MÉTODO DE INTEGRACIÓN: FRACCIONES PARCIALES

CONTENIDO

- Presaberes necesarios
- Cuándo se aplica este método
- Cómo se aplica
- Los 4 casos de fracciones parciales
- Ejemplos

PRE SABERES IMPORTANTES

- Existen conocimientos previos que es necesario reforzar para resolver integrales con este método, es decir se requiere aplicar operaciones algebraicas, aprendidas en otro nivel de estudios y deben repasar :
- A) División de polinomios
- B) Casos de factoreo
- C) Obtener factores con división sintética
- D) Complemento de cuadrados.
- E) Suma de fracciones
- F) Solución de sistemas de ecuaciones

¿CUANDO SE APLICA ESTE MÉTODO?

- Cuando trabajamos integrales con funciones racionales , en particular racionales propias.
- Las funciones racionales propias son aquellas donde _el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio en el denominador._
- $$\int \frac{1}{x-1} dx \qquad \int \frac{x+1}{x^2-1} dx \qquad \int \frac{2x}{x^3-x^2+x} dx$$

- Adicional , son fracciones propias que en su denominador presentan factores lineales o cuadráticos IRREDUCIBLES . El termino IRREDUCIBLES se refiere a expresiones que no puedo seguir factorizando.
- $$\int \frac{1}{x^2(x-3)} dx \qquad \int \frac{2x}{(x-1)(x+1)} dx \qquad \int \frac{2x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} dx$$

¿CÓMO SE APLICA?

A – Observar si la fracción es propia o impropia

Si la Fracción es impropia: división de polinomios

B – Factorizar el denominador para obtener el producto de factores lineales **$ax+b$** o factores cuadráticos, **ax^2+bx+c** **IRREDUCIBLES**

C – Identificar el **CASO DE FRACCIÓN PARCIAL** y separar el integrando en la suma de fracciones más simples**.**

D – Calcular los valores de las constantes: Obtener un sistema de ecuaciones resultado de sumar fracciones, realizar operaciones e igualar numeradores.

E – Sustituir las constantes en las fracciones, y resolver las integrales obtenidas con métodos adecuados.

CASOS DE FRACCIONES PARCIALES

- Después de obtener factores irreducibles en el denominador, identificamos el caso de fracción parcial a trabajar y se plantean tantas fracciones parciales, como factores posee el denominador.

CASO 1 – FACTORES LINEALES

$$\int \frac{2x}{(x-2)(x+3)}dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{A}}{x-2}+\frac{\boldsymbol{B}}{x+3}$$

CASO 2 – FACTORES LINEALES REPETIDOS

$$\int \frac{2}{(x-2)^2(x+3)^2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{A}}{x-2}+\frac{\boldsymbol{B}}{(x-2)^2}+\frac{\boldsymbol{C}}{x+3}+\frac{\boldsymbol{D}}{(x+3)^2}$$

CASO 3 – FACTORES CUADRÁTICOS

$$\int \frac{2x}{(x^2+5)(x^2+x+1)}dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{Ax+B}}{x^2+5}+\frac{\boldsymbol{Cx+D}}{x^2+x+1}$$

CASO 4 – FACTORES CUADRÁTICOS REPETIDOS

$$\int \frac{2}{(x^2+4)^3}dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{Ax+B}}{x^2+4}+\frac{\boldsymbol{Cx+D}}{(x^2+4)^2}+\frac{\boldsymbol{Ex+F}}{(x^2+4)^3}$$

EJEMPLOS

- **EJEMPLO 1**

$$\int \frac{3x+4}{x^3-2x^2}\,dx$$

Es una fracción propia

factorizando

$$\int \frac{3x+4}{x^2(x-2)}\,dx$$

Factor lineal y lineal repetido tipo 1 y 2

Separando en fracciones simples

$$\frac{3x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

Los numeradores son constantes

Separar potencia de lineal repetido

Calculando las constantes

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x)(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}$$

Suma de fracciones

$$=\frac{A(x^2-2x)+Bx-2B+Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$=\frac{Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2}{x^2(x-2)}$$

Realizar operaciones

$$=\frac{x^2(A+C)+x(B-2A)-2B}{x^2(x-2)}$$

Agrupar términos

$$\frac{3x+4}{x^2(x-2)} = \frac{x^2(A+C)+x(B-2A)-2B}{x^2(x-2)}$$

Igualar los coeficientes de numeradores

$$\mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{4} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}) + \boldsymbol{x}(\boldsymbol{B}-\mathbf{2}\boldsymbol{A}) - \mathbf{2}\boldsymbol{B}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{A+C=0} \\ \mathbf{B-2A=3} \\ \mathbf{-2\boldsymbol{B}=4} \rightarrow \quad \mathbf{B=-2} \end{array}\right.$$

