MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

I. Cambio de variable o sustitución
II. Regla de la potencia para integración

Cambio de variable o sustitución

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx$$

$$u = g(x) \qquad\qquad du = g'(x)\, du$$

$$\int f(u)\ du$$

Este método tiene su fundamento en la regla de la cadena usada en derivadas, por tanto, es utilizada para integrar funciones compuestas y consiste en realizar un cambio de variable en el integrando para que la integral se transforme en una expresión más fácil de integrar aplicando las fórmulas básicas.

Cuándo se aplica

- Cuando en el integrando se incluye una función y su derivada. Esto proviene de una función compuesta f(g(x))
- Sea u = g(x) y du= g´(x)dx

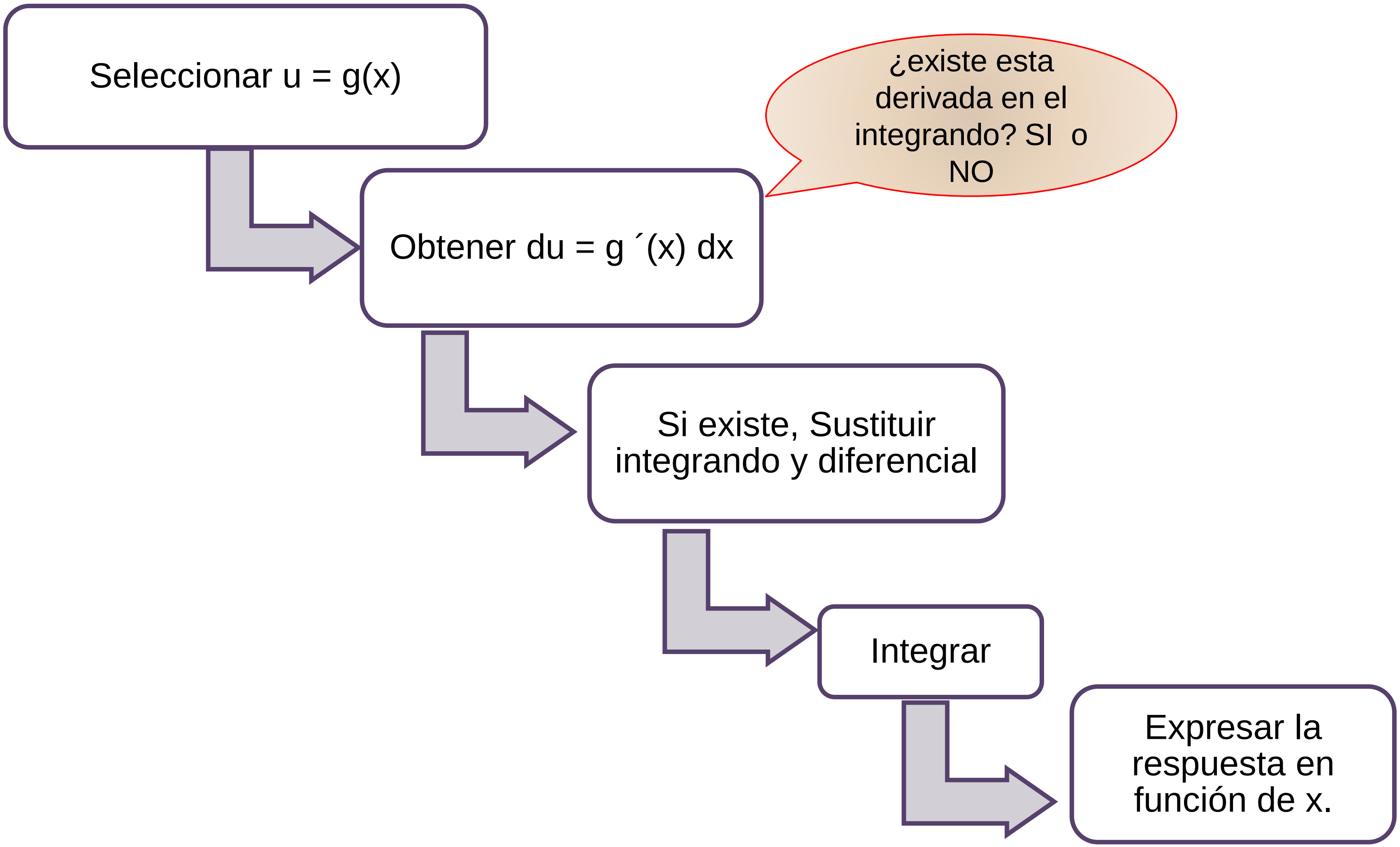
Dada la integral $\int e^{sen(x)} cos(x)dx$ y siendo la función compuesta

