UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 7. Unidad 3: Geometría Analítica

Sesión 2: ángulo entre rectas, ecuaciones de la línea recta: punto pendiente, pendiente intercepto, simétrica, general, distancia de un punto a una recta.

ÁNGULO ENTRE RECTAS

Consideraremos dos rectas cualesquiera L_1 y L_2, no perpendiculares y ninguna de las cuales es paralela al eje y. Deduciremos una fórmula para el ángulo ϕ de L_1 a L_2 haciendo uso de sus pendientes.

La Figura 1a muestra el caso en que el ángulo de L_1 a L_2 es agudo, y la Figura 1b, un caso en que el ángulo es obtuso.

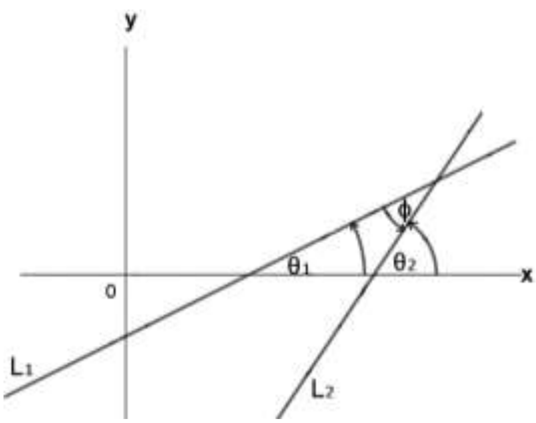


Figura 1a

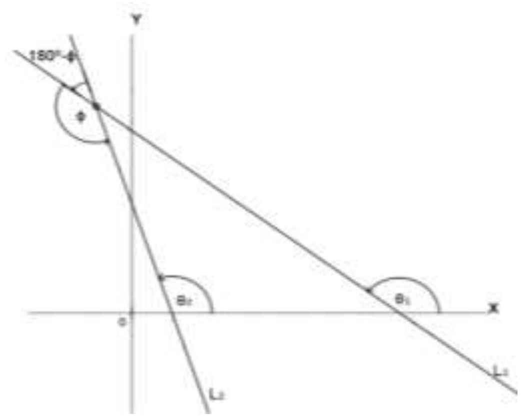


Figura 1b

Como todo **ángulo exterior** de un **triángulo** es **igual** a la suma de los dos **ángulos** interiores no adyacentes,

en la Figura 25a de la izquierda vemos que

$$\theta_2 = \theta_1 + \phi$$

puesto que θ_2 es un ángulo externo de un triángulo cuyos ángulos internos opuestos son θ_1 y ϕ. Por consiguiente,

$$\phi = \theta_2 - \theta_1$$

Y

$$\tan\phi = tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{sen(\theta_2 - \theta_1)}{cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$= \frac{sen\theta_2 cos\theta_1 - cos\theta_2 sen\theta_1}{cos\theta_2 cos\theta_1 + sen\theta_2 sen\theta_1}$$

Dividiendo la expresión anterior por $cos\theta_2 cos\theta_1$ obtenemos

$$= \frac{\frac{sen\theta_2 cos\theta_1}{cos\theta_2 cos\theta_1} - \frac{cos\theta_2 sen\theta_1}{cos\theta_2 cos\theta_1}}{\frac{cos\theta_2 cos\theta_1}{cos\theta_2 cos\theta_1} + \frac{sen\theta_2 sen\theta_1}{cos\theta_2 cos\theta_1}}$$

Simplificando tenemos

$$= \frac{\frac{sen\theta_2}{cos\theta_2} - \frac{sen\theta_1}{cos\theta_1}}{1 + \frac{sen\theta_2}{cos\theta_2} . \frac{sen\theta_1}{cos\theta_1}}$$

$$= \frac{tan\theta_2 - tan\theta_1}{1 + tan\theta_2 tan\theta_1}$$

Si designamos $tan\theta_2$ y $tan\theta_1$ por m_2 y m_1 respectivamente, obtenemos

$$tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}$$

En la figura de la derecha (25b) vemos que

$$\theta_1 = \theta_2 + (180^0 - \phi)$$

Puesto que $180^0 - \phi$ y θ_2 son ángulos internos de un triángulo con θ_1 como ángulo externo opuesto. En consecuencia,

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 + 180^0$$

$$tan\phi = tan(\theta_2 - \theta_1 + 180^0)$$

$$= tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= \frac{tan\theta_2 - tan\theta_1}{1 + tan\theta_2 tan\theta_1}$$

Por consiguiente,

$$tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}$$

Y establecemos que el ángulo positivo ϕ que va de la recta L_1 a la recta L_2 es determinado por la ecuación

$$tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}, \text{ de donde} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2.m_1}\right)$$

siempre y cuando $tan\phi, m_1 \ y \ m_2$ están definidas.

