ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Ejemplo

Calcular el área de la región R limitada por $y = \sqrt{x^2+4}$, y $= 2x$, $y = -2x + 12$

Solución

Puntos de cortes entre las graficas

- Para $y = \sqrt{x^2+4}$, $y = 2x$

$$\sqrt{x^2+4} = 2x$$
$$x^2 + 4 = 4x^2$$
$$3x^2 = 4$$
$$x^2 = \frac{4}{3}$$
$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Evaluamos en la función $y = 2x$

$$y = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$y = 2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Entonces los punto de corte son $P_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ y $\boxed{P_2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}$

- Para $y = \sqrt{x^2+4}$, $y = -2x + 12$

$$\sqrt{x^2+4} = -2x + 12$$
$$x^2 + 4 = (-2x + 12)^2$$
$$x^2 + 4 = 4x^2 - 48x + 144$$
$$3x^2 - 48x + 140 = 0$$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4(3)(140)}}{2(3)}$$

$x_1 = 3.84$, entonces $y = 4.32$

$x_2 = 12.16$, entonces $y = -12.32$

Puntos de corte

$P_3(3.84{,}4.32)$ y $\boxed{P_4(12.16, -12.32)}$

El punto P_2 y P_4 no se tomaran en cuenta ya que se considera la rama positiva $y = \sqrt{x^2+4}$

- Para $y = 2x$; $y = -2x + 12$

$$2x = -2x + 12$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$

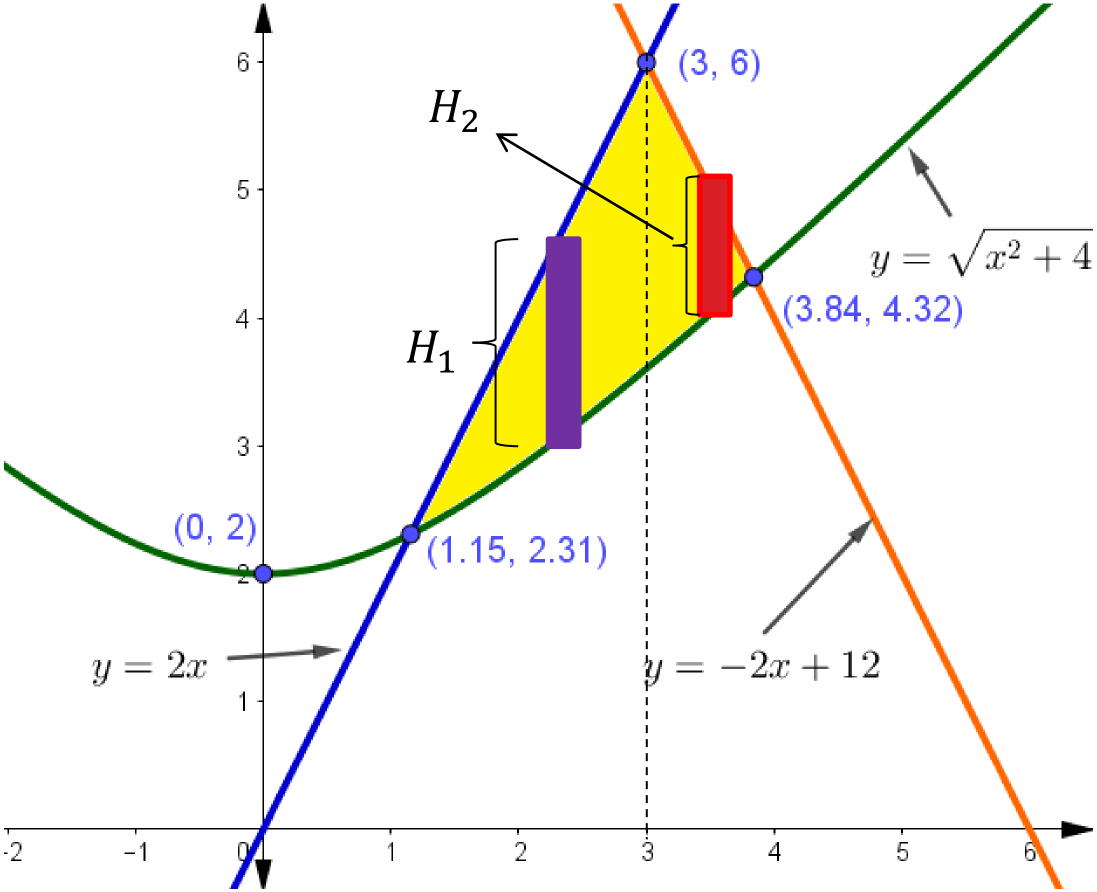
Si $x = 3$, entonces $y = 6$

Punto de corte $P_5(3{,}6)$

- Punto de corte con el eje y de $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Si $x = 0$, entonces $y = 2$

