineal que busca una combinación lineal (convexa en el caso VRS) de las DMUs existentes, definiendo de esta forma un conjunto de puntos

tecnológicamente admisibles que usan menos entradas que DMU_0 y/o produce más salidas que la DMU_0 .

Si ningún punto domina a DMU_0 , entonces se le denomina unidad eficiente (global en el caso CRS, y técnicamente eficiente en el caso de VRS). Cuando una unidad domina a otra es porque tiene menos entradas y/o más salidas la tecnología considerada. Si por el contrario la DMU_0 no es eficiente, el modelo la proyecta sobre la frontera eficiente y mide la eficiencia de la DMU_0 en términos de reducción del consumo de las entradas e incremento en la producción de salida. Hay diferentes maneras de realizar la proyección y medición de la distancia entre la DMU_0 y el punto sobre el que se proyecta. Así, la orientación de entrada consiste en la reducción tanto como sea posible de todos los recursos de forma equi-proporcional sin reducir las salidas. Por otra parte, la orientación de salida consiste en incrementar tanto como sea posible los productos de forma equi-proporcional sin un incremento de las entradas. Existen modelos no radiales con orientación de entrada o salida así como modelos con orientación de entrada-salida que intentan conseguir tanto reducción de recursos como incrementos de productos.

Debido a los desarrollos llevados a cabo en los últimos años, el propósito, aplicaciones y perspectivas de futuro de DEA se han extendido más allá de este concepto inicial. DEA y sus aplicaciones facilitan un nuevo enfoque para analizar y organizar datos. Así, ha llegado a ser una alternativa y un complemento a los análisis tradicionales de tendencias centrales aportando, igualmente, un nuevo punto de vista para los análisis de coste-beneficio, estimación de fronteras, diseño de estrategias, aprovechamiento de características de los elementos punteros e inducción de teorías a partir de observaciones externas.

2. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Antes de plantear los modelos básicos de DEA, explicaremos los conceptos básicos a partir de los cuales se basarán estos modelos. Debemos tener presente que el Análisis por Envoltura de Datos se utiliza para evaluar la eficiencia relativa de unidades productivas que fabrican de forma similar. Por lo tanto veamos en primer lugar uno de los conceptos que definen a DEA: unidad productiva, para ir más tarde desarrollando el resto.

Unidad productiva.

Cualquier organización que produzca consumiendo ciertos recursos, con la capacidad de poder modificar tanto el nivel de los recursos consumidos (entradas) como el de la producción creada (salidas). Por esta capacidad de decisión, también se usa para este concepto otro nombre, en nomenclatura anglosajona, DMU (Decision Making Unit).

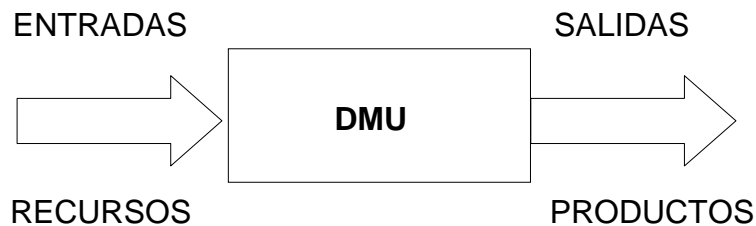


Figura 2.2.1. Esquema de la fabricación en una DMU.

Productividad.

La productividad (según Farrel (1957)) de una determinada unidad productiva se define como la relación existente entre los resultados que obtiene y los recursos empleados en su producción. Es una forma de medir cómo se están aprovechando dichos recursos. Para el caso de una sola salida y una sola entrada:

$$Productividad = \frac{Producción\ creada}{Recurso\ consumido} = \frac{Salida}{Entrada}$$

En la medición de la productividad hay que determinar los factores que son realmente relevantes respecto de la producción de las salidas de la unidad productiva. En algunos casos también existe dificultad en medir el nivel de las entradas y las salidas, ya que puede que los recursos o los productos no sean fácilmente mensurables. Por último, una vez realizadas las mediciones, es necesario tener un criterio para sumar entradas y salidas que tienen diferentes unidades de medida.

Para el caso de varias entradas y varias salidas la expresión matemática que se propone es:

$$Productividad = \frac{\text{suma ponderada de salidas}}{\text{suma ponderada de entradas}}$$

Denotando como x_{ij} a la cantidad de entrada o recurso 'i' utilizado por la unidad 'j', y como y_{kj} a la cantidad de salida o resultado 'k' que produce la misma unidad, se obtienen la expresiones:

$$Entrada\ virtual_j = \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}$$

$$Salida\ virtual_j = \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}$$

Donde los términos u_{ij} y v_{kj} son respectivamente los pesos correspondientes a cada entrada y salida, que adimensionalizan las expresiones de entrada y salida virtuales, m el número total de entradas consideradas y s el número de salidas de la unidad. Con estos nuevos conceptos, se puede definir la productividad como:

$$Productividad_j = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij}}$$

Con esta expresión se puede determinar la productividad de una unidad productiva. Sin embargo, lo interesante es tener algún índice que nos permita comparar unas unidades con otras similares. Por eso debemos utilizar un nuevo concepto: eficiencia relativa.

Eficiencia relativa.

La expresión que define la eficiencia relativa es:

$$Eficiencia_j = \frac{Productividad_j}{Productividad_{max}} = \frac{Salida\ virtual_j / Entrada\ virtual_j}{Salida\ virtual_{max} / Entrada\ virtual_{max}}$$

Donde el subíndice ‘j’ indica la unidad que se va a estudiar y el subíndice ‘max’ la unidad de máxima productividad. Se pueden distinguir varios tipos de eficiencias relativas en función de la unidad de referencia que se utilice:

Se habla de la eficiencia global cuando se escoge como unidad de referencia la de mayor productividad de entre las que están en estudio.

Eficiencia técnica: se utiliza cuando se elige como unidad de referencia la de mayor productividad de entre las unidades de su tamaño.

Se define la eficiencia de escala como el cociente entre la eficiencia global y la eficiencia técnica.

Todos estos conceptos introducidos hasta ahora se verán a continuación con un ejemplo práctico.

2.1. Un ejemplo numérico de aplicación de DEA

Los diferentes modelos de DEA buscan establecer qué subconjunto de las DMU’s determinan las partes de la superficie envolvente. Para ser eficiente, los puntos correspondientes a una determinada DMU deben yacer sobre la mencionada superficie de eficiencia. Las DMU’s que no pertenezcan a dicha superficie se denominan ineficientes, y el análisis identifica las fuentes y la cuantía de la ineficiencia y/o suministra una medida agregada de la ineficiencia relativa.

Para ilustrar el análisis de los diferentes modelos se propone, en primer lugar, el siguiente ejemplo en el que se trata la cuestión de la eficiencia de forma intuitiva.

Consiste en el análisis de 7 DMU’s, cada una de las cuales consta de una entrada (recursos consumidos) y una salida (beneficios generados).

