UNIVERSIDAD DON BOSCO - DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES - CICLO 02 - 2020

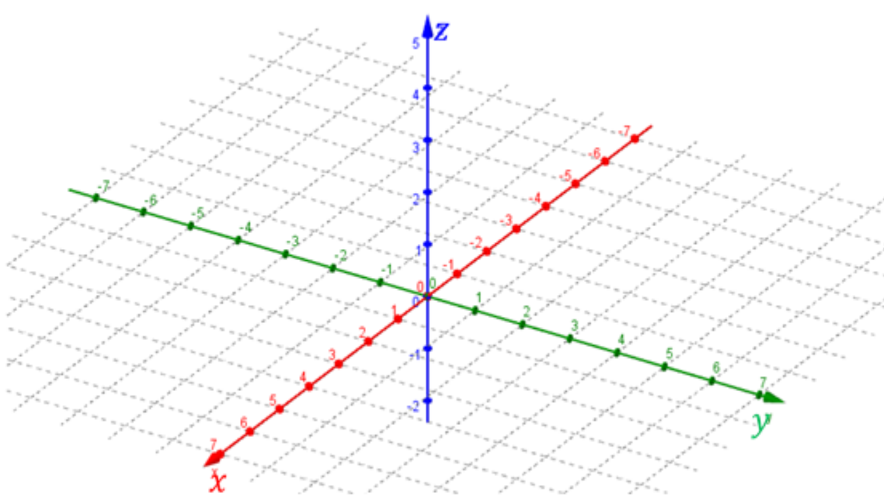
Semana 10. Unidad # 3: Vectores en el plano y en el Espacio

Sesión 1

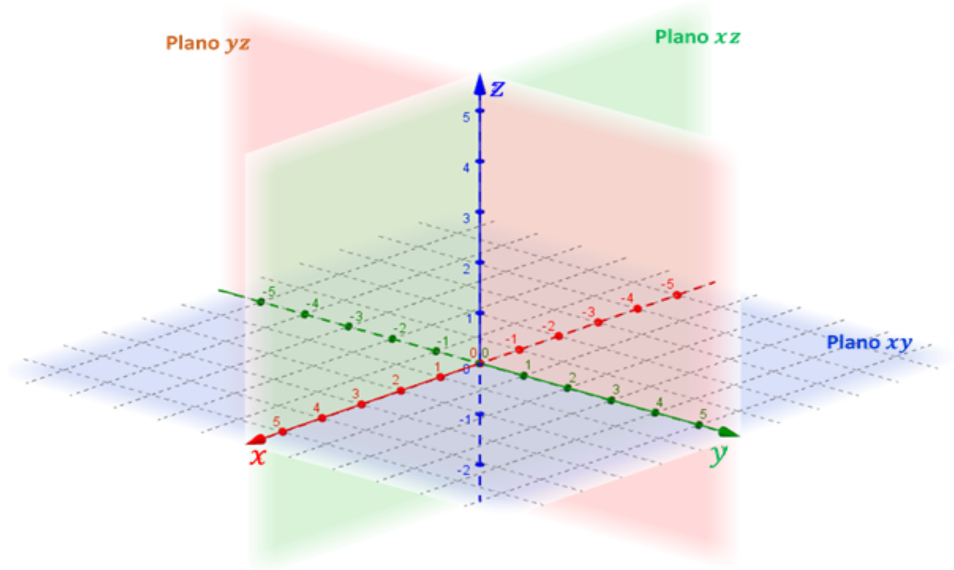
Antes de ampliar el concepto de vector a tres dimensiones, debemos introducir un sistema coordenado en el espacio tridimensional.

Sistema coordenado tridimensional

Tres rectas coordenadas mutuamente perpendiculares nos permiten introducir coordenadas en el espacio. Se supone que las tres rectas coordenadas llamadas eje x, eje y y eje z, tienen la misma escala y se intersectan en sus orígenes.

