# Modelación de Problemas Lineales de Optimización

## Modelos de Optimización
## Lic. en Ciencias de la Computación

**Luis Ernesto Ibarra Vázquez** LUIS.IBARRA@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU
*Grupo C411*
**Adrián Hernández Pérez** ADRIANMATCOM@GMAIL.COM
*Grupo C411*
**Damián O'Hallorans Toledo** DAMIAN.OHALLORANS@ESTUDIANTES.MATCOM.UH.CU
*Grupo C412*

**Tutor(es):**
MsC. Fernando Rodríquez, *Universidad de La Habana*

## 1. Objetivos

1. Recordar las definciones básicas sobre la asignatura dadas en conferencia
2. Modelar tipos de problemas comunes en la optimización lineal

## 2. Introducción

(Este segmento tiene una duración de 5 minutos.)

Se introduce la clase que se ambienta en el popular mundo de Juego de Tronos como medio para motivar a los estudiantes en la realización de los ejercicios. En concreto se creó con la idea de la preparación para la batalla conocida como The Long Night, bastante famosa en la serie. En los ejericios se tienen que reunir, crear y transportar recursos eficientemente para luego poder sobrevivir al combate contra los caminantes blancos. Los ejercicios abarcan un abanico de problemas diferentes que se ven comúnmente en la optimización lineal.

Se dividirá el aula en dos equipos para fomentar la competitividad durante el transcurso de la clase, los equipos se llamarán en dependencia de las regiones en que se divide el continente:

- Riverlands
- Vale of Arryn

Se explicará el flujo de la clase, el cual consiste en:

1. Plantear el modelo que resuelve el ejercicio.
2. Pedir a cada equipo los diferentes valores de las variables de decisión.
3. El equipo que más se acerque al resultado óptimo obtendrá un punto.
4. El equipo que más puntos tenga al final, gana.

## 3. Teorizando un poco

(Este segmento tiene una duración de 10 minutos)

En la conferencia previa a la clase práctica se deben de haber dado los temas introductorios con la optimización general y también algunos problemas clásicos de la optimización lineal. En un principio se tocará brevemente estos puntos para recordar las definiciones y construcciones.

Se plantearán las siguientes preguntas a los estudiantes:

### 3.1 ¿Qué es un modelo matemático?

Esta pregunta se realizará con el objetivo de introducir la representación de problemas del mundo real al mundo matemático y su representación computacional.

Un modelo matemático es una abstracción de un problema real, formulado matemáticamente, que tiene como objetivo reproducir el problema en cuestión de la forma más fiel posible con el fin de poder entender y estudiar cómo se comporta.

Un ejemplo problema sencillo de modelación que se podría presentar sería cómo modelar una imagen. En este caso el modelo matemático que se usaría serían las matrices. Con estas se puede representar una imagen asignando cada color en la imagen real a un número en la matriz en la posición correspondiente.

### 3.2 ¿Qué es un modelo de optimización?

Esta pregunta se realizará con el objetivo de especificar el tipo de problemas que se trata en la asignatura y llegar al Problema General de Optimización Matemática (PGOM).

Un modelo de optimización es uno en donde se quiere hallar el mínimo o máximo de cierta función. Se define como Problema General de Optimizazción Matemática al problema P siguiente:

$$P : \text{mín} f(x)$$

$$s.a. \quad h_i(x) = 0 \quad i \in \{1, ..., m\}$$

$$g_j(x) \leq 0 \quad j \in \{m+1, ..., m+k\}$$

$$x \in \Omega$$

### 3.2.1 Ejemplo

Se muestra un ejemplo concreto sencillo que luego servirá de referencia para las futuras preguntas, presentando preguntas escenciales a la hora de modelar:

Tyrion Lannister se está quedando sin bebidas alcohólicas, entonces haciendo alusión a su célebre frase, *"Eso se lo que hago, bebo y sé cosas"* quiere hacer su propia bebida. Para esto cuenta con 30 libras de uvas, 40 libras de cebada y con 30 libras de levadura. Él conoce que para crear un litro de cerveza necesita 1 libra de cebada y 0.5 libras de levadura, mientras que para crear vino los requisitos son 2 libras de uva y 1 libra de levadura. Conociendo que la cerveza tiene un nivel de alcohol de 2 % y el vino 4 %, ¿cuál es la mejor manera de distribuir los recursos para crear la mayor cantidad de alcohol?