Gráficamente, el problema puede representarse como una nube de puntos en un espacio de dos dimensiones, en el que el eje de abscisas son los

recursos consumidos (entradas) y el eje de ordenadas los resultados obtenidos (salidas) por las unidades analizadas.

| UNIDAD | ENTRADA | SALIDA |
|--------|---------|--------|
| A | 9 | 7 |
| B | 6 | 3 |
| C | 8 | 6 |
| D | 7 | 10 |
| E | 5 | 3 |
| F | 8 | 3 |
| G | 5 | 8 |

Tabla 2.2.1. Datos de entrada y salida de cada DMU

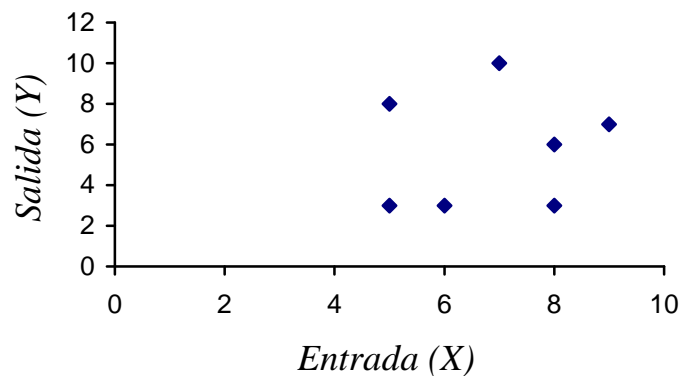


Figura 2.2.2. Ejemplo gráfico

A continuación se presentan 2 formas de resolución del problema planteado en función de la tecnología que se considere.

2.1.1. Rendimientos de escala constantes

Si consideramos retornos de escala constantes, la unidad más eficiente será la que proporcione más salidas, consumiendo menos recursos (eficiencia global). Esto es equivalente a tener el mayor valor en la relación (ratio) y/x , que se corresponde con el valor de la pendiente de la recta que une el origen con el punto que representa a la unidad correspondiente.

La eficiencia también puede calcularse proyectando la unidad sobre la frontera de eficiencia. La proyección puede hacerse de la entrada (orientación de entrada) o de la salida (orientación de salida). Orientación de entrada significa estudiar la eficiencia considerando la posibilidad de obtener los mismos ingresos con menos recursos orientación de salida significa estudiar la eficiencia considerando la posibilidad de obtener más salidas empleando los mismos recursos.

Cuando se calcula la eficiencia global, las eficiencias obtenidas con orientación de entrada y con orientación de salida coinciden.

En el ejemplo hay solamente una unidad eficiente, la unidad G, lo que se observa gráficamente al trazar la pendiente que pasa por el origen.

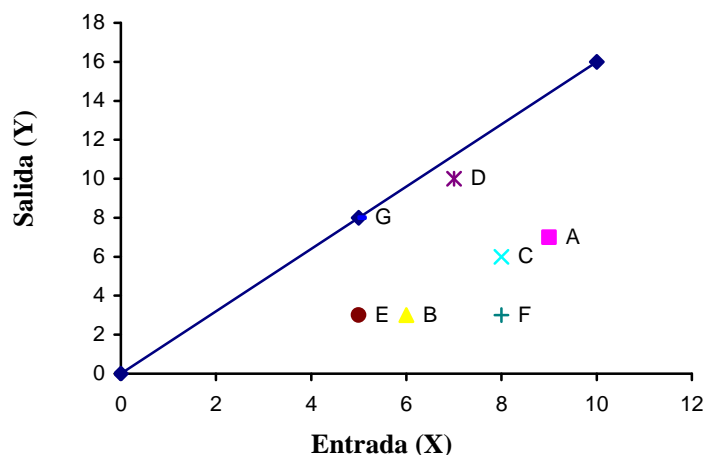


Figura 2.2.3. Representación gráfica de todas las DMU's y la frontera eficiente del problema

Este problema se puede resolver gráficamente, con lo que obtendríamos el siguiente gráfico:

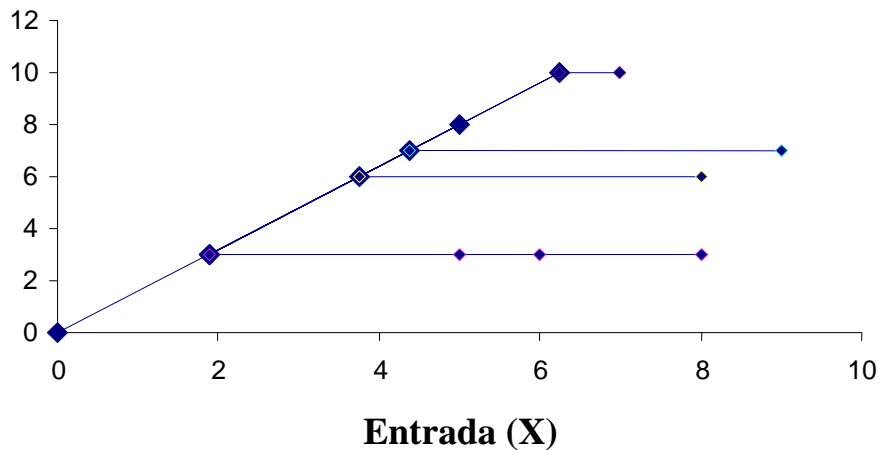
Salida (y)

Figura 2.2.4. Resolución gráfica del problema con orientación de entrada

Para la resolución de este problema no aplicamos, debido a su sencillez, ningún paquete informático. Podemos representar los resultados numéricamente en forma de tabla:

| DMU | ENTRADA | SALIDA | EFICIENCIA Y/X | EFICIENCIA GLOBAL (y/x)/max(y/x)*100 | PROYECCION x' | EF. TECN. OR. ENTRADA 0=Y'/X' *100 | PROYECCION SALIDA y' | EF. TECN. OR. ENT. L=y/y' *100 |
|-----|---------|--------|----------------|---|------------------|--|-------------------------|-----------------------------------|
| A | 9 | 7 | 0,78 | 48,61 | 4,38 | 48,61 | 14,4 | 48,61 |
| B | 6 | 3 | 0,5 | 31,25 | 1,88 | 31,25 | 9,6 | 31,25 |
| C | 8 | 6 | 0,75 | 46,88 | 3,75 | 46,88 | 12,8 | 46,88 |
| D | 7 | 10 | 1,43 | 89,29 | 6,25 | 89,29 | 11,2 | 89,29 |
| E | 5 | 3 | 0,6 | 37,5 | 1,88 | 37,5 | 8 | 37,5 |
| F | 8 | 3 | 0,38 | 23,44 | 1,88 | 23,44 | 12,8 | 23,44 |
| G | 5 | 8 | 1,6 | 100 | 5 | 100 | 8 | 100 |

Tabla 2.2.2. Resultados obtenidos del problema con rendimientos de escala constantes

2.1.2. Rendimientos de escala variables.

Si consideramos retornos de escala variables, existirá una frontera de eficiencia representada por las unidades que son eficientes técnicamente. Las unidades con eficiencia técnica son eficientes en comparación con las de su tamaño. El no ser eficientes globalmente significa que no tienen el tamaño óptimo, bien por ser demasiado pequeñas (rendimientos de escala

decrecientes) respecto a las unidades que son eficientes globalmente (tienen el tamaño de escala más productivo: MPSS Most Productive Scale Size).

En el ejemplo se observa gráficamente que las unidades eficientes técnicamente son las D y G, y todos los puntos de operación que forman una combinación lineal convexa con ambas DMU's.

