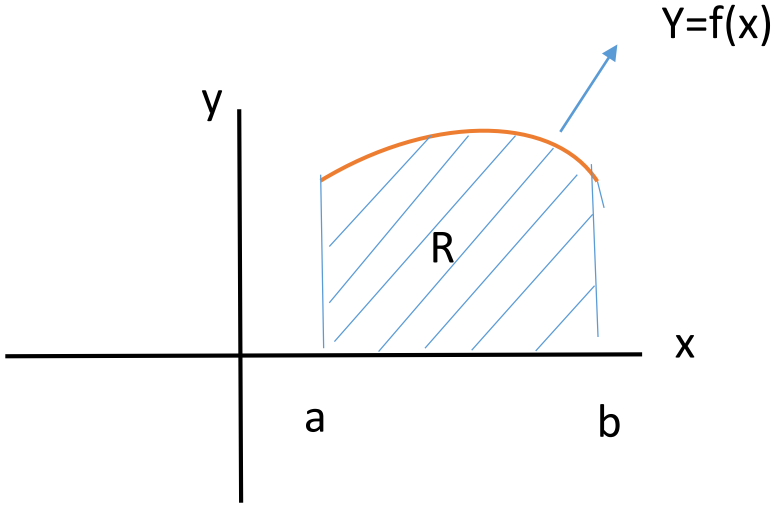
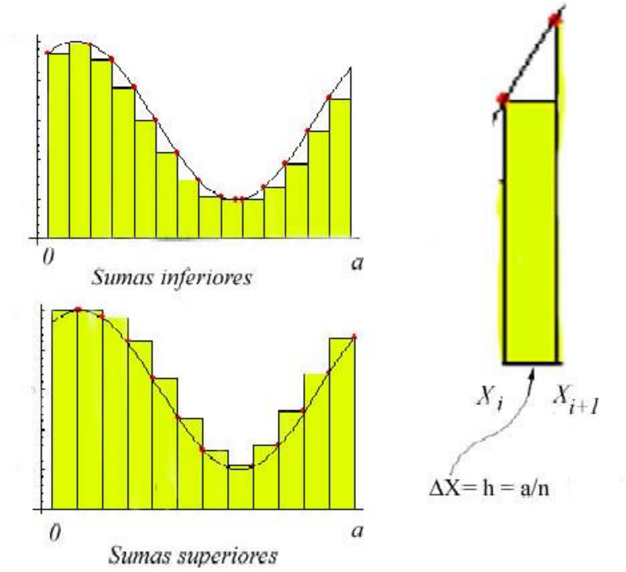
Unidad 2 : Integral definida y sus aplicaciones

Área





El área exacta de una región R, la cual esta limitada por el eje x, a los lados por las rectas verticales x=a y x=b y arriba por la curva y = f(x) , donde f es una función continua en el intervalo $[a\,,b]$ es A=$\int_a^b f(x)dx$ pero se puede encontrar una aproximación mediante sumas de áreas de rectángulo de dos formas usando la suma superior o la suma inferior

$$Area(R_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\triangle x$$

Iniciaremos estudiando el área mediante un método de aproximación llamado Sumas de Riemann.

SUMAS DE RIEMANN

Es una aproximación del Área exacta y se desarrolla mediante 5 pasos

Dada la función y=f(x) la cual se asume que esta definida en el intervalo cerrado $[a, b]$
1) Divida el intervalo $[a, b]$ en n sub intervalos eligiendo puntos arbitrarios
a = $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$= b

2) Denote por P la partición a = $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$=b formada por estos puntos arbitrarios
P = {a , $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$,b }

3) Sean $\Delta x_{1,} \Delta x_{2,} \ldots \Delta x_n$ las longitudes de los sub intervalos sucesivos

4) Elija puntos arbitrarios $x_1^*, x_2^*, \ldots., x_n^*$

5) Forme la suma S= f(x_1^*)$\Delta x_{1,}$, f(x_2^*,)$\Delta x_{2,}$ …., $f(x_n^*)\ \Delta x_n$ =$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\ \Delta x_i$

Ejemplo:

Realice la suma de Riemann para la función f(x) = $\frac{1}{x^2+6x+12}$ en el intervalo $[-3\,,0]$

Con n=6 particiones . Utilice x_i^*:

a)El extremo derecho de cada subdivisión.

b) El punto medio de cada subdivisión.

c)Realice la integral definida y compare el resultado con las sumatorias ¿Cuál ha sido la mejor aproximación.

Δx=$\frac{0--3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ n=6

Solución a)

Paso 1) $\left[-3,\frac{-5}{2}\right]$ $\left[\frac{-5}{2},-2\right]\left[-2,\frac{-3}{2}\right]\left[\frac{-3}{2},-1\right]\left[-1,\frac{-1}{2}\right]\left[\frac{-1}{2},0\right]$

Paso 2) P=$\left\{-3,\frac{-5}{2},-2,\frac{-3}{2}-1,\frac{-1}{2},0\right\}$

Paso 3) $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_5 = \Delta x_6 = \frac{1}{2}$

Paso 4) $x_1^* = \frac{-5}{2}, x_2^* = -2, \; x_3^* = \frac{-3}{2}, x_4^* = -1, \; x_5^* = \frac{-1}{2}, x_6^* = 0$

Cont.

