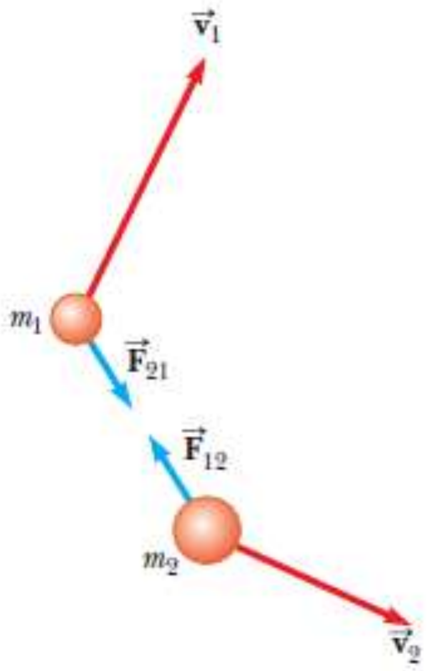
Cantidad de movimiento lineal y choques

Cantidad de Movimiento Lineal y
la Ley de la Conservación de la Cantidad de Movimiento.
Teorema del Impulso y la Cantidad de Movimiento Lineal.
Tipos de Choques
Colisiones en 1D y 2D
Centro de masa
Movimiento de un sistema de partículas

Cantidad de movimiento lineal



Dos partículas interactúan mutuamente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, se debe tener $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Si se considera que para esas dos partículas tenemos un sistema aislado, entonces la única fuerza que puede actuar sobre una partícula es la fuerza que causa la otra partícula. Dado que lo mismo sucede con la otra partícula, se forma un par de fuerzas ACCION y REACCION, que puede expresarse así

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

Como cada fuerza que experimenta una partícula, provoca un cambio en su velocidad, puede escribirse la expresión anterior, usando la segunda ley de Newton:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

Cantidad de movimiento lineal

Como la aceleración en cada caso puede escribirse en términos de la velocidad

$$m_1 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{\mathbf{v}}_2}{dt} = 0$$

Si las masas son constantes, se puede reescribir así:

$$\frac{d(m_1\vec{\mathbf{v}}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{\mathbf{v}}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2) = 0$$

Conclusión:

- El producto m**V** es conocido como cantidad de movimiento lineal **P**
- Observe que para un sistema de partícula la suma de las cantidades de movimiento lineal debe ser una constante.
- Para un sistema de partículas aislado, la cantidad de movimiento lineal debe conservarse

Cantidad de movimiento lineal para una partícula

Se define para una partícula:

La **cantidad de movimiento lineal** de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa m que se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$$

Observe:

La cantidad de movimiento es un vector

Se tiene componentes rectangulares $P_x = mV_x$, $P_y = mV_y$

La dirección es a lo largo de la velocidad

En el SI, las unidades son: Kg m/s

Cantidad de movimiento lineal para una partícula

Usando la segunda ley de Newton, se puede expresar la fuerza en función de la cantidad de movimiento lineal:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$

Siendo la masa constante, se puede reescribir así:

$$\sum \vec{\mathbf{F}} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Esta ecuación muestra que **la relación de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula.**

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

Recordando:

$$\frac{d(m_1\vec{\mathbf{v}}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{\mathbf{v}}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2) = 0$$

Entonces, podemos escribir:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2) = 0$$

La cantidad de movimiento total es constante

Ya que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{p}}_{tot} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2$ es *cero*, se concluye que la cantidad de movimiento *total* del sistema aislado de las dos partículas

$$\vec{\mathbf{p}}_{tot} = \text{constante}$$

o, de manera equivalente,

$$\vec{\mathbf{p}}_{1i} + \vec{\mathbf{p}}_{2i} = \vec{\mathbf{p}}_{1f} + \vec{\mathbf{p}}_{2f}$$

Conservación de la cantidad de movimiento lineal

En resumen:

- Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.
- La cantidad de movimiento total de un sistema aislado en todo momento es igual que su cantidad de movimiento inicial.
- La ley es la representación matemática de la versión en cantidad de movimiento del modelo de sistema aislado, por lo tanto las fuerzas deben ser internas al sistema.

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Pfinal –Pinicial=0 (para el sistema)

Impulso y cantidad de movimiento lineal

Si sobre una partícula actúa una fuerza neta que puede estar variando con el tiempo, de acuerdo con la segunda ley de Newton se tiene:

$$d\vec{\mathbf{p}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

Se puede integrar esta ecuación para encontrar el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula cuando la fuerza actúa durante algún intervalo de tiempo.

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

Para evaluar la integral, es necesario saber cómo varía con el tiempo la fuerza neta. La cantidad en el lado derecho de esta ecuación es un vector llamado impulso de la fuerza neta que actúa en una partícula durante el intervalo de tiempo:

$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

Impulso y cantidad de movimiento lineal

- El impulso **I** es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la curva fuerza–tiempo.
- Se supone que la fuerza varía en el tiempo en la forma integral que se muestra en la figura y es distinta de cero en el intervalo de tiempo.
- La dirección del vector impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento.
- El impulso no es una propiedad de una partícula; en vez de ello, es una medida del grado en el que la fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula.
- El impulso tiene las dimensiones de cantidad de movimiento.

El cambio en la cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso de la fuerza neta que actúa en la partícula:

$$\Delta\vec{p} = \vec{I}$$

Este enunciado es equivalente a la segunda ley de Newton. Cuando se dice que a una partícula se le da un impulso, significa que la cantidad de movimiento se transfiere de un agente externo a dicha partícula.

Impulso y cantidad de movimiento lineal

Podemos expresar esta

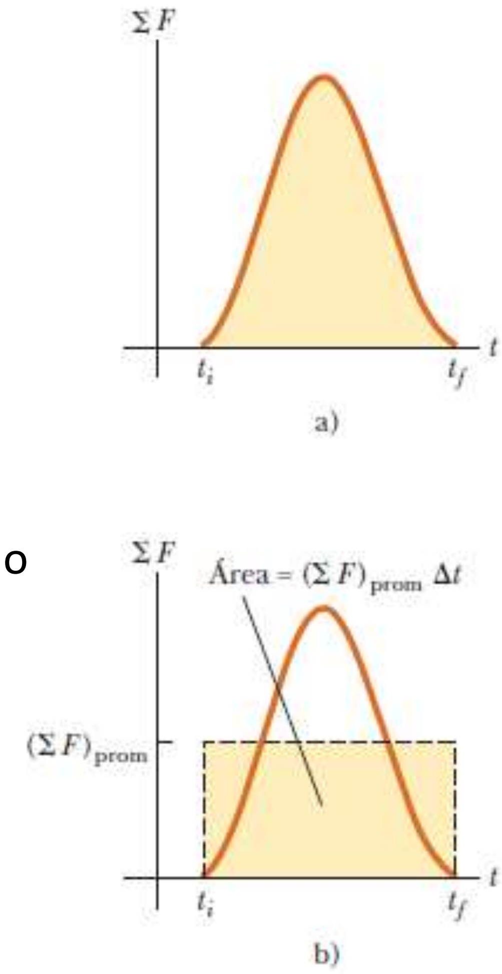
$$\vec{\mathbf{I}} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

Así:

$$\vec{\mathbf{I}} = \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right)_{\text{prom}} \Delta t$$