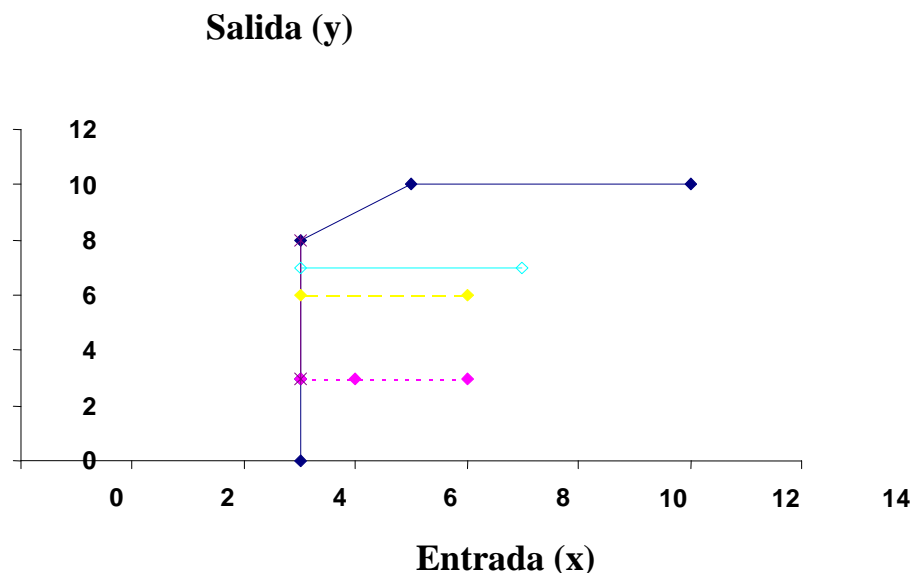


Figura 2.2.5. Resolución gráfica del problema con retornos de escala variables y orientación de entrada

Considerar la eficiencia técnica en lugar de la eficiencia global significa relajar las condiciones de eficiencia, es decir, permitir que existan más unidades eficientes.

Cuando se calcula la eficiencia técnica, su valor, para las unidades no eficientes, va a depender de si se utiliza orientación de entrada u orientación de salida. Sin embargo, el carácter de unidad eficiente no va a depender de la orientación.

| DMU | ENTRADA | SALIDA | EFICIENCIA y/x | EFICIENCIA GLOBAL $(y/x)/\max(y/x)*100$ | ORIENTACION ENTRADA | | | ORIENTACION SALIDA | | |
|-----|---------|--------|---------------------|---|---------------------|-------------------------------|-----------------|--------------------|----------------------------------|-----------------|
| | | | | | PROYECCION x' | EF. TECN. OR $0=y'/x'*100$ | HOLGURA h' | PROYECCION y' | EFICIENCIA TEC. $L=y'/y'*100$ | HOLGURA h' |
| A | 9 | 7 | 0,78 | 48,61 | 5 | 55,56 | 0 | 10 | 70 | 2 |
| B | 6 | 3 | 0,5 | 31,25 | 5 | 83,33 | 5 | 9 | 33,33 | 0 |
| C | 8 | 6 | 0,75 | 46,88 | 6 | 75 | 0 | 10 | 60 | 1 |
| D | 7 | 10 | 1,43 | 89,29 | 7 | 100 | 0 | 10 | 100 | 0 |
| E | 5 | 3 | 0,6 | 37,5 | 5 | 100 | 5 | 3 | 100 | 0 |
| F | 8 | 3 | 0,38 | 23,44 | 5 | 62,5 | 5 | 10 | 30 | 1 |
| G | 5 | 8 | 1,6 | 100 | 5 | 100 | 0 | 8 | 100 | 0 |

Tabla 2.2.3. Resultados obtenidos del problema con rendimientos de escala variables

3. MODELOS BÁSICOS DEA.

En este apartado se desarrollarán los modelos básicos de DEA, tanto para el retorno de escala constante como para el retorno de escala variable, partiendo del modelo más básico: modelo ratio.

3.1. Modelos DEA con Retornos de Escala Constantes.

En los modelos que se exponen en este apartado las unidades toman como DMU de referencia la de mayor productividad de entre las observadas a la hora de calcular su eficiencia relativa. A continuación se exponen tres de estos modelos: el modelo RATIO, el modelo CCR-INPUT y el modelo CCR-OUTPUT.

3.1.1. Modelo Ratio.

A la hora de calcular la eficiencia de cada unidad, se tiene la libertad de elegir los pesos que convierten la salida y la entrada agregadas en valores adimensionales. Con la metodología DEA cada unidad escogerá los valores de los pesos que optimicen su eficiencia, teniendo en cuenta que, una vez elegidos, serán utilizados por las restantes unidades. Por tanto cada unidad va a comparar su productividad con el resto de las que están en estudio utilizando en cada comparación los pesos con los que su eficiencia es mejor.

Antes de empezar a plantear los modelos debemos tener en cuenta qué indica cada subíndice:

| | |
|----------------------|---|
| $j = 1, 2, \dots, n$ | subíndice para las DMU's |
| $i = 1, 2, \dots, m$ | subíndice para las entradas |
| $k = 1, 2, \dots, s$ | subíndice para las salidas |
| x_{ij} | cantidad de entrada i consumida por DMU j |
| y_{kj} | cantidad de salida k producida por DMU j |

Planteamos un modelo que maximice la eficiencia, con libertad para elegir los pesos.

Analíticamente se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX} \quad \left[h_J = \frac{\sum_{k=1}^s v_{kJ} y_{kJ}}{\sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{iJ}} \right] \\
 & \text{s.a :} \\
 & \quad \frac{\sum_{k=1}^s v_{kJ} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{ij}} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \quad v_{kJ} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, s \\
 & \quad u_{iJ} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

donde ε es un número real estrictamente positivo. Este valor representa una constante no-arquimediana (menor que cualquier número real positivo), y por tanto, en las restricciones donde aparece, se les obliga a los pesos a que nunca puedan ser nulos. A la DMU que está en estudio se la denota con el subíndice J.

El modelo consiste en la resolución de n problemas de maximización como el anteriormente presentado, correspondientes a cada una de las unidades cuya eficiencia se quiere evaluar. La función objetivo elige los pesos que hacen máxima la eficiencia h_j de la DMU que se estudia.

Hay una restricción por cada unidad existente en el problema, y que obliga a que ninguna DMU pueda tener una eficiencia mayor que uno. Esta es la limitación que tienen los pesos cuando cada unidad intenta que tomen el máximo valor posible. Es decir, cada vez que intenta imponerse unos pesos que garanticen una eficiencia grande, debe asegurarse al mismo tiempo de que ninguna DMU del problema tenga una eficiencia inadmisibles (mayor que uno). Por la construcción del modelo, si la unidad no consigue ser eficiente, aun eligiendo los mejores pesos posibles para ello, es que existe otra que con esos pesos ya lo es.

