6. Cantidad de movimiento

6.1. Cantidad de movimiento lineal o ímpetu

El modelo de energía en muchos sentidos mucho más simple de utilizar que el método de fuerzas de Newton al ser una ley escalar. Además en sistemas demasiados complejos Newton fracasa por engorroso, mientras que el método de energía genera soluciones mas satisfactorias para la comprensión de los sistemas estudiados[1].
Sin embargo, en el camino se ha olvidado del carácter vectorial del movimiento, por lo que es necesario introducir nuevas variables vectoriales que complementen el enfoque energético.

6.1.1. Motivación

Suponga que tenemos un bloque de masa m al cual lo sometemos a tres experimentos. En el primero lo dejamos caer una altura h desde el reposo y vemos su velocidad de impacto en el suelo. En el segundo lo dejamos caer por una plano inclinado sin fricción una misma altura h y en el tercero lo hacemos caer por un plano curvo como se muestra en la figura 6.1.

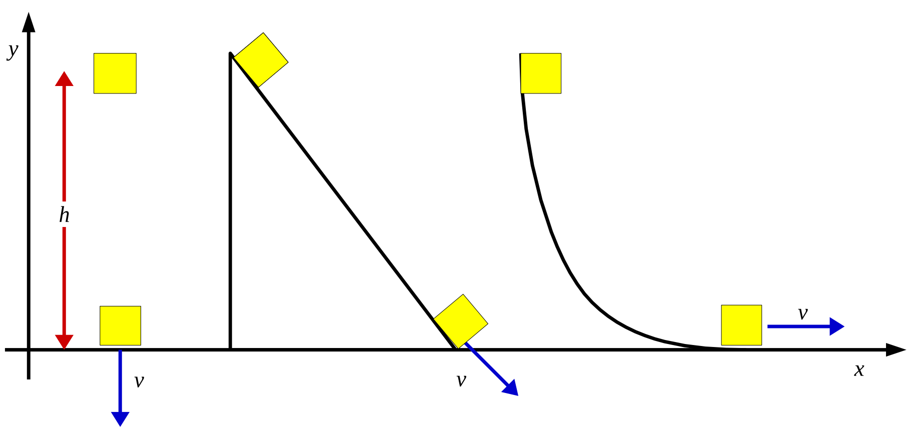

Figura 6.1.: Los tres casos son energéticamente idénticos

[1]La Mecánica Lagrangiana es en esencia el método energético de análisis llevado al extremo, obteniendo ecuaciones diferenciales complejas para la solución de dichos problemas. Este enfoque es retomado en la Mecánica Cuántica con las restricciones correspondientes para entender el mundo microscópico.

En los tres casos tenemos un sistema conservativo por lo que

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_2 \\
\cancelto{0}{K_1} + U_1 &= K_2 + \cancelto{0}{U_2} \\
mgy_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 \\
v_2 &= \sqrt{2gh}
\end{aligned}
$$

es decir, desde un punto de vista energético los tres casos son idénticos e indistinguibles: el cuerpo transformó la energía potencial gravitatoria en cinética obteniendo la misma rapidez. Pero obviamente las situaciones son distintas: tardan tiempos distintos de en caer, recorren distancias diferentes, la tasa a la cual cambian las energías son diferentes y finalmente las direcciones de las velocidades son diferentes.
Es autoevidente que el modelo está incompleto

6.1.2. Ímpetu lineal

Buscamos una cantidad física que mejor describa el estado de movimiento en su carácter vectorial[2]. Se introduce

Definición 6.1 (Cantidad de movimiento lineal)**.** o ímpetu lineal es el producto de masa por velocidad

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{6.1}$$

OBSERVACIONES

1. Las unidades de esta nueva cantidad son

$$
\begin{aligned}
[p] &= [m][v] \\
[p] &= kg \cdot \frac{m}{s}
\end{aligned}
$$

   y las trataremos siempre de esta forma en el Sistema Internacional

2. En general existe una impulso en cada dirección de manera que

$$
\begin{aligned}
\vec{p} &= p_x\ \hat{\imath} + p_y\ \hat{\jmath} + p_z\ \hat{k} \\
\vec{p} &= mv_x\ \hat{\imath} + mv_y\ \hat{\jmath} + mv_z\ \hat{k}
\end{aligned}
$$

   en la mayoría de los casos nuestros impulsos tendrán sólo una componente o será un vector bidimensional. Obviamente $\vec{p}$ señala siempre en dirección de la velocidad $\vec{v}$.