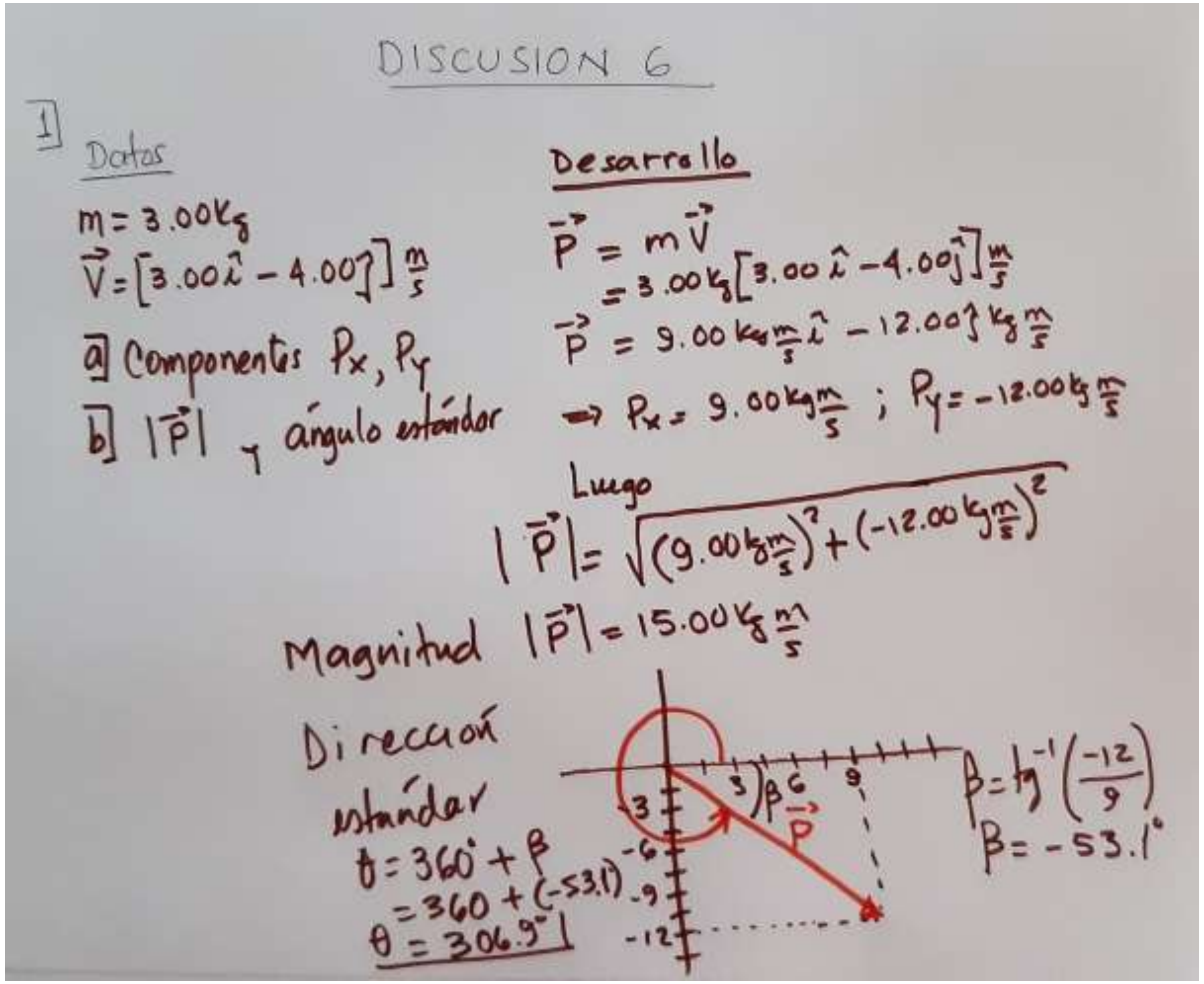
Esta fuerza promediada en el tiempo, que se muestra en la figura b,se interpreta como la fuerza constante que daría a la partícula, en el intervalo de tiempo el mismo impulso que la fuerza variable en el tiempo da durante este mismo intervalo. Si la fuerza que actúa sobre la partícula es constante.

$$\vec{\mathbf{I}} = \sum \vec{\mathbf{F}}\, \Delta t$$



Ejemplos

1) Una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad de (3.00**i** - 4.00**j**) m/s. a) Encuentre las componentes x y *y* de su cantidad de movimiento. b) Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento.



2) El momento de una partícula está dado por $p = 4.0\ t^2\ i - 2.6\ j - 3.9\ t\ k$. ¿Cuál es la fuerza en función del tiempo?

2]

Datos

$$\vec{P} = 4.0t^2\hat{i} - 2.6\hat{j} - 3.9t\hat{k}$$

$$\vec{F} = ?$$

Desarrollo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[4.0t^2\hat{i} - 2.6\hat{j} - 3.9t\hat{k}\right]$$

$$= \left[8.0t\hat{i} - 3.9\hat{k}\right] N$$

3) Un objeto de 10 kg de masa se mueve con una posición dada por la siguiente expresión $x = t^5+5t^3+25$, para este movimiento determinar la cantidad de movimiento lineal y la fuerza que aplica al objeto en a) t=2s y b) t=4s.

3

Datos

$m = 10\ kg$

$x = t^5 + 5t^3 + 25$

$\left.\begin{array}{l} P = ? \\ F = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a)\ t = 2s \\ b)\ t = 4s \end{array}$

Desarrollo

$$\frac{dx}{dt} = V_x = 5t^4 + 15t^2$$

Luego para $t = 2s$

$V_x = 5(2)^4 + 15(2)^2$

$V_x = 140$

Para $t = 4s$; $V_x = 5(4)^4 + 15(4)^2$

$V_x = 1520 \frac{m}{s}$

Como $P_x = mV_x = 10\,kg\left(140 \frac{m}{s}\right)$

$P_x = 1400\,kg \frac{m}{s}$ para $t = 2s$

Para $t = 4s$

$P_x = 10kg\left(1520 \frac{m}{s}\right) = 15200\,kg\frac{m}{s}$

$$F_x = \frac{dP_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left[50t^4 + 150t^2\right]$$

$F_x = 200t^3 + 300t$

en $t = 2s$

$F_x = 200(2s)^3 + 300(2)$

$\boxed{F_x = 2200\,N}$

y $t = 4s$.

$F_x = 200(4)^3 + 300(4)$

$\boxed{F_x = 14000\,N}$

Tipos de Colisiones

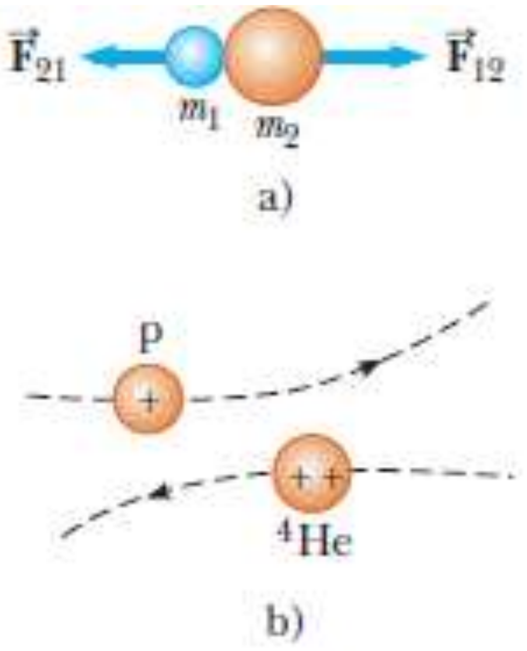
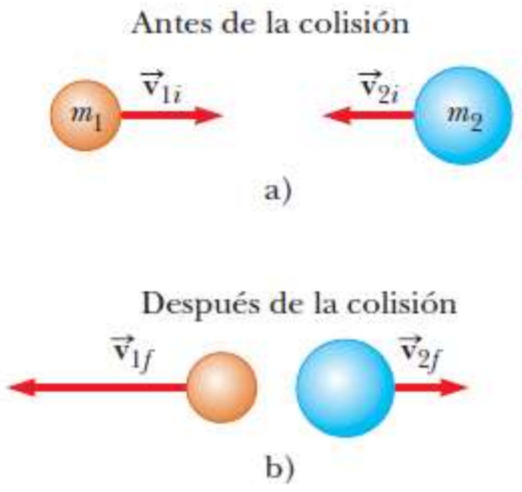


Figura 9.5 a) Colisión entre dos objetos como resultado de contacto directo. b) "Colisión" entre dos partículas con carga.

- El término colisión representa un evento durante el que dos partículas se acercan una a la otra e interactúan mediante fuerzas.
- Una colisión puede involucrar contacto físico entre dos objetos macroscópicos.
- También considere una colisión a escala atómica tal como la colisión de un protón con una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio).

Tipos de Colisiones

- Las colisiones se categorizan como *elásticas* o como *inelásticas*, dependiendo de si la energía cinética se conserva o no.
- Una colisión elástica entre dos objetos es aquella en la que la energía cinética total (así como la cantidad de movimiento total) del sistema es la misma antes y después de la colisión.
- Las colisiones entre ciertos objetos en el mundo macroscópico, como las bolas de billar, sólo son aproximadamente elásticas porque tiene lugar alguna deformación y pérdida de energía cinética
- Las colisiones *verdaderamente* elásticas se presentan entre partículas atómicas y subatómicas.