$$f\big(g(x)\big) = e^{sen(x)}$$

sea u=sen(x) y du= cos(x) dx

¿existe esta derivada en el integrando? SI o NO

Procedimiento



Ejemplo: $\int \frac{2-Ln(x)}{x}\, dx$

- $$u = 2 - Ln(x)\,, \quad du = -\frac{1}{x}\, dx$$

En la integral no existe -1 del diferencia du , pero podemos despejar pasando a dividir el diferencial du.

$$-\ du = \frac{1}{x}\, dx$$

Importantes aclarar que únicamente coeficientes son los que se les permitirá pasar a dividir al diferencial du, con el objetivo de comprobar si existe o no este diferencial en la integral dada.

Verificamos que el diferencial ***du*** *si existe en la integral, por lo tanto se puede continuar aplicando el método*.

- $$\int \left(2 - Ln(x)\right) \frac{1}{x}\, dx = -\int u\, du$$

- *Observamos una formula básica de integración y la aplicamos.*

$$-\int u\,du = -\frac{u^2}{2} + C$$

$$\left(\text{fórmula } \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}; \quad n \neq -1\right)$$

- *Regresando a la variable x*

$$\int \frac{\boldsymbol{2 - Ln(x)}}{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{dx} = -\,\frac{\boldsymbol{(2 - Ln(x))^2}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{C}$$

Regla de la potencia

$$\int \boxed{g(x)}]^n \boxed{g'(x)\ dx}$$

$$u = g(x) \qquad\qquad du = g'(x)dx$$

- Para esta regla , *u* corresponde a la función g(x), elevada a potencia

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

- Seleccionar como u , la función g(x).
- Obtenga diferencial y realice el cambio de la variable u por $g(x)$, toda la integral debe quedar en términos de la variable u.
- Evalué la integral utilizando la fórmula de potencia. La respuesta final quedará en función de la variable original x

Ejemplo : $\int \frac{x}{2}\left(x^2+3\right)^{1/3}\,dx$

- $\frac{1}{2}\int x\,(\boxed{x^2+3})^{1/3}\,dx$ reescribir
- $u = \boxed{x^2+3},\quad du = 2x\,dx$
- $\frac{du}{2} = x\,dx$ integrar

En estos casos podemos pasar a dividir el coeficiente, únicamente coeficientes!! Verificando que el diferencial si existe en la integral. Luego Sustituimos la función y su diferencial

- $\frac{1}{2}\int (u)^{1/3}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{4} * u^{\frac{1}{3}+1}\,\frac{1}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{4} * \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} = \frac{3\ u^{\frac{4}{3}}}{16} + C$
- $= \frac{3}{16}(x^2+3)^{4/3} + C$ respuesta simplificada

Otro ejemplo $\int 2x\sqrt{1-x}\,dx$

En algunos casos es necesario incluir potencias de radicales al seleccionar **u**

$$\int 2x\sqrt{1-x}\,dx$$

$$u=\sqrt{1-x} \quad , \quad u^2=1-x \quad , \quad x=1-u^2$$

$$2udu=-dx \quad , \quad -2udu=dx$$

$$=2\int(1-u^2)\,u\,(-2u\,du)=-4\int u^2(1-u^2)du=-4\int u^2-u^4\,du$$

$$=-4\int u^2du+4\int u^4du=-4\frac{u^3}{3}+4\frac{u^5}{5}+C$$

$$=-\frac{4}{3}\left(\sqrt{1-x}\right)^3+\frac{4}{5}\left(\sqrt{1-x}\right)^5+C$$