[2] Recordemos que la energía es sólo una medida indirecta del estado de movimiento

3. En especial si la magnitud del vector $|\vec{p}| = mv$ es la masa por la *rapidez,* podríamos asociar el ímpetu con la energía cinética a través de la ecuación 6.1

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m^2}{m}v^2 \\ &= \frac{1}{2m}(mv)^2 \\ K &= \frac{p^2}{2m} \end{aligned} \tag{6.2}$$

confirmando nuestra noción que la energía cinética es una medida indirecta del estado de movimiento o bien su ímpetu.

Ejemplo 6.1. Tomado de la discusión D6/1. Una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad de$\vec{v} = (3.00\ \hat{\imath} - 4.00\ \hat{\jmath})\ m/s$. a) Encuentre las componentes x y y de su cantidad de movimiento. b) Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento.
a) Ya que el ímpetu es un vector

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} \\ &= 3.00\ kg \times (3.00\ \hat{\imath} - 4.00\ \hat{\jmath})\ m/s \\ \vec{p} &= 9.00\ \hat{\imath} - 12.00\ \hat{\jmath}\ kg \cdot \frac{m}{s} \end{aligned}$$

siendo lógico que $p_x = 9\ kg \cdot \frac{m}{s}$ y $p_y = 12\ kg \cdot \frac{m}{s}$
b) Como cualquier otro vector su magnitud y dirección es

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{p_x^2 + p_y^2} & \tan\theta &= \frac{p_y}{p_x} \\ &= \sqrt{9^2 + 12^2}\ kg \cdot \tfrac{m}{s} & &= \frac{12\ \cancel{kg \cdot \frac{m}{s}}}{9\ \cancel{kg \cdot \frac{m}{s}}} \\ p &= 15\ kg \cdot \tfrac{m}{s} & \theta &= \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \\ & & \theta &= 53.13^\circ /233.13^\circ \end{aligned}$$

ya que el vector se encuentra en el primer cuadrante, la magnitud del ímpetu es de 15 $kg \cdot \frac{m}{s}$ y su dirección es de 53.13°.

6.1.3. Las Leyes de Newton y el ímpetu lineal

De hecho Sir Isaac Newton formuló sus leyes con el concepto de cantidad de movimiento en mente. De ahí que sea útil revisitar las Leyes de Newton a la luz del concepto del ímpetu

Primera Ley de Newton

Recordando, la Primera Ley de Newton nos dice que en ausencia de fuerza neta un cuerpo mantiene su inercia y permanece en un MRU. Decíamos que las fuerzas sólo son responsables del cambio de movimiento, no del movimiento en sí y la inercia lineal (masa) del cuerpo es responsable de éste comportamiento.

> Ahora decimos que los cuerpos deben conservar su inercia ya que al no haber fuerza neta, el ímpetu se mantiene. Decimos que es el ímpetu el que obliga a un cuerpo a permanecer en la dirección y velocidad que tiene.

A diferencia de la interpretación anterior, una partícula no necesita tener masa para mantener un MRU, sino que basta con que tenga ímpetu. Los fotones, por ejemplo, las partículas que componen la luz no poseen mas, pero si ímpetu y energía de ahí que el movimiento de ellos en general es rectilíneo. De hecho la variación de la trayectoria recta implica la interacción de luz con su medio[3]

Segunda Ley de Newton

Al haber fuerza neta actuando sobre una partícula ésta la acelera y por ende cambia su velocidad y rapidez, de aquí concluimos que la fuerza neta cambia el ímpetu en el tiempo. Utilizando la Ley Fundamental de la Mecánica obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{F}_N &= m \cdot \vec{a} \\ &= m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}\end{aligned}$$

asumiendo que la masa m de la partícula o cuerpo no varía con el tiempo (gas o fluido que se escapa o desbastación por fricción, etc), se puede meter la masa dentro de la derivada quedando

$$\begin{aligned}\vec{F}_N &= \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \\ \vec{F}_N &= \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (6.3)\end{aligned}$$

OBSERVACIONES

1. A la ecuación 6.3 la llamamos Segunda Ley de Newton generalizada.
2. También nos dice que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento es producida por la fuerza neta, es decir es una *fuerza impulsora.*

[3] dispersión el medio en óptica o lente gravitatorio en Relatividad General

3. Newton su *Philosophiae naturalis principia mathematica* formula ésta ley o axioma de la siguiente forma: el cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, que es equivalente a lo expresado en numeral anterior[Newton, 2016].