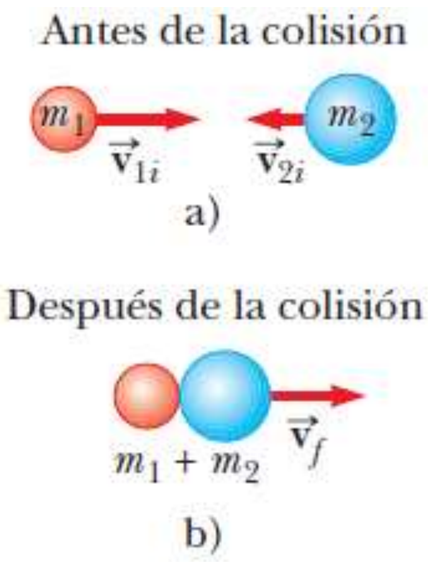


Representación esquemática de una colisión frontal elástica entre dos partículas: a) antes y b) después de la colisión.

Tipos de Colisiones

- En una colisión inelástica la energía cinética total del sistema no es la misma antes ni después de la colisión (aun cuando la cantidad de movimiento del sistema se conserve).
- Las colisiones inelásticas son de dos tipos:

a) Cuando los objetos se unen después de chocar, como cuando un meteorito choca con la Tierra, la colisión se llama perfectamente inelástica.

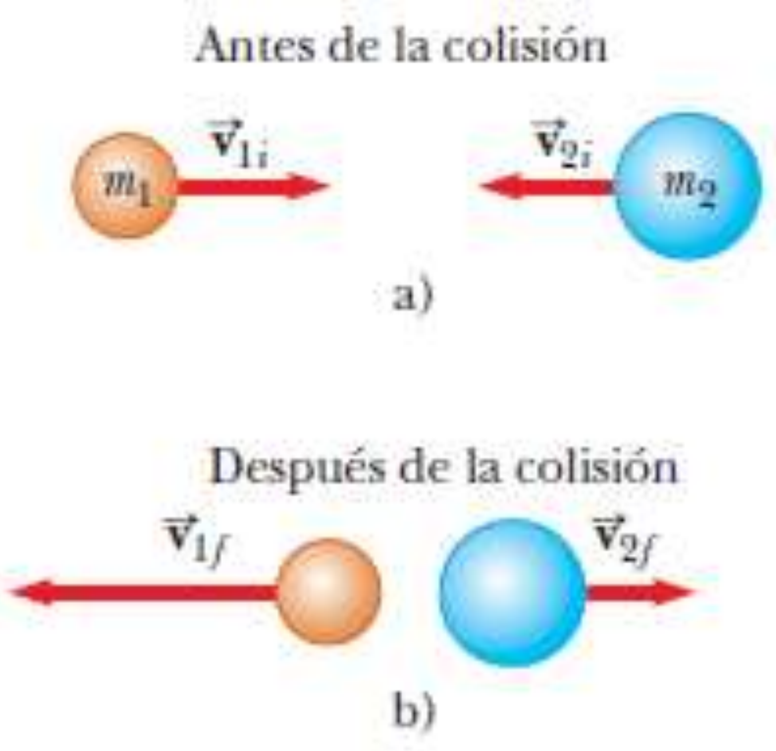


$$m_1\vec{\mathbf{v}}_{1i} + m_2\vec{\mathbf{v}}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{\mathbf{v}}_f$$

Tipos de Colisiones

b) Cuando los objetos en colisión no se unen sino que se pierde parte de la energía cinética, como en el caso de una bola de hule que choca con una superficie dura, la colisión se llama inelástica.

Colisiones Elásticas en una dimensión



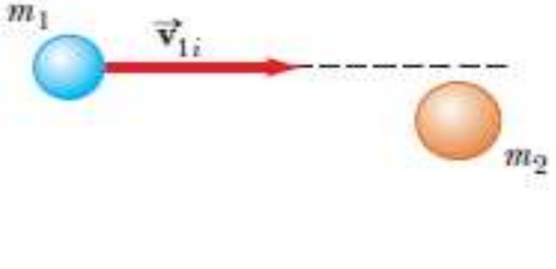
$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

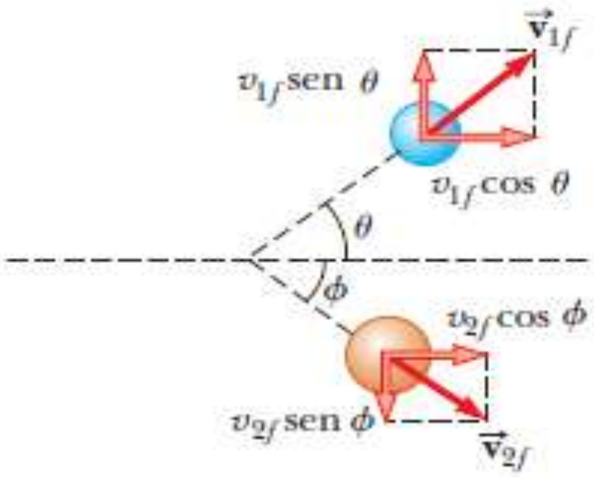
$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

Colisiones en dos dimensiones



a) Antes de la colisión



b) Después de la colisión

Para cualquier colisión, se puede plantear conservación de la cantidad de movimiento

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f}\cos\theta + m_2 v_{2f}\cos\phi$$

$$0 = m_1 v_{1f}\,\text{sen}\,\theta - m_2 v_{2f}\,\text{sen}\,\phi$$

Si además se sabe que la colisión es Elástica, podemos plantear

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^{\,2} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^{\,2}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^{\,2} = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^{\,2} + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^{\,2}$$

Si nos indican que Ktotal final= ¾ Ktotal inicial, para una colisión inelástica
Ktotal incial=Ktotal final (No es válido),,, entonces????
Ktotal incial=3/4 K total incial

K total final+(K total inicial –K total final)=K total incial

Centro de Masa de un sistema

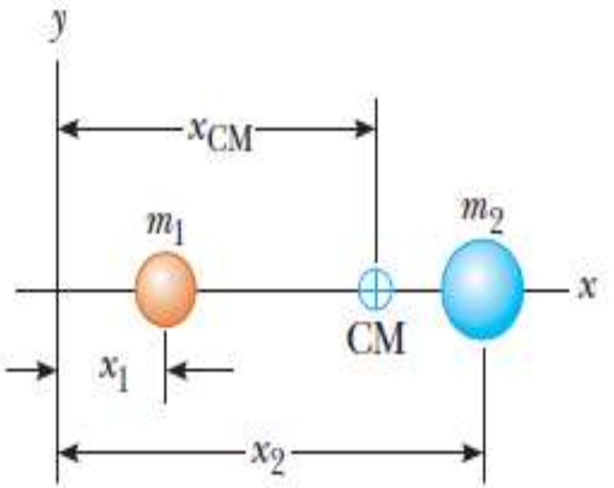
- El sistema puede ser un grupo de partículas, como un conjunto de átomos en un contenedor, o un objeto extendido, como un gimnasta que salta en el aire.
- El movimiento traslacional del centro de masa del sistema es el mismo, como si toda la masa del sistema estuviese concentrada en dicho punto.
- La posición del centro de masa de un sistema se describe como la posición promedio de la masa del sistema.
- El centro de masa del sistema se ubica en algún lugar en la línea que une las dos partículas y está más cerca de la partícula que tiene la masa más grande.