**¿Qué hay que decidir?**

- $c$: Cantidad de litros de cerveza producido.
- $v$: Cantidad de litros de vino producido.

**¿Qué se quiere maximizar o minimizar?**

$$P : \text{máx} f(c, v) = c * 0.02 + v * 0.04$$

**¿Cuáles son las condiciones que tiene que cumplir el problema?**

$$s.a. \quad 2v \leq 30$$

$$c \leq 40$$

$$0.5c + v \leq 30$$

$$0 \leq c$$

$$0 \leq v$$

$$x = (c, v) \in R^2$$

## 3.3 ¿Cuáles son las partes de un PGOM?

Esta pregunta se realizará con el objetivo de mencionar y explicar las diferentes partes que componen a un PGOM y la función que realiza cada una de ellas.

### 3.3.1 Partes de un PGOM

**Variables de decisión:** Se asocian a las decisiones que se pueden tomar en el problema. Ejemplo, cantidad de productos a producir de cada tipo. Ejemplo $c, v$. Ver 3.2.1.

**Función objetivo:** Es la función que se desea encotrar el óptimo, expresa el objetivo del problema. Ejemplo: $f(c, v)$. Ver 3.2.1.

**Restricciones:** Conjunto de restricciones que tienen que cumplir las variables de decisión para que el problema tenga solución. Ejemplo: $2v \leq 30$, $c \leq 40$, $0.5c + v \leq 30$, $0 \leq c$ y $0 \leq v$. Ver 3.2.1.

## 3.4 ¿Qué significa resolver un PGOM?

Esta pregunta se realizará con el objetivo de recordar conceptos relacionados con el conjunto solución, dígase soluciones factibles y soluciones óptimas.

### 3.4.1 Conjuntos y Soluciones

**Conjunto de soluciones factibles ($M \subset \Omega$):** Conjunto de valores que toman las variables de decisión que satisfacen las restricciones del problema. Ejemplo: $x = (c, v) = (0, 0)$ o $x = (c, v) = (1, 2)$. Ver 3.2.1.

**Solución óptima ($x^*$):** Mínimo o máximo global de la función objetivo sobre $M$. Ejemplo: $x^* = (c, v) = (30, 15)$. Ver 3.2.1.

# 4. Ejercicios

Se realiza una introducción a los ejercicios basada en la historia de la serie y en el contexto en que se encuentran, en la preparación de la la batalla contra los caminantes blancos.

Los ejercicios se dividen por algunas de las diferente Casas que participaron en la batalla, para usar la temática de la clase práctica a nuestro favor y darle un mejor ambiente.

Una vez esté resuelto el modelo de cada ejercicio, se le pedirá a un integrante de cada equipo que le asigne valores a las variables de acuerdo a su criterio. El resultado se verificará con el programa escrito para la clase, el cual ayuda en la tarea de indicar qué tan bueno es su resulado. Finalmente se le da el punto al equipo que más se acerque al óptimo.

## 4.1 Casa Mormont

(Este ejercicio tiene una duración de 10 minutos.)

En la preparación de la batalla se necesitan armas para que los guerreros puedan defenderse del ejército de caminantes blancos. Para esto se tienen escasos recursos, así que hay que usarlos sabiamente. Entre las reservas y el trabajo se logró reunir:

- 600000 unidades de hierro
- 400000 unidades de madera

- 800000 unidades de cuero

Los herreros y artesanos nos brindan una tabla que muestra la cantidad de materia prima necesaria para construir cada arma y el daño que reporta cada una.

| Arma | Hierro | Madera | Cuero | Daño |
|---|---|---|---|---|
| Espada | 10 | 2 | 4 | 15 |
| Arco | 2 | 10 | 5 | 10 |
| Catapulta | 30 | 100 | 50 | 80 |

Figura 1: Datos de armas

a. Ayude a darle el mejor uso a estos recursos, diciéndoles a los jefes de la casa la cantidad de espadas, arcos y catapultas que necesitan construir para maximizar el daño que realizan.

b. Se quiere tener modelo que generalice el problema anterior en términos de la cantidad de tipos de materiales y cantidad de tipos de armas. Proponga un modelo que haga esta generalización.