Ejemplo 6.2 (Fuerza neta como tasa de cambio del ímpetu)**.** Tomado de la discusión D6/2. El momento de una partícula está dado por $\vec{p} = 4.0\ t^2\ \hat{\imath}–2.6\ \hat{\jmath}–3.9\ t\ \hat{k}$. Donde $\vec{p}$ en $kg\frac{m}{s}$ y t en s. ¿Cuál es la fuerza en función del tiempo?

Solución
Por la ecuación 6.3 sólo es posible calcular la fuerza neta actuando sobre ella.

$$\begin{aligned}
\vec{F_N} &= \frac{d\vec{p}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(4.0\ t^2\ \hat{\imath}–2.6\ \hat{\jmath}–3.9t\ \hat{k}\right) \\
&= \left(8.0\ t\ \hat{\imath}–0\ \hat{\jmath}–3.9\ \hat{k}\right)\ N \\
\vec{F_N} &= 8.0\ t\ \hat{\imath}–3.9\ \hat{k}\ N
\end{aligned}$$

donde la derivación del vector se hace por componentes.

Ejemplo 6.3 (Ímpetu y fuerza bajo aceleración variable)**.** . Un objeto de 10 kg de masa se mueve con una posición dada por la siguiente expresión $x = t^5 + 5t^3 + 25$, donde x en m y t en s. Para este movimiento determinar la cantidad de movimiento lineal y la fuerza que aplica al objeto en a) $t = 2\ s$ y b) $t = 4\ s$.

Solución
Dada que la posición sólo da una función para la coordenada x, asumimos que se trata en un movimiento rectilíneo en esa dirección . Obtenemos el ímpetu y fuerza en x derivando una y dos veces respectivamente y multiplicando por la mas

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} & a_x &= \frac{dv_x}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\left(t^5 + 5t^3 + 25\right) & &= \frac{d}{dt}\left(5 \cdot t^4 + 15 \cdot t^2\right) \\
v_x &= 5 \cdot t^4 + 15 \cdot t^2 & a_x &= 20 \cdot t^3 + 30 \cdot t \\
\\
p_x &= m \cdot v_x & F_x &= m \cdot a_x
\end{aligned}$$

a) Entonces para $t = 2\ s$ obtenemos

$$\begin{aligned}
p_x &= m \cdot \left(5 \cdot t^4 + 15 \cdot t^2\right) & F_x &= m \cdot \left(20 \cdot t^3 + 30 \cdot t\right) \\
&= 10\ kg \cdot \left(5 \cdot 2^4 + 15 \cdot 2^2\right)\ \frac{m}{s} & &= 10\ kg \cdot \left(20 \cdot 2^3 + 30 \cdot 2\right)\ m/s^2 \\
p_x &= 1400\ kg\frac{m}{s} & F_x &= 2200\ N
\end{aligned}$$

b) ahora bien, para $t = 4\ s$ sería

$$\begin{aligned} p_x &= m \cdot \left(5 \cdot t^4 + 15 \cdot t^2\right) & F_x &= m \cdot \left(20 \cdot t^3 + 30 \cdot t\right) \\ &= 10\ kg \cdot \left(5 \cdot 4^4 + 15 \cdot 4^2\right)\ \tfrac{m}{s} & &= 10\ kg \cdot \left(20 \cdot 4^3 + 30 \cdot 4\right)\ m/s^2 \\ p_x &= 15200\ kg \tfrac{m}{s} & F_x &= 14000\ N \end{aligned}$$

Tercera Ley de Newton

Esta ley nos dice que para toda acción hay una reacción y opuesta aunque en otro cuerpo. Suponiendo que las fuerzas que se hacen los cuerpos 1 y 2 sobre cada uno son las únicas fuerzas actuando y utilizando lo que conocemos la Tercera Ley de Newton se convierte

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= -\vec{F}_{12} \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= -\frac{d\vec{p}_1}{dt} \\ \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= 0 \\ \frac{d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Una derivada es cero sólo si su argumento es constante C para cualquier instante.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = C$$

eso significa que para cualquier dos instantes t y t' la suma de ímpetus es igual