Ejemplo 1

Demuestre hallando los ángulos interiores que el triángulo siguiente es isósceles, y compruebe mediante el cálculo de las longitudes de sus lados.

$\Delta ABC : A(3,8), B(-11,3) \ y \ C(-8,-2)$

Solución

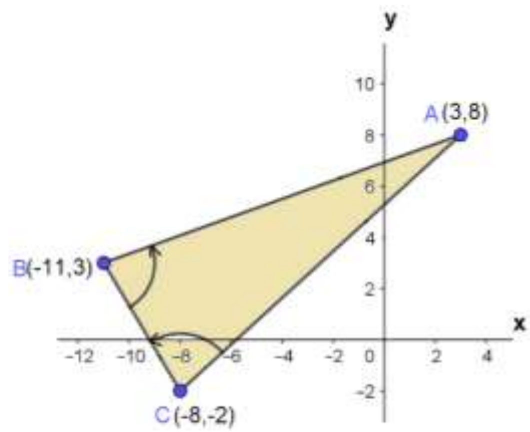


Figura 2

Al observar la figura 2 vemos que al parecer en los vértices B y C se tienen los ángulos iguales.

a) Hallando el ángulo ϕ_1 en el vértice C.

$$m_1 = m_{CA} = \frac{8 - (-2)}{3 - (-8)} = \frac{10}{11}, \qquad m_2 = m_{CB} = \frac{3 - (-2)}{-11 - (-8)} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

$$\phi_1 = arctan\left(\frac{-\frac{5}{3} - \frac{10}{11}}{1 + \left(\frac{-5}{3}\right)\left(\frac{10}{11}\right)}\right) = arctan\left(\frac{85}{17}\right) = 78.69^0$$

b) Hallando el ángulo ϕ_2 en el vértice B.

$$m_1 = m_{CB} = -\frac{5}{3}, \quad m_2 = m_{BA} = \frac{8-3}{3-(-11)} = \frac{5}{14}$$

$$\phi_2 = arctan\left(\frac{\frac{5}{14}+\frac{5}{3}}{1+\left(\frac{5}{14}\right)\left(\frac{-5}{3}\right)}\right) = arctan\left(\frac{85}{17}\right) = 78.69^0$$

Como $\phi_1 = \phi_2 = 78.69^0$, el triángulo es isósceles.

Sabemos que en todo triángulo isósceles los lados opuestos a ángulos iguales, son iguales, entonces muy probablemente los lados AB y AC son iguales.

$$d_{AB} = \sqrt{\left(3-(-11)\right)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{14^2+5^2} = \sqrt{196+25} = \sqrt{221}$$

$$d_{AC} = \sqrt{\left(3-(-8)\right)^2 + \left(8-(-2)\right)^2} = \sqrt{11^2+10^2} = \sqrt{121+100} = \sqrt{221}$$

Como $d_{AB} = d_{AC} \neq d_{BC}$, el triángulo es isósceles.

LA LINEA RECTA

Analíticamente, una línea recta es una ecuación lineal o de primer grado con dos variables. La representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una línea recta.

La definición "formal" de la Recta en Geometría Analítica es la siguiente:

"Una recta es el conjunto de todos los puntos del plano, donde las coordenadas de cada punto obedecen una relación de primer grado"

Para la Geometría Analítica lo importante de la recta es encontrar la ecuación que la "genera" y esta ecuación es esa "relación de primer grado" que dice la definición.

En conclusión, La recta es una función de primer grado de 2 variables. Esta función o ecuación de la recta se puede escribir de varias maneras y cada manera diferente (o forma de la recta) lleva un nombre diferente.

La ecuación de la línea recta queda determinada si se establecen *dos* condiciones

y puede adquirir cualquiera de las siguientes formas:

a) Forma **punto – pendiente** de la ecuación de una recta.

Si conocemos la pendiente m de la recta, y un punto de ella $P_1(x_1, y_1)$, podemos interpretar algebraicamente esta condición de la forma siguiente: para cualquier otro punto $P(x, y)$ de la recta, la pendiente entre los puntos P_1 y P debe ser igual a m:

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Esto es igual a escribir

$$m(x - x_1) = y - y_1 \quad \text{o} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

En esta ecuación, m es la pendiente y (x_1, y_1) son las coordenadas del punto que pertenece a la recta.

Ejemplo 2

Consideremos la recta que pasa por el punto (2,5) y tiene una pendiente $m = -\frac{1}{5}$

Solución sustituyendo estos valores en la forma **punto – pendiente**:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Obtenemos

$y - 5 = -\frac{1}{5}(x - 2)$, que es la ecuación de la recta.

