UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 15- Unidad 4: *Rectas y planos en el espacio.*

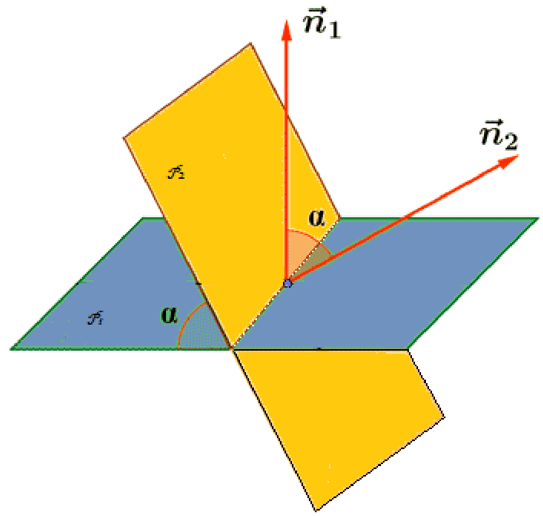
SESIÓN 1 o SESIÓN 2.

Ángulo entre planos, distancia de un punto a un plano, gráfica de planos.

Ángulo entre planos

Si dos planos no son paralelos entonces se cruzan en una recta y el ángulo entre los dos planos se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales.

Figura 1



Ejemplo 1

a) Encuentre el ángulo entre los planos $x - 2y + 3z = 1 \quad y \quad x + y + z = 1$

b) Halle las ecuaciones paramétricas para la recta de intersección L de los dos planos.

Solución

Los vectores normales de los dos planos son

$$\overrightarrow{n_1} = \langle 1, -2{,}3 \rangle \qquad\qquad \overrightarrow{n_2} = \langle 1{,}1{,}1 \rangle$$

Recordemos que si α es el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{n_1}\ y\ \overrightarrow{n_2}$ distintos de cero, entonces

$$cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}$$

De este modo el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{n_1}\ y\ \overrightarrow{n_2}$ es

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|}\right)$$

Sustituyendo datos tenemos

$$cos(\alpha) = \frac{1(1)+(-2)1+3(1)}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{42}},$$

y

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72^0$$

b) Para determinar las ecuaciones paramétricas de común a los planos necesitamos primero hallar un punto en L. Por ejemplo podemos encontrar el punto donde la recta cruza al plano xy haciendo $z = 0$ en las dos ecuaciones de los planos dados. Esto da las ecuaciones

$$x - 2y = 1 \quad y \quad x + y = 1,$$ cuya solución es

$x = 1 \quad y \quad y = 0$. Así que el punto de la recta L es $(1,0,0)$.

Como la recta L está en los dos planos, entonces es perpendicular a los dos vectores normales, de esta manera el vector direccional de la recta es

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \langle -5,2,3 \rangle$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta L son:

$$x = 1 - 5t, y = 2t, z = 3t$$

Distancia de un punto a un plano.

Obtener la fórmula para la distancia D de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $ax + by + cz + d = 0$

Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ cualquier punto del plano y sea $\vec{\boldsymbol{b}}$ el vector que corresponde a $\overrightarrow{P_0P_1}$.

Entonces

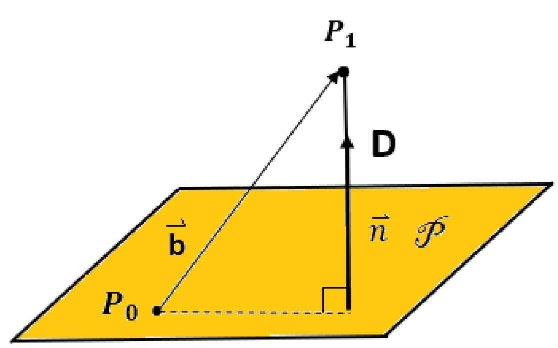


Figura 2

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \langle \boldsymbol{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0} \rangle$$

De la figura vemos que la distancia D del punto P_1 al plano es igual al valor absoluto de la componente del vector $\vec{\boldsymbol{b}}$ sobre el vector normal $\vec{\boldsymbol{n}} = \langle a, b, c \rangle$.