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

o bien los cambios de ímpetus

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{p}_1' - \vec{p}_1 + \vec{p}_2' - \vec{p}_2 \\ 0 &= \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 \\ \Delta\vec{p}_2 &= -\Delta\vec{p}_1 \end{aligned}$$

es decir que cada cuerpo produjo un cambio mutuo y recíproco de igual magnitud pero en sentido contrario. De esto hablaremos más concretamente en la sección 6.3

6.2. Cantidad de movimiento y la acción de la fuerza

6.2.1. Teorema Impulso Ímpetu

¿Cómo es que la fuerza produce un cambio en la cantidad de movimiento? Vemos que la fuerza actúa a través del tiempo, mas que el espacio, para cambiar el ímpetu. Utilizando la

Segunda Ley de Newton generalizada (ecuación 6.3

$$\vec{F}_N = \frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$\vec{F}_N \cdot dt = d\vec{p}$$

Integrando a ambos lados obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_N \cdot dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}$$
$$\vec{I}_N = \Delta\vec{p} \tag{6.4}$$

donde $\vec{I}_N$ es el impulso neto transferido por la fuerza neta $\vec{F}_N$ en el intervalo de tiempo Δt. A la ecuación 6.4 la llamamos el Teorema del Impulso-Ímpetu.
OBSERVACIONES

1. Este teorema se parece mucho al Teorema del Trabajo y la Energía en el sentido que el lado izquierdo tiene variables transientes o procesos, que en nuestro caso se realiza en un intervalo de tiempo mientras que el lado derecho muestra el cambio de una función de estado.

2. En general todas las fuerzas participan del cambio de ímpetu, incluso la normal que no hace trabajo siempre general un impulso que debe ser explicado.

3. A diferencial del Teorema del Trabajo y la Energía, el Teorema Impulso-Ímpetu es una ley vectorial para cual es válido:

$$I_{Nx} = \Delta p_x \qquad I_{Ny} = \Delta p_y \qquad I_{Nz} = \Delta p_z$$

6.2.2. Impulso

Ya que el impulso de la fuerza neta aparece en la sección anterior, es necesario introducir esta nueva variable dinámica

Definición 6.2 (Impulso)**.** El impuso de una fuerza es la acción de la fuerza en un intervalo de tiempo y se deja escribir como

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \tag{6.5}$$

OBSERVACIONES

1. Las unidades del impulso son

$$[I] = [F][\Delta t]$$
$$[I] = N \cdot s$$

o bien

$$1\ N \cdot s = kg \frac{m}{s^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{s} = kg \frac{m}{s}$$

que son las mismas unidades del ímpetu.

2. El impulso es una cantidad física vectorial por lo que también existen componentes del impulso cada dirección

$$\vec{I} = I_x\ \hat{\imath} + I_y\ \hat{\jmath} + I_z\ \hat{k}$$
$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} F_x dx\ \hat{\imath} + \int_{t_1}^{t_2} F_y dx\ \hat{\jmath} + \int_{t_1}^{t_2} F_z dx\ \hat{k}$$

3. Para una fuerza variable en el tiempo que actúa en una sola dirección, como se muestra en la gráfica 6.2 , el impulso transferido en un intervalo de tiempo está dado por el área bajo la curva

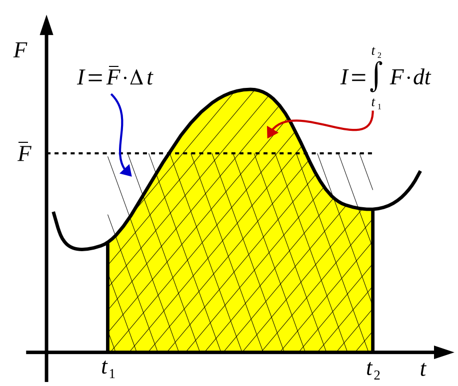

Figura 6.2.: Los tres casos son energéticamente idénticos

que sería curva sombreada amarilla con trama hacia la derecha. Por el teorema del valor medio, debe existir un valor de fuerza media $\bar{F}$ tal que multiplicado por el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ tenga la misma área.

$$\bar{F} \cdot \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt \tag{6.6}$$

es decir el impulso de la fuerza promedio en el intervalo es igual al impulso de la fuerza en ese mismo intervalo. De hecho la ecuación 6.6 funciona también vectorialmente pero se pierde la interpretación geométrica del gráfico.