Ejemplo 3

Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta mostrada en la figura.3

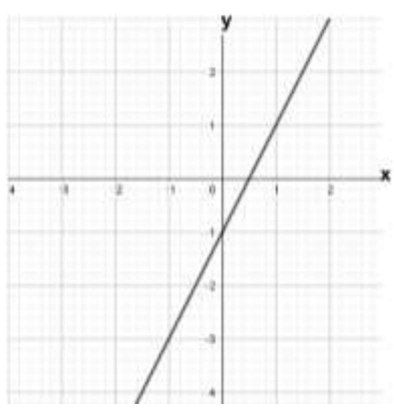


Figura 3

Solución para escribir la ecuación punto-pendiente necesitamos conocer su pendiente, sabemos que es positiva por la forma que toma la recta. Para hallar la pendiente tomemos dos puntos de la gráfica de la recta: $A(1,1)\ \ y\ \ B(-1,-3)$.

$$m = \frac{-3-1}{-1-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Usando esta pendiente y las coordenadas del punto (1,1), obtenemos

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

b) Forma **pendiente ordenada en el origen**

Ordenada al origen.

En la siguiente Figura 3.28

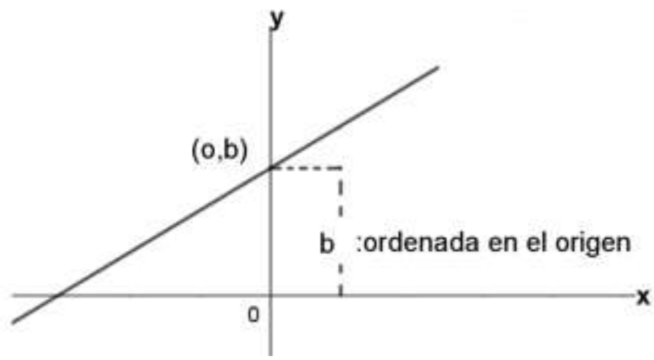
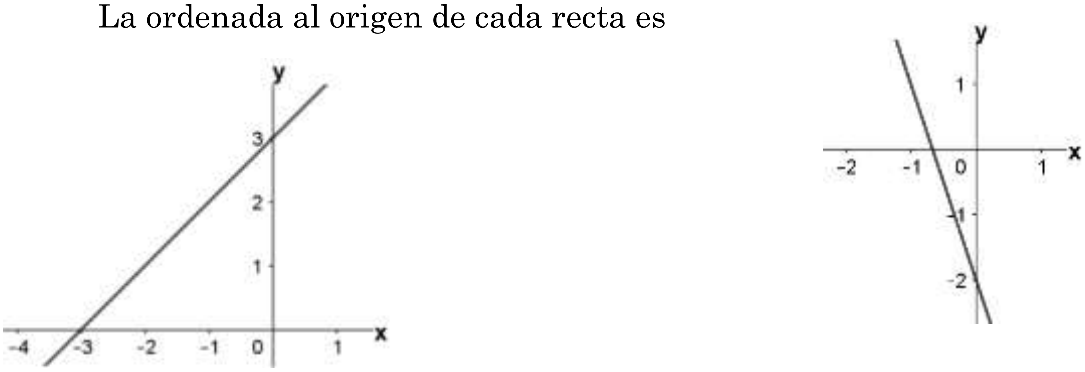


Figura 4

el punto de corte de la recta con el eje $\boldsymbol{y}$, es $(0, b)$. La coordenada b es la ordenada en el origen de la recta.

Ejemplo 4

La ordenada al origen de cada recta es



$b = 3$ $\qquad$ $b = -2$

Figura 5

Si se conoce la pendiente m, y el punto donde la recta corta al eje de ordenadas es $(0, b)$, podemos deducir, partiendo de la ecuación punto - pendiente de la recta, $y - y_1 = m(x - x_1)$, sustituyendo y_1 por b, y x_1 por 0, y obtener

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

$$y = mx + b$$

Pendiente ordenada al origen

Esta es la segunda forma de la ecuación de la recta y se utiliza cuando se conoce la pendiente y la ordenada al origen, que llamaremos b.

La recta con pendiente m y ordenada al origen b, tiene por ecuación $y = mx + b$

Ejemplo 5

Si queremos encontrar la ecuación de la recta cuya pendiente es $m = -2$, y cuya intersección con el eje y es (0,5), sustituimos $m = -2$ y $b = 5$ en la forma pendiente –ordenada al origen $y = mx + b$, y obtenemos $y = -2x + 5$.

