CALCULO CON ECUACIONES PARAMÉTRICAS

- CALCULO DIFERENCIAL: DERIVADAS, RECTA TANGENTE
- CALCULO INTEGRAL : LONGITUD DE ARCO



CALCULO DIFERENCIAL

- VAMOS A APLICAR EL CALCULO DIFERENCIAL A LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y EXISTEN CONCEPTOS O PRE SABERES A RECORDAR:
- a) INICIANDO CON LA PRIMERA DERIVADA QUE SE REPRESENTA COMO $\frac{dy}{dx}$, la primera derivada es la pendiente de la recta tangente a una grafica, en un punto o un parámetro especifico. Esto permitirá conocer la ecuación de recta tangente a esta curva.
- b) PARA LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE SE NECESITA: PENDIENTE Y COORDENADA (X,Y)
- c) SE OBTENDRÁN DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR, SEGUNDA $\frac{d^2y}{dx^2}$ O TERCERA $\frac{d^3y}{dx^3}$, PERO NO SETRABAJARA SU APLICACIÓN EN GRAFICAS.

Mg. Silvia Somoza

?COMO SE DERIVAN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS?

• La primera derivada de las ecuaciones paramétricas se basa en regla de cadena, de manera que se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} * \frac{dx}{dt}$$
 al despejar la derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$, si $\frac{dx}{dt} \neq 0$

siendo el cociente de las derivadas de x e y respecto a t .

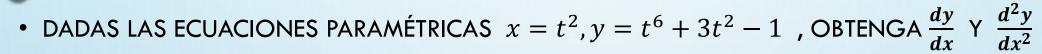
 Para obtener las derivadas de orden superior se toma como base el cociente de las derivadas de la siguiente manera

Segunda derivada
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{dx/dt}$$

Tercera derivada
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx/dt}$$

Mg. Silvia Somoza

EJEMPLO



•
$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t^5 + 6t}{2t}$$
 Derivada de y respecto a t

Derivada de X respecto a t

• SIMPLIFICANDO $\frac{dy}{dx} = \frac{(6t)(t^4+1)}{2t} = 3t^4 + 3$

Las derivadas siempre se simplifican

• SEGUNDA DERIVADA
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(3t^4+3)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12t^3}{2t} = 6t^2$$

Mg. Silvia Somoza

La misma Derivada de X respecto a t

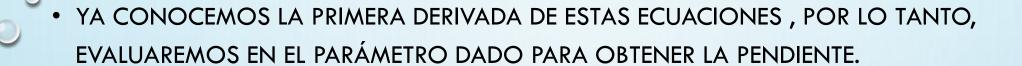
Derivando la primera derivada

respecto a t

<u>¿COMO SE OBTIENE LA ECUACIÓN DE RECTA</u> <u>TANGENTE ?</u>

- PARA LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE DEBEMOS OBTENER EL VALOR DE LA PENDIENTE, EVALUANDO LA PRIMERA DERIVADA EN EL PARÁMETRO QUE CORRESPONDA. LUEGO OBTENER LA COORDENADA (X,Y).
- SE SUSTITUYEN ESTOS DATOS EN LA ECUACIÓN DE LA RECTA $y-y_o=m(x-x_o)$
- EJEMPLO :

DADAS LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS $x=t^2, y=t^6+3t^2-1$, obtenga la ecuación de la recta tangente a la curva en el parámetro t=1.



•
$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{6t^5 + 6t}{2t} = 3t^2 + 3 \Big|_{t=1}$$

Significa que evalúa en t

• La pendiente toma el valor de m=6

evaluando en las ecuaciones x e y

- Utilizando la ecuación de la recta $y-y_o=m(\,x-x_o)$, el punto (x_o , y_o)= (1, 3)
- y-3=6(x-1), al despejar y=6x-3 es la ecuación de la recta tangente a la curva C que representan las paramétricas del enunciado, en el parámetro t=1



- AL SER UNA CURVA, PODEMOS CALCULAR LA LONGITUD DE ESTA EN UN INTERVALO DADO, ESTA REQUIERE LA APLICACIÓN DE CALCULO INTEGRAL CON EL CONCEPTO DE LONGITUD DE ARCO.
- AQUÍ LA LONGITUD DE ARCO SE OBTIENE CON UNA INTEGRAL DE LA FORMA

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^{2} + \left[\frac{dy}{dt}\right]^{2}} dt, \quad en el intervalo \ a \le t \le b$$

PASOS PRINCIPALES:

- a) Derivar x=f(t), y=g(t)
- b) Plantear la integral y desarrollar el cuadrado de cada derivada.
- c) Integrar
- d) Aplicar teorema y detallar valores intermedios
- e) Resultado

EJEMPLO

- Obtener la longitud de arco de la curva dada por las ecuaciones $x=t^2+1, y=4t^3+3$, en el intervalo $2 \le t \le 3$
- a)derivando x e y : $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 12t^2$
- b)planteando la integral : $L = \int_2^3 \sqrt{[2t]^2 + [12t^2]^2} \ dt$
- c)integrando $L = \int_2^3 \sqrt{4t^2 + 144 t^4} \ dt = \int_2^3 \sqrt{(4t^2)(1 + 36 t^2)} \ dt = 2 \int_2^3 t \sqrt{1 + 36 t^2} \ dt$
 - $u = 1 + 36t^2$, du = 72t dt
- $L = \frac{2}{72} \int_2^3 \sqrt{u} \ du = \frac{4}{216} [u^{3/2}] = \frac{4}{216} [1 + 36t^2]^{3/2}$ continúe el ejercicio y evalúe
- L = 76.17 u



FUENTES CONSULTADAS:

- LEITHOLD, L. (1998). El Cálculo , México: Oxford University press Harla.
- Arenivar, L. (2017). Cálculo integral, El Salvador: editorial Universidad Don Bosco.