Ejemplo 6.4 (Impulso bajo la curva F vs t)**.** Tomado de la discusión D6/4. En la figura 6.3 se muestra una curva fuerza – tiempo estimada para una pelota de béisbol golpeada por un bate. A partir de esta curva, determine a) el impulso entregado a la pelota, b) la fuerza promedio ejercida sobre la pelota y c) la fuerza máxima que se ejerce sobre la pelota

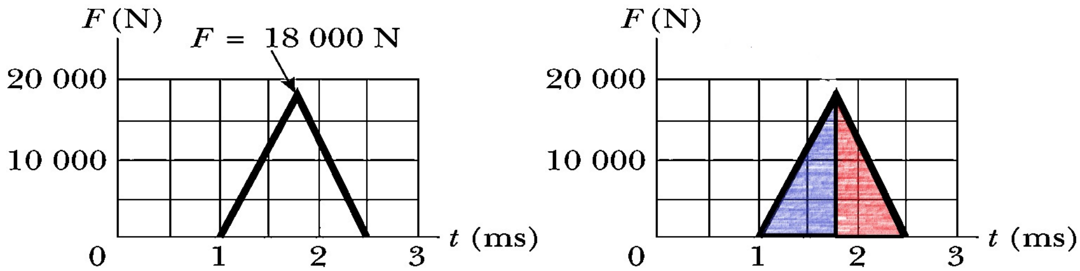

Figura 6.3.: Impulso bajo la curva F vs t

SOLUCIÓN

a) Como sabemos que el impulso es el área bajo la curva, por lo que dividimos en área en segmentos donde la fuerza sera recta y monótona como se muestra en la figura 6.3, así

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_1=1}^{t_2=1.75} F \cdot dt \\ &= \bar{F} \cdot \Delta t \\ &= \frac{F_1 + F_2}{2} \Delta t_1 \\ &= \frac{0 + 18000\ N}{2} \cdot 0.75 \times 10^{-3} s \\ I_1 &= 6.75\ N \cdot s \end{aligned}$$

De forma análoga para el área roja obtenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{F_2 + F_3}{2} \Delta t_2 \\ &= \frac{18000\ N + 0}{2} \cdot 0.75 \times 10^{-3} s \\ I_2 &= 6.75\ N \cdot s \end{aligned}$$

Así el impulso entre $t_1 = 1\ ms$ y $t_3 = 2.5\ ms$ es de

$$I = I_1 + I_2 = 13.5\ Ns$$

b) La fuerza en ese intervalo se deja calcular

$$\begin{aligned} I &= \bar{F} \cdot \Delta t \\ \frac{I}{\Delta t} &= \bar{F} \\ \bar{F} &= \frac{13.5\ N \cdot s}{1.5\ ms} \\ \bar{F} &= 9000 N \end{aligned}$$

c) La fuerza máxima es simplemente el máximo valor en el gráfico $F_{max} = 18000\ N$

Ejemplo 6.5 (Pelota rebota en pared)**.** Tomado de la discusión D6/6. Una pelota de masa 140 g y de rapidez 7.8 m/s golpea un muro perpendicularmente, y rebota con una rapidez inalterada. Si el tiempo de colisión es 3.9 ms, ¿Cuál será la fuerza promedio ejercida por la pelota sobre el muro?

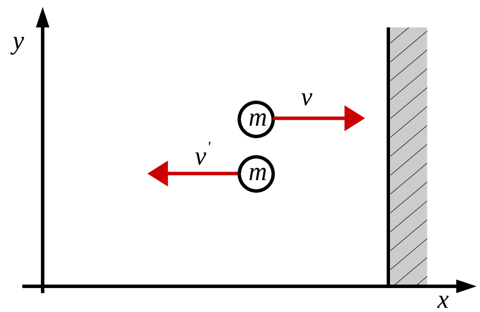

Figura 6.4.: Patinadores que se separan

OBSERVACIONES

Recordemos que el teorema impulso-ímpetu es una ley vectorial por lo que primero tenemos que calcular los vectores de ímpetu de la pelota antes y después de rebotar. Tomando el marco de referencia de la figura 6.4 es obvio que

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = 0.140\ kg \cdot 7.8\ m/s\ \hat{\imath}$$
$$\vec{p} = +1.092\ kg \cdot \frac{m}{s}\ \imath$$

conversamente ya que la velocidad después del rebote de igual pero opuesta

$$\vec{p}' = -1.092\ kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{\imath}$$

Utilizando el teorema del impulso-ímpetu (ecuación 6.4

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}' - \vec{p}$$
$$\bar{\vec{F}} \cdot \Delta t = \vec{p}' - \vec{p}$$
$$\bar{\vec{F}} = \frac{\vec{p}' - \vec{p}}{\Delta t}$$