De esta forma, una vez resueltos los n problemas planteados, se obtendrá un subconjunto K formado por las unidades DMU_r que han

resultado ser eficientes al resolverse el modelo, correspondiéndoles un valor $h_j = 1$. Es decir, cumplirán la restricción con signo de igualdad:

$$\frac{\sum_{k=1}^s v_{kr}^* y_{kr}}{\sum_{i=1}^m u_{ir}^* x_{ir}} = 1 \quad r \in K$$

Y por lo tanto, si la DMU_j que no cumple esta condición, serán considerada ineficiente respecto al subconjunto K definido, y tendrán un valor de eficiencia $h_j < 1$ y una ineficiencia, $(1 - h_j)$.

Este es un modelo que opera con retornos de escala constantes, ya que el análisis de una determinada unidad consiste en la comparación con las DMUs que poseen la mayor eficiencia observada. Esto es debido a la forma del modelo. Por ello, todas las DMU_j analizadas consideran a las mismas unidades como eficientes.

El nombre del modelo *RATIO* proviene del hecho de que la función objetivo es un cociente. Esto complica su resolución, ya que no es un problema lineal.

3.1.2. Modelo CCR-Input.

Las siglas CCR se corresponden con las iniciales de los autores Charnes, Cooper y Rhodes.

Para resolver la complejidad del modelo anterior, se opta por transformar el modelo *RATIO* en un problema lineal equivalente. De esta forma, se sustituyen los cocientes que aparecen en el modelo por expresiones lineales.

Maximizar un cociente equivale a hacer máximo su numerador si su denominador permanece constante, y cuando un cociente es menor que la unidad es porque el numerador es menor que el denominador. Con estas consideraciones el modelo anterior quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& \text{MAX} \quad \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj} \\
& \text{s.a. :} \\
& \quad \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
& \quad \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1 \\
& \quad v_{kj} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, s \\
& \quad u_{ij} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m
\end{aligned}$$

Que es conocida como forma multiplicadora.

Como puede observarse, se consigue un modelo de programación lineal con $n+1$ restricciones y $s+m$ cotas. Las n primeras restricciones provienen de linealizar la condición de que todas las unidades deben tener una eficiencia menor o igual que uno.

La restricción adicional establece una medida de referencia de la entrada virtual. Así se asegura que se maximiza la eficiencia cuando se hacen máximas las salidas. De esta forma, no sólo se consigue que el valor de la función objetivo, cuando se resuelve el problema, sea la eficiencia de la unidad DMU_j , sino que además se reduce el número de soluciones

alternativas de los pesos, con la restricción: $\sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1$

Sin embargo, es más frecuente utilizar las variables del dual de este modelo para analizar los resultados obtenidos de aplicar esta metodología. Por esto se expone a continuación el modelo dual:

$$\begin{aligned}
& \text{MIN :} \quad \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
& \text{sa :} \\
& \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j x_{ij} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& \quad \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kj} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s \\
& \quad \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
& \quad \theta_j \text{ libre}
\end{aligned}$$

A esta forma del modelo se le conoce como forma envolvente.

Las n variables λ_j son las correspondientes a las n primeras restricciones del problema primal, θ_j la variable correspondiente a la restricción restante, y h_k^+ y h_i^- , denominadas variables de holgura, son las correspondientes a las $s+m$ cotas existentes. La resolución de este modelo consta de dos fases.

En la primera etapa (Fase I) se resuelve el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
 \text{MIN :} \quad & \theta_j \\
 \text{sa :} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j x_{iJ} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
 & \theta_j \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Y con la solución del modelo θ_j^* se resuelve la segunda fase (Fase II):

$$\begin{aligned}
 \text{MIN :} \quad & - \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
 \text{sa :} \quad & \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j^* x_{iJ} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
 & \theta_j \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Las funciones objetivo de ambos problemas, primal y dual, coinciden en el óptimo, y por tanto se tiene que:

$$h_j^* = \theta_j^* - \varepsilon \left[\sum_{i=1}^m h_i^{-*} + \sum_{k=1}^s h_k^{+*} \right] = \sum_{k=1}^s v_{kJ}^* y_{kJ}$$

Se puede observar que cualquier unidad puede tener como valores admisibles:

$$\begin{aligned}\theta_j &= 1 \\ \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &= 0, \quad \forall j \neq J \\ h_i^- &= h_k^+ = 0, \quad \forall i \text{ y } \forall k\end{aligned}$$

La función objetivo intenta, por tanto, que θ_j tenga un valor menor que la unidad. La resolución de este problema dual tiene una interpretación gráfica que a continuación se procede a explicar. Las restricciones establecen una combinación lineal entre el punto (x_{ij}, y_{kj}) y los restantes puntos en estudio (x_{ij}, y_{kj}) , cuyo resultado es la unidad virtual $(\theta_j^* x_{ij} - (h_i^-)^*, y_{kj} + (h_k^+)^*)$. La solución siempre admisible expuesta, corresponde a considerar que la DMU_j es combinación lineal de ella misma. Al minimizarse θ_j , son reducidas proporcionalmente las componentes de las entradas hasta llegar al punto que, con las mismas salidas, se obtiene la menor entrada admisible con la combinación lineal de las unidades en estudio. Esto corresponde a proyectar el punto sobre un hiperplano que pasa por el origen y por las unidades eficientes del problema, reduciendo de forma radial las entradas. Si $\theta_j^* = 1$ y $(h_k^+)^*, (h_i^-)^* \neq 0$ para alguna entrada o para alguna salida, se produce una proyección paralela al eje correspondiente a la variable de holgura que no es nula. Por otra parte, si $\theta_j^* = 1$ y $(h_k^+)^* = (h_i^-)^* = 0$; no se produce ninguna proyección, y por tanto la unidad es eficiente (se proyecta sobre sí misma).

En el caso de una entrada y una salida, se puede representar el problema en el plano. Así, considerando seis unidades, se tendría por ejemplo:

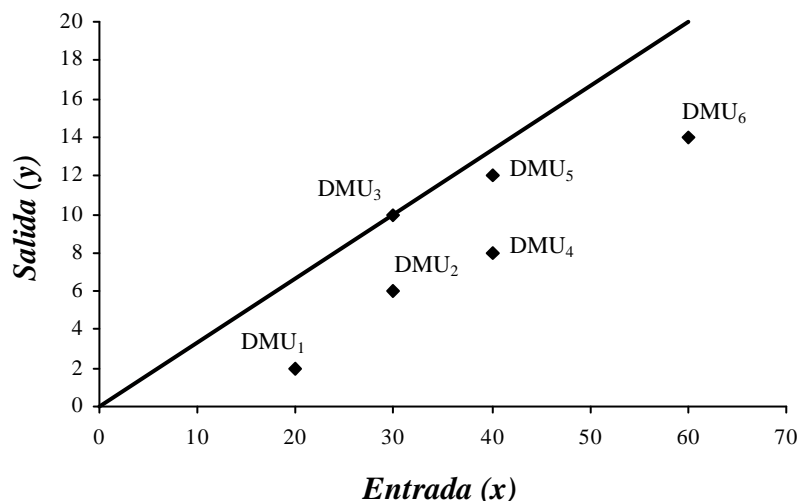


Figura 2.3.1. Ejemplo gráfico para una entrada y una salida.