Centro de Masa de un sistema

- El sistema puede ser un grupo de partículas, como un conjunto de La coordenada *x* del centro de masa de *n* partículas se define como:

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

$$x_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M} = \frac{1}{M}\sum_i m_ix_i$$



El centro de masa

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

x_i es la coordenada x de la i–ésima partícula y la masa total es , $M \equiv \sum_i m_i$
donde la suma incluye las n partículas

Centro de Masa de un sistema

Las coordenadas *y* y *z* del centro de masa se definen de igual modo por las ecuaciones:

$$y_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \quad \text{y} \quad z_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$

El centro de masa se puede ubicar en tres dimensiones mediante su vector de posición:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = x_{CM}\hat{\mathbf{i}} + y_{CM}\hat{\mathbf{j}} + z_{CM}\hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i\hat{\mathbf{k}}$$

Centro de Masa de un sistema

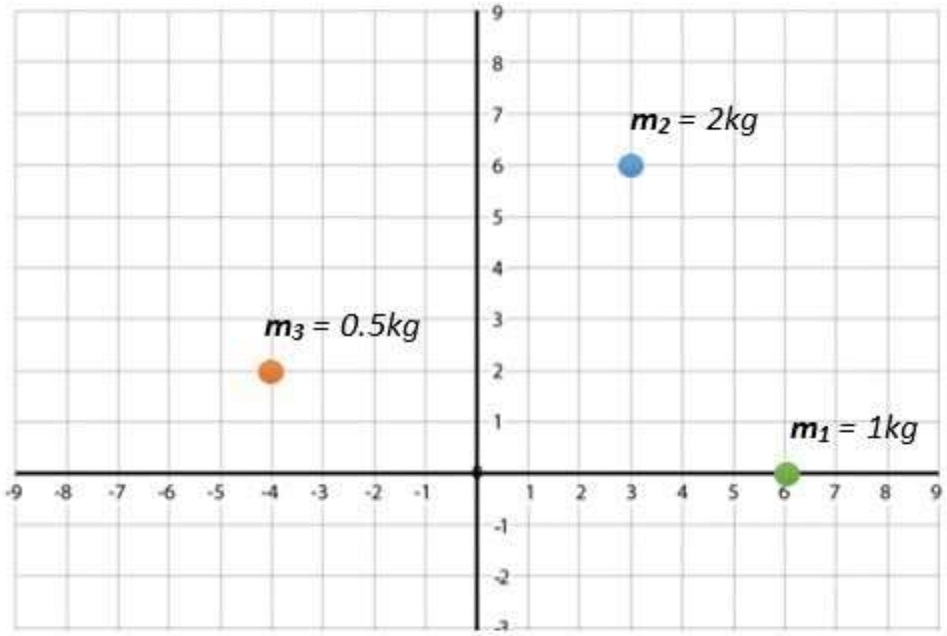
Entonces podemos definir el vector de posición del centro de masa como:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{\mathbf{r}}_i$$

donde $\vec{\mathbf{r}}_i$ es el vector de posición de la i–ésima partícula, definida por

$$\vec{\mathbf{r}}_i \equiv x_i \hat{\mathbf{i}} + y_i \hat{\mathbf{j}} + z_i \hat{\mathbf{k}}$$

Centro de Masa



- El centro de masa de cualquier objeto simétrico se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría, siempre que tengan densidad uniforme.

- Ya que un objeto extendido es una distribución de masa continua, en cada elemento pequeño de masa actúa la fuerza gravitacional. El efecto neto de todas estas fuerzas es equivalente al efecto de una sola fuerza *M***g** que actúa a través de un punto especial, llamado **Centro de gravedad**

Xcm=(10)/3.5=2.9 metros
Ycm=13/3.5=3.7 metros

masas (kg)	X(metros)	Y(metros)	mx	my
1	6	0	6	0
2	3	6	6	12
0.5	-4	2	-2	1
3.5			10	13

Centro de Masa de un objeto extendido

Piense en un objeto extendido como un sistema que contiene un gran número de partículas. Ya que la separación de las partículas es muy pequeña, se considera que el objeto tiene una distribución de masa continua:

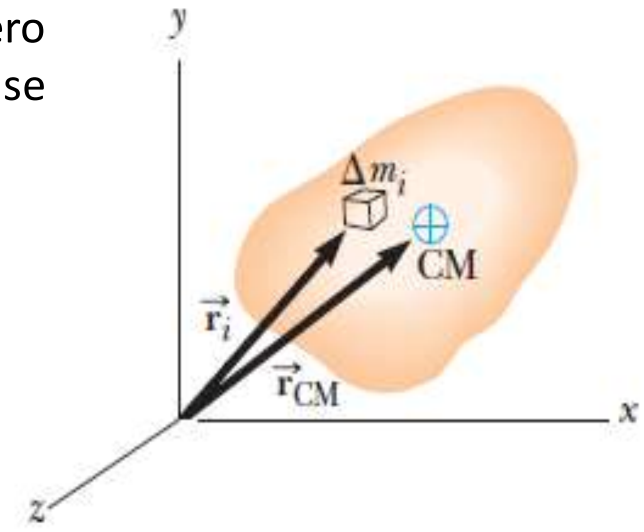
$$x_{CM} \approx \frac{1}{M}\sum_i x_i \,\Delta m_i$$

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{1}{M}\sum_i x_i \,\Delta m_i = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm \quad \text{y} \quad z_{CM} = \frac{1}{M}\int z\, dm$$

La posición vectorial del centro de masa de un objeto extendido se expresa en la forma:

$$\vec{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\, dm$$



Un objeto extendido se considera como una distribución de pequeños elementos de masa Δm_i. El centro de masa se ubica en la posición vectorial $\vec{\mathbf{r}}_{CM}$, que tiene coordenadas x_{CM}, y_{CM} y z_{CM}.

Movimiento de un sistema de partículas

Si se considera la masa M del sistema constante, puede expresarse la velocidad del centro de masa:

$$\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i$$

Y al derivar nuevamente, obtenemos la aceleración del centro de masa:

$$\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathbf{v}}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i$$

Movimiento de un sistema de partículas

Al retomar la expresión de la velocidad del centro de masa, puede pasar obtener una expresión para la cantidad de movimiento lineal total

$$M\vec{\mathbf{v}}_{CM} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{v}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{p}}_{tot}$$

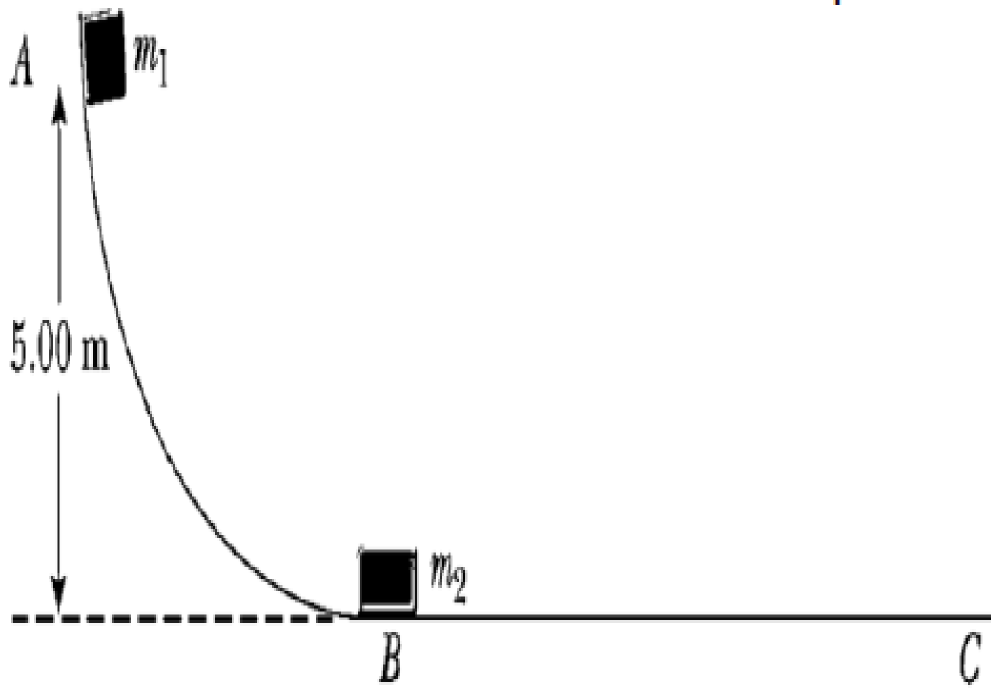
De igual forma se puede obtener una expresion para la segunda Ley de Newton

$$M\vec{\mathbf{a}}_{CM} = \sum_i m_i\vec{\mathbf{a}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i$$