#### 4.1.1 Sobre el ejercicio

Este ejercicio es un sencillo problema de producción, en el cual se tienen materiales y productos que se construyen con estos materiales y se quiere maximizar la utilidad de los productos, el daño en este caso. Una vez se haga el primer inciso los estudiantes deben de poder generalizar el problema para que el modelo sea independiente de la cantidad de tipos de materiales y productos. Esto último brindará al estudiante de conocimiento práctico sobre el uso de sumatorias, vectores y matrices para trabajar con problemas de optimización, ya que se verán obligados a no solo usar ecuaciones fijas para las restricciones y función objetivo.

#### 4.1.2 Solución

Inciso a)
**Variables de decisión:**

- $x_1$: Cantidad de espadas.
- $x_2$: Cantidad de arcos.
- $x_3$: Cantidad de catapultas.

**Restricciones:**
La cantidad de hierro disponible no puede ser superada:

$$10x_1 + 2x_2 + 80x_3 \leq 600000$$

La cantidad de hierro disponible no puede ser superada:

$$2x_1 + 10x_2 + 100x_3 \leq 400000$$

La cantidad de hierro disponible no puede ser superada:

$$4x_1 + 5x_2 + 50x_3 \leq 800000$$

Las cantidades tienen que ser no negativas:

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in [1, 2, 3]$$

**Función objetivo:**
Se quiere maximizar el daño inflingido con las armas creadas.

$$\text{máx}\, 15 * x_1 + 10 * x_2 + 80 * x_3$$

Inciso b)
**Variables de decisión:**

- $x_i$: Cantidad de producto $i$.

**Restricciones:**

- $b_j$: Cantidad de materia prima $j$.
- $c_i$: Utilidad del producto $i$.
- $a_{ij}$: Cantidad de materia prima $j$ necesitada por producto $i$.

Cumpliendo las restricciones de materia prima:

$$\sum_{i=1} x_i a_{ij} \leq b_j \quad \forall j$$

Las cantidades tienen que ser no negativas:

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

**Función objetivo:**

$$\text{máx} \sum_{i=1} c_i x_i$$

### 4.2 Casa Greyjoy

(Este ejercicio tiene una duración de 10 minutos.)

Un importante recurso para la contienda es la comida. Los soldados y la mano de obra son muchos y cada uno necesita ser alimentado para poder trabajar y luchar contra los temibles caminantes blancos. Esta responsabilidad cae sobre Casa Greyjoy. Los cálculos estiman que para hacer una comida para una persona se necesitan:

- 60 gramos de proteína
- 120 gramos de carbohidratos
- 20 gramos de aceite
- 1.5 litros de agua

Para satisfacer esta demanda se tienen un conjunto de alimentos y ganado a disposición, cada uno aportando diferentes cantidades de nutrientes.

a. Sabiendo que se espera un ejército de alrededor 60 000 personas, proponga a los jefes de la casa una manera de cumplir con los requerimientos con el menor costo posible.

| Recurso | Proteína | Carb. | Aceite | Costo |
|---|---|---|---|---|
| Trigo | 10 | 40 | 20 | 10 |
| Ganado | 100 | 10 | 50 | 60 |
| Encurtido | 20 | 30 | 10 | 30 |
| Agua | - | - | - | 5 |

Figura 2: Datos de alimentos

b. Se quiere tener modelo que generalice el problema anterior en términos de la cantidad de tipos de nutrientes y cantidad de tipos de recursos. Proponga un modelo que haga esta generalización.

