INTEGRANDO POTENCIAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

i. CLASIFICACIÓN

ii. CUANDO SE APLICA

iii. PROCEDIMIENTOS Y EJEMPLOS

Universidad Don Bosco- Departamento de ciencias básicas

CLASIFICACIÓN

- TIPO 1 - INTEGRALES DE LA FORMA $\int sen^m(x)cos^n(x)dx$
- TIPO 2 – INTEGRALES DE LA FORMA $\int tan^m(x)dx$ O $\int cot^n(x)dx$
- TIPO 3- INTEGRALES DE LA FORMA $\int tan^m(x)sec^n(x)dx$ O $\int cot^m(x)csc^n(x)dx$

CUÁNDO SE APLICA

CUANDO CUMPLE UNO DE LOS TIPOS INDICADOS Y

- A) LA INTEGRAL NO PUEDE RESOLVERSE CON CAMBIO DE VARIABLE.
- B) LA INTEGRAL NO PUEDE RESOLVERSE CON UNA FORMULA DIRECTA

PROCEDIMIENTO INTEGRALES TIPO 1 $\int sen^m(x)cos^n(x)dx$

Caso A: una de las potencias m o n son impares y positivas

- Restar exponentes para obtener una función sen(x) o cos(x) en el integrando
- Sustituir el termino de potencia par restante, usando identidad pitagórica $$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$
- Multiplicar términos
- Integrar y simplificar

Caso B: ambas potencias m y n son pares y positivas

- Sustituir las funciones mediante siguientes identidades $$sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
- Aplicar repetidamente las identidades hasta llegar a formulas básicas o potencias impares que se resuelven con caso A
- Multiplicar términos
- Integrar y simplificar

INTEGRANDO POTENCIAS TIPO 1- IMPAR

$$\int sen^5(3x)\cos^2(3x)\ dx$$

Solución

Realizamos primero un cambio de variable

$$u = 3x \longrightarrow du = 3\ dx$$

$$\frac{1}{3}\int sen^5(3x)\cos^2(3x)\ 3dx = \frac{1}{3}\int sen^5(u)\cos^2(u)\ du$$

Mandamos al final un factor $sen(u)$ y a la restante potencia par del seno utilizamos la identidad $sen^2(u) = 1 - \cos^2(u)$

$$\frac{1}{3}\int sen^4(u)\cos^2(u)\ sen(u)du = -\frac{1}{3}\int [1-\cos^2(u)]^2\cos^2(u)\ \left(-sen(u)\right)du$$

$w = \cos(u) \longrightarrow dw = -sen(u)du$ Realizamos un cambio de variable

$$-\frac{1}{3}\int[1-w^2]^2\ w^2\,dw=-\frac{1}{3}\int[1-2w^2+w^4]\ w^2\,dw=-\frac{1}{3}\int[w^2-2w^4+w^6]\,dw$$

$$\int sen^5(3x)\cos^2(3x)\ dx=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}w^3-\frac{2}{5}w^5+\frac{1}{7}w^7\right]+C$$

Regresamos a la variable original x

$$\int sen^5(3x)\cos^2(3x)\ dx=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}cos^3(u)-\frac{2}{5}cos^5(u)+\frac{1}{7}cos^7(u)\right]+C$$

$$\int sen^5(3x)\cos^2(3x)\ dx=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}cos^3(3x)-\frac{2}{5}cos^5(3x)+\frac{1}{7}cos^7(3x)\right]+C$$

INTEGRANDO POTENCIAS TIPO 1- PAR

$$\int sen^6(3x)dx$$

$$\int sen^6(3x)dx = \int \left(sen^2(3x)\right)^3 dx = \int \left[\frac{1-\cos(6x)}{2}\right]^3 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos(6x)\right)^3 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int 1 - 3\cos(6x) + 3cos^2(6x) - cos^3(6x)\ dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos(6x)\,dx + \boxed{\frac{3}{8}\int cos^2(6x)dx} - \boxed{\frac{1}{8}\int cos^3(6x)dx}$$

Aplicar repetidamente las identidades para potencia par

Sustituir con la identidad correspondiente
$sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

Se ha obtenido potencia impar (resolver separando y obteniendo cos(6x))

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos(6x)\, dx + \underbrace{\frac{3}{8}\int \frac{1 + cos(12x)}{2} dx}_{\text{Separar en dos integrales}} - \frac{1}{8}\int cos^2(6x)\cos(6x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos(6x)\, dx + \frac{3}{16}\int dx + \frac{3}{16}\int cos(12x)dx - \frac{1}{8}\int cos^2(6x)\cos(6x)dx$$

$$= \frac{5}{16}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos(6x)\, dx + \frac{3}{16}\int cos(12x)dx - \frac{1}{8}\int \boxed{\left(1 - sen^2(6x)\right)}(\cos(6x))dx$$

Sustituir el termino de potencia par restante, usando identidad pitagórica

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

$$= \underbrace{\frac{5}{16}\int dx - \frac{3}{8}\int \cos(6x)\, dx + \frac{3}{16}\int cos(12x)dx - \frac{1}{8}\int \cos(6x)\, dx}_{\text{Integrar con fórmulas básicas}} + \frac{1}{8}\int \underbrace{\cos(6x)sen^2(6x)dx}_{\text{Aplicar cambio de variable}}$$

$$u = sen(6x) \rightarrow \quad du = 6\cos(6x)\,dx \qquad \int u^2 \frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int u^2 du = \frac{u^3}{18} + C$$