Evaluando obtenemos

$$= \frac{-1.092\ kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{\imath} - 1.092\ kg \cdot \frac{m}{s}\ \hat{\imath}}{3.9 \times 10^{-3}\ s}$$
$$\bar{\vec{F}} = -560\ N\ \hat{\imath}$$

Nótese que el impulso proporcionado por la pared es el doble del ímpetu inicial, pero en sentido contrario (primero para contrarrestar el ímpetu inicial y luego para darle la vuelta). También es lógico que la fuerza señale en dirección x negativa pues la normal es perpendicular al plano vertical.

6.3. Conservación del ímpetu lineal

Considere a dos patinadores que se encuentran originalmente en reposo $v_1 = 0$ y $v_2 = 0$ como se muestra en la figura 6.5. Notamos que en cada diagrama de cuerpo libre que el peso y la normal se cancelan por lo que sus impulsos correspondientes también lo harán. Súbitamente se empujan mutuamente y adquiere cada uno un cambio de ímpetu igual y opuesto como vimos en la sección 6.1.2 debido a la Tercera Ley de Newton.

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}_2 &= -\Delta\vec{p}_1 \\ 0 &= \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 \\ 0 &= \left(\vec{p}_1' - \vec{p}_1\right) + \left(\vec{p}_2' - \vec{p}_2\right) \end{aligned}$$

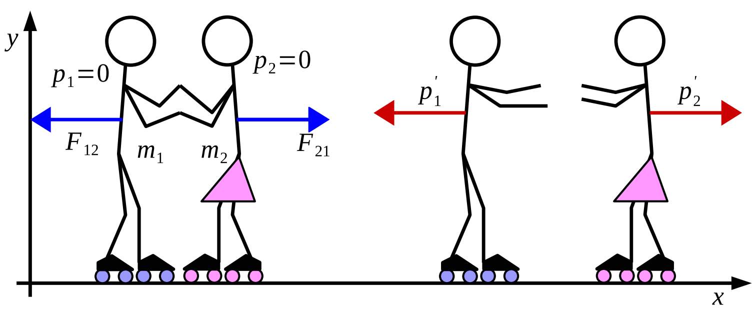

Figura 6.5.: Patinadores que se separan

poniendo los términos antes (sin primar) a la izquierda y después (primados) a la derecha obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \\ \vec{P} &= \vec{P}' \end{aligned}$$

que el ímpetu total del sistema de los patinadores se conserva. Se introduce una variable del sistema

Definición 6.3 (Ímpetu total)**.** o cantidad de movimiento total de un sistema es sencillamente la suma de todos los ímpetus individuales

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

De forma análoga se define

Definición 6.4 (Impulso total)**.** El impulso total es la suma de todos los impulsos actuando sobre todas las partículas de un sistema

$$\vec{I}_t = \sum_{i=1}^{N} \vec{I}_i$$

OBSERVACIONES

1. Cuando hablamos de los impulsos es necesario de la *frontera del sistema* y de fuerzas *externas* e *internas.*

2. Una fuerza interna es aquella que ejerce una partícula sobre otra dentro del sistema y por tercera Ley de Newton debe existir otra fuerza interna de igual magnitud y opuesta.
$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$
de forma análoga al integrar encontramos que los i*mpulsos internos* mutuos ejercidos en el tiempo también son iguales y opuestos
$$\vec{I}_{ij} = -\vec{I}_{ji}$$

3. Una fuerza externa es aquella que cruza la frontera del sistema y generan un *impulso externo*
$$\vec{I}_{ext} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_N^{ext} \cdot dt$$

4. Es fácil demostrar que el impulso total y el ímpetu total están relacionados mediante el teorema impulso-ímpetu
$$\begin{aligned} \vec{I}_t &= \Delta\vec{P} \\ \vec{I}_{N,ext} + \cancelto{0}{\vec{I}_{N,int}} &= \Delta\vec{P} \\ \vec{I}_{ext} &= \Delta\vec{P} \end{aligned} \tag{6.7}$$
y que el impulso total se deja separar en la suma de impulso neto externo e interno. El impulso interno es trivialmente cero por Tercera Ley de Newton. A la ecuación 6.7 se le llama el Teorema del Impulso-Ímpetu para un sistema de N partículas.