### 4.2.1 Sobre el ejercicio

Este ejercicio es un sencillo problema de dieta, en el cual se tienen alimentos y nutrientes y hace falta suplir las necesidades alimenticias de una persona o grupo de personas gastando la menor cantidad de dinero al comprar alimentos. Al igual que en el primer ejercicio los estudiantes, una vez resuelto el primer inciso, deben de poder generalizar el problema independientemente de la cantidad de tipos de nutrientes y recursos.

### 4.2.2 Solución

**Variables:**

- $V_i$ : El costo del producto $i$.
- $P_i$ : Cantidad de proteínas que contiene el producto $i$.
- $C_i$ : Cantidad de carbohidratos que contiene el producto $i$.
- $A_i$ : Cantidad de aceite que contiene el producto $i$.
- $N_Y$ : Cantidad del nutriente $Y$ por persona ($Y$ sería igual a $P$, $C$, $A$ o $Ag$ para proteínas, carbohidratos, aceite y agua respectivamente).
- $T$ : Total de personas.

**Variables de Decisión:**

- $X_i$ : Cantidad a producir del producto $i$.

**Función objetivo:**
Se desea hallar, cumpliendo los requisitos requeridos para los alimentos de cada persona, el menor costo de producción.

$$\text{mín} \sum_{i=1}^{4} V_i X_i$$

**Restricciones:**
Los requisitos para una comida satisfactoria por persona quedan dados en la descripción del problema, pero quedan descritos de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{4} X_i C_i \geq N_C T$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_i P_i \geq N_P T$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_i A_i \geq N_A T$$

$$X_4 \geq N_{Ag} T$$

Las cantidades tienen que ser no negativas:

$$X_i \geq 0 \quad \forall i$$

## 4.3 Casa Targaryen

(Este ejercicio tiene una duración de 10 minutos.)

El fuego valiryo posee un gran poder ofensivo, este fuego verde arde incluso en el agua y es incapaz de extinguirlo una vez se prende, solo terminando de arder cuando se consume completamente. Las armas imbuidas en este elemento presentan un poder ofensivo superior y además pueden ser usado como bombas incendiarias, así que la producción de este es indispensable. Para fabricar el fuego valiryo se necesita mezclar ciertos ingredientes cuyos nombres no fueron revelados, pero, se conoce la proporción de estos en diferentes recursos naturales:

| Recurso | Ingr. 1 | Ingr. 2 | Ingr. 3 | Costo |
|---|---|---|---|---|
| Aceite de ballena | 40 % | 10 % | 30 % | 40 |
| Polvo de dragón | 10 % | 5 % | 50 % | 70 |
| Piel de caballo | 15 % | 35 % | 5 % | 30 |

Figura 3: Datos de materiales

Los alquimistas tienen destilados ya:

- Ingrediente 1: 15 litros
- Ingrediente 2: 30 litros
- Ingrediente 3: 10 litros

El fuego valiryo está conformado por un 30 % de Ingrediente 1, 20 % de Ingrediente 2 y 50 % de Ingrediente 3. Como dato adicional los alquimistas necesitan procesar el residuo de los recursos para conservar la pureza del fuego, para esto se tiene un costo extra de 5 por cada unidad de material de desecho. Se cuenta como residuo las cantidades que no son ingredientes del fuego que sale del procesamiento de los recursos, por ejemplo el uno de una unidad de aceite de ballena produce 0.2 unidades de residuo.

a. Ayude a los alquimistas a crear 100 unidades de fuego valiryo con el menor costo posible para enfrentar al enemigo.

#### 4.3.1 Sobre el ejercicio

Este ejercicio es un clásico problema de mezlca en el cual se tienen diferentes materiales con diferentes concentraciones de ingredientes y se quiere crear un producto final con diferentes concentraciones de ingredientes, comprando la menor cantidad de materiales posibles. Al problema base se le agregó una dificultad extra que consiste en eliminar las impurezas de usar los diferentes materiales.

#### 4.3.2 Solución

**Variables de decisión:**

- $x_1$: Cantidad de aceite de ballena.
- $x_2$: Cantidad de polvo de dragón.
- $x_3$: Cantidad de piel de caballo.
- $x_4$: Cantidad de ingrediente 1.
- $x_5$: Cantidad de ingrediente 2.
- $x_6$: Cantidad de ingrediente 3.