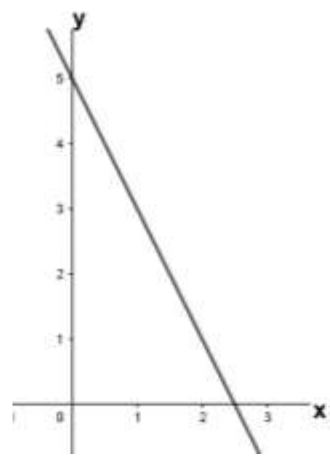


Figura 6

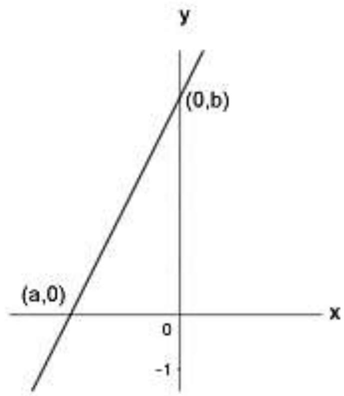
c) Forma **simétrica** de la ecuación de una recta.

Dos puntos es todo lo que se necesita para determinar una recta.

Cuando estos puntos son las intersecciones de la recta con los ejes coordenados $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$,$(a, 0)$ y $(0, b)$ su ecuación toma una forma sencilla y útil.

La ecuación simétrica de la recta que corta al eje $\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{a}$ y al eje $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{b}$ es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Figura 7

Si se plantea como problema de encontrar la ecuación de una recta conocidos ***a*** y ***b*** (la abscisa y la ordenada al origen), se conocen dos puntos de la recta los cuales son $(a,0)$ y $(0,b)$.

Con estos puntos se puede encontrar dicha ecuación, pero primero calculamos su pendiente

$$m=\frac{0-b}{a-0}=\frac{-b}{a}$$

Después se sustituye en la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$ cualquiera de los dos puntos, en este caso tomamos $(a,0)$:

$$y-0=\frac{-b}{a}(x-a)$$

$$ay=-bx+ab$$

$$bx+ay=ab$$

Y dividiendo toda la ecuación entre el término independiente $ab\neq 0$, obtenemos

$$\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Esta ecuación se suele utilizar para obtener la ecuación de una recta conocidos sus puntos de intersección con los ejes coordenados, y cuando a partir de la ecuación de una recta deseamos conocer los puntos donde dicha recta interseca a los ejes coordenados.

Ejemplo 6

Encuentre la ecuación simétrica de las rectas cuyas intersecciones con los ejes x e y son:

$a)$ $a = -3, b = 3,$ $b)$ $(0.6,0), (0,-2)$

Solución

a) sustituyendo $a = -3$ y $b = 3$ en la ecuación simétrica $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, obtenemos

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{3} = 1$$

b) Como $a = 0.6$ y $b = -2$, entonces la ecuación simétrica es $\frac{x}{0.6} + \frac{y}{-2} = 1$

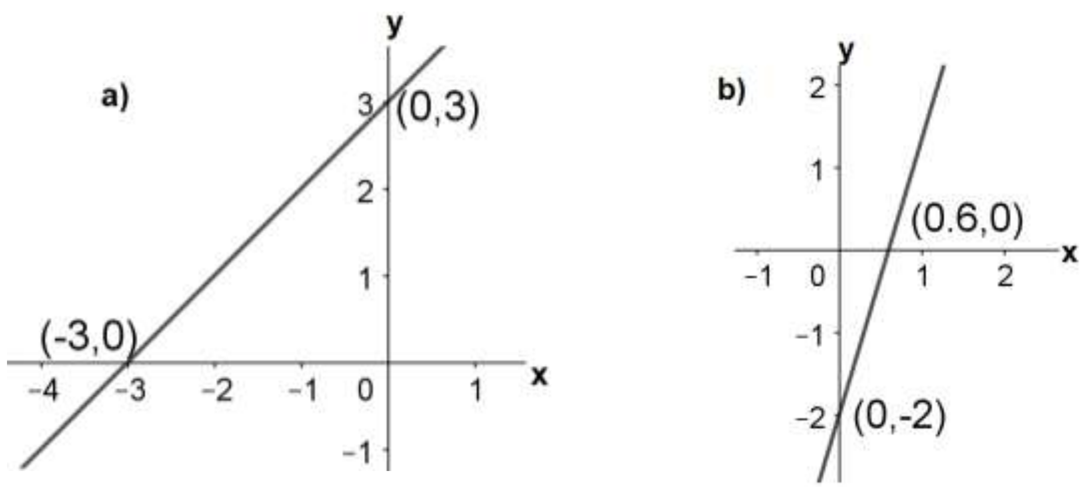


Figura 8

c) Forma **general** de la ecuación de una recta.

La **ecuación general** de una recta es una expresión de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son números reales, con A y B diferentes de cero.

Si $B = 0$, la ecuación se convierte en $Ax = -C$ o $x = -\frac{C}{A}$ (recta vertical o recta paralela al eje y).

