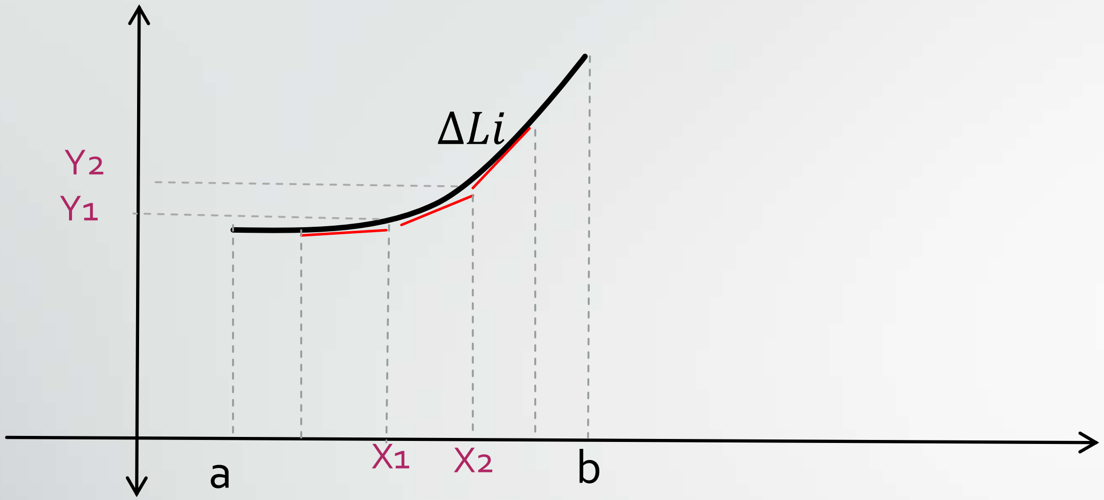
Longitud de arco

Cálculo integral

Mg. Silvia María Somoza

Introducción

- Consiste en calcular la longitud de una porción de curva continua en un intervalo definido.
- La longitud de arco se basa en la partición del intervalo en n sub intervalos pero ahora, a estas particiones, se asocian segmentos de recta tangentes a la curva.
- Ya no estamos interesados en regiones planas encerradas por curvas.
- Es importante para este tema repasar teoremas de derivadas y reforzar los métodos de integración.



Se basa en la distancia entre dos puntos (X1, Y1) (X2, Y2)

$$\Delta Li = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\Delta Li = \sqrt{\Delta x^2 + (f'(x)\,\Delta x)^2}$$

$$\Delta Li = \sqrt{\Delta x^2\,[1 + f'(x)^2]}$$

$$\Delta Li = \Delta x\sqrt{[1 + f'(x)^2]}$$

$$Si \quad L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta Li$$

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2}\;dx}$$

- Los representativos corresponden ahora a segmentos de recta que son tangentes a la curva y que tienen una pendiente m = f'(x) = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Pasos a seguir

- Derive la función dada.
- Eleve al cuadrado : desarrollar trinomios , operar exponentes.
- Sustituya en la forma de la integral $\int_a^b \sqrt{1 + [F'(x)]^2}\ dx$
- Simplifique términos : operaciones dentro del radical o buscar eliminar el radical, eso depende de cada planteamiento.
- Integre
- Aplique teorema fundamental
- Evalúe, sea muy detallado en su proceso de evaluación hasta obtener su respuesta.

EJEMPLO

Obtenga la longitud de arco de la curva dada en el intervalo indicado.

$$\boldsymbol{x = 4 - y^{2/3} \; , 1 \leq y \leq 8}$$

Derivando $\quad x' = -\frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3y^{1/3}}$

Elevando al cuadrado $\quad (x')^2 = \frac{4}{9y^{2/3}}$

Planteando la integral $\quad L = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9y^{2/3}}}\, dy$

Simplifique términos $\quad L = \int_1^8 \sqrt{\frac{9y^{2/3} + 4}{9y^{2/3}}}\, dy = \int_1^8 \frac{\sqrt{9y^{2/3} + 4}}{3y^{1/3}}\, dy$

Integrando $\quad u = 9y^{2/3} + 4 \rightarrow \; du = 9 * \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} dy \; \rightarrow \frac{du}{18} = \frac{dy}{3y^{\frac{1}{3}}} \rightarrow$

$$L = \int_{13}^{40} u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{18} \qquad L = \frac{1}{18}\left(\frac{2}{3}\right) u^{3/2}\Big]_{13}^{40} = \frac{1}{27} u^{3/2}\Big]_{13}^{40}$$

Teorema fundamental $L = \frac{1}{27}\left[40^{3/2} - 13^{3/2}\right]$

Resultados Intermedios $L = \frac{1}{27}[252.982 - 46.872] = \frac{1}{27}(206.11)$

Respuesta $\boldsymbol{L = 7.633\, u}$

- Estudie el tema y los ejemplos que se han publicado en el aula digital.