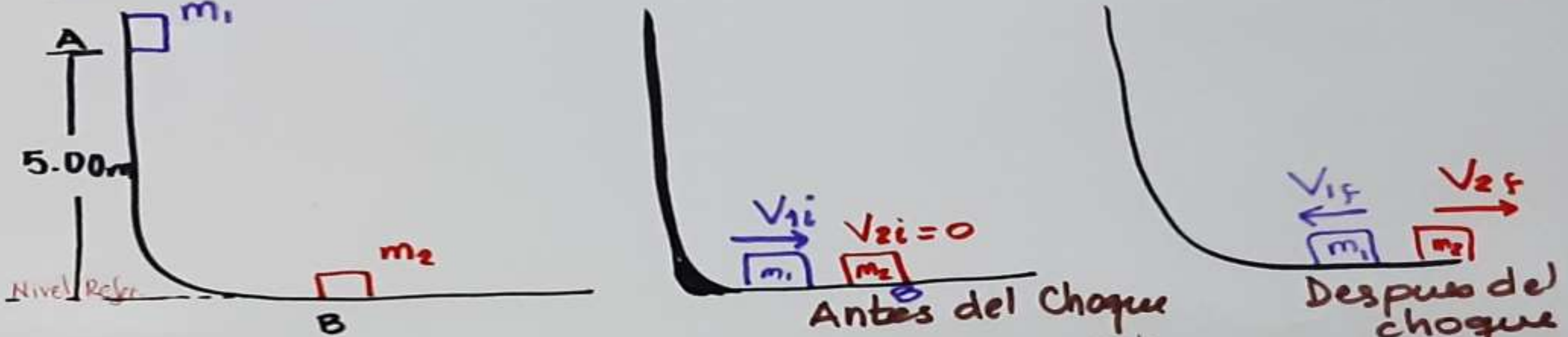
De manera que la fuerza neta que actúa sobre un sistema de partícula queda expresado como:

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{ext} = M\vec{\mathbf{a}}_{CM}$$

13) Dos bloques son libres de deslizarse a lo largo de la pista de madera sin fricción ABC, que se muestra en la figura. El bloque de masa m_1= 5.00kg se libera desde A. De su extremo frontal sobresale el polo norte de un poderoso imán, que repele el polo norte de de un imán incrustado en el extremo posterior del bloque de masa m_2 = 10.0 kg, inicialmente en reposo. Los dos bloques nunca se tocan. Calcule la altura máxima a la que se eleva m_1 después de la colisión elástica.



Ejercicio 13



Antes del Choque

Después del choque

Conservación de Em, para conocer la velocidad con la que llega m_1 para colisionar com m_2:

Para m_1

$$E_A = E_B$$

$$\cancel{K_A} + U_{gA} + \cancel{U_{eA}} = K_B + \cancel{U_{gB}} + \cancel{U_{eB}}$$

$$\cancel{m_1} g h_A = \frac{1}{2} \cancel{m_1} V_B^2$$

$$V_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2(9.8\tfrac{m}{s^2})(5.00m)}$$

$\boxed{V_B = 9.9\frac{m}{s}}$ Entonces $V_{1i} = 9.9\frac{m}{s}$

Como el choque es elástico

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}\right)\cancel{v_{2i}}$$

$$v_{1f} = \left(\frac{5.00kg - 10.0kg}{5.00kg + 10.0kg}\right)(9.9\tfrac{m}{s})$$

$$\boxed{v_{1f} = -3.3\frac{m}{s}}$$

Analizar conservación de Energía mecánica para m_1 y obtener h_{max}

$$E_B = E_x$$

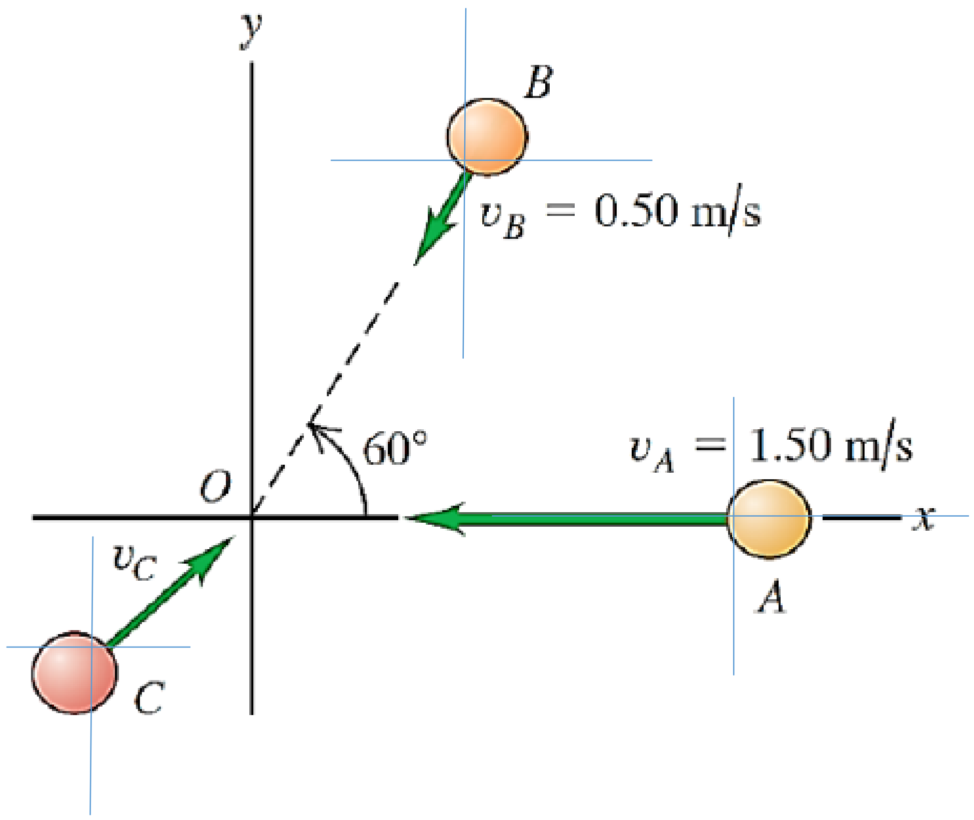
$$\frac{1}{2}m_1 V_B^2 + m_1 g \cancel{h_B} = \frac{1}{2}m_1 \cancel{V_x^2} + m_1 g h_{max}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m_1} V_{1f}^2 = \cancel{m_1} g h_{max}$$

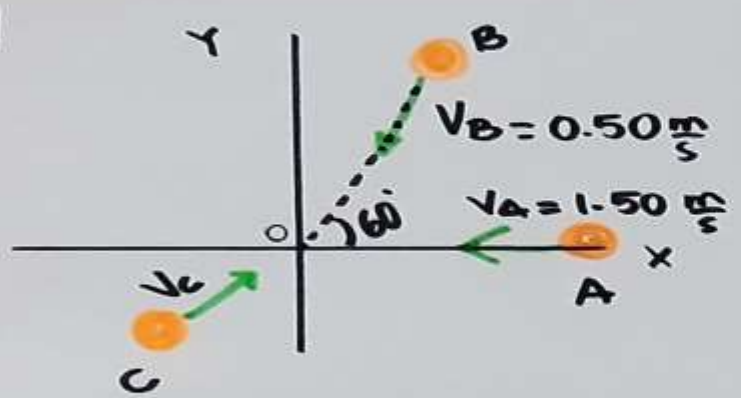
$$\Rightarrow h_{max} = \frac{V_{1f}^2}{2g} = 0.56m$$

17) Las esferas A, de 0.020 kg, B, de 0.030 kg y C, de 0.050 kg, se acercan al origen deslizándose sobre una mesa de aire sin fricción como se muestra en figura. Las velocidades iniciales de A y B se indican en la figura. Las tres esferas llegan al origen simultáneamente y se pegan.

a) ¿Qué componentes *x* y *y* debe tener la velocidad inicial de C si después del choque los tres objetos tienen una velocidad de 0.50 m/s en la dirección +*x*?
b) Si C tiene la velocidad obtenida en el inciso a). ¿Cuál es el cambio de la energía cinética del sistema de las tres esferas como resultado del choque?