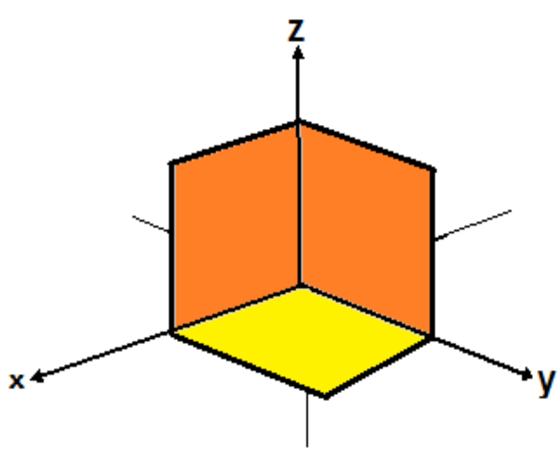
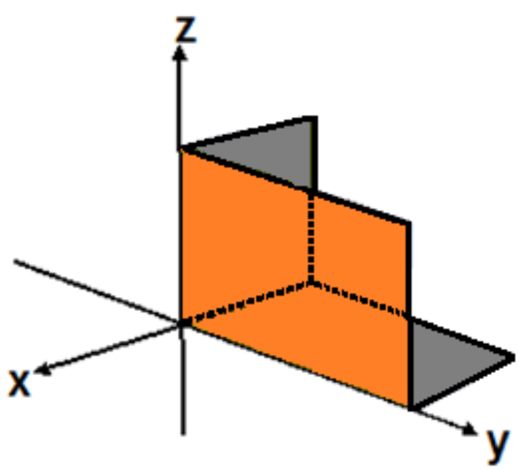


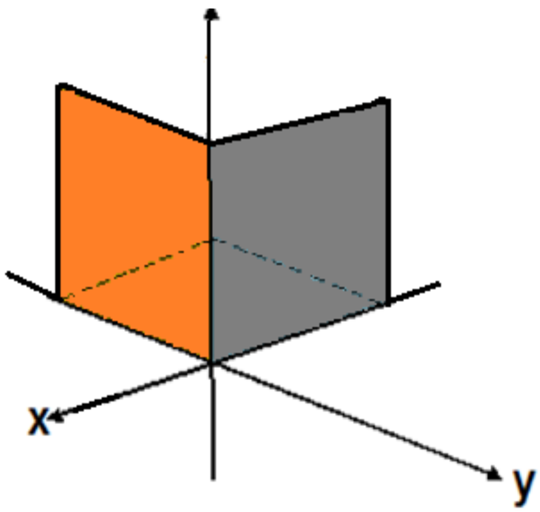
Tres planos coordenados están determinados por los ejes, a saber: el plano $\boldsymbol{xy}$ que contiene a los ejes $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, el plano $\boldsymbol{xz}$ que contiene a los ejes $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{z}$ y el plano $\boldsymbol{yz}$ que contiene a los ejes $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$.



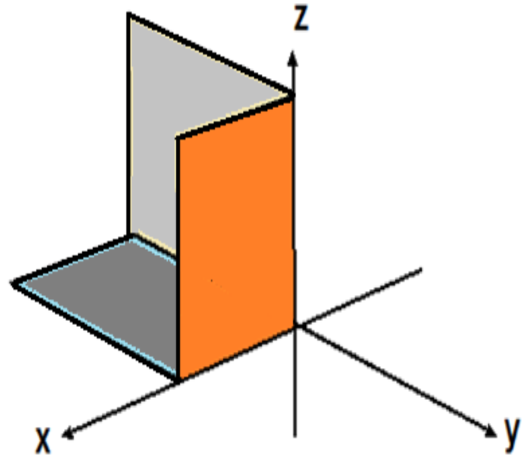
Estos tres planos dividen al espacio en ocho partes llamadas octantes. El primer octante, que está en primer plano, está determinado por los ejes positivos.

