INTEGRAL IMPROPIA

Integrales con integrando que tiende a infinito

Ejemplo

Determine si la integral impropia es convergente o divergente

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Solución

El integrando $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ tiene una discontinuidad en $x = -1$, ya que es una valor que hace cero al denominador de $f(x)$.

Planteamos el límite que le corresponde a la integral impropia

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{t \to -1^{+}} \int_{t}^{0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Planteamos la integral indefinida a resolver

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Utilizamos el método de cambio de variable

$$u = \sqrt{x+1} \qquad u^2 = x + 1$$

$$2u\,du = dx \qquad x = u^2 - 1$$

$$\int \frac{(u^2-1)}{\cancel{u}}\,2\cancel{u}du$$

$$= 2\int u^2\,du - 2\int du$$

$$= \frac{2}{3}u^3 - 2u + C$$

$$= \frac{2}{3}\,(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

Realizamos el cambio de variable, utilizamos propiedades de la integral y calculamos la integral

Reescribimos

$$\lim_{t\to -1^+}\int_t^0 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{t\to -1^+}\left(\frac{2}{3}\,(x+1)^{1/2}\,(x-2)\right)\Bigg|_t^0$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo «TFC»

$$\lim_{t\to -1^+}\left[\left(\frac{2}{3}(0+1)^{1/2}\,(0-2)\right)-\left(\frac{2}{3}(t+1)^{1/2}\,(t-2)\right)\right]$$

$$\lim_{t\to -1^+}\left[-\frac{4}{3}-\left(\frac{2}{3}(t+1)^{1/2}\,(t-2)\right)\right]$$

Aplicando las propiedades de límites

$$-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\lim_{t\to -1^+}(t+1)^{1/2}\,(t-2)=-\frac{4}{2}-\frac{2}{3}(0)=-\frac{4}{3}$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{x}{\sqrt{x+1}}dx=-\frac{4}{3}$$

Converge la integral impropia