E17



Como es una colisión en dos dimensiones, se necesita obtener las componentes rectangulares

Componentes (antes) de Velocidades	Componentes (Después) de Velocidades
$V_{Aix} = -1.50 \frac{m}{s}$	$V_{Afx} = +0.50 \frac{m}{s} = V_{fx}$
$V_{Aiy} = \varnothing \frac{m}{s}$	$V_{Afy} = \varnothing$
$V_{Bix} = -0.25 \frac{m}{s}$	$V_{Bfx} = +0.50 \frac{m}{s} = V_{fx}$
$V_{Biy} = -0.43 \frac{m}{s}$	$V_{Bfy} = \varnothing$
$V_{cix} = ?$	$V_{cfx} = +0.50 \frac{m}{s} = V_{fx}$
$V_{ciy} = ?$	$V_{cfy} = \varnothing$

Como es un choque perfectamente inelástico: Plantear conservación de la cantidad de movimiento lineal en "X" y "Y"

$$-m_A V_{Aix} - m_B V_{Bix} \quad V_{cix} = V_{fx}(m_A + m_B + m_c)$$

$$\Rightarrow V_{cix} = \frac{V_{fx}(m_A + m_B + m_c) + m_A V_{Aix} + m_B V_{Bix}}{m_c}$$

$$V_{cix} = \frac{0.50\,(0.020 + 0.030 + 0.050)\,kg\frac{m}{s} + 0.020\,(1.50) + 0.03(0.25)}{0.050\,kg}$$

$$\boxed{V_{cix} = 1.75 \frac{m}{s}}$$

Para Y:

$$m_A \cancel{V_{Aiy}}^{\varnothing} + m_B\left(-0.43 \frac{m}{s}\right) + m_c V_{ciy} = \cancel{V_{fy}}^{\varnothing}(m_A + m_B + m_c)$$

$$-0.43\, m_B + m_c V_{ciy} = \varnothing$$

$$m_c V_{ciy} = 0.43 \frac{m}{s}(m_B)$$

$$V_{ciy} = \frac{0.43 \frac{m}{s}(0.030\,\cancel{kg})}{0.050\,\cancel{kg}}$$

$$V_{ciy} = 0.258 \approx 0.26 \frac{m}{s}$$

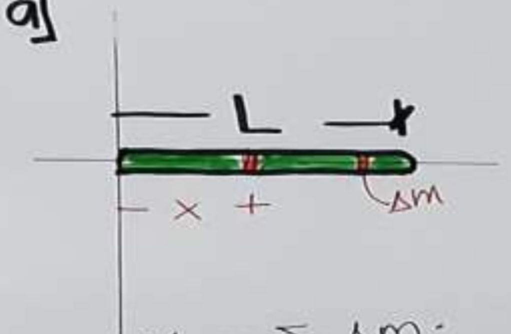
24) Una barra de 30.0 cm de longitud tiene densidad lineal dada por $\lambda = 50.0\frac{g}{m} + 20.0\ \ x\, g/m^2$ donde x es la distancia desde un extremo, medida en metros. A) ¿Cuál es la masa de la barra? B) ¿A qué distancia del extremo x=0 está su centro de masa?

Ej. 24

$L = 0.30m$

$\lambda = 50.0\frac{g}{m} + 20.0\, x \frac{g}{m^2}$

a)



$M \approx \sum_i \Delta m_i$

$M \approx \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i \Delta m_i = \int dm$

Como $\lambda = \frac{m}{x} \Rightarrow \lambda dx = dm$

$\Rightarrow M = \int dm = \int_0^{0.30m} \lambda dx$

$M = \int_0^{0.30m} [50.0\frac{g}{m} + 20.0\, x \frac{g}{m^2}]\, dx$

$\boxed{M = 15.9g}$

b)

$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm$

$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x [\lambda dx]$

$= \frac{1}{M}\int_0^{0.30m} \lambda x\, dx$

$= \frac{1}{M}\int_0^{0.30m} [50.0\frac{g}{m} + 20.0\, x \frac{g}{m^2}]\, x\, dx$

$x_{cm} = 0.153\, m$

M3. Un objeto es rastreado por una estación de radar y se encuentra que tiene un vector de posición dado por $\vec{r} = (3500 - 160t)\hat{\imath} + 2700\hat{\jmath} + 300\hat{k}$, con $\vec{r}$ en metros y t en segundos. El eje x de la estación de radar apunta al este, su eje y apunta al norte, y su eje z verticalmente hacia arriba. Si el objeto es un proyectil meteorológico de 250 kg. ¿Cuáles son a) su momento lineal, b) su dirección de movimiento y c) la fuerza neta que actúa sobre él?

M3

$$\vec{r} = (3500 - 160t)\hat{\imath} + 2700\hat{\jmath} + 300\hat{k}$$

M = 250 Kg

a] $\vec{P}$

b] Dirección

c] $\Sigma\vec{F}$

a] $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(3500 - 160t)\hat{\imath} + 2700\hat{\jmath} + 300\hat{k}\right]$$

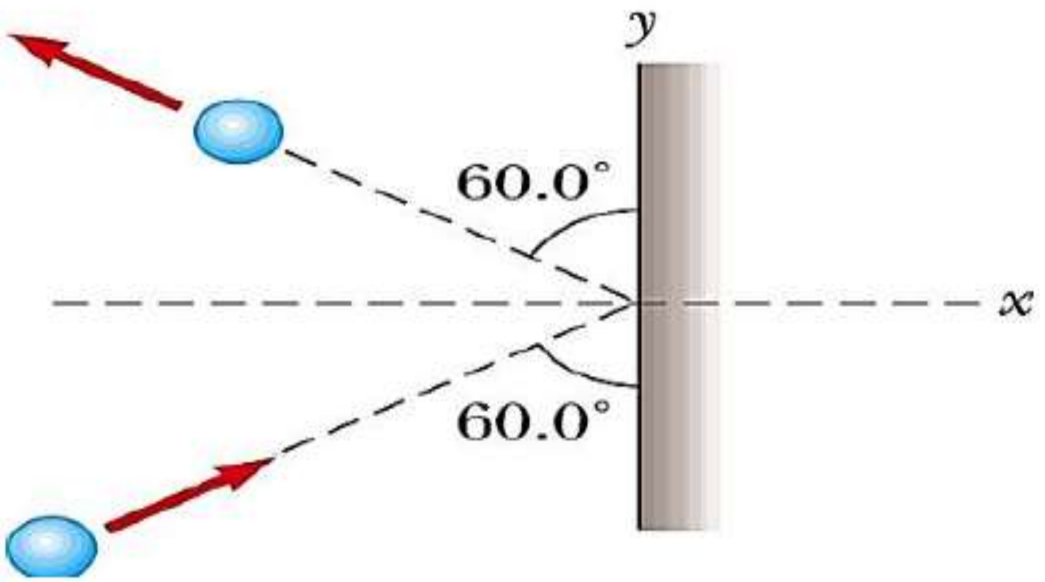
$$\vec{v} = -160\hat{\imath}$$

$$\vec{P} = m\vec{v} = 250\,kg\,(-160\hat{\imath}) = -40000\,kg\frac{m}{s}\hat{\imath}$$

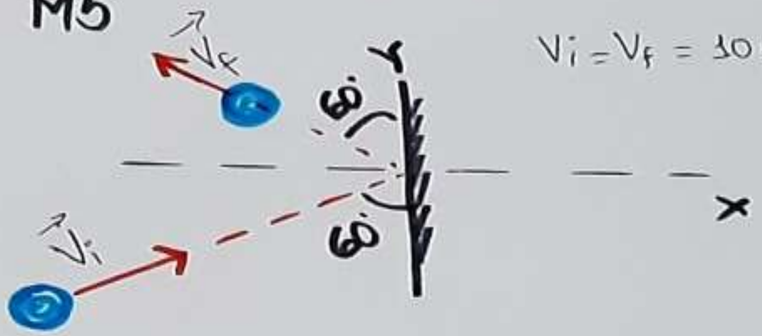
b] Por el signo menos ⇒ Oeste

c] $$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-40000\,kg\frac{m}{s}\hat{\imath}\right] = \emptyset$$

M5. Una bola de acero de 3.00 kg golpea una pared con una rapidez de 10.0 m/s en un ángulo de 60.0º con la superficie. Rebota con la misma rapidez y ángulo como se muestra en la figura 3. Si la bola está en contacto con la pared durante 0.200 s, ¿cuál es la fuerza promedio que la pared ejerce sobre la bola?