**Restricciones:**

El total de ingrediente 1 representa el 30 %:

$$0.4x_1 + 0.1x_2 + 0.15x_3 + x_4 = 0.3 * 100$$

El total de ingrediente 2 representa el 20 %:

$$0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.5x_3 + x_5 = 0.2 * 100$$

El total de ingrediente 3 representa el 50 %:

$$0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.05x_3 + x_6 = 0.5 * 100$$

La cantidad de los ingredientes destilados no puede superar la reserva de cada uno:

$$x_4 \leq 15$$
$$x_5 \leq 30$$
$$x_6 \leq 10$$

La cantidad total creada tiene que cumplir con la demanda, los ingredientes tienen no se usan completamente:

$$0.8x_1 + 0.65x_2 + 0.55x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 100$$

Las cantidades tienen que ser no negativas:

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

**Función objetivo:**
Se quiere minimizar el costo de producir el fuego valiryo. Al costo de comprar los materiales se le añade el costo de purificar la mezcla de los residuos.

$$\min 40x_1 + 70x_2 + 30x_3 + 5(0.2x_1 + 0.35x_2 + 0.45x_3)$$

**Receso** (5 minutos)

### 4.4 Casa Baratheon

(Este ejercicio tiene una duración de 10 minutos.)

Es hora de reunir todos los recursos y tropas. Para esto se conoce que hacen falta trasladar las armas, comida, soldados y fuego valiryo hacia diferentes puntos intermedios para finalmente llegar a Winterfell. El traslado está condicionado por diferentes situaciones, clima, calidad del camino, tipo de recurso, que hacen que se tenga un desgaste de los recursos en el traslado en dependencia del destino. Este desgaste se observa:

- Armas:

| Lugares | 2.1 | 2.2 | 2.3 |
|---|---|---|---|
| 1.1 | 5 | 10 | 7 |
| 1.2 | 10 | 20 | 10 |
| 1.3 | 7 | 10 | 7 |

Figura 4: Desgaste traslado de armas

- Comida:

| Lugares | 2.1 | 2.2 | 2.3 |
|---|---|---|---|
| 1.1 | 25 | 20 | 15 |
| 1.2 | 20 | 17 | 10 |
| 1.3 | 15 | 10 | 5 |

Figura 5: Desgaste traslado de comida

- Soldados:

| Lugares | 2.1 | 2.2 | 2.3 |
|---|---|---|---|
| 1.1 | 10 | 7 | 7 |
| 1.2 | 7 | 10 | 9 |
| 1.3 | 7 | 9 | 8 |

Figura 6: Desgaste traslado de soldados

- Fuego valiryo:

| Lugares | 2.1 | 2.2 | 2.3 |
|---|---|---|---|
| 1.1 | 30 | 25 | 25 |
| 1.2 | 25 | 5 | 5 |
| 1.3 | 25 | 5 | 5 |

Figura 7: Desgaste traslado de fuego valiryo

En total se quieren trasladar 51 000 armas, 285 000 unidades de comida, 60 000 soldados, 100 unidades de fuego valiryo.

a. Diga dónde se tienen que asignar los recursos y tropas para que el desgaste del transporte sea lo menor posible.

b. Para mitigar el desgaste de los caminos, estos tienen algunas restricciones sobre la cantidad de recursos que pueden ser transportados por ellos. Se tienen que transportar como mínimo en cada camino unas 35000 unidades de cualquier tipo de recursos o tropas. ¿Cuál sería la nueva asignación?

#### 4.4.1 Sobre el ejercicio

Este ejercicio está basado en el problema de transporte, en el cual se tienen varios productos que se quieren trasladar de un conjunto de lugares a otros con el menor costo posible. Como restricción adicional se le agregó una restricción para distribuir el flujo entre varios caminos. En la solución de este ejercicio se introduce la visualización del problema mediante grafos (Fig. 8) y su posterior modelación como problema de optimización poniendo las restricciones correspondientes.