En las siguientes figuras aparecen graficados separadamente los ocho octantes

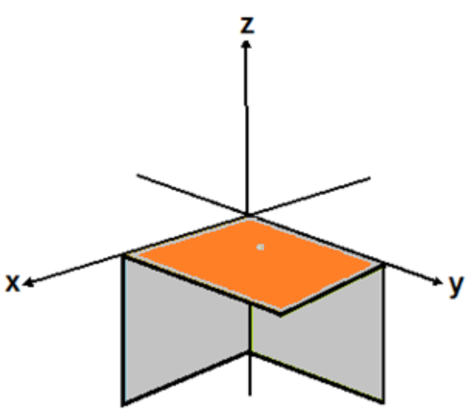
 Octante 1	 Octante 2



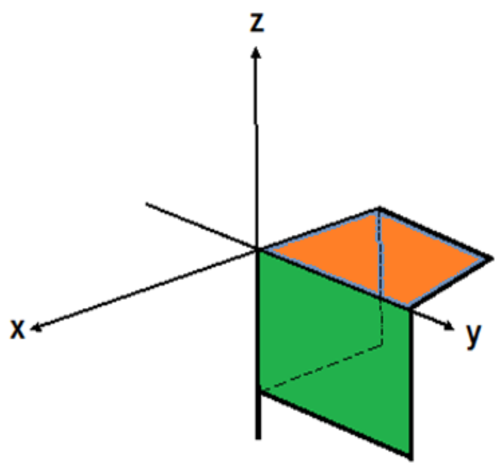
Octante 3



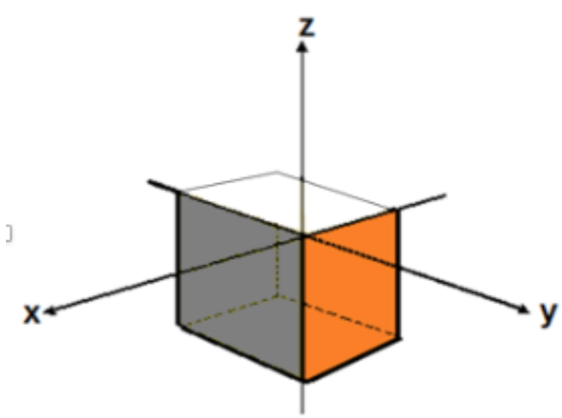
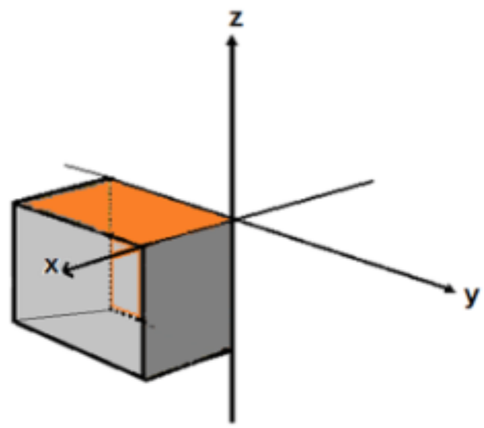
Octante 4



Octante 5



Octante 6

 Octante 7	 Octante 8

Al graficar un punto P en el espacio lo hacemos por medio de la distancia dirigida de la coordenada a cada punto. En este sistema tridimensional el punto P está determinado por una tríada ordenada $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, donde la coordenada:

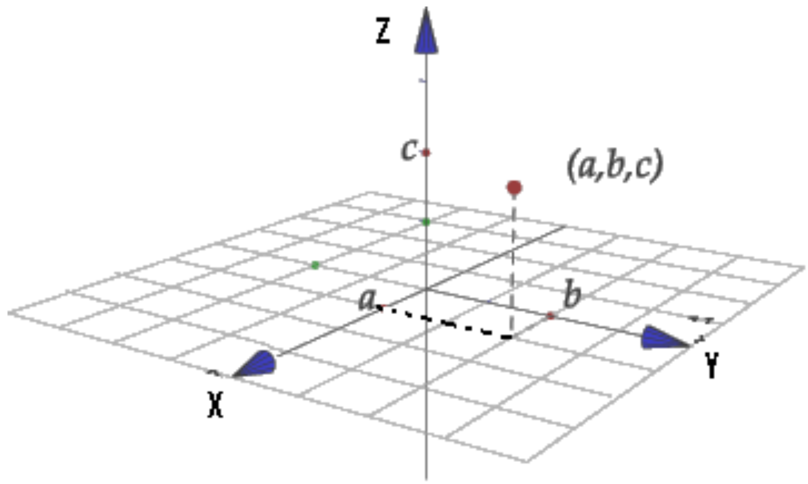
x es la distancia dirigida del punto P al plano YZ.
y es la distancia dirigida del punto P al plano XZ.
z es la distancia dirigida del punto P al plano XY.