5. Es necesario un estímulo externo para cambiar el estado de movimiento de un sistema. Los sistemas por sí solos no cambian su ímpetu total.

6. Un *sistema aislado* es uno en donde las partículas no interactúan con su entorno o su interacción puede ser considerada despreciable y por ende su ímpetu externo $\vec{I}_{ext} = 0$ y no produce un cambio de ímpetu total.

7. En el caso con el que empezamos, los patinadores son las partículas del sistema. El peso y la normal son fuerzas externas y la fuerza con que se empujan . El sistema no es realmente cerrado, pero las fuerzas externa no generan impulso, por lo que el impulso total se conserva

6.3.1. Conservación de ímpetu total

La Ley de Conservación de la cantidad de movimiento total se deja formular de la siguiente forma

Teorema 6.1 (Ley de Conservación del Ímpetu Lineal)**.** *En un sistema aislado o por lo menos donde las fuerzas externas no produzcan un impulso neto, la cantidad de movimiento lineal total o ímpetu lineal se conserva*

$$\vec{P} = \vec{P}' \tag{6.8}$$

donde $\vec{P}$ es ímpetu total en un instante y $\vec{P}'$ en otro instante.

OBSERVACIONES

1. Esta ley rige en todos los ámbitos de la física y se cumple rigurosamente tanto para partículas como para cuerpos extensos.

2. No es necesario que el sistema esté realmente aislado sin fuerzas externas para que la ley aplique, basta con que los impulsos externos se cancelen.

3. En muchos casos, como en las colisiones, cuando los impulsos internos son producidos fuerzas muy grandes que actúan por poco tiempo, se puede despreciar el impulso externo y considerar que se cumple la conservación de ímpetu lineal. A estar fuerzas la llamamos *fuerzas impulsivas* y el impulso que producen *impulsos de percusión.*

4. Se conserva el ímpetu total no el de cada partícula, por lo que se considera al ímpetu total una variable colectiva que describe al sistema.

Ejemplo 6.6 (Conservación de energía hombre saltando del carro)**.** Tomado de la discusión D6/8. Un hombre de $m_1 = 75\ kg$ viaja en un carro pequeño de $m_2 = 39\ kg$ que se desplaza a una rapidez de$v_1 = v_2 = 2.3\ m/s$. El hombre salta del carro con rapidez horizontal cero $v_1' = 0$ con respecto al suelo. ¿Cuál es el cambio resultante en la velocidad del carro?

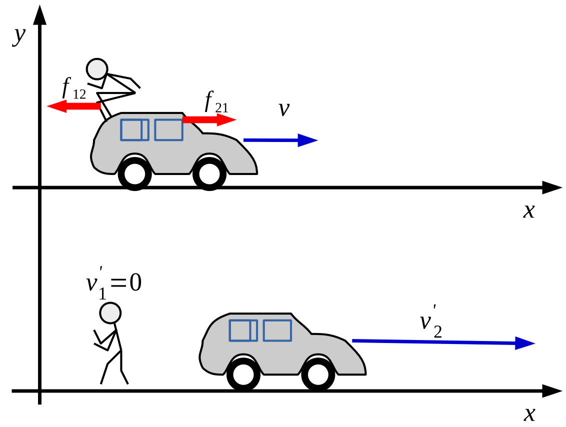

Figura 6.6.: Patinadores que se separan

OBSERVACIONES

El sistema del carro y el hombre puede ser tomado como un sistema aislado ya que las fuerzas externas no generan ningún impulso neto (peso y normal se compensan). Por lo tanto se debe conservar el ímpetu total

$$\vec{P} = \vec{P}'$$

como todo sucede en el eje x, podemos concentrarnos sólo en las coordenadas x del ímpetu total

$$\begin{aligned} P_x &= P'_x \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= \cancelto{0}{m_1 v'_1} + m_2 v'_2 \\ (m_1 + m_2)\, v &= m_2 v'_2 \\ v'_2 &= \frac{m_1 + m_2}{m_2} v \end{aligned}$$

Evaluando obtenemos

$$\begin{aligned} v'_2 &= \frac{39\ kg + 75\ kg}{39\ kg}\ 2.3\ \frac{m}{s} \\ v'_2 &= 6.72\ kg \cdot \frac{m}{s} \end{aligned}$$

¿Por qué aumentó la velocidad del carrito? Una forma de verlo es que el sistema súbitamente perdió una gran cantidad de masa sensible (75 kg es aproximadamente 66 % de la masa total del sistema) de ahí que la velocidad del cuerpo restante incremente para compensar. La otra forma de verlo es que el hombre posee al inicio un ímpetu que debe contrarrestar si quiere saltar sin velocidad remanente. El empuja al carro hacia la derecha dándole un impulso y en retorno la normal de la superficie del carro le proporciona un impulso hacia la izquierda suficientemente grande para contrarrestar su ímpetu. Podríamos decir que el aumento de velocidad del carrito viene del empujón que le dio el hombre al saltar.