Donde DMU_3 es la unidad de mayor eficiencia relativa. La línea trazada desde el origen hasta dicha DMU son todos los posibles puntos que tendrían la misma eficiencia que DMU_3 , esto es, la de máxima eficiencia. A esta línea se le denomina frontera eficiente, y como se puede observar deja por debajo suya todas las demás observaciones. En DEA se expresa como una frontera que envuelve a todas las unidades, de aquí el nombre de la metodología. Al resolverse el problema para cada unidad J , gráficamente se están calculando las proyecciones horizontales de las unidades en estudio sobre la frontera eficiente.

La representación sería:

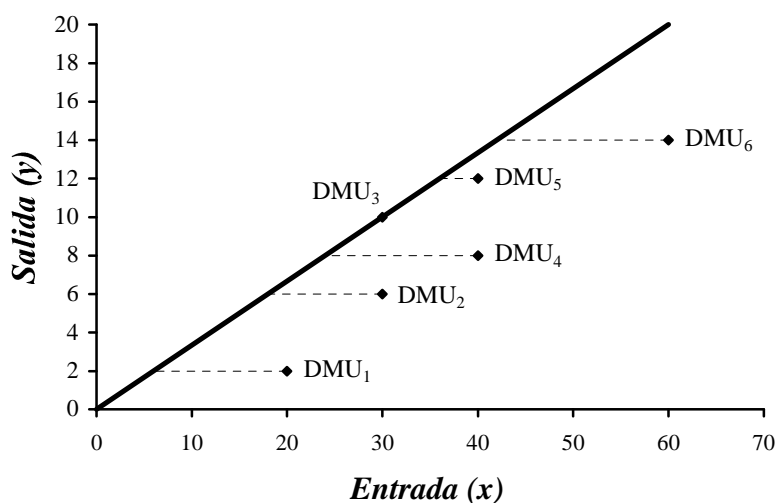


Figura 2.3.2. Resolución gráfica del modelo CCR-I para una entrada y una salida.

Así pues, la frontera eficiente es el lugar geométrico de las unidades con eficiencia igual a uno. Las proyecciones calculadas representan la unidad en la que debería convertirse cada DMU_j para que fuese considerada eficiente, con una reducción de sus entradas. Por esto, este modelo está planteado con orientación de entrada. Como proviene del modelo RATIO, también es un problema con retornos de escala constantes. Por esto el modelo se denomina CCR-INPUT.

Analizando las variables del dual, e interpretando su significado gráfico, podemos observar que θ_j es la proporción de entradas actuales que deben utilizarse para conseguir la eficiencia y λ_j son las componentes del vector de pesos asociados a la combinación lineal resultante y que, de alguna forma, mide la proximidad de la proyección resultante de cada DMU_j con las unidades eficientes de las que es combinación lineal. Pero en este caso de una sola entrada y una sola salida no se ha comentado nada de las variables h_k^+ y h_i^- . Para comprobar su significado gráfico, se expone un ejemplo con dos entradas y una salida. Si las entradas se denotan como 'x1' y 'x2' y la salida como 'y', se podría representar gráficamente por la propiedad nomotética que el problema posee. Un caso genérico es el siguiente:

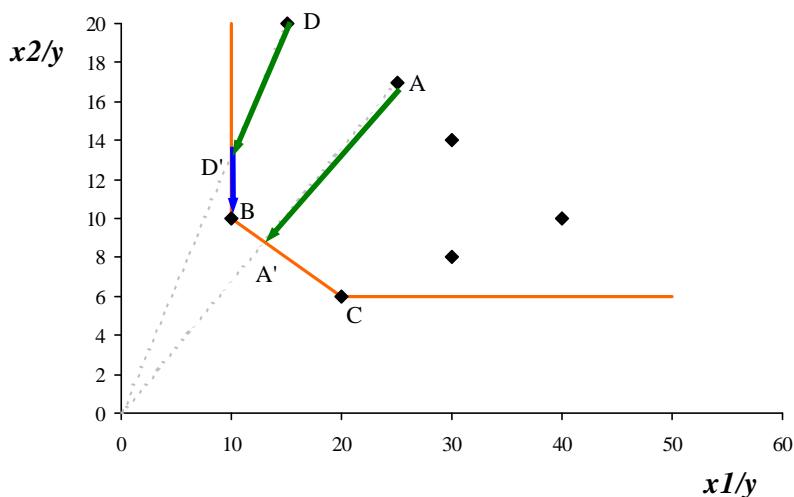


Figura 2.3.3. Resolución gráfica del modelo CCR-I para dos entradas y una salida.

La frontera eficiente está representada mediante la línea que une los puntos B y C, correspondiente a la representación del plano que pasa por el origen y por dichas unidades. De esta forma, si se considera el conjunto T_{CRS} expuesto anteriormente de todas las combinaciones lineales de las unidades observadas (los puntos admisibles en el problema), la envolvente

de este conjunto es precisamente la línea quebrada representada en el gráfico.

Así pues, los hiperplanos paralelos a los ejes no forman parte de la frontera eficiente ya que sus puntos no son unidades eficientes (no se proyectan sobre sí mismas, es decir, $(h_k^+)^*$ y $(h_i^-)^*$ no son 0). Un ejemplo de esto es el caso representado de la unidad D', puesto que solucionando el problema dual para esta unidad, la proyección resultante se produciría en el punto B, mediante una reducción rectangular (paralelas a los ejes) de la entrada h_1^- .

En el caso general, por tanto, aparecerán unidades que sólo necesitarán reducción radial para proyectarse sobre la frontera eficiente (unidad A), sólo reducción rectangular (unidad D') o ambos tipos de reducción (unidad D, al aplicar las 2 fases).

Dado un problema, un modelo DEA se dice que es invariante a la traslación, si haciendo una traslación de las entradas y salidas originales, resulta un nuevo problema que tiene la misma solución óptima en la forma envolvente del modelo que el anterior.

Se puede demostrar que este modelo es invariante ante traslaciones en la dimensión de las salidas (ver Pastor, 1995).

3.1.3. Modelo CCR-Output.

Si optamos por linealizar la función objetivo del modelo RATIO minimizando el denominador de la expresión y manteniendo el numerador constante, obtendríamos un modelo lineal similar al anterior:

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN} \quad \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \\
 & \text{s.a. :} \\
 & \quad \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \quad \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj} = 1 \\
 & \quad v_{kj} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, s \\
 & \quad u_{ij} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

Donde la función objetivo representa ahora el inverso de la eficiencia relativa de la unidad J, y por tanto siempre será mayor o igual que uno. Es un problema con retornos de escala constantes, por la razón ya expuesta.