Paso 5) $\sum_{1}^{6} f(x_i^*)\triangle x_i$

$=f(\frac{-5}{2})\ \frac{1}{2}+f(-2)\ \frac{1}{2}+f(\frac{-3}{2})\ \frac{1}{2}+f(-1)\ \frac{1}{2}+f(\frac{-1}{2})\ \frac{1}{2}+f(0)\ \frac{1}{2}$

$=\frac{2}{13}+\frac{1}{8}+\frac{2}{21}+\frac{1}{14}+\frac{2}{37}+\frac{1}{24}$

$=\frac{781}{1443}=0.5412$

b) $x_1^*=\frac{-11}{4}\ , x_2^*=-\frac{9}{4},\ \ x_3^*=\frac{-7}{4}, x_4^*=-\frac{5}{4},\ x_5^*=\frac{-3}{4}, x_6^*=\frac{-1}{4}$

$\sum_{1}^{6} f(x_i^*)\triangle x_i$

$=f(\frac{-11}{4})\ \frac{1}{2}+f(-\frac{9}{4})\ \frac{1}{2}+f(\frac{-7}{4})\ \frac{1}{2}+f(-\frac{5}{4})\ \frac{1}{2}+f(\frac{-3}{4})\ \frac{1}{2}+f(\frac{-1}{4})\ \frac{1}{2}$

$=\frac{16}{49}\ \frac{1}{2}+\frac{16}{57}\ \frac{1}{2}+\frac{16}{73}\ \frac{1}{2}+\frac{16}{97}\ \frac{1}{2}+\frac{16}{129}\ \frac{1}{2}+\frac{16}{169}\ \frac{1}{2}$

$=\frac{8}{49}+\frac{8}{57}+\frac{8}{73}+\frac{8}{97}+\frac{8}{129}+\frac{8}{169}$

=0.6050.

Cont.

c) $\int_{-3}^{0} \frac{1}{x^2+6x+12} dx$

$\int_{-3}^{0} \frac{1}{(x+3)^2+3} dx$

$$x^2 + 6x + 12$$
$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 12$$
$$(x + 3)^2 + 3$$

u=x+3 $\Rightarrow$ $\int \frac{1}{u^2+3} du$

du = dx

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)\Big|_{-3}^{0}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{0+3}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{-3+3}{\sqrt{3}}\right)$

= 0.6045

Conclusión la mejor aproximación fue el punto medio .

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1) Si $\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$) entonces $\int_a^b k\,dx\ 0\ k(b-a)$
2) Si $\boldsymbol{f}$ es integrable en $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ y $\boldsymbol{k}$ es una constante, entonces $\boldsymbol{kf}$ es integrable en $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ y

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3) Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son integrables en $[\boldsymbol{a},\ b]$, entonces $\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g}$ es integrable en $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ y

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx\ \pm\ \int_a^b f(x)dx$$

4) Si $\boldsymbol{f}$ es integrable en $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ y $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$, entonces $\boldsymbol{f}$ es integrable en $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}]$ y en $[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}]$, y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5) Si $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ y $\boldsymbol{f}$ es integrable en $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}]$ y en $[\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}]$, entonces $\boldsymbol{f}$ es Integrable en $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

6) Si $\boldsymbol{f}$ es integrable en $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$, entonces se define

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

7) Si $\boldsymbol{f}$ está definida en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, entonces se define

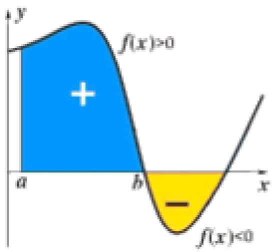
$$\int_a^a kf(x)dx = 0$$

FUNCIONES PARES E IMPARES

1. Una función f es par en el intervalo cerrado $[-a;\ a]$, si $f(-x) = f\,(x)$.
   Si f es par entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
2. Una función f es impar en el intervalo cerrado $[-a;\ a]$, si $f(-x) = -f\ x$.
   Si f es impar entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

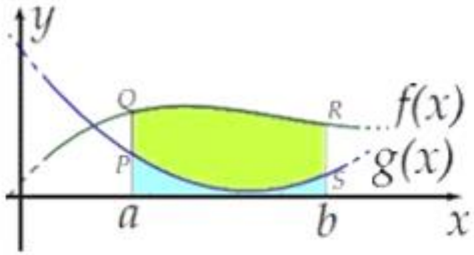
a) Si $\boldsymbol{f}$ es integrable y no negativa ($\boldsymbol{f\ x \geq 0}$) en el intervalo cerrado $[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) \geq 0$$



b). Si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son integrables en el intervalo $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$, y $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, entonces:

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Sea $\boldsymbol{f}$ es una función continua sobre un intervalo $\boldsymbol{I}$. Si $\boldsymbol{F}$ es y si $\boldsymbol{F}$ una anti derivada de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{I}$, entonces para $[\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}] \subset \boldsymbol{I}$ se cumple

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Uso de propiedades

$$si \int_0^2 f(x)dx = -2 \ , \quad \int_{-3}^0 f(x)dx = 5, \quad \int_{-3}^4 f(x)dx = 16$$

$$obtenga: \quad a) \int_2^4 f(x)dx \qquad b) \int_0^{-3} \left(\frac{-1}{3}\right) f(x)dx$$

$$c) \int_0^2 3f(x)dx \qquad d) \int_0^4 f(x)dx$$

$$a) \int_2^4 f(x)dx = \int_{-3}^4 f(x)dx - \left[\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx\right]$$

$$= 16 - [5 + (-2)]$$

$$= 16 - 3$$

$$= 13$$

$$b) \int_0^{-3} \left(\frac{-1}{3}\right) f(x)dx = -\int_{-3}^0 \left(\frac{-1}{3}\right) f(x)dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-3}^0 f(x)dx$$

$$= \frac{1}{3}(5)$$

$$= \frac{5}{3}$$

Cont.

c) $\int_0^2 3f(x)dx = 3\int_0^2 f(x)dx$

$= 3(-2)$

$= -6$

d) $\int_0^4 f(x)dx = \int_{-3}^4 f(x)dx - \int_{-3}^0 f(x)dx$

$=16 - 5$

$=11$

Propiedades

Aplicando propiedades obtenga el valor de las siguientes integrales

$$a)\int_1^7 f(x)dx = 10 \;\; y \;\; \int_4^7 f(x)dx = 15 \;\; entonces \;\; \int_1^4 f(x)dx = ¿?$$

$$b)\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2}dx = ¿?$$

$$a) \int_7^1 f(x)dx = 10 \Longrightarrow -\int_1^7 f(x)dx = -10$$

$$a) \int_1^4 f(x)dx = \int_1^7 f(x)dx - \int_4^7 f(x)dx$$

$$= -10-15$$

$$= -25$$

$$b)\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2}dx \;\; =0$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \Longrightarrow f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2}$$

$$= \frac{-x}{1+x^2}$$

$$= -\frac{x}{1+x^2}$$

$$= -f(x)$$

Función impar

$\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx$

Solución:

$$\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = \int_0^3 3x^2 dx - \int_0^3 4x dx + \int_0^3 dx,$$

$$\Rightarrow \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x\Big]_0^3 = x^3 - 2x^2 + x\Big]_0^3,$$

$$\Rightarrow \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = 3^3 - 2(3)^2 + 3 - (0^3 - 2(0)^2 + 0),$$

$$\Rightarrow \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = 27 - 18 + 3 - 0;$$

$$\therefore \int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)dx = 12.$$

$\int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy$

Solución:

$$\int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = \int_{-3}^5 y^3 dy - \int_{-3}^5 4y dy,$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = \frac{y^4}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2}y^2\Big]_{-3}^5 = \frac{y^4}{4} - 2y^2\Big]_{-3}^5,$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = \frac{5^4}{4} - 2(5)^2 - \left(\frac{(-3)^4}{4} - 2(-3)^2\right),$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = \frac{625}{4} - 50 - \left(\frac{81}{4} - 18\right) = \frac{625}{4} - 50 - \frac{81}{4} + 18 = \frac{544}{4} - 32 = 136 - 32;$$

$$\therefore \int_{-3}^5 (y^3 - 4y)dy = 104.$$

$\int_{-2}^{5} |x-3|\,dx$

Solución:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{si } x \geq 3 \\ 3-x, & \text{si } x < 3 \end{cases}; \text{ de tal manera que:}$$

$$\int_{-2}^{5} |x-3|\,dx = \int_{-2}^{3} (3-x)\,dx + \int_{3}^{5} (x-3)\,dx,$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{5} |x-3|\,dx = \left[3x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{3} + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_{3}^{5},$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{5} |x-3|\,dx = 3(3) - \frac{1}{2}(3)^2 - \left(3(-2) - \frac{1}{2}(-2)^2\right) + \frac{1}{2}(5)^2 - 3(5) - \left(\frac{1}{2}(3)^2 - 3(3)\right),$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{5} |x-3|\,dx = 9 - \frac{9}{2} - (-6-2) + \frac{25}{2} - 15 - \left(\frac{9}{2} - 9\right) = 9 - \frac{9}{2} + 8 + \frac{25}{2} - 15 - \frac{9}{2} + 9,$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{5} |x-3|\,dx = 11 + \frac{7}{2} = \frac{22+7}{2};$$

$$\therefore \int_{-2}^{5} |x-3|\,dx = \frac{29}{2}.$$