Por tanto,

$$D = comp_{\vec{n}}^{\vec{b}} = \frac{|\vec{n}.\vec{b}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|(ax_1 + by_1 + cz_1) - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Como P_0 pertenece al plano, sus coordenadas también satisfacen la ecuación del plano, así que tenemos $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Por tanto, la fórmula D para calcular la distancia del punto a la recta puede expresarse como

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ejemplo 2

Calcule la distancia del punto $(2,1,4)$ al plano $x - 3y + z - 6 = 0$

Solución

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1) = (2,1,4)$ y $\vec{n} = \langle 1, -3, 1 \rangle$. Por la fórmula, la distancia D entre P_1 y el plano es

$$D = \frac{|1(2) + (-3)1 + 1(4) - 6|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{11}} = \frac{3}{\sqrt{11}}\ u.l$$

Graficas de planos

Planos con dos variables ausentes

La falta de variables en la ecuación de un plano significa que estas variables tienen coeficiente cero y, por tanto estas variables pueden tomar valores arbitrarios. Por ejemplo, el plano $\mathscr{P}$: $0x + 0y + z = 2$ es el plano $z = 2$, es decir

$$\mathscr{P} = \{(x, y, z) : x, y \in R\}$$

En lo que viene,

El plano $x = a$ es el plano $\mathscr{P} = \{(a, y, z): y, z \in R\}$

El plano $y = b$ es el plano $\mathscr{P} = \{(x, b, z): x, z \in R\}$

El plano $z = c$ es el plano $\mathscr{P} = \{(x, y, c): x, y \in R\}$

Ejemplo 3

El plano $\mathscr{P}: z = 0$ lo constituyen todos los puntos de la forma $(x, y, 0)$ con $x, y \in R$ cualesquiera, es decir, el plano $z = 0$ es el plano xy.

Gráfica.

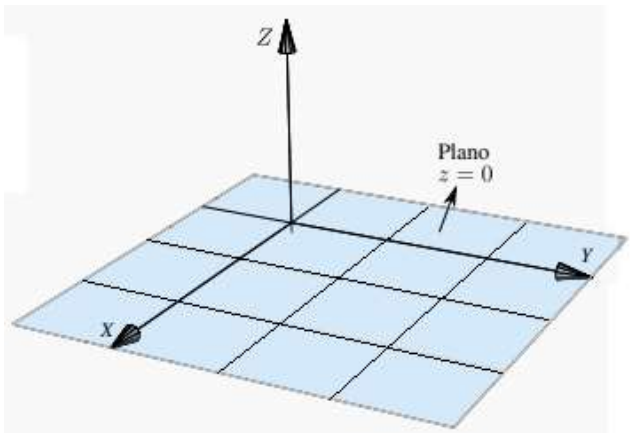


Figura 3

Ejemplo 4

Dibuje el plano $z = 2$

Solución

El plano $z = 2$ lo forman todos los puntos de la forma $(x, y, 2)$ con $x, y \in R$, es decir, es un plano paralelo al plano xy que pasa por la coordenada $z = 2$

Gráfica

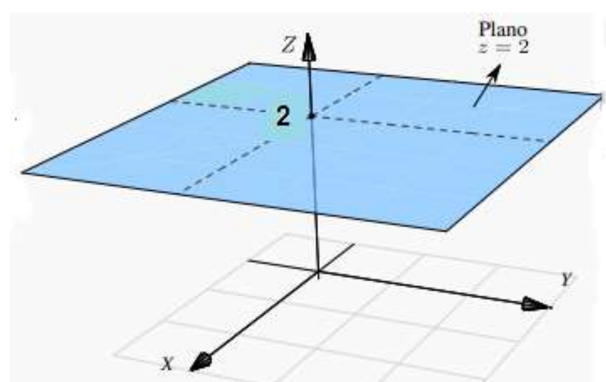


Figura 4

Ejemplo 5

Dibuje el plano $y = 3$

Solución

El plano $y = 3$ está formado por todos los puntos de la forma $(x, 3, z)$ con $x, z \in R$, es decir, es un plano paralelo al plano xz que pasa por la coordenada $y = 3$