La coordenada x adelante del plano YZ será positiva y atrás de este plano será negativa.

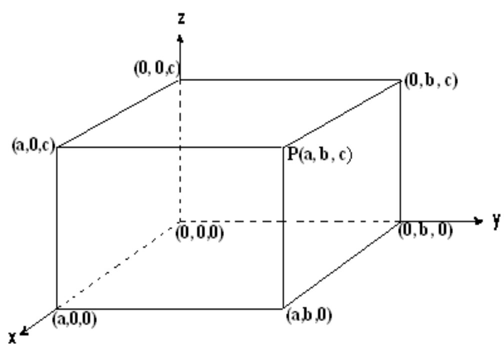
La coordenada y**,** a la derecha del plano XZ será positiva y a la izquierda será negativa.

La coordenada z**,** arriba del plano XY será positiva y debajo de este plano será negativa.

Para localizar al punto $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$, comenzamos en el origen O y nos movemos $\boldsymbol{a}$ unidades a lo largo del eje x, después $\boldsymbol{b}$ unidades en forma paralela por el eje y, y por último $\boldsymbol{c}$ unidades de manera paralela al eje z, como se muestra en la figura.



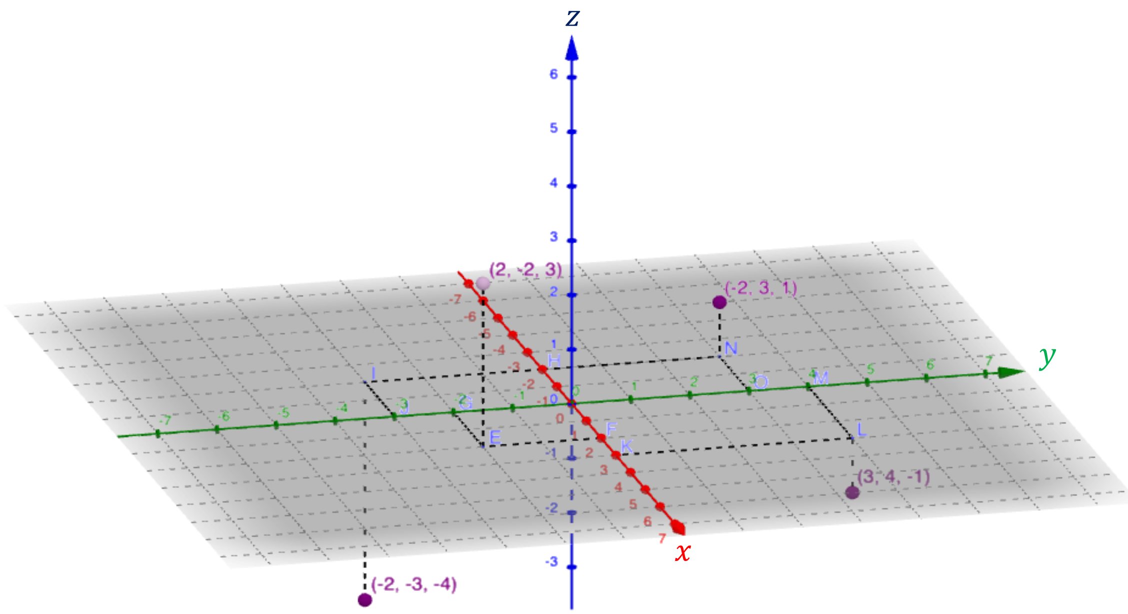
Por el punto $P(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$ pasan tres planos paralelamente a los planos coordenados formando un paralelepípedo con tres de sus seis caras sobre los planos coordenados.



Signos de las coordenadas del punto $P(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ en cada octante.