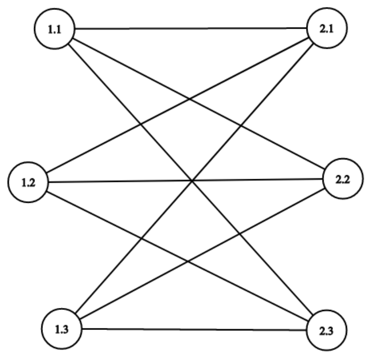


Figura 8: Grafo de traslado sin costes

#### 4.4.2 Solución

**Datos constantes**

- $D_{i,j,l}$ : Desgaste causado al camino por el transporte del recurso $i$ partiendo del lugar inicial $j$ hasta el lugar final $l$.
- $T_i$ : Total necesario del recurso $i$.

**Variables de decisión:**

- $X_{i,j,l}$ : Cantidad del recurso $i$ a ser transportado partiendo del lugar inicial $j$ hasta el lugar final $l$.

**Función objetivo:**
Se desea hallar la mejor distribución de envío de los recursos por los distintos caminos de forma tal que el desgaste de los caminos sea lo menor posible.

$$\min \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} X_{i,j,l} D_{i,j,l}$$

**Restricciones:**
Se necesita que los recursos enviados de cada tipo satisfagan la cantidad necesaria.

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} X_{i,j,l} \geq T_i \ \ \forall i$$

Las cantidades tienen que ser no negativas:

$$X_{i,j,l} \geq 0 \ \ \forall i, j, l$$

Se necesita también que por cada camino pasen al menos 3500 unidades de cualquier recurso para mitigar el desgaste de los caminos. (Parte del inciso b solamente)

$$\sum_{i=1}^{4} X_{i,j,l} \geq 35000 \ \ \forall j, l$$

### 4.5 Casa Stark

(Este ejercicio tiene una duración de 15 minutos.)

Ya se encuentran todos los recursos en Winterfell, listos para la batalla, el frío y la oscuridad cubren todo. Los exploradores regresan de su misión informando que los caminantes blancos atacarán en 12 oleadas y calculan el estimado de fuerza de cada una de ellas:

| Oleada | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fuerza | 2000 | 3000 | 4000 | 6000 | 8000 | 10000 |
| Oleada | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Fuerza | 10000 | 6000 | 4000 | 3000 | 2000 | 2000 |

Figura 9: Fuerza de oleadas

Se sabe que cada soldado puede derrotar a un caminante blanco antes de perecer, además se tiene un lugar inicialmente vacío en las cercanías del campo de batalla, ahí las tropas pueden actuar como una fuerza de acción rápida además den descansar y reparar sus armas para continuar luchando, aunque por desgracia este lugar tiene un máximo de 5000 hombres. Las tropas se van enviando constantemente en cada oleada para reforzar la ofensiva. Debido al proceso de movilización, aumentar la cantidad de hombres que se envían a la batalla en cada oleada tiene un costo de 1 por hombre y disminuirlo de 0.5.

a. Realice un plan de lucha que permita ganar la batalla con el mínimo de costo posible.

b. Para que Arya pueda dar el golpe final se tiene que tener en la última oleada una diferencia de poder ganadora para los caminantes blancos de 1000, para que el jefe se confíe y salga al campo de batalla. Teniendo esto en cuenta, ¿qué cambios le harías a la estrategia?

#### 4.5.1 Sobre el ejercicio

Este ejercicio está basado en el problema de almacén, en el cual se tiene una producción, una demanda y un almacén. Variar la producción en un periodo de tiempo tiene un costo asociado y se quiere disminuir al mínimo el costo apoyándose en que el almacén puede aportar a la demanda y aceptar el sobrante de la producción. En este ejercicio se muestra que las variables de decisión no siempre están explícitas en el ejercicio, si no que se tienen que crear a partir de la interacción de los datos, ya que las variables de decisión en este caso se definen como:

$$x_k = x_1 + \sum_{i=1}^{k-1} z_i$$

donde $z_i$ es la variación de envío de hombres de la i-ésima oleada con respecto a la anterior.