Las consideraciones de este modelo son análogas a las que se hicieron con el CCR-INPUT. Pero de nuevo, es en el problema expresado en su forma dual donde se advierten las consideraciones gráficas. Así pues, construyendo el problema dual se obtiene de forma similar al caso anterior:

$$\begin{aligned}
 \text{MAX :} \quad & \gamma_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
 \text{sa :} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iJ} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \gamma_J y_{kJ} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
 & \gamma_J \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Aparece en este modelo una nueva variable que no es más que la amplificación radial que debe producirse en las salidas para proyectarse en la frontera eficiente. Observando el mismo ejemplo de una sola entrada y una sola salida pero resuelto con este nuevo modelo, se obtendría gráficamente:

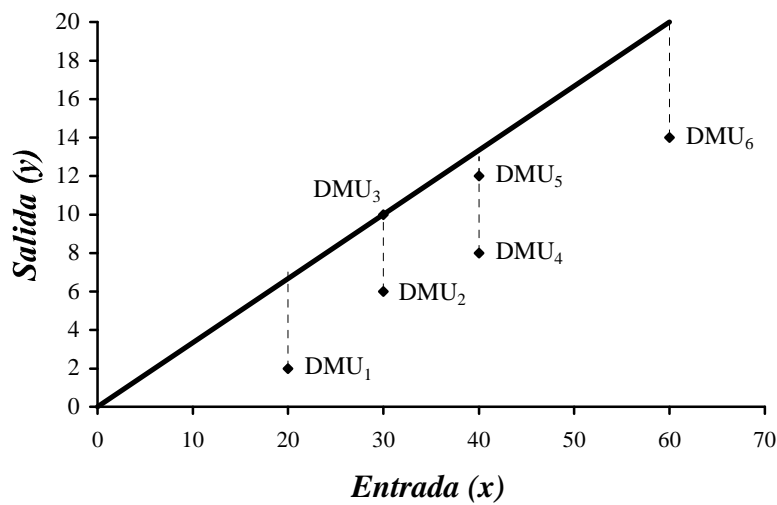


Figura 2.3.4. Resolución gráfica del modelo CCR-O para una entrada y una salida.

Ahora una solución siempre admisible del problema es:

$$\begin{aligned}\gamma_J &= 1 \\ \lambda_J &= 1 \\ \lambda_j &= 0, \quad \forall j \neq J \\ h_i^- &= h_k^+ = 0, \quad \forall i \text{ y } \forall k\end{aligned}$$

Y al igual que en el anterior modelo, corresponden a los valores que toman estas variables en el caso de unidades eficientes. Como en el anterior modelo, las restricciones establecen una combinación lineal entre el punto (x_{iJ}, y_{kJ}) y los restantes puntos en estudio (x_{ij}, y_{kj}) , que dan como resultado la unidad virtual $(x_{iJ} - (h_i^-)^*, \gamma_J^* y_{kJ} + (h_k^+)^*)$. La solución siempre admisible expuesta corresponde a considerar que el punto es combinación lineal de él mismo. Al maximizar γ_J , las componentes de las salidas aumentan hasta llegar al punto en que, con las mismas entradas tiene la mayor salida admisible con la combinación lineal de las unidades en estudio. Esto corresponde a proyectar el punto sobre la frontera eficiente del problema, aumentando de forma radial las entradas. Por esto es un problema con orientación de salida.

De la misma forma que en el modelo anterior, si $\gamma_J^* = 1$ y $(h_k^+)^*, (h_i^-)^* \neq 0$ para alguna entrada o para alguna salida, se produce una proyección paralela al eje correspondiente al término que no es nulo. Si $\gamma_J^* = 1$ y $(h_k^+)^* = (h_i^-)^* = 0$, no se produce ninguna proyección, y por tanto la unidad es eficiente (se proyecta sobre sí misma).

En el caso de una entrada y dos salidas:

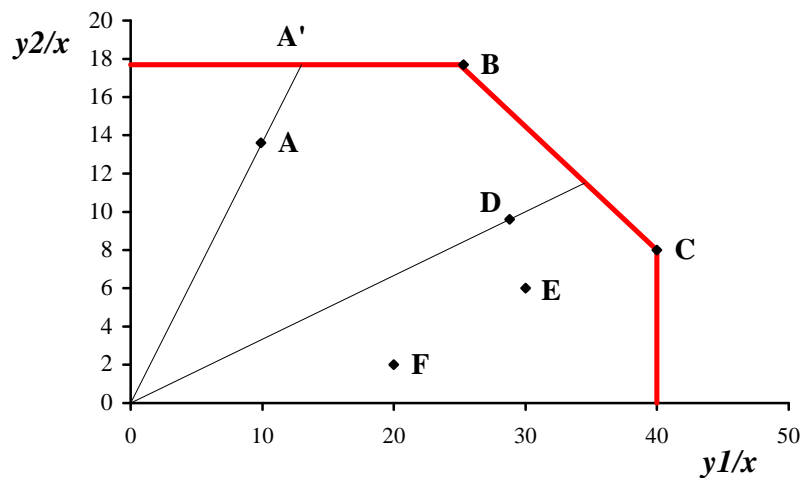


Figura 2.3.5. Resolución gráfica del modelo CCR-I para dos entradas y una salida.

Se puede observar los dos tipos de incrementos de salida que se pueden producir en el problema: radial (Fase I) y rectangular (Fase II).

Este modelo es invariante ante las traslaciones en las dimensiones de entradas.

3.2. Modelos DEA con Retornos de Escala Variables.

Los modelos anteriores no pueden ser utilizados en los casos en donde el problema se plantee con retornos de escala variables. De esta forma aparecen nuevos modelos para solucionar dichos casos. A continuación se exponen los modelos BCC-INPUT y BCC-OUTPUT, pertenecientes a esta clase de modelos.

3.2.1. Modelo BCC-Input.

BCC se corresponde con las iniciales de sus autores Banker, Charnes y Cooper, fue propuesto por primera vez en 1984.

Para que el modelo considere los retornos de escala variables habrá que introducir, a partir del modelo RATIO linealizado, alguna restricción o alguna variable que le indique al modelo que cada DMU_j tiene que ser comparada con aquéllas de su tamaño y no con todas las unidades presentes en el problema.

Modificando la forma envolvente del modelo CCR-INPUT de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \text{MIN :} \quad & \theta_j - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right] \\
 \text{sa :} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = \theta_j x_{iJ} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0 \\
 & \theta_j \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Se puede observar que la restricción adicional que aparece en el dual de este modelo (suma de las componentes del vector $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ igual a uno) obliga a que la proyección de la unidad se efectúe sobre el hiperplano que forman las unidades más productivas de su tamaño. En general, para este caso, aparecerán unidades que no eran eficientes en el anterior modelo (retornos de escala constantes) y que sin embargo en este modelo sí lo son. De ahí que la frontera eficiente esté formada, en general, por más unidades que en el modelo CCR.

Al igual que en anterior modelo CCR-INPUT, una solución admisible siempre será:

$$\begin{aligned}\theta_j &= 1 \\ \lambda_j &= 1 \\ \lambda_j &= 0, \quad \forall j \neq J \\ h_i^- &= h_k^+ = 0, \quad \forall i \text{ y } \forall k\end{aligned}$$

Y la eficiencia relativa de cada unidad de nuevo es θ_j . Las mismas consideraciones que se hicieron con el modelo de retornos de escala constantes CCR-INPUT referentes a las proyecciones realizada sobre la frontera y los valores de las variables de holgura, son también válidas aquí. Como se puede ver, el problema tiene orientación de entrada porque la reducción radial sólo es permitida para las entradas.

El conjunto de los puntos admisibles en el problema serán los elementos del conjunto T_{VRS} y su envolvente, nueva frontera eficiente (cualquier punto perteneciente a la envolvente se proyecta sobre sí mismo).

