UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 1- Unidad 1: Los números complejos.

Sesión 2: Cociente de números complejos, Las Potencias de "i", Raíces cuadradas de cantidades negativas

6. Cociente o División de Números Complejos

Para dividir dos números complejos, expresados en forma binomial, se multiplica el numerador y el denominador del cociente indicado de los números por el conjugado del número complejo del denominador, es decir:

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$

En este punto es en el que multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} * \frac{c-di}{c-di}$$

Es importante hacer notar que en realidad estamos multiplicando por 1, al dividir un número sobre sí mismo el resultado es 1, por lo tanto, no cambia el valor de la expresión original, solamente se realizó un cambio aparente en el número indicado.

Luego tenemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(a)(c)-(a)(di)+(bi)(c)-(bi)(di)}{c^2+d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplo 18. Efectuar: a) $\frac{12+3i}{3-5i}$ b) $\frac{-1+4i}{i}$ c) $\frac{1}{1+i}$

<u>Solución</u>:

a) $\frac{12+3i}{3-5i}$

$$\frac{12+3i}{3-5i} * \frac{3+5i}{3+5i} = \frac{(12+3i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{21+69i}{3^2+5^2} = \frac{21+69i}{34} = \boldsymbol{\frac{21}{34} + \frac{69}{34}i}$$

b) $\frac{-1+4i}{i}$

$$\frac{-1+4i}{i} * \frac{-i}{-i} = \frac{(-1+4i)(-i)}{(i)(-i)} = \frac{i-4i^2}{-i^2} = \frac{i+4}{-(-1)} = \frac{4+i}{1} = \mathbf{4+i}$$

c) $\frac{1}{1+i}$

$$\frac{1}{1+i} * \frac{1-i}{1-i} = \frac{(1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \mathbf{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$$

Ejemplo 19. Sean los números complejos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 5 - 3i$ y $z_3 = -1 + 4i$. Efectuar:

$$\frac{(z_1+z_2)}{(z_3-z_1)}$$

$$z_1 + z_2 = (2+i) + (5-3i) = (2+5) + \big(1 + (-3)\big)i = 7 + (-2)i = 7 - 2i$$

$$z_3 - z_1 = (-1+4i) - (2+i) = (-1-2) + (4-1)i = -3 + 3i$$

Ahora efectuamos el cociente indicado, así:

$$\frac{(z_1+z_2)}{(z_3-z_1)} = \frac{7-2i}{-3+3i}$$

$$= \frac{7-2i}{-3+3i} * \frac{-3-3i}{-3-3i} = \frac{-21-21i+6i+6i^2}{(-3)^2+3^2} = \frac{-27-15i}{18} = \mathbf{-\frac{3}{2} - \frac{5}{6}i}$$

Ejemplo 20. Efectuar: $\left(\frac{(1+5i)(1-2i)}{i} * \frac{1}{(-9-3i)-(-8+7i)}\right)/1+i$

- $(1+5i)(1-2i) = 1 - 2i + 5i - 10i^2 = 11 + 3i$
- $\frac{(1+5i)(1-2i)}{i} = \frac{11+3i}{i} * \frac{-i}{-i} = \frac{-11i-3i^2}{-i^2} = \frac{3-11i}{1} = \mathbf{3 - 11i}$
- $(-9-3i) - (-8+7i) = \big(-9 - (-8)\big) + (-3-7)i = -1 - 10i$
- $\frac{1}{(-9-3i)-(-8+7i)} = \frac{1}{-1-10i} * \frac{-1+10i}{-1+10i} = \frac{-1+10i}{(-1)^2+10^2} = \frac{-1+10i}{11} = -\mathbf{\frac{1}{11}} + \mathbf{\frac{10}{11}i}$
- $\frac{(1+5i)(1-2i)}{i} * \frac{1}{(-9-3i)-(-8+7i)} = (3-11i) * \left(-\frac{1}{11} + \frac{10}{11}i\right)$

$$= -\frac{3}{11} + \frac{30}{11}i + i - 10i^2$$

$$=\frac{107}{11}+\frac{41}{11}i$$

- : $\left(\frac{(1+5i)(1-2i)}{i} * \frac{1}{(-9-3i)-(-8+7i)}\right)/1+i = \frac{\frac{107}{11}+\frac{41}{11}i}{1+i} * \frac{1-i}{1-i}$

$$=\frac{\left(\frac{107}{11}+\frac{41}{11}i\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{\frac{107}{11}-\frac{107}{11}i+\frac{41}{11}i-\frac{41}{11}i^2}{1^2+1^2}$$

$$=\frac{\frac{148}{11}-\frac{66}{11}i}{2}=\frac{\frac{148}{11}-6i}{2}$$

$$=\frac{74}{11}-3i$$

Cabe señalar que la división de números complejos es cerrada, es decir al dividir dos números complejos el resultado es otro número complejo.