Si $B \neq 0$, podemos resolver la ecuación despejando y, y obteniendo

$$\boldsymbol{By = -Ax - C \rightarrow y = \frac{-Ax - C}{B} \rightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}}$$

Esta expresión representa la recta con pendiente es $m = -\frac{A}{B}$, y la ordenada al origen es $b = -\frac{C}{B}$

Todas las ecuaciones de la recta al simplificarlas toman la forma general

$$Ax + By + C = 0$$

Ejemplo 7

Escribe en forma general las siguientes ecuaciones de rectas.

a) $y + 2 = 3(x - 3)$, b) $y = -3x + \frac{1}{2}$, c) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$

Solución

a) $y + 2 = 3(x - 3)$ Ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -2)$ y $m = 3$

$y + 2 = 3x - 9$ Distribuyendo

$3x - y - 11 = 0$ Transponiendo y simplificando términos.

$\boldsymbol{3x - y - 11 = 0}$ es la forma general de la recta $y + 2 = 3(x - 3)$

b) $y = -3x + \frac{1}{2}$ Ecuación en la forma pendiente-intersección y.

$3x + y - \frac{1}{2} = 0$ Transponiendo y simplificando

$\boldsymbol{6x + 2y - 1 = 0}$ Multiplicando la ecuación por 2

Ecuación general de la recta $y = -3x + \frac{1}{2}$: $3x + y - \frac{1}{2} = 0$ o $6x + 2y - 1 = 0$

c) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1$ Ecuación simétrica de la recta que corta al eje x en 5, y al eje y en -2

$\frac{x}{5} - \frac{y}{-2} - 1 = 0$ Transponiendo términos.

$\boldsymbol{2x + 5y - 10 = 0}$ Multiplicando por 10, obtenemos la forma general de la recta.

Ejemplo 8

Escribe la ecuación $x + 3y + 6 = 0$ en la forma pendiente- intersección y.

Solución $x + 3y + 6 = 0$ Forma general

$3y = -x - 6$ Transponiendo términos

$y = \frac{-x}{3} - 2$ Dividiendo por 3 y simplificando.

Ecuación de recta con $m = -\frac{1}{3}$ y $b = -2$

Ecuación general de primer grado en dos variables

Toda ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, donde A y B no son simultáneamente cero, representa una línea recta.

Identificación del tipo de recta.

Ecuación	Tipo de recta
$Ax + By + C = 0$	Recta con $m =$-$\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$
$Ax + By = 0$	Recta que pasa por (0,0)
$Ax + C = 0$	Recta vertical
$By + C = 0$	Recta horizontal
En cada caso, los coeficientes escritos son distintos de cero y los que no aparece son cero.	

Ejemplo 9

¿Qué tipo de recta representa cada ecuación?

$a) - 3x + 2y - 5 = 0$, $b) \; x + 2y = 0$, $c) \; x - 2 = 0$, $d) \; 4y - 2 = 0$

Solución

a) La ecuación tiene todos los términos, así que esta recta no pasa por el origen, ni es paralela a ninguno de los ejes coordenados.

b) A la ecuación le falta el término constante, entonces la recta pasa por el origen.

c) La recta es vertical. Contiene sólo la variable x y el término constante.

d) La recta es horizontal. Aparece sólo la variable y, y el término constante.

