UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS.

ÁLGEBRA VECTRORIAL Y MATRICES- CICLO 02,2020.

Semana 5- Unidad 2: Matrices y determinantes.

Sesión 1.

Matriz inversa

Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada A, y se expresa A^{-1}, a la matriz que cumple que

$$A.A^{-1} = I = A^{-1}A$$

Características:

- La inversa de una matriz A es única.
- La matriz inversa A^{-1} existe si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
- Si existe A^{-1}, se dice que la matriz A es inversible o regular; en caso contrario, decimos que la matriz es singular.

Ejemplo 1.

Supongamos que $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} y \ B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Entonces,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Como $AB = BA = I$, entonces A y B son matrices inversibles, siendo cada una la inversa de la otra.

Observaciones:

1. A^{-1} debe interpretarse como la matriz inversa de A y no como $\frac{1}{A}$

2. Solamente las matrices cuadradas tienen inversa pero no todas las matrices cuadradas tienen inversa.

Propiedades de la matriz inversa

P1. La inversa de una matriz es única.

P2. La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas cambiando el orden.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

P3. Si la matriz A es invertible, también lo es su transpuesta, y el inverso de su transpuesto es la transpuesta de su inversa, es decir

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

P4. La inversa de la inversa de una matriz A es igual a la misma matriz A.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Cálculo de la matriz inversa por definición.

Dada la matriz A, la inversa de A se encuentra con los siguientes pasos:

1. Calcular el determinante de A. Si es diferente de cero tiene inversa y se sigue al paso 2.
2. Definir la matriz inversa A^{-1} como una matriz incógnita.
3. Resolver la ecuación matricial $A.A^{-1} = I$.
4. La matriz resultado, A^{-1} es la inversa de A.

Ejemplo 2.

Sea $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ cuyo determinante es $|A| = 6 * 2 - (-3)(5) = 12 + 15 = 27 \neq 0$.

Sea $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Entonces debe cumplirse que $A.A^{-1} = I$.
Esto es,

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a + 5c & 6b + 5d \\ -3a + 2c & -3b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por igualdad de matrices, se tