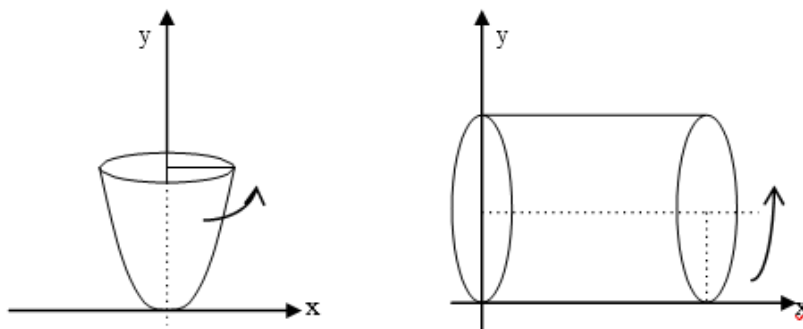


VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Cuando una región plana es girada alrededor de un eje de revolución engendra un sólido de revolución. Los sólidos de revolución son sólidos que se generan al girar una región plana alrededor de un eje. Por ejemplo: el **cono** es un sólido que resulta al girar un triángulo recto alrededor de uno de sus catetos, el **cilindro** surge al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. Ejemplos:



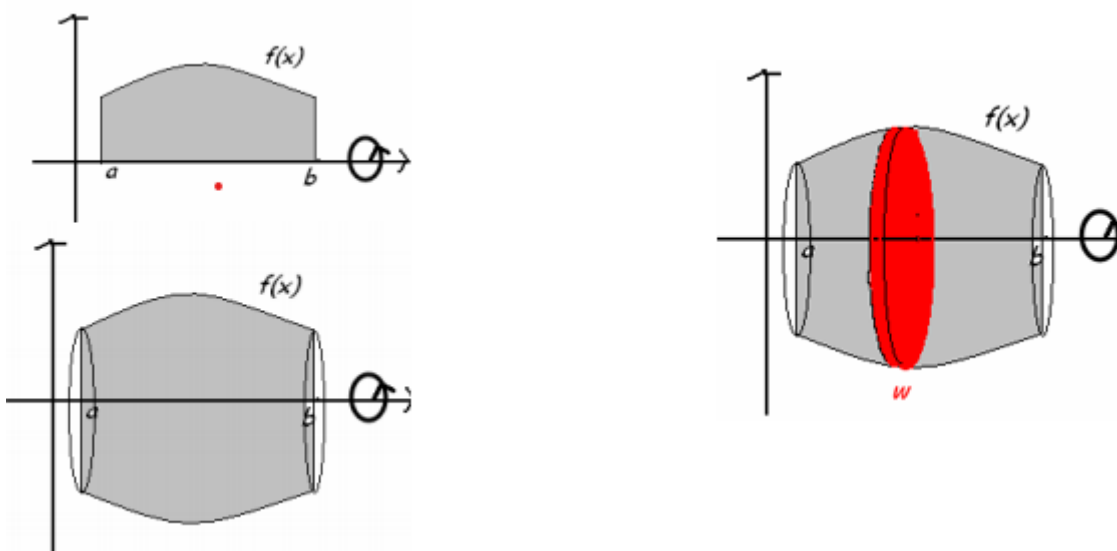
La primera región resulta de girar una región parabólica alrededor del eje y , mientras que en el segundo caso se ha girado un rectángulo alrededor del eje constituido por la parte superior del rectángulo.

- **MÉTODO DEL DISCO**

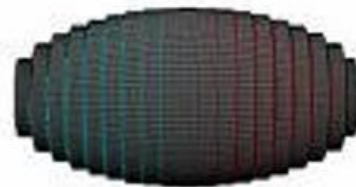
Si giramos una región del plano alrededor de un eje obtenemos un sólido de revolución. El volumen de este disco de radio R y de anchura w es:

$$\text{volumen del disco} = \pi R^2 w$$

Para ver cómo usar el volumen del disco y para calcular el volumen de un sólido de revolución general, se hacen n particiones en la gráfica.



Estas divisiones determinan en el sólido n discos cuya suma se aproxima al volumen del mismo. Teniendo en cuenta que el volumen de un disco es $\pi R^2 w$, la suma de Riemann asociada a la partición, y que da un volumen aproximado del sólido es:



$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi (f(c_i))^2 \Delta x_i$$

Por tanto, recordando la definición de integral definida de Riemann se obtiene que:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

Si se toma el eje de revolución verticalmente, se obtiene una fórmula similar:

$$V = \int_c^d \pi (f(y))^2 dy$$

Antes de comenzar a esbozar diversos ejemplos de estos métodos, estableceremos algunas pautas que les ayudarán a resolver problemas sobre sólidos de revolución.

¿COMO HALLAR VOLUMENES POR EL MÉTODO DEL DISCO (O ARANDELA)?

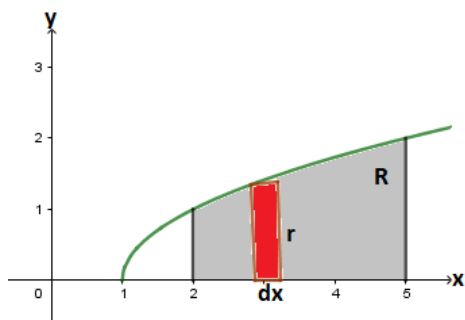
1. Dibujar la región y trazar sobre esta un segmento que sea **PERPENDICULAR** al eje de rotación. La región al hacerla girar alrededor del eje de rotación generará una sección transversal típica en forma de disco o arandela dependiendo el caso.
2. Hallar: para el caso del disco el radio principal y para el caso de la arandela los radios interno y externo.
3. Establecer los límites de integración.
4. Por último integrar para hallar el volumen deseado.

Ejemplos:

- 1) **Calcular el volumen del sólido engendrado al girar la región acotada por $y = \sqrt{x-1}$, $x = 2$, $x = 5$ alrededor del eje x**

Solución:

- Dibujamos la región y la sección típica:



- Ahora calculamos el radio principal: el método a utilizar es el método de los discos, ya que el eje de giro es una frontera de la región que girará en torno al eje considerado. Luego, la distancia del segmento r (radio principal) es f , es decir: $r = \sqrt{x-1}$
- Los límites de integración nos fueron dados en el ejercicio $2 \leq x \leq 5$
- formulación de la integral: aplicando la expresión correspondiente para volúmenes

Lic. Jonathan Guevara

usando el método del disco tenemos:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \int_2^5 \pi (\sqrt{x-1})^2 dx = \int_2^5 \pi (x-1) dx$$

- Resolviendo la integral definida:

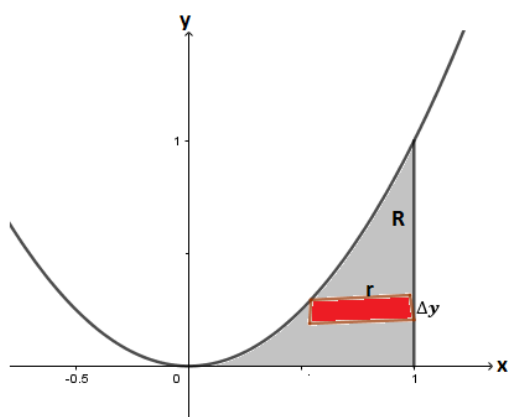
$$\int_2^5 \pi (x-1) dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 - x \right]_2^5 = \pi \left[\frac{1}{2} (5)^2 - 5 - \left(\frac{1}{2} (2)^2 - 2 \right) \right] = \frac{15}{2} \pi u^3$$

Por tanto, el volumen del sólido es $\frac{15}{2} \pi u^3$

2) Calcular el volumen del sólido engendrado al girar la región acotada por $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$ alrededor del eje $x = 1$

Solución:

- Dibujamos la región y la sección típica, en este caso como el eje de giro es vertical, la función debe estar escrita en términos de y , es decir: $x = \sqrt{y}$



- Ahora calculamos el radio principal: el método a utilizar siempre es el método de los discos, ya que el eje de giro es una frontera de la región que girará en torno al eje considerado. Luego, la distancia del segmento r (radio principal) es : $r = 1 - \sqrt{y}$
- Para determinar los límites de integración, debemos analizar cuál es el Intervalo en y en el cual se puede mover la sección típica, que en este caso es el rectángulo. Podemos observar que en este caso $0 \leq y \leq 1$
- Formulación de la integral: aplicando la expresión correspondiente para volúmenes usando el método del disco tenemos:

$$V = \int_c^d \pi (f(y))^2 dy = \int_0^1 \pi (1 - \sqrt{y})^2 dy = \int_0^1 \pi (1 - 2\sqrt{y} + y) dy$$

- Resolviendo la integral definida y evaluando utilizando el teorema fundamental del cálculo:

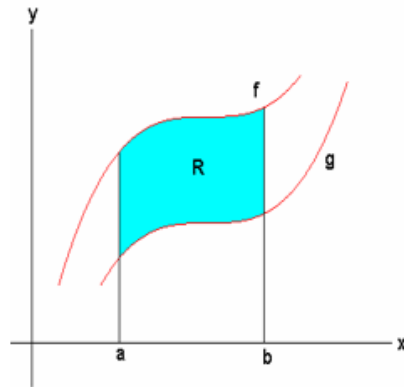
$$\int_0^1 \pi (1 - 2\sqrt{y} + y) dy = \pi \left[y - \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \pi \left[1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - 0 \right] = \frac{1}{6} \pi u^3$$

Por tanto, el volumen del sólido es $\frac{1}{6} \pi u^3$

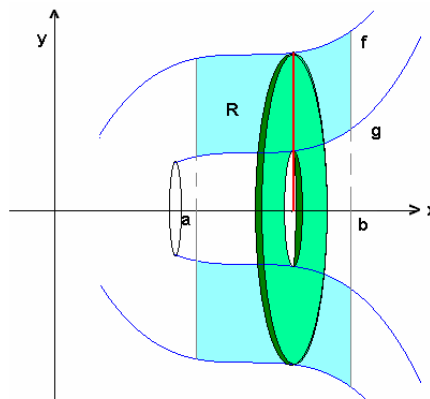
Si quieres repasar más el contenido, lo puedes encontrar en el libro de Cálculo integral página 176 – 184

MÉTODO DE LA ARANDELA

Este método consiste en hallar el volumen de un sólido generado al girar una región R que se encuentra entre dos curvas como se muestra en la siguiente figura:



Sí la región que giramos para formar un sólido no toca o no cruza el eje de rotación, el sólido generado tendrá un hueco o agujero. Las secciones transversales que también son PERPENDICULARES AL EJE DE ROTACIÓN son arandelas en lugar de discos. (Es por esto el nombre del método). Lo anterior lo podemos apreciar en la figura de abajo.



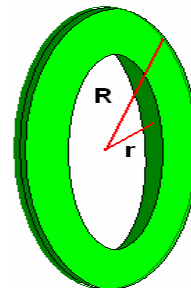
Ahora hallemos las dimensiones de la arandela (Radio exterior R y radio interior r) usando la figura anterior. El radio exterior (radio más grande) lo determina la función f y el radio interior (radio más pequeño) lo determina la función g . Como en la sección anterior (método del disco) hallamos el área de la arandela así:

$$\text{Área de la arandela: } A = \pi R^2 - \pi r^2$$

En la figura de la derecha tenemos que $R = f(x)$ y $r = g(x)$

$$\text{Entonces, } A = \pi(f(x))^2 - \pi(g(x))^2$$

$$\text{Factorizando, obtenemos: } A = \pi((f(x))^2 - (g(x))^2)$$



Ahora podemos establecer la siguiente definición:

Definición: El volumen del sólido generado al girar la región R sobre el eje x (o algún eje paralelo a él) viene dado por:

$$V = \int_a^b \pi((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

Sí el eje de rotación es el eje y (o un eje paralelo a él) tiene una expresión análoga a la anterior. Luego podemos ver que

$$V = \int_c^d \pi((f(y))^2 - (g(y))^2) dy$$

es una expresión válida que evalúa el volumen de un sólido generado al girar una región R sobre el eje y (o algún eje paralelo a él) con $c \leq y \leq d$

Ejemplos:

1) **Calcular el volumen del sólido engendrado al girar la región acotada por $x - 2y = 0$, $y^2 - 2x = 0$ alrededor del eje x**

Solución:

- Calculamos los puntos de intersección de las gráficas, dibujamos la región y la sección típica que en este caso es un rectángulo perpendicular al eje de giro:

$$x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y; y^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{y^2}{2}$$

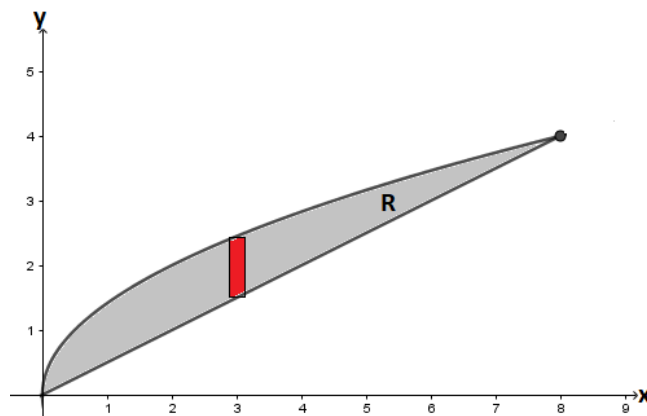
Igualando:

$$2y = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y^2 = 4y \Rightarrow y = 0 \text{ o } y = 4$$

Los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(8, 4)$

Como vamos a integrar en x , las funciones deben estar escritas en términos de x . Despejando y en ambas ecuaciones tenemos:

$$y = \frac{x}{2} \text{ y } y = \sqrt{2x}$$



Ahora calculamos el radio externo y el radio interno: el método a utilizar es el método de la arandela, ya que el eje de giro no es una frontera de la región que girará en torno al eje considerado. Así, cuando la región gire, formará un sólido hueco. Luego,

$$R(x) = \sqrt{2x} \text{ y } r(x) = \frac{x}{2}$$

- Los límites de integración: podemos observar que el rectángulo representativo se puede mover en $0 \leq x \leq 8$
- formulación de la integral: aplicando la expresión correspondiente para volúmenes usando el método de la arandela tenemos:

$$V = \int_a^b \pi((f(x))^2 - (g(x))^2) dx = \int_0^8 \pi \left[(\sqrt{2x})^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right] dx = \int_0^8 \pi \left(2x - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

- Resolviendo la integral definida:

$$\int_0^8 \pi \left(2x - \frac{x^2}{4} \right) dx = \pi \left[x^2 - \frac{x^3}{12} \right]_0^8 = \pi \left[64 - \frac{1}{12}(8)^3 - 0 \right] = \frac{64}{3} \pi u^3$$

Por tanto, el volumen del sólido es $\frac{64}{3} \pi u^3$

2) Halle el volumen del sólido generado por la región limitada por las curvas $x = y^2 + 2$, $x + y = 4$ al girar alrededor de la recta $x = -1$

Solución

Calculemos los puntos de intersección. Igualando los valores de x tenemos:

$$y^2 + 2 = 4 - y \Rightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ o } y = -2$$

Los puntos de intersección son $(3, 1)$ y $(6, -2)$

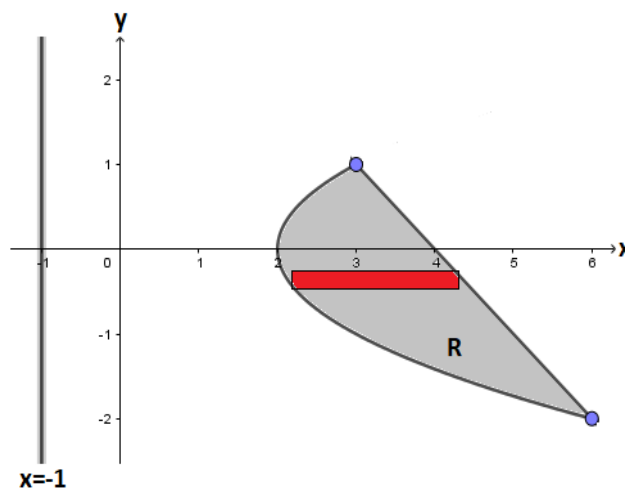
Dibujando la región y el rectángulo típico (o representativo) tenemos:

En este caso, el rectángulo se ha dibujado de manera horizontal porque el eje de giro es vertical y debemos recordar que en este método la sección típica se dibuja de forma perpendicular al eje de giro. Además, queda claro que se tiene que integrar en y . Despejando x en ambas ecuaciones tenemos $x = y^2 + 2$, $x = 4 - y$

De acuerdo a la figura podemos observar que $R(y) = 1 + 4 - y = 5 - y$; $r(y) = 1 + y^2 + 2 = 3 + y^2$

Los límites de integración son $-2 \leq y \leq 1$

Formulación de la integral: aplicando la expresión correspondiente para volúmenes usando el método de la arandela tenemos:



$$V = \int_c^d \pi((f(y))^2 - (g(y))^2) dy = \int_{-2}^1 \pi[(5 - y)^2 - (3 + y^2)^2] dy = \int_{-2}^1 \pi(-y^4 - 5y^2 - 10y + 16) dy$$

Resolviendo la última integral llegamos al resultado final:

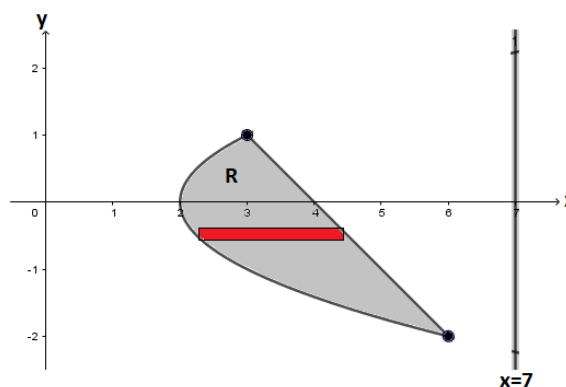
$$V = \int_{-2}^1 \pi(-y^4 - 5y^2 - 10y + 16) dy = \frac{207}{5} \pi u^3$$

Por tanto, el volumen del sólido es $\frac{207}{5} \pi u^3$

En este ejemplo, si el eje de giro es la recta $x = 7$ los radios externo e interno se construyen de la siguiente manera:

$$R(y) = 7 - (y^2 + 2) = 5 - y^2; r(y) = 7 - (4 - y) = y + 3$$

Y el volumen del sólido de revolución viene dado por la integral:



$$V = \int_{-2}^1 \pi[(5 - y^2)^2 - (y + 3)^2] dy = \int_{-2}^1 \pi(y^4 - 11y^2 - 6y + 16) dy = \frac{153}{5} \pi u^3$$