Hay que hacer notar la nueva forma que adquiere la frontera eficiente en este caso de retornos de escala variables si se considera el caso de una sola entrada y una sola salida:

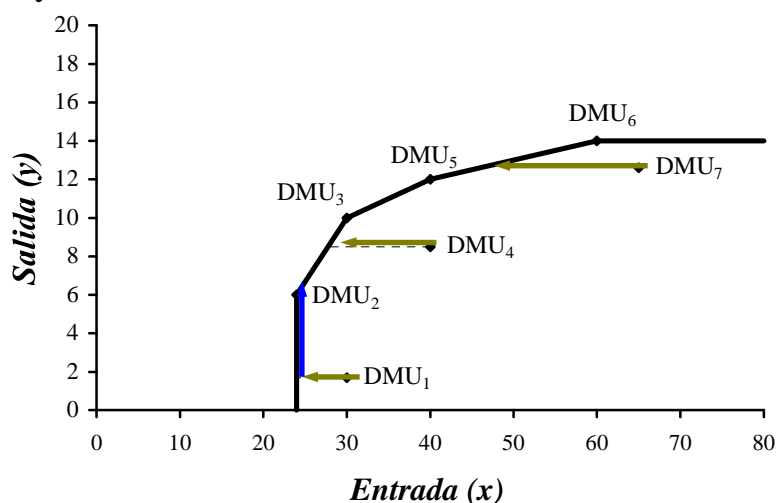


Figura 2.3.6. Resolución gráfica del modelo BCC-Input para una entrada y una salida.

La frontera eficiente es la línea quebrada DMU₂-DMU₃, DMU₃-DMU₅ y DMU₅-DMU₆. Las unidades eficientes, por tanto, son DMU₂, DMU₃, DMU₅ y DMU₆. Las posibles proyecciones se encuentran representadas en el gráfico. DMU₄ sólo necesita de una reducción radial de su entrada para proyectarse sobre la frontera, sin embargo DMU₁ con la reducción radial no consigue llegar a la frontera y necesita de una reducción rectangular adicional.

Se define “peer group” al conjunto de unidades eficientes de la que la proyección de una determinada unidad es combinación lineal. En el caso de la unidad DMU₄, su peer group son las unidades DMU₂ y DMU₃. Se puede decir que la DMU analizada se debe comparar con su proyección para conseguir alcanzar una eficiencia igual a uno, y esta proyección puede ser una unidad que no existe en la realidad del problema pero cuyo tamaño de escala es el tamaño de las unidades que conforman el “peer group”.

Por otra parte se observa que DMU₄ opera con retornos de escala crecientes (IRS) ya que se proyecta sobre la zona de la frontera constituida por unidades que, para conseguir el tamaño de la de mayor productividad del problema (en este caso la unidad DMU₃), deberían incrementar tanto su entrada como su salida. Por un motivo similar, DMU₇ opera con retornos de escala decrecientes (DRS).

El dual del problema planteado es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{MAX} \quad \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj} - \xi_j \\
 & \text{s.a. :} \\
 & \quad \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} + \xi_j \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \quad \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} = 1 \\
 & \quad v_{kj} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, s \\
 & \quad u_{ij} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \quad \xi_j \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Considerando que los pesos u_{ij} y v_{kj} son los vectores directores del hiperplano que constituye la frontera eficiente se puede observar cómo la función objetivo permite que el hiperplano óptimo solución del problema pueda no pasar por el origen con la introducción de la nueva variable ξ_j .

El modelo es invariante frente a las traslaciones de salidas, ya que no existen amplificaciones radiales.

3.2.2. Modelo BCC-Output.

Si la orientación del problema es de salida, se obtendría un modelo análogo al anterior.

$$MAX : \quad \gamma_J + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^s h_k^+ + \sum_{i=1}^m h_i^- \right]$$

sa :

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iJ} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = \gamma_J y_{kJ} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

$$\gamma_J \text{ libre}$$

Resolviendo el modelo de forma gráfica para el caso de una sola entrada y una sola salida:

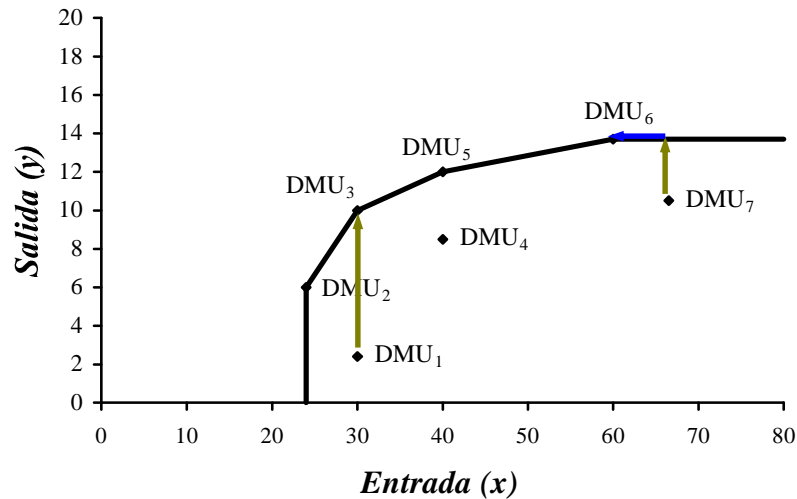


Figura 2.3.7. Resolución gráfica del modelo BCC-Output para una entrada y una salida.

Se tiene como frontera eficiente la misma que en el ejemplo anterior. Las proyecciones se realizan amplificando de forma radial las salidas, en primer lugar, y si es necesario (como en DMU7) proyectando de forma rectangular.

Llegados a este punto del análisis, todas las consideraciones hechas en los modelos anteriores son análogas. Se puede comprobar que el modelo dual al anterior es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{MIN} \quad \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} - \xi_j \\
 & \text{s.a. :} \\
 & \quad \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_{ij} x_{ij} + \xi_j \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \\
 & \quad \sum_{k=1}^s v_{kj} y_{kj} = 1 \\
 & \quad v_{kj} \geq \varepsilon \quad k = 1, 2, \dots, s \\
 & \quad u_{ij} \geq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & \quad \xi_j \text{ libre}
 \end{aligned}$$

Este modelo es invariante frente a las traslaciones de entradas.

3.3. Comparación entre los modelos CCR y BCC.

En este apartado se pretende analizar de forma conjunta las soluciones obtenidas con los modelos CCR y BCC, para poder observar de esta manera las diferencias entre ambos.

Ambos modelos, por lo explicado hasta ahora, se diferencian en la consideración de los retornos de escala. Si representamos en un mismo gráfico el caso de una entrada y una salida cuando el problema opera con orientación de entrada:

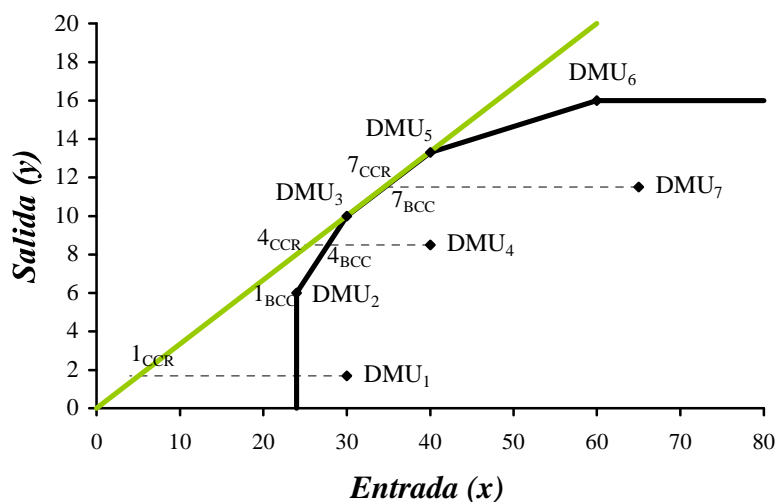


Figura 2.3.8. Comparación entre los modelos CCR y BCC.