También introduce la idea de utilizar no solo funciones lineales en problemas, si no también no lineales, como el módulo en este caso que se usa en la función objetivo.

$$f(x) = \sum_{i=2}^{12} 0.75|z_i| + 0.25z_i$$

### 4.5.2 Solución

**Variables de decisión:**

- $h_i$: Cantidad de soldados enviados en la oleada i.

Sea $z_i$ la diferencia de hombres entre la oleada $i+1$ y la oleada $i$

- $h_{i+1} = h_i + z_i$
- $h_i = h_0 + \sum_{k=1}^{k-1} z_k$

**Restricciones:**
Se quiere que en cada oleada la cantidad de soldados sea mayor que la cantidad de caminantes blancos:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = kh_0 + \sum_{i=1}^{k-1}(k-i)z_i \geq \sum_{i=1}^{k} d_i \qquad \forall k \in [1, ..., 12]$$

Pero en cada oleada no pueden haber más de 5000 soldados superando a los caminantes blancos:

$$kh_0 + \sum_{i=1}^{k-1}(k-i)z_i - \sum_{i=1}^{k} d_i \leq 5000 \qquad \forall k \in [1, ..., 12]$$

La cantidad de soldados enviados por oleadas tiene que ser no negativa:

$$h_i \geq 0 \qquad \forall i \in [1, ..., 12]$$

La restricción de la oleada final viene dado por la restricción siguiente, la cual representa la cantidad total de caminantes blancos hasta la oleada 12 restado con la cantidad total de soldados hasta la oleada 11:

$$\sum_{i=1}^{12} d_i - 11h_0 + \sum_{i=1}^{10}(10-i)z_i \geq 1000$$

**Función objetivo:**
Se quiere minimizar el cambio entre oleadas, el cambio está expresado en $z_i$, esta variable puede ser negativa o positiva, y por cada valor positivo se necesita contar 1 y por cada valor negativo se necesita aumentar en 0.5, lo cual se logra mediante la función módulo.

$$\text{mín} \sum_{i=2}^{12} 0.75|z_i| + 0.25z_i$$

**Detalles:**
El problema no es lineal, debido a que contiene la función módulo. Se deja de tarea a los estdiantes cómo linealizar el problema.

Pasos para linealización:

1. Crear variables $x_1, x_2$ por cada expresión dentro del módulo tal que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \leq 0$.
2. Sustituir en el problema la variable por: $x = x_1 + x_2$
3. Sustituir en el problema las expresiones con módulo con: $|x| = x_1 - x_2$

De esta manera se linealiza el problema, ya que se puede demostrar que $x_1 = 0 \iff x_2 \neq 0$ si $x \neq 0$ lo que indica que ambas variables se comportan como la parte positiva y negativa respectivamente.

## 5. Conclusiones

(Este segmento tiene una duración de 10 minutos.)

Como conclusión se darán los resultados del equipo ganador, basándonos en cuál fue el equipo que dió los valores más acertados y se dará conclusión al juego.

Luego se les explicará a los alumnos que en próximas clases se les dará el contenido necesario para que siempre ganen este tipo de juegos, si está bien modelado el problema, recalcando la importancia de este proceso en la resolución de problemas de optimización.

## 6. Estudio independiente

(Este segmento tiene una duración de 5 minutos.)

**Ejercicio 6.1.** Investigar el uso de scipy para resolver problemas de optimización lineal y resolver los 2 primeros problemas con este.

El ejercicio anterior tiene como objetivo introducir al estudiante en la representación y solución computacional de ejercicios de optimización lineal a un alto nivel mediante ejercicios sencillos para que no ocupen mucho tiempo de estudio e investigación ya que en próximas clases se darán algoritmos que resuelven este tipo de problemas.

**Ejercicio 6.2.** Investigar cómo se puede eliminar el módulo en un problema de optimización lineal.

El ejercicio anterior dará pie a que los estudiantes investiguen cómo linealizar la función módulo para convertir el problema en uno lineal, lo cual es necesario para introducir los problemas en solucionadores.

## Referencias

[1] Gemayqzel Bouza Allende. *Optimización Matemática I: Nota de clase*. Tema 2: Modelación, 2021.