Cuando falta el coeficiente correspondiente, se iguala a cero

$$-2-2A=3 \rightarrow \boldsymbol{A} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

$$C=-A \longrightarrow \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

Resolver sistema de ecuaciones

Sustituir las constantes e integrar

$$\int \frac{3x+4}{x^2(x-2)} = \underbrace{\int \frac{-5/2}{x}dx + \int \frac{-2}{x^2}dx}_{\text{Formulas básicas}} + \underbrace{\int \frac{5/2}{x-2}dx}_{\text{Cambio de variable}}$$

$$u = x-2 \quad \rightarrow \quad du = dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$

Cambio de variable

$$\int \frac{3x+4}{x^2(x-2)} = -\frac{5}{2}Ln|x| - 2\int x^{-2}dx + Ln|x-2|$$

$$= -\frac{5}{2}Ln|x| - 2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + Ln|x-2| + C = \boldsymbol{-\frac{5}{2}Ln|x| + \frac{2}{x} + Ln|x-2| + C}$$

EJEMPLO 2

$$\int \frac{\mathbf{4x^2 + x + 2}}{\mathbf{x(x^2 + 1)}} \, \mathbf{dx}$$

Es una fracción propia

factorizando

$$\int \frac{4x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} \, dx$$

Factor lineal y cuadrático tipo I y 3

Separando en fracciones simples

$$\frac{4x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} = \boxed{\frac{\mathbf{A}}{x} + \frac{\mathbf{Bx + C}}{x^2 + 1}}$$

constante para factor lineal y expresión lineal para factor cuadrático

Calculando las constantes

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x^2(x - 2)}$$

Suma de fracciones

$$\frac{x^2(A+B)+Cx+A}{x^2(x-2)}$$

Agrupar términos

$$\frac{4x^2+1x+2}{x(x^2+1)}=\frac{x^2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+Cx+A}{x^2(x-2)}$$

Igualar los coeficientes de numeradores

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\mathbf{4} \\ \boldsymbol{C}=\mathbf{1} \\ \boldsymbol{A}=\mathbf{2} \end{cases}$$

Resolver sistema de ecuaciones

Sustituimos el valor de A en la primera ecuación
Obteniendo B =2

Sustituir las constantes e integrar

$$\int \frac{4x^2 + x + 2}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1} dx$$

$$= \int \frac{2}{x} dx + \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} + \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

Cambio de variable

$$u = x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$

$$\mathbf{= 2ln|x| + ln|x^2+1| + arctan(x) + C}$$

EJEMPLO 3

$$\int \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

factorizando

$$\int \frac{1}{(x^2+4)(x^2 + 1)} dx$$

Separando en fracciones simples

$$\frac{1}{(x^2 + 4)(x^2+1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Calculando las constantes

$$\frac{1}{(x^2 + 4)(x^2+1)} = \frac{(Ax + B)\left(x^2 + 1\right) + (Cx + D)(x^2 + 4)}{(x^2+4)(x^2 + 1)}$$

$$\frac{1}{(x^2 + 4)(x^2+1)} = \frac{\left(Ax^3 + Ax + Bx^2 + B\right) + (Cx^3 + 4Cx + Dx^2 + 4D)}{(x^2+4)(x^2 + 1)}$$

Agrupar términos

$$= \frac{x^3\left(A + C\right) + x^2(B + D) + x\left(A + 4C\right) + (B + 4D)}{(x^2+4)(x^2 + 1)}$$

Igualar los coeficientes de numeradores

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{\boldsymbol{x^3(A+C) + x^2(B+D) + x(A+4C) + (B+4D)}}{\boldsymbol{(x^2+4)(x^2+1)}}$$

1. $\mathbf{A + C = 0}$ $\qquad$ $\mathbf{A = -C}$
2. $\mathbf{B + D = 0}$ $\qquad$ $\mathbf{B = -D}$
3. $\mathbf{A + 4C = 0}$ $\qquad$ **Sustituyendo** $\mathbf{-C + 4C = 0}$ $\qquad$ $\mathbf{C = 0} \longrightarrow \mathbf{A = 0}$
4. $\mathbf{B + 4D = 1}$ $\qquad$ **Sustituyendo** $\mathbf{-D + 4D = 1}$ $\qquad$ $\mathbf{D = 1/3} \longrightarrow \mathbf{B} = -1/3$

Resolver sistema de ecuaciones

Sustituir las constantes e integrar

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{\mathbf{0 - 1/3}}{\boldsymbol{x^2+4}} + \frac{\mathbf{0 + 1/3}}{\boldsymbol{x^2+1}}$$

$$\int \frac{\mathbf{-1/3}}{\boldsymbol{x^2+4}}\,\boldsymbol{dx} + \int \frac{\mathbf{1/3}}{\boldsymbol{x^2+1}}\,\boldsymbol{dx} = -\frac{1}{3}\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2+4}}\,\boldsymbol{dx} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^2+1}}\,\boldsymbol{dx}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \frac{1}{3}\operatorname{arctan}(x) + C$$

$$= -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{arctan}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}\right) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{arctan}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$$