Gráfica

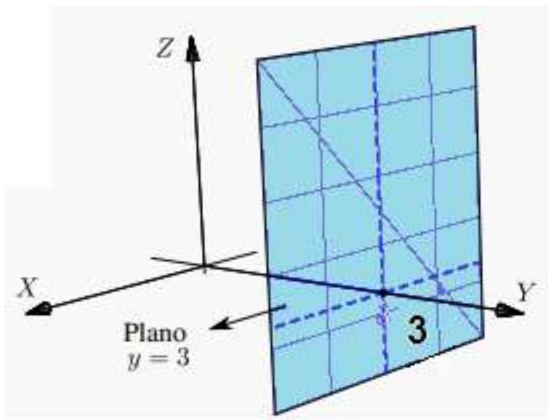


Figura 5

Plano de ecuación con una variable ausente

Cuando en la ecuación general de un plano hace falta una variable (es decir variable con coeficiente cero), el plano está formado por la recta determinada por las variables presentes en la ecuación.

Ejemplo 6

Dibuje el plano $x + y = 2$

Solución

El plano $x + y = 2$ es el conjunto de puntos $\{(x, y, z): x + y = 2, z \in R\}$.

Las coordenadas x e y están sobre la recta $x + y = 2, z = 0$ y la coordenada es arbitraria.

Grafica

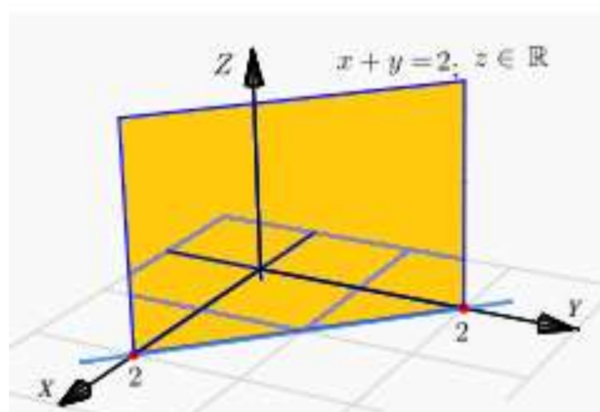


Figura 6

Las coordenadas x e y están sobre la recta $x + y = 2, z = 0$ y la coordenada es arbitraria.

Grafica

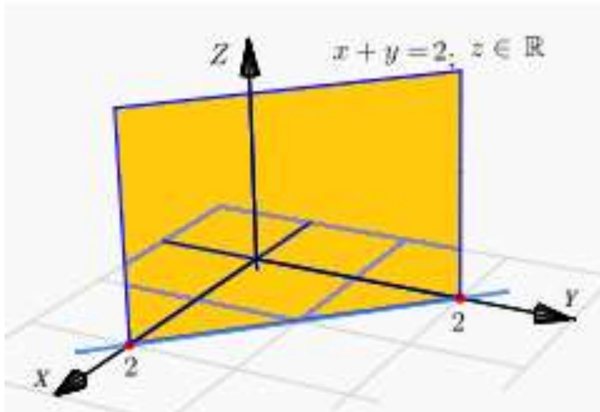


Figura 7

Ejemplo 7

Dibuje el plano $y + z = 3$

Solución

El plano $y + z = 3$ es el conjunto de puntos $\{(x, y, z): y + z = 3, x \in R\}$. Las coordenadas y y z están sobre la recta $y + z = 3, x = 0$, y la coordenada x es arbitraria.

Gráfica

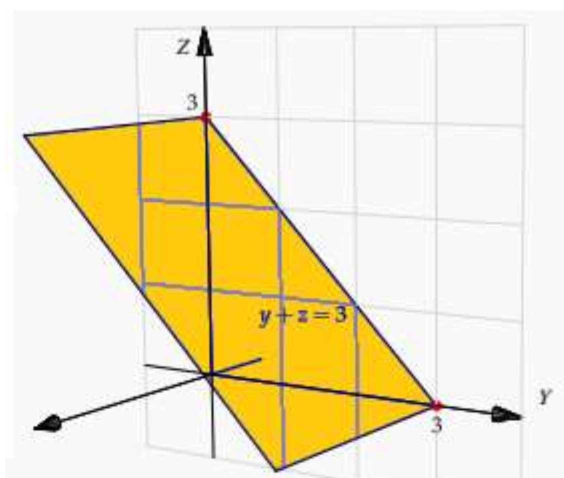


Figura 8

Planos de ecuaciones con todas las variables

Distinguiremos planos entre los que pasan por $(0,0,0)$ y los que no.