7. Potencias de $\boldsymbol{i}$

Aunque todavía no vamos a entrar a desarrollar el tema de potencias de números complejos, debemos hallar cualesquiera potencias de $\boldsymbol{i}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
&i^0 = 1\\
&i^1 = i\\
&i^2 = -1\\
&i^3 = i^2.i = (-1).i = -i\\
&i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1\\
&i^5 = i^4.i = (1).i = i\\
&i^6 = i^3.i^3 = (-i)(-i) = i^2 = -1\\
&i^7 = i^6.i = (-1)(i) = -i\\
&i^8 = i^4.i^4 = (1)(1) = 1
\end{aligned}$$

Y así podríamos seguir, pero ¿cómo calcular potencias de i con exponentes mayores?, por ejemplo $i^{34}, i^{129}, i^{728}, i^{1124}, etc.$

Ahora debemos notar que cualquier potencia de $\boldsymbol{i}$ siempre dará como resultado uno de cuatro valores, estos son: $\boldsymbol{1, i, -1\ y - i.}$

El algoritmo para calcular cualquier potencia de $\boldsymbol{i}$ es el siguiente:

1. Divide el exponente de la potencia entre 4
2. Reescribe la potencia dada de la siguiente forma: $(i^4)^{Cociente\ de\ la\ división}.\, i^{Resíduo\ de\ la\ división}$
3. Sustituye i^4 por 1, de modo que, sin importar el resultado del cociente, esta potencia dará 1
4. Evalúa la potencia de $\boldsymbol{i}$ que esta elevada con el residuo y básicamente este resultado es el valor de la potencia.

Ejemplo 21. Evaluar: a) i^{34} b) i^{728} c) i^{1127}

Recuerde que debemos dividir el exponente de la potencia dada por 4.

Solución:

a) i^{34}

```
 34 | 4
-32   8  → Cociente (Será el exponente de i^4)
  2      → Residuo (Será el exponente de i)
```

Entonces reescribimos la potencia;

$$i^{34} = (i^4)^8 . i^2 = 1^8 . (-1) = (1)(-1) = \mathbf{-1}$$

a) i^{728}

```
 728 | 4
 -4    182
  32
 -32
   08
 -  8
    0
```

Luego:

$$i^{728} = (i^4)^{182} . i^0 = (1)^{182} . (1)$$
$$= (1)(1)$$
$$= \mathbf{1}$$

Como se puede notar, los valores de las potencias siempre nos dan uno de los cuatro valores posibles a obtener, que son: $1, i, -1, -i$

b) i^{1127}

```
1127 | 4
 -8    281
  32
 -32
   07
   -4
    3
```

Entonces:

$$i^{1127} = (i^4)^{281} . i^3$$
$$= (1)^{281} . (-i)$$
$$= (1) . (-i)$$
$$= \boldsymbol{-i}$$

Ejemplo 22. Efectuar: $3i(2-5i)^2$

Debemos desarrollar el cuadrado de un binomio
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(2-5i)^2 &= 2^2 - 2(2)(5i) + (5i)^2 \\ &= 4 - 20i + 25i^2 \\ &= 4 - 20i - 25 \\ &= -21 - 20i\end{aligned}$$

Ahora hacemos el producto indicado, así:

$$\begin{aligned}3i(-21-20i) &= -63i - 60i^2 \\ &= -63i + 60 \\ &= \mathbf{60 - 63i}\end{aligned}$$

Recuerde que la forma de expresar un número complejo es: $\boldsymbol{a + bi}$

8. ***Raíces cuadradas de cantidades negativas***

Aunque ya hemos estado trabajando con este concepto, de obtener la raíz cuadrada de una cantidad negativa, tenemos que hacer hincapié en el hecho que las raíces cuadradas tiene doble signo, es decir que al obtener la raíz cuadrado de 25, lo correcto es decir que + ó - 5, así por ejemplo:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

Y tratándose de raíces cuadradas de cantidades negativas, funcionará de la misma forma, así:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i$$
$$\sqrt{-16} = \pm 4i$$
$$\sqrt{-27} = \pm 3\sqrt{3}i$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Efectuar:

   a) $\frac{(1-i)(2+i)}{(1-3i)^2}$ b) $(2i^4 - 3i^2 + 2i^3)^3$ c) $6i^{127} + 3i^{20} - 14i^{40}$

2. Calcular:
   a) $\sqrt{-289}$
   b) $\sqrt{-252}$
   c) $\sqrt{-27}$
   d) $-2\sqrt{-45}$
   e) $2\sqrt{-9} - 7\sqrt{-16} + 3\sqrt{-81}$

3. Efectuar:
   a) $\frac{3-2i}{5+i}$
   b) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$
   c) $\frac{4}{6-\sqrt{-4}}$

4. Calcular $(\frac{5+i}{i})^2$