Integrar y simplificar

Regresando a la variable x $= \frac{1}{8}\left(\frac{sen^3(6x)}{18}\right)$

$$= \frac{5}{16}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(6x)\,dx + \frac{3}{16}\int cos(12x)dx + \frac{1}{8}\left(\frac{sen^3(6x)}{18}\right)$$

$$= \frac{5}{16}x - \frac{1}{2}\left(\frac{sen(6x)}{6}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{sen(12x)}{12}\right) + \left(\frac{sen^3(6x)}{144}\right) + C$$

$$\boldsymbol{= \frac{5}{16}x - \left(\frac{sen(6x)}{12}\right) + \left(\frac{sen(12x)}{64}\right) + \left(\frac{sen^3(6x)}{144}\right) + C}$$

PROCEDIMIENTO INTEGRALES TIPO 2

$\int tan^m(x)dx$ o $\int cot^n(x)dx$

Mandamos al final un factor $tan^2(x)$ o $cot^2(x)$,sin importar si la potencia positiva de la función es par o impar

Sustituimos este factor inmediatamente, a partir de la identidad $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$ o $cot^2(x) + 1 = csc^2(x)$

Multiplicar términos

Integrar y simplificar

INTEGRACIÓN DE POTENCIAS TRIGONOMÉTRICAS TIPO 2

Ejemplo

$8\int tan^4 4x\, dx$

$=8\int tan^2 4x tan^2 4x\, dx$

$=8\int (sec^2 4x - 1) tan^2 4x\, dx$

$=8\int (sec^2 4x tan^2 4x) \;- 8\int tan^2 4x\, dx$

$=8\int (sec^2 4x tan^2 4x)\, dx \;- 8\int (sec^2 4x \;- 1)\, dx$

$=8\int (sec^2 4x tan^2 4x) dx \;- 8\int (sec^2 4x \;- 1)\, dx$

$=8\int (\underline{sec^2 4x tan^2} 4x) dx \;- 8\,\underline{\int sec^2 4x dx + 8}\int dx$

$=8\int u^2 (\frac{du}{4}) - \boxed{8\frac{tan4x}{4}} + 8x$

$=2\int u^2 du \;- 2tan4x + 8x$

$= \frac{2}{3}u^3 - 2tan4x + 8x + c$

$= \frac{2}{3}tan^3 4x - 2tan4x + 8x + c$

u= tan4x
du = $4sec^2 4x$
$\frac{du}{4} = sec^2$4x dx

z=4x dz= 4dx
dz/4 = dx

PROCEDIMIENTO INTEGRALES TIPO 3

$\int tan^m(x)sec^n(x)dx$ o $\int cot^m(x)csc^n(x)dx$

Potencia positiva par secante

Mandamos al final un factor $sec^2(x)$

Cambiar las secantes restantes a tangentes, mediante la identidad $tan^2(x) + 1 = sec^2(x)$

Multiplicar términos, , integrar y simplificar

Potencia positiva impar tangente

Mandamos al final un factor $tan(x)\sec(x)$

Cambiar la restante potencia par de la tangente a secante, mediante la identidad $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$

Multiplicar términos, , integrar y simplificar

INTEGRACION DE POTENCIAS TRIGONOMETRICAS TIPO 3

Ejemplo 1. Resolver la siguiente integral

$\int \underline{tan^3}x\, sec^3x$ dx

POTENCIA IMPAR TANGENTE

$=\int tan^2x\, sec^2x\, \underline{tanxsecx}$ dx

$=\int (sec^2x - 1)\, sec^2x\, \underline{tanxsecx}$ dx

$=\int (sec^2x - 1)\, sec^2x\, \underline{tanx\ secx}$ dx

$=\int (sec^4x - sec^2x)\, \underline{tanx\ secx}$ dx

$=\int (sec^4x\, \underline{tanxsecx}dx - \int sec^2x\, \underline{tanx\ secx}$ dx

u = secx
du = secx tanx dx

$=\int u^4du$ -$\int u^2du$

$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$

$= \frac{sec^5x}{5} - \frac{sec^3x}{3}$ +C

INTEGRACION DE POTENCIAS TRIGONOMETRICAS TIPO 3

- Ejemplo 2 :
- $\int tan^6 2x\, \underline{sec^4 2x}\, dx$
- $=\int tan^6 2x\, sec^2 2x \underline{sec^2 2x}\, dx$
- $=\int tan^6 2x\, (tan^2 2x + 1)\underline{sec^2 2x}\, dx$
- $=\int (tan^8 2x + tan^6\, 2x)\underline{sec^2 2x}\, dx$
- $=\int (tan^8 2x \underline{sec^2 2x}\, dx \; + \int tan^6 2x \underline{sec^2 2x}\, dx$
- $=\int u^8 (\frac{du}{2}) + \int u^6 (\frac{du}{2})$
- $= \frac{1}{2}\int u^8 du + \frac{1}{2}\int u^6 du$
- $= \frac{u^9}{18} + \frac{u^7}{14} + C$
- $= \frac{tan^9 2x}{18} + \frac{tan^7 2x}{14} + C$

POTENCIA PAR SECANTE

$\rightarrow$

u= tan2x

du = 2 $sec^2 2x$

$\frac{du}{2} = sec^2 2x$

ASIGNACIÓN

- TRABAJE LA GUIA DE ESTUDIO
- INVESTIGUE COMO RESOLVER INTEGRALES QUE INCLUYEN PRODUCTO DE FUNCIONES SENO Y COSENO DE DISTINTOS ARGUMENTOS.