	OCTANTES							
SIGNO	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
X	+	-	-	+	+	-	-	+
Y	+	+	-	-	+	+	-	-
Z	+	+	+	+	-	-	-	-

A manera de ilustraciones numéricas, los puntos $(2,-2,3), (-2,3,1), (-2,-3,-4)$ y $(3,4,-1)$ se muestran en la siguiente figura.

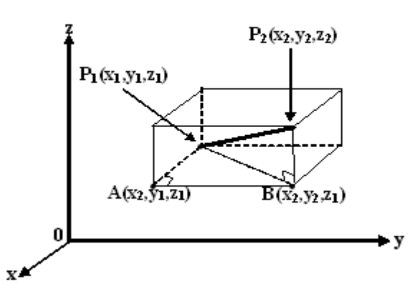


Queda como ejercicio que identifique en que octante se encuentra cada punto graficado.

Distancia entre dos puntos en el espacio.

La distancia $D = |P_1P_2|$ ó $d(P_1P_2)$ entre los puntos $P_2(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Demostración: Se construye un paralelepípedo como vemos en la figura, donde P_1 y P_2 son vértices opuestos y las caras de la caja son paralelas a los planos coordenados. Si $A(x_1, y_1, z_1)$ y B(x_2, y_2, z_2) son vértices de la caja, tenemos

$|P_1A| = |x_2 - x_1|$; $|AB| = |y_2 - y_1|$; $|BP_2| = |z_2 - z_1|$

Como los triángulos ΔP_1BP_2 y ΔP_1AB son triángulos rectos, podemos aplicar dos veces el teorema de Pitágoras, obteniendo:

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2 \text{ y } |P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$

Al combinar las dos ecuaciones, obtenemos:

$$|P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2$$

$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Por lo que, $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Ejemplo 1. La distancia del punto P (3,-1,4) al punto Q (2,-2,-3) es

$$|PQ| = \sqrt{(2-3)^2 + (-2+1)^2 + (-3-4)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 1 + 49}$$

$$= \sqrt{51}$$

Ejercicios Propuestos

1. Hallar las coordenadas del punto ubicado:
    a. Dos unidades detrás del plano $x = 0$, tres unidades a la derecha del plano $y = 0$, y cuatro unidades arriba del plano $z = 0$.
    b. Seis unidades delante del plano $x = 0$, tres unidades a la izquierda del plano $y = 0$ y dos unidades debajo del plano $z = 0$.

2. Determine la localización del punto $P(x, y, z)$ que satisface la condición

    a. $xy < 0$
    b. $yz > 0$
    c. $xz < 0$
    d. $xy > 0$

3. Gráfique los puntos en el mismo sistema coordenado tridimensional y formar el paralelepipedo para cada punto dado.
    a) $A(2,1,5)$
    b) $B(3,-3,4)$
    c) $C(-4,3,-2)$

4. Demuestre que los tres puntos $A(1,-2,3)$, $B(2,1,2)$ y $C(0,-5,4)$ son colineales empleando la fórmula de distancia entre puntos en el espacio. Graficar los tre puntos

5. Los puntos P y Q son los vértices opuestos de un paralelepípedo que tiene sus caras paralelas a los planos coordenados. En casa ejercicio
    a. Dibuje el sólido
    b. Obtén las coodenadas de los otros seis vértices.
    c. Calcule la longitud de la diagonal PQ.
        i. $P(3,3,4)$, $Q(-1,6,7)$
        ii. $P(1,1,2)$, $Q(2,3,5)$
        iii. $P(2,-1,-3)$, $Q(4,0,-1)$

6. Calcule las longitudes de los lado de triángulo cuyos vértices se indican, y determine si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.
    a. $A(-1,1,2)$, $B(1,-3,-2)$, $C(5,-1,2)$
    b. $A(1,2,3)$, $B(4,1,3)$, $C(4,6,4)$

7. Resuelva para las incógnitas.
    a. $P(x,2,3)$, $Q(2,1,1)$; $d(PQ)=\sqrt{21}$
    b. $P(x,x,1)$, $Q(0,3,5)$; $d(PQ)=5$