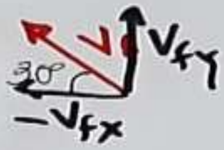


M5



$V_i = V_f = 10\,\frac{m}{s}$

$V_{ix} = V_i \cos 30°$
$V_{iy} = V_i \operatorname{sen} 30°$



$V_{fx} = -V_f \cos 30°$
$V_{fy} = V_f \operatorname{sen} 30°$

1° obtener $\vec{I}$ a través de $\Delta \vec{P}$

$\vec{I} = \Delta P_x\, \hat{i} + \Delta P_y\, \hat{j}$

$10\frac{m}{s} = V$

$\Delta P_x = m\left[V_{fx} - V_{ix}\right] = m\left[-V_f \cos 30° - V_i \cos 30°\right]$

$\Delta P_x = m\left[-2V\cos 30°\right] = 3.00\,kg\left[-2\left(10\frac{m}{s}\right)\cos 30°\right]$

$\boxed{\Delta P_x = -51.96\ kg\frac{m}{s}}$

$\Delta P_y = m\left[V_{fy} - V_{iy}\right]$

$= m\left[V_f \operatorname{sen} 30° - V_i \operatorname{sen} 30°\right]$

$\Delta P_y = m\left[\cancel{V \operatorname{sen} 30° - V \operatorname{sen} 30}\right] = 0$

$\Delta P_y = 0$

$\Rightarrow \vec{I} = -51.96\ kg\frac{m}{s}\ \hat{i}$

$\Rightarrow |\vec{I}| = 51.96\ kg\frac{m}{s}$

Como $I = F_{prom}\,\Delta t$

$\frac{I}{\Delta t} = F_{prom.}$

$\frac{51.96\ kg\frac{m}{s}}{0.200\ s} = F_{prom}$

$259.8\ N = F_{prom}$

En forma vectorial

$\vec{F}_{prom} = -259.8\,N\ \hat{i}$

Una partícula de 2.00 kg tiene una velocidad $(2.00\hat{\mathbf{i}} - 3.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s, y una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad $(1.00\hat{\mathbf{i}} + 6.00\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Encuentre a) la velocidad del centro de masa y b) la cantidad de movimiento total del sistema.

Datos

$m_1 = 2.00\,kg \quad \vec{V}_1 = (2.00\hat{\imath} - 3.00\hat{\jmath})\frac{m}{s}$

$m_2 = 3.00\,kg \quad \vec{V}_2 = (1.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath})\frac{m}{s}$

a] $\vec{V}_{cm} = ?$

b] $\vec{P}_{total} = ?$

a] La velocidad del centro de masa está definido mediante:

$$\vec{V}_{cm} = \frac{\sum_i m_i V_i}{M}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{2.00kg(2.00\hat{\imath} - 3.00\hat{\jmath})\frac{m}{s} + 3.00kg(1.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath})\frac{m}{s}}{2.00kg + 3.00kg}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{[4.00\hat{\imath} - 6.00\hat{\jmath}]kg\frac{m}{s} + [3.00\hat{\imath} + 18.0\hat{\jmath}]kg\frac{m}{s}}{5.00\,kg}$$

$$\vec{V}_{cm} = \frac{[7.00\hat{\imath} + 12.0\hat{\jmath}]\cancel{kg}\frac{m}{s}}{5.00\cancel{kg}}$$

$$\vec{V}_{cm} = [1.4\hat{\imath} + 2.4\hat{\jmath}]\frac{m}{s}$$

b] $\vec{P}_{total} = M\vec{V}_{cm}$

$= [2.00 + 3.00]kg\,[1.4\hat{\imath} + 2.4\hat{\jmath}]\frac{m}{s}$

$= 5.00kg\,[1.4\hat{\imath} + 2.4\hat{\jmath}]\frac{m}{s}$

$$\vec{P}_{total} = [7.00\hat{\imath} + 12.0\hat{\jmath}]\,kg\frac{m}{s}$$

El vector de posición de una partícula de 3.50 g que se mueve en el plano xy varía en el tiempo de acuerdo con $\vec{\mathbf{r}}_1 = (3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})t + 2\hat{\mathbf{j}}t^2$. Al mismo tiempo, el vector de posición de una partícula de 5.50 g varía como $\vec{\mathbf{r}}_2 = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{i}}t^2 - 6\hat{\mathbf{j}}t$, donde t está en s y r en cm. En $t = 2.50$ s, determine: a) el vector de posición del centro de masa, b) la cantidad de movimiento lineal del sistema, c) la velocidad del centro de masa, d) la aceleración del centro de masa y e) la fuerza neta que se ejerce sobre el sistema de dos partículas.

$m_1 = 3.50g$

$\vec{r}_1 = (3\hat{i} + 3\hat{j})t + 2\hat{j}t^2$

$m_2 = 5.50g$

$\vec{r}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{i}t^2 - 6\hat{j}t$

Para $t = 2.50s$

a] $\vec{r}_{cm}$

b] $\vec{P}_{total}$

c] $\vec{V}_{cm}$

d] $\vec{a}_{cm}$

e] $\Sigma\vec{F}$

$\vec{r}_1 = (3\hat{i} + 3\hat{j})(2.50) + 2\hat{j}(2.50)^2$

$= [7.5\hat{i} + 7.5\hat{j} + 12.5\hat{j}]m$

$\vec{r}_1 = [7.5\hat{i} + 20\hat{j}]m$

$\vec{r}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{i}(2.50)^2 - 6\hat{j}(2.50)$

$= [3\hat{i} - 12.5\hat{i} - 15\hat{j}]m$

$= [-9.5\hat{i} - 15\hat{j}]m$

Desarrollo:

a] $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$

$= \frac{1}{(3.50+5.50)kg}\left[m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right]$

Donde $\vec{r}_1 = (3\hat{i} + 3\hat{j})(2.50) + 2(2.50)^2\hat{j}$

$\vec{r}_{cm} = \frac{3.50g[7.5\hat{i} + 20\hat{j}]m + 5.50g[-9.5\hat{i} - 15\hat{j}]m}{9g}$

$\vec{r}_{cm} = \frac{26.25gm\hat{i} + 70gm\hat{j} - 52.25gm\hat{i} - 82.5gm\hat{j}}{9g}$

$= \frac{-26gm\hat{i} - 12.5gm\hat{j}}{9g}$

$\vec{r}_{cm} = -2.9m\hat{i} - 1.4m\hat{j}$

b] $\vec{P}_{total} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$

o $P_{total} = M\vec{V}_{cm}$

Donde $\vec{V}_1 = \frac{d}{dt}((3\hat{i} + 3\hat{j})t + 2\hat{j}t^2))$

$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 4t\hat{j}$

en 2.50s

$V_1 = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 4(2.50)\hat{j}$

$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 10\hat{j} = [3\hat{i} + 13\hat{j}]\frac{m}{s}$

Para $\vec{V}_2$

$\vec{V}_2 = \frac{d}{dt}(3\hat{i} - 2\hat{i}t^2 - 6\hat{j}t)$

$\vec{V}_2 = -4t\hat{i} - 6\hat{j} = -4(2.50)\hat{i} - 6\hat{j}$

$\vec{V}_2 = [-10\hat{i} - 6\hat{j}]\frac{m}{s}$

Luego:

$$\vec{P}_{total} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$$

$$\vec{P}_{total} = 3.5\times10^{-3}kg(3\hat{i}+13\hat{j})\frac{m}{s} + 5.5\times10^{-3}kg(-10\hat{i}-6\hat{j})\frac{m}{s}$$

$$= 0.0105\,kg\frac{m}{s}\hat{i} + 0.0455\,kg\frac{m}{s}\hat{j} - 0.055\,kg\frac{m}{s}\hat{i} - 0.033\,kg\frac{m}{s}\hat{j}$$

$$\vec{P}_{total} = -0.0445\,kg\frac{m}{s}\hat{i} + 0.0125\,kg\frac{m}{s}\hat{j}$$

c] $$\vec{V}_{cm} = \frac{\sum m_i\vec{V}_i}{M} = \frac{-0.0445\,kg\frac{m}{s}\hat{i} + 0.0125\,kg\frac{m}{s}\hat{j}}{9\times10^{-3}kg}$$

$$\vec{V}_{cm} = -4.9\frac{m}{s}\hat{i} + 1.39\frac{m}{s}\hat{j}$$

d] $$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{V}_{cm}}{dt} \quad o \quad \vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i a_i$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2)$$

$$\vec{a}_1 = \frac{d}{dt}(\vec{V}_1) = \frac{d}{dt}(3\hat{i}+3\hat{j}+4t\hat{j})$$

$$\vec{a}_1 = 4\frac{m}{s^2}\hat{j}$$

Para $\vec{a}_2$

$$\vec{a}_2 = \frac{d}{dt}\vec{V}_2$$

$$\vec{a}_2 = \frac{d}{dt}(-4t\hat{i}-6\hat{j})$$

$$\vec{a}_2 = -4\hat{i}\frac{m}{s^2}$$

Por lo tanto:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{(3.5\times10^{-3})(4\frac{m}{s^2}\hat{j}) + (5.5\times10^{-3})(-4\frac{m}{s^2}\hat{i})}{3.5\times10^{-3}kg + 5.5\times10^{-3}kg}$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{0.014\,kg\frac{m}{s^2}\hat{j} - 0.022\,kg\frac{m}{s^2}\hat{i}}{9\times10^{-3}kg}$$