Así podemos observar que en el MPSS (línea DMU₃-DMU₅), la solución dada por ambos modelos resulta ser la misma, ya que en esa zona la frontera es coincidente. En cualquier otra situación, la eficiencia calculada con el modelo BCC (eficiencia técnica), siempre será mayor que la calculada con el modelo CCR (eficiencia global), ya que las unidades sobre las que se proyectan las unidades DMU_j analizadas son de menor productividad.

Aspectos muy similares ocurrirán en el caso de orientación de salida.

3.4. Modelo Aditivo (“Additive Model”).

Es un modelo que considera problemas que operan con retornos de escala variables. Fue introducido por primera vez por Charnes (1985) y más tarde fue elaborado por Banker (1989).

La diferencia principal del modelo aditivo con los modelos BCC y CCR reside en que utiliza una métrica rectangular en lugar de la radial utilizada por los anteriores. Dicho de otra forma, la resolución del modelo sólo va a realizar la segunda fase de las que constaba los modelos CCR y BCC. (Ya sea orientación de entrada o salida siempre se maximizan las holguras, y por tanto el modelo aditivo no distingue dichos tipos de orientaciones).

Las unidades eficientes en el modelo BCC resultan eficientes si se utiliza el modelo aditivo y viceversa. Sin embargo, cuando una unidad resulta ineficiente, las fuentes de ineficiencia y su importancia detectadas por el modelo BCC, difieren de las encontradas por el modelo aditivo. La razón de ello se debe a la diferente métrica utilizada por ambos métodos para la evaluación de la eficiencia.

Así pues, si del modelo se elimina, la variable que implicaba la reducción (ampliación) radial de las entradas (salidas) en el caso de modelos BCC con orientación de entrada (salida) se obtiene:

$$\text{MAX:} \quad \sum_{K=1}^S h_h^+ + \sum_{i=1}^m h_i^-$$

sa:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_{iJ} - h_i^- \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} \lambda_j = y_{kJ} + h_k^+ \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, h_i^-, h_k^+ \geq 0$$

La eficiencia calculada en el modelo aditivo de las unidades del problema son medidas mediante las variables de holgura h_i^- y h_k^+ . Las unidades eficientes que se obtienen con este modelo aditivo y con el modelo BCC no varían. Es decir, en ambas versiones se va a obtener la misma frontera eficiente. Sin embargo, cuando una unidad DMU es ineficiente, su eficiencia puede ser diferente para cada modelo, ya que se están utilizando diferentes métricas.

Es posible obtener una versión de este modelo aditivo que opere con retornos de escala constantes, simplemente omitiendo la restricción $\sum \lambda_j = 1$.

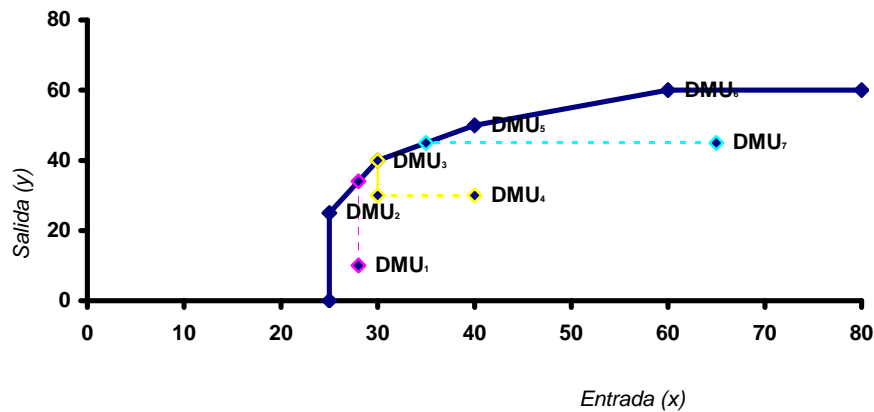


Figura 2.3.9. Resolución del modelo Aditivo para 1 entrada y 1 salida

Se han representado las proyecciones en este problema, resolviendo el modelo anteriormente expuesto. Como se puede observar, para la unidad DMU1 sólo se aumenta la cantidad de salida (coincide con una resolución con orientación de salida) para la DMU7 sólo existe reducción de entrada (coincide con una resolución con orientación de entrada), y para la DMU4 existe modificación tanto en la entrada como en la salida.

Una ventaja de este modelo es la de ser invariante frente a traslaciones. Las traslaciones son necesarias cuando, por ejemplo, alguna de las variables (entradas o salidas) puede tomar valores negativos. En estos casos, resulta conveniente el empleo del modelo aditivo.

El dual de este modelo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{MAX} \quad & \sum_{k=1}^s v_{kJ} y_{rJ} - \sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{ij} + \xi_J \\ \text{s.a:} \quad & \sum_{k=1}^s v_{kJ} y_{rj} - \sum_{i=1}^m u_{iJ} x_{ij} + \xi_J \leq 0 & j = 1, 2, \dots, n \\ & v_{kJ} \geq 1 & k = 1, 2, \dots, s \\ & u_{iJ} \geq 1 & i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

4. APLICACIONES

La metodología se ha aplicado a multitud de problemas reales, debido a la versatilidad de su formulación. Podemos destacar, a modo de resumen, los diversos temas que se han tratado:

- *Sector sanitario*

El primer estudio que se realizó fue en 1986, titulado “A comparative application of Data Envelopment Analysis and translog methods: An illustrative study of hospital production”.

Se puede mencionar también otro estudio: “Hospital Ownership and Technical Inefficiency”, Burgess, J.F. y Wilson, P.W. Y, otro más reciente: “Assessing the technical and allocative efficiency of hospital operations in Greece and its resource allocation implications”

- *Sector educativo*

Podemos destacar un estudio de 1981 denominado “Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through”. Otras publicaciones referentes a este sector son:

“Assessing the Effectiveness of Schools With Pupils of Different Ability using Data Envelopment Analysis”, Thanassoulis, E.

“Decomposing school and school-type efficiency”, Silva, M.C.A. y Thanassoulis, E.

- *Sector público/sector servicios*

“Evaluation the Efficiency of US Air Force Real-Property Maintenance Activities”.

“The efficiency of conventional fuel power plants in South Korea: A comparison of parametric and non-parametric approaches”.

“Slack-adjusted DEA for time series analysis: Performance measurement of Japanese electric power generation industry in 1984-1993”.

- *Sector industrial privado*

“A methodology for collective evaluation and selection of industrial R&D projects”.

“Measuring the performance of operations of Hong Kong’s manufacturing industries”.

- *Sector financiero*

“Linking and Weighting Efficiency Estimates with Stock Performance in Banking Firms”.

“Efficiency, Profitability and Quality of Banking Services”.

“Allocative efficiency in branch banking”