Las gráficas de las rectas aparecen en la Figura 3.33

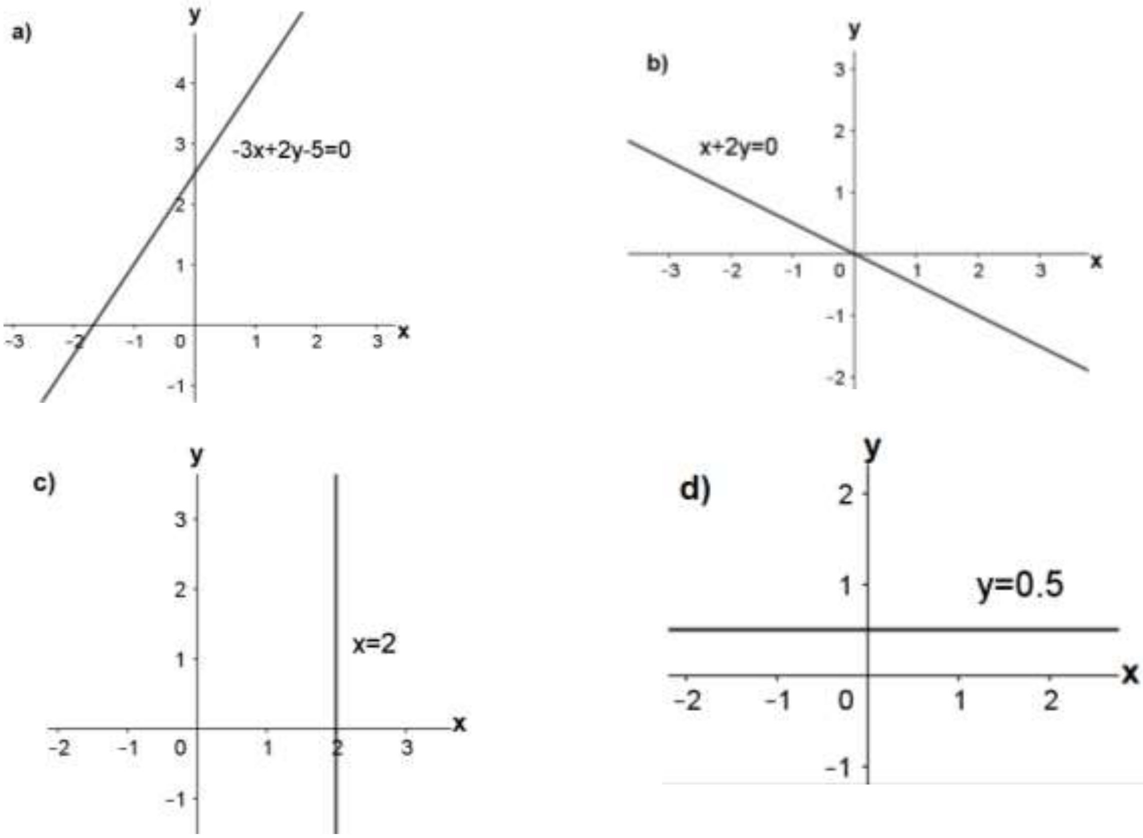


Figura 9

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

La distancia de un punto P a una recta L equivale a la longitud de la perpendicular bajada desde un punto.

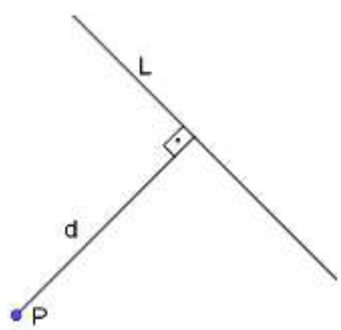


Figura 10

La fórmula para calcular la mínima distancia medida desde el punto $P(x_1, y_1)$ hasta la recta $L: Ax + By + C = 0$, es

$$d(P, L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Consideremos un punto exterior a una recta.

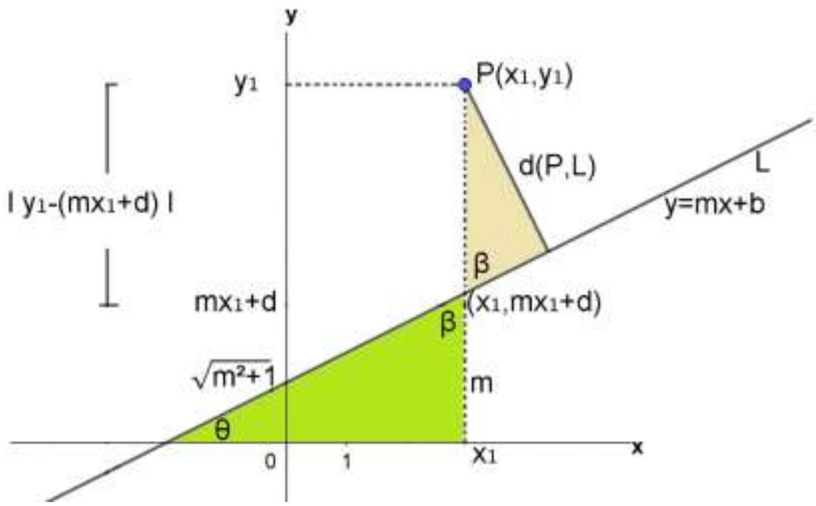


Figura 11

Observe que en la Figura 3.35 se han formado dos triángulos rectángulos semejantes.

Sabemos que $tan\theta = m$

$$\tan\theta = \frac{m}{1} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

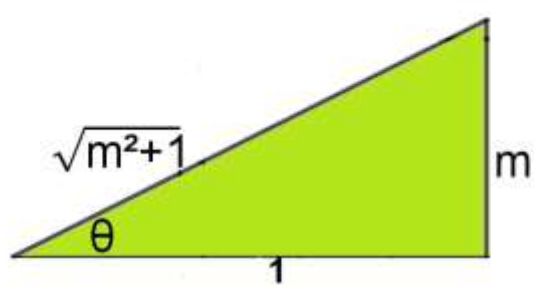


Figura 12

Por semejanza de triángulos, tenemos

$$\frac{d(P,L)}{|y_1-(mx_1+d)|} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}, \text{ de donde}$$

$$d(P.L) = \frac{|y_1-(mx_1+d)|}{\sqrt{m^2+1}}$$

Como $m = -\frac{A}{B}$ y $d = -\frac{C}{A}$, la fórmula de la distancia se transforma en

$$d(P,L) = \frac{\left|y_1-\left(-\frac{A}{B}x_1-\frac{C}{B}\right)\right|}{\sqrt{\left(-\frac{A}{B}\right)^2+1}}$$

Resolviendo y simplificando obtenemos

$$d(P.L) = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejemplo 10

Calcule la distancia desde la recta $5x - 12y - 10 = 0$ *hasta el punto* $P(4,3)$.