Ejemplo 6.7 (Reculeo de arma de fuego)**.** Un tirador sostiene un rifle de masa $m_1 = 3\ kg$, dispara una bala de $m_2 = 5\ g$ con una velocidad relativa al suelo $v_2' = 300\ m/s$ como se muestra en la figura .6.7. a) ¿Qué velocidad de retroceso tiene el rifle? b) ¿Qué cantidad de movimiento y energía cinética finales tiene la bala? c) ¿Qué cantidad de movimiento y energía cinética finales tiene el rifle?

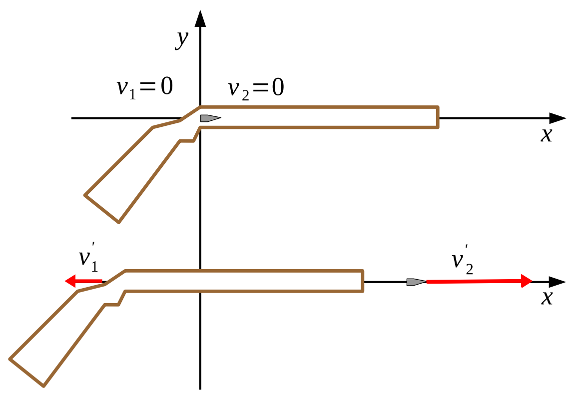

Figura 6.7.: Patinadores que se separan

SOLUCIÓN

Primero notamos que las fuerzas externa del sistema (peso y normal dentro del cañón) se cancelan mutuamente y no generan impulso neto externo, por lo que se debe conservar el ímpetu. Las fuerzas que impulsan la bala y el rifle hace que éste recule hacia la izquierda mientras la bala sigue volando hacia la derecha.

a) Ya que la bala y el rifle estaban en reposo antes del disparo el ímpetu total inicial es cero

$$\begin{aligned} P &= P' \\ \cancelto{0}{p_1} + \cancelto{0}{p_2} &= p_1' + p_2' \\ 0 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \end{aligned}$$

despejando la velocidad de retroceso

$$\begin{aligned} v_1' &= -\frac{m_2}{m_1} v_2' \\ &= -\frac{5\ \cancel{g}}{3000\ \cancel{g}} \times 300\ m/s \\ v_1' &= -0.5\ m/s \end{aligned}$$

b) Para la bala el ímpetu y la energía serán correspondientemente

$$\begin{aligned} p_2' &= m_2 v_2' & K_2' &= \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= 0.005\ kg \times 300\ \tfrac{m}{s} & &= \tfrac{1}{2} 0.005\ kg \times \left(300\ \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ p_2' &= 1.5\ kg \tfrac{m}{s} & K_2' &= 225\ J \end{aligned}$$

c) De forma análoga se calcula el ímpetu y la energía para el rifle

$$\begin{aligned} p_1' &= m_1 v_1' & K_1' &= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ &= 3\ kg \times (-0.5)\ \tfrac{m}{s} & &= \tfrac{1}{2} 3\ kg \times \left(-0.5\ \tfrac{m}{s}\right)^2 \\ p_2' &= -1.5\ kg \tfrac{m}{s} & K_2' &= 0.375\ J \end{aligned}$$

Mientras que los ímpetus son iguales pero opuestos, las energías están dividas de forma completamente asimétrica. La bala se lleva cerca del 99.83 de la energía y el restante se lo lleva el rifle.
La energía cinética total antes del disparo es $K = K_1 + K_2 = 0$, por lo que la energía cinética ha crecido en

$$\Delta K = +225.375\ J$$

si el peso y la normal no han realizado trabajo, ¿de donde proviene la energía? Es obvio que la energía proviene de un proceso interno como es la combustión de pólvora que libera energía química en calor y a su vez provoca una expansión de gases que realiza un trabajo sobre la bala y el rifle. Como se trata de una fuerza interna, el impulso neto interno sigue siendo cero (ecuación 6.7)