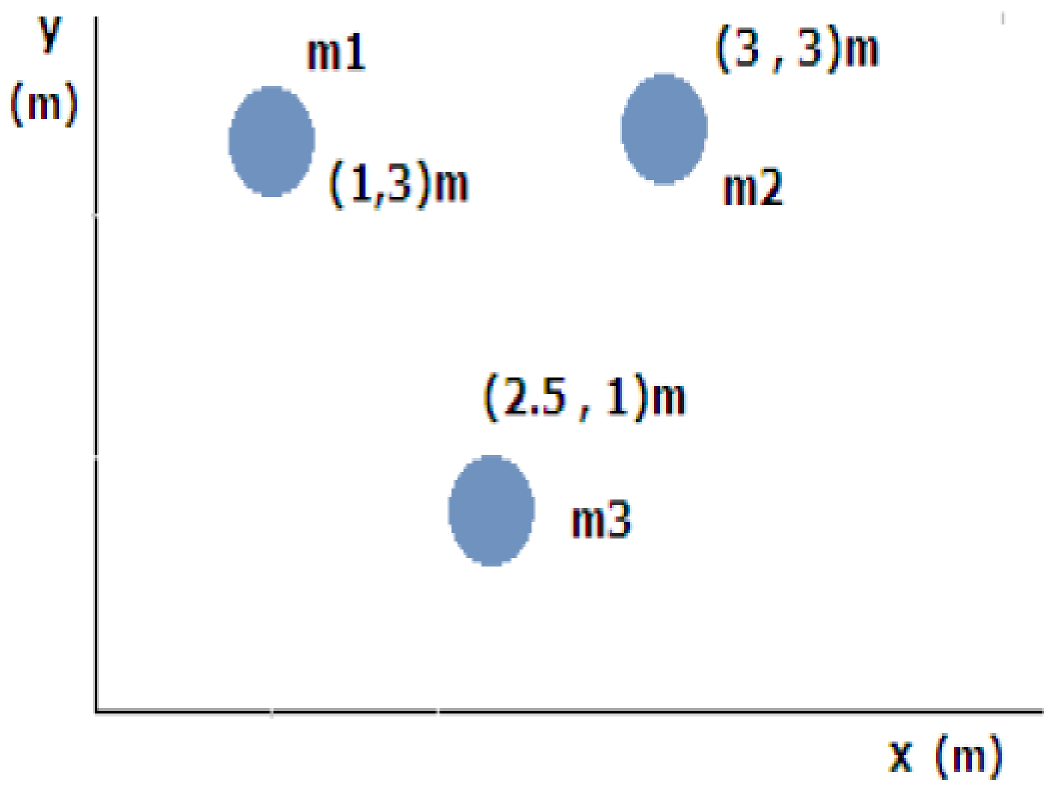
$$\vec{a}_{cm} = -2.4\frac{m}{s^2}\hat{i} + 1.5\frac{m}{s^2}\hat{j}$$

e) $$\sum\vec{F} = M\vec{a}_{cm}$$

$$= (9\times10^{-3}kg)\left[-2.4\frac{m}{s^2}\hat{i} + 1.5\frac{m}{s^2}\hat{j}\right]$$

$$\sum\vec{F} = -0.0216\,N\hat{i} + 0.0135\,N\hat{j}$$

19) Un sistema está formado por tres partículas de igual masa localizadas como se muestra en la figura. Cuál es la posición del centro masa del sistema.



Ej. 19

Como las masas son iguales

$m_1 = m_2 = m_3 = m_x$

$$X_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{m_x X_1 + m_x X_2 + m_x X_3}{m_x + m_x + m_x}$$

$$= \frac{\cancel{m_x}(x_1 + x_2 + x_3)}{3\cancel{m_x}}$$

$$= \frac{1\,\text{metro} + 2.5\,\text{metro} + 3\,\text{metro}}{3}$$

$X_{cm} = 2.17$ metros

$$Y_{cm} = \frac{m_x Y_1 + m_x Y_2 + m_x Y_3}{3m_x}$$

$$= \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$$

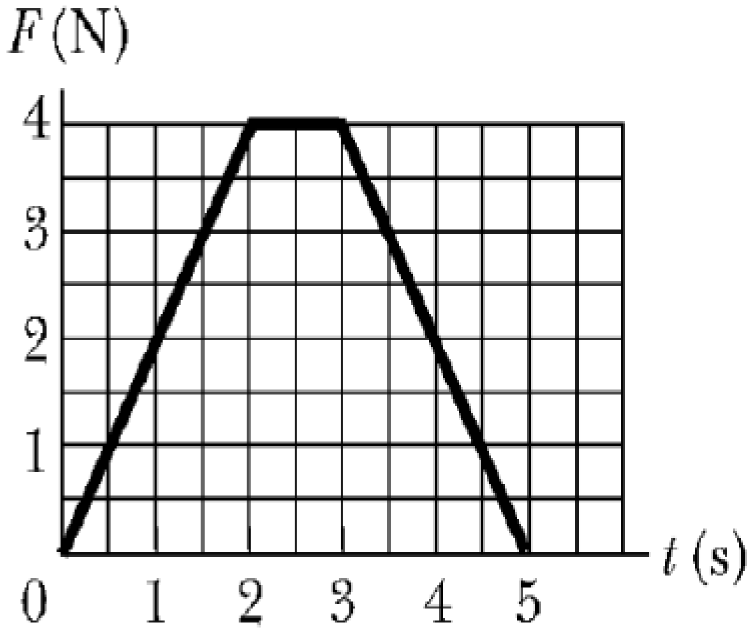
$$= \frac{3\,\text{metros} + 1\,\text{metro} + 3\,\text{metros}}{3}$$

$Y_{cm} = 2.33$ m

⇒ El vector de posición va a ser expresado así:

$\vec{r}_{cm} = [2.17\,\hat{i} + 2.33\,\hat{j}]$ cm

M8. La magnitud de la fuerza neta que se ejerce en la dirección *x* sobre una partícula de 2.50 kg varía en el tiempo como se muestra en la figura. Encuentre: a) El impulso de la fuerza, b) La velocidad final que logra la partícula si originalmente está en reposo, c) Su velocidad final si su velocidad original es -2.00 m/s y d) La fuerza promedio ejercida sobre la partícula durante el intervalo de tiempo entre 0 y 5.00 s.



M8

a] El impulso de la fuerza

$\Rightarrow$ Calcular el área bajo la curva

$A_1 = \frac{1}{2}(2s)(4N) = 4\ N.S$

$A_2 = (1s)(4N) = 4\ N.S$

$A_3 = \frac{1}{2}(2s)(4N = 4\ NS$

$\Rightarrow I = 12\ NS$

En forma vectorial

$\vec{I} = 12\ N.S\ \hat{\imath}$

b] La velocidad final que logra la partícula si parte del reposo:

$\vec{I} = \Delta\vec{P} = m[\vec{V}_f - \cancel{\vec{V}_i}^{\,0}]$

$\vec{I} = 2.50kg[\vec{V}_f]$

$\frac{\vec{I}}{2.50kg} = \vec{V}_f$

$\vec{V}_f = \frac{12\ N.s\ \hat{\imath}}{2.50kg}$

$\vec{V}_f = 4.8\ \frac{m}{s}\ \hat{\imath}$

c] $\vec{I} = \Delta\vec{P}$

$\vec{I} = m[\vec{V}_f - \vec{V}_i]$

$\frac{I}{m} = \vec{V}_f - \vec{V}_i$

$\frac{\vec{I}}{m} + \vec{V}_i = \vec{V}_f$

$\frac{12.0N.s\hat{\imath}}{2.50kg} + (-2.00\frac{m}{s}\hat{\imath}) = \vec{V}_f$

$4.8\,\hat{\imath}\frac{m}{s} - 2.00\,\hat{\imath}\frac{m}{s} = \vec{V}_f$

$2.8\,\hat{\imath}\frac{m}{s} = \vec{V}_f$

d] $\vec{I} = \vec{F}\Delta t \Rightarrow \vec{F} = \frac{\vec{I}}{\Delta t}$

$\vec{F} = \frac{12\ N.\cancel{s}\ \hat{\imath}}{5.00\cancel{s}} = 2.4\,N\hat{\imath}$