Solución *Sustituimos los datos conocidos en la fórmula*

$$d(P.L) = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$= \frac{|5(4)-12(3)-10|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$$

$$= \frac{|20-36-10|}{\sqrt{25+144}} = \frac{|-26|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

Ejemplo 11

Las rectas L_1:$3x + 4y - 20 = 0$ y L_2: $3x + 4y + 20 = 0$ son paralelas. Encuentre la distancia que hay entre ellas.

Solución Como no tenemos una fórmula que calcule la distancia entre las dos rectas, debemos transformar el problema en uno que sí podamos resolverlo.

Ya sabemos cómo hallar la distancia de un punto a una recta. Así que debemos encontrar un punto que pertenezca a cualquiera de las dos rectas y luego calcular la distancia del punto encontrado a la otra recta.

Busquemos un punto de la recta L_1, haciendo $x = 0$.

$$3(0) + 4y - 20 = 0 \rightarrow 4y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{4} = 5$$

Esto indica que la recta L_1 corta al eje y en el punto $A(0,5)$

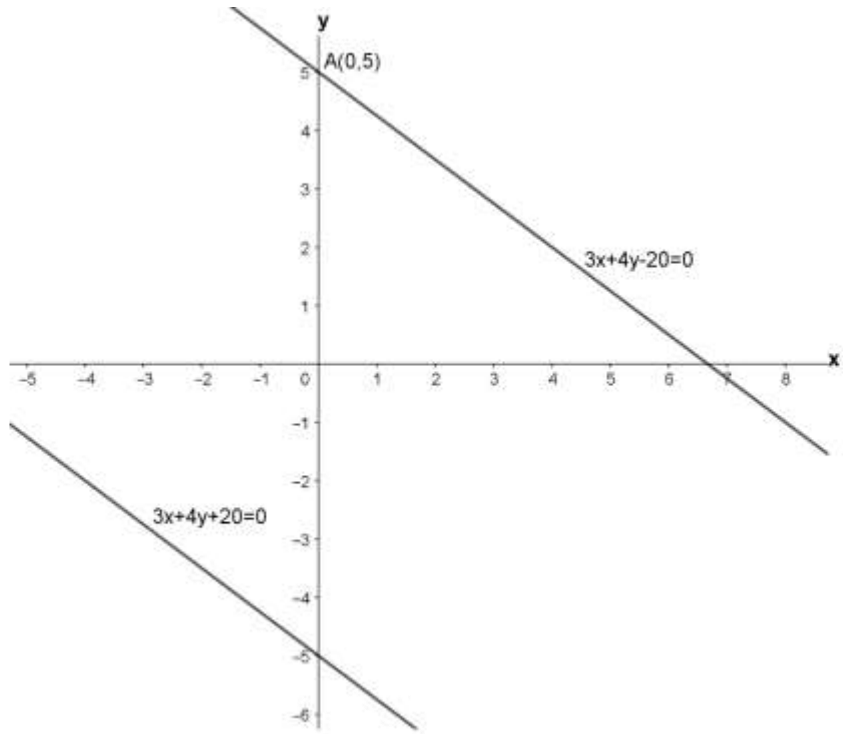


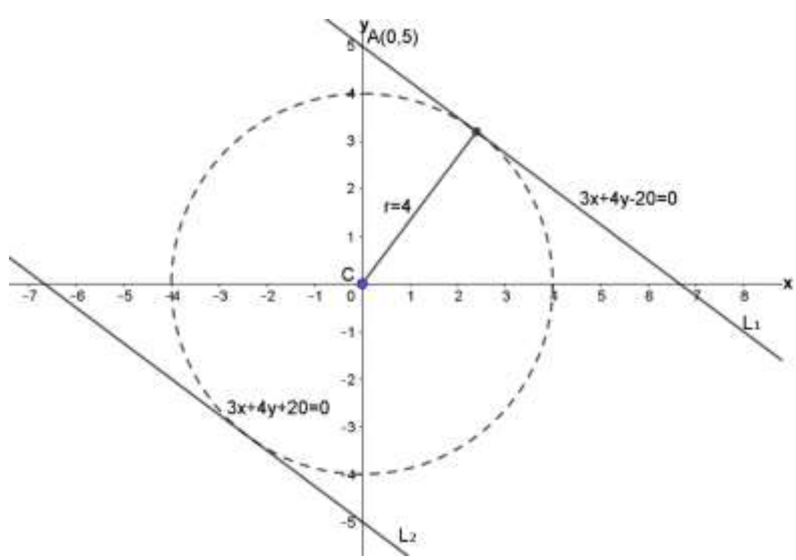
Figura 13

Ahora encontremos la distancia del punto $A(0{,}5)$ a la recta $L_2: 3x + 4y + 20 = 0$

$$d(A, L_2) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3(0) + 4(5) + 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|20 + 20|}{\sqrt{25}} = \frac{40}{5} = 8$$

Entonces las rectas de encuentran separadas una de la otra a 8 unidades de distancia.