Punto de corte $P_6(0{,}2)$



- Se traza las graficas de las funciones dadas por los puntos encontrados
- La región R solicitada es la sombreada en amarillo, ya que esta limitada o tiene como frontera las graficas de las funciones dadas.
- Observe que en la región sombreada se ubican dos rectángulos representativos de diferente altura

Altura de los rectángulos representativos

$$H_1 = \underbrace{2x}_{\text{Función arriba}} - \underbrace{\sqrt{x^2+4}}_{\text{Función abajo}} \qquad H_2 = \underbrace{-2x+12}_{\text{Función arriba}} - \underbrace{\sqrt{x^2+4}}_{\text{Función abajo}}$$

Planteamiento del área de la región R

$$\int_{1.15}^{3} \left(2x - \sqrt{x^2+4}\right) dx + \int_{3}^{3.84} \left(-2x + 12 - \sqrt{x^2+4}\right) dx$$

$$\underbrace{\int_{1.15}^{3} 2x\,dx}_{\text{Integral directa}} - \underbrace{\int_{1.15}^{3} \sqrt{x^2+4}\,dx}_{\text{Sustitución trigonométrica}} + \underbrace{\int_{3}^{3.84} (-2x+12)dx}_{\text{Integral directa}} - \underbrace{\int_{3}^{3.84} \sqrt{x^2+4}\,dx}_{\text{Sustitución trigonométrica}}$$

Integral indefinida

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$= \int (2\sec\theta)\,(2\sec^2\theta)d\theta$$

$$= 4\int \sec^3\theta\, d\theta$$

Sustitución trigonométrica

- $x = 2\tan\theta$
- $dx = 2\sec^2\theta\ \ d\theta$
- $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4\tan^2\theta+4} = 2\sqrt{\tan^2\theta+1} = 2\sec\theta$

Resolver la integral

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \int \sec\theta\sec^2\theta$$

Método de integración por partes

- $u = \sec\theta$
- $du = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$
- $dv = \sec^2\theta$
- $v = \tan\theta$

$$= \boxed{\sec\theta}\boxed{\tan\theta} - \int \boxed{\tan\theta}\boxed{\sec\theta\tan\theta\, d\theta} = \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta\, d\theta$$

$$= \sec\theta\, tan\theta - \int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\, d\theta = \sec\theta\, tan\theta - \int (\sec^3\theta - \sec\theta)\, d\theta$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\, tan\theta - \int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta + \int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\, tan\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$2\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\, tan\theta + \int \sec\theta\, d\theta$$

$$\int \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sec\theta\, tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

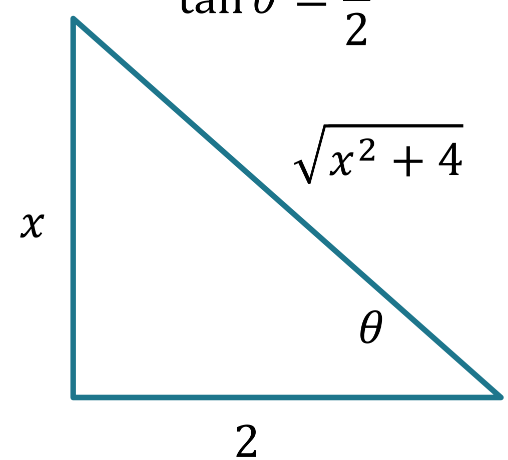
Regresar a la integral original

$$\int \sqrt{x^2+4}\, dx = 4\left[\frac{1}{2}\sec\theta\, tan\theta + \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right] + C$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + 2\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right) + C$$

$$\tan\theta = \frac{x}{2}$$



Calculo del área de la región R

$$\int_{1.15}^{3} 2x\,dx - \int_{1.15}^{3} \sqrt{x^2+4}\,dx + \int_{3}^{3.84} (-2x+12)dx - \int_{3}^{3.84} \sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$x^2\Big|_{1.15}^{3} - \left(\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + 2\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right)\right)\Big|_{1.15}^{3} + (-x^2+12x)\Big|_{3}^{3.84} - \left(\frac{x\sqrt{x^2+4}}{2} + 2\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}\right)\right)\Big|_{3}^{3.84}$$

Aplicando el teorema fundamental del calculo

$$(9-1.32) - \left[\frac{3\sqrt{13}}{2} + 2\ln\left(\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right) - \frac{1.15\sqrt{\frac{2129}{400}}}{2} - 2\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{2129}{400}}+1.15}{2}\right)\right] + \left(\frac{19584}{625} - 27\right) - \left(\frac{3.84\sqrt{\frac{11716}{625}}}{2} + 2\ln\left(\frac{\sqrt{\frac{11716}{625}}+3.84}{2}\right) - \frac{3\sqrt{13}}{2} - 2\ln\left(\frac{\sqrt{13}+3}{2}\right)\right)$$

$$A(R) = 7.68 - 5.38 + 4.33 - (3.33) = 3.3\ u^2$$