Una forma fácil de dibujar planos que no pasan por el origen consiste en determinar la intersección del plano con cada eje coordenado y trazar los segmentos (trazas) que unen esos puntos. En caso que sea necesario podemos extender dos de estos segmentos y formar un plano con la forma de un paralelogramo.

Ejemplo 8

Dibuje el plano $4x - 4y + 2z = 4$

Solución

El plano interseca a los ejes coordenados en $x = 1, y = -1\ \ y\ \ z = 2$. Podemos usar el segmento que va de $x = 1\ \ a\ \ y = -1$, y el segmento que va de $y = 1\ \ a\ \ z = 2$.Con estos dos segmentos podemos dibujar un paralelogramo.

Gráfica.

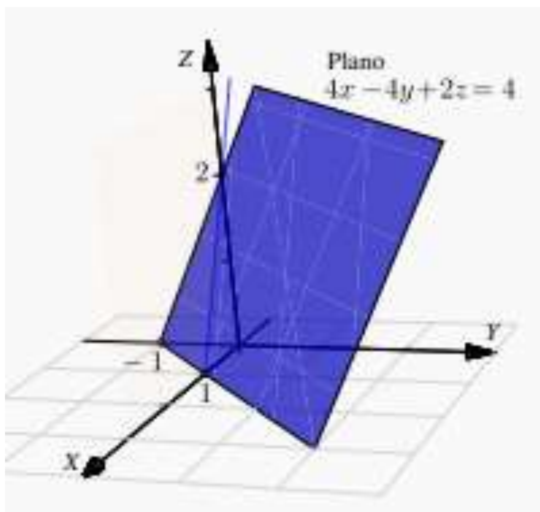


Figura 9

Planos que pasan por el origen

Para dibujar planos que contienen el origen se anula una de las variables y se dibuja una primera recta resultante en el plano correspondiente. Luego se anula otra variable y se dibuja una segunda recta en el plano correspondiente. Tomamos dos segmentos, uno en cada recta y formamos un paralelogramo.

Ejemplo 9

Dibuje el plano $x + y - 2z = 0$

Solución

Como el plano $x + y - 2z = 0$ pasa por el origen, usamos un segmento de la recta $x - 2z = 0$; $y = 0$, y un segmento de la recta $y - 2z = 0$; $x = 0$ para dibujar un paralelogramo que representa al plano.

Gráfica.

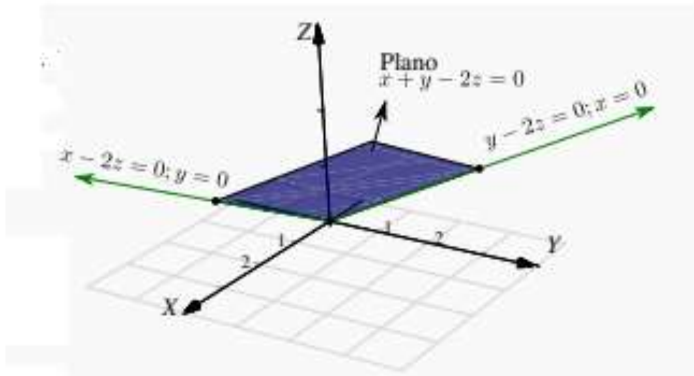


Figura 10

EJERCICIOS PARA PRACTICAR.

1. Encuentre los ángulos entre los planos

$a)x - 3y + 2z = 14, -x + y + z = 10$

b) $x + y = 1, 2x + y - 2z = 2$

2. Encuentre la distancia del punto al plano.

a) $(2, -3,4), x + 2y + 2z = 13$

b) $(0,1,1), 4y + 3z = -12$

3. Grafique los siguientes planos.

$a)$ $2x + y + 3z = 6$, b) $x + z = 1$

c)$6x + 4y - 12 = 0$

$d) - x + 2y + z = 4$