Figura 14



Ejemplo 12

Calcule el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos $A(2{,}0), B(3{,}4)\ y\ \ C(-2{,}5)$.

Solución La fórmula para calcular el área de un triángulo es

$$A = \frac{(base)x(altura)}{2}$$

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos podemos calcular la longitud de la base del triángulo. La altura la calculamos con la fórmula de distancia de un punto a una recta.

Calcular primero la ecuación del lado del triángulo que sirve de base.

Elegiremos la base AC.

La longitud de este lado es

$$d(A,C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (5-0)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{16 + 25}$$

$$= \sqrt{41}$$

Ahora calculamos la altura del triángulo. Primero hallamos la ecuación de la recta en forma general que pasa por los puntos $A\ y\ C$, ya que estos puntos fueron elegidos para la base.

Calculamos la pendiente de esa recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-0}{-2-2} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

Sustituimos la pendiente y un punto, por ejemplo, el punto $A(2{,}0)$, para encontrar la ecuación de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{5}{4}(x - 2)$$

$$4y = -5(x - 2)$$

$$4y = -5x + 10$$

$$5x + 4y - 10 = 0$$

Una vez encontrada la ecuación de la recta que sirve de base, podemos calcular la distancia de la base al vértice opuesto que es el punto $B(3,4)$.

$$h = d(B,L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5(3) + 4(4) - 10|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{|15 + 16 - 10|}{\sqrt{25 + 16}} = \frac{|21|}{\sqrt{41}} = \frac{21}{\sqrt{41}}$$

Sustituimos los valores de las longitudes de la base y la altura en la fórmula para encontrar el área del triángulo.

$$A = \frac{(base) \times (altura)}{2} = \frac{(\sqrt{41})\left(\frac{21}{\sqrt{41}}\right)}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$$

Es decir, el área del triángulo es de 10.5 unidades cuadradas.

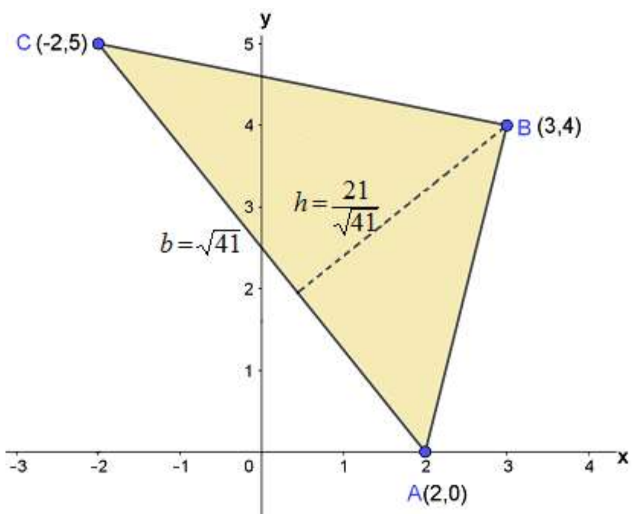


Figura 15

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1) Calcule los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(-3,0), B(0,7)\ y\ C(7,4)$. Trace la gráfica.
2) Trace el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3,2), B(6,1)\ y\ C(7,-2)$. Demuestre que es isósceles, calcule las pendientes de los tres lados, sus ángulos interiores y su perímetro.
3) Encuentre la ecuación general de la recta si conocemos
   a. La pendiente es 4 y pasa por el punto $(2,-3)$
   b. Pasa por los puntos $(-1,-5)\ y\ (3,6)$
   c. La pendiente es 2 y la intercepción x es 4
   d. La pendiente es $-\frac{2}{3}$ y la intercepción y es 1
   e. Intercepción en x es – 3 y la intercepción en y es 4
   f. Pendiente es -2 y para por el punto de intersección de las rectas $l_1: 2x + 3y - 7 = 0 \quad y \quad l_2: 2x - 2y - 2 = 0$
   g. Pasa por el punto k(2, 1) y que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-2,1)\ y\ B(-3,5)$

4) Determine la distancia del punto a la recta
   a. $P(6,-1)\ \ y\ \ l: 3x + 1 = y$
   b. $P(5,2)\ \ y\ \ l: 3x - 4y + 6 = 0$
5) Trace el triángulo de vértices $A(4,0), B(2,4)\ y\ C(0,-4)$, determine las ecuaciones de sus lados, determine las ecuaciones de las medianas, y determine el punto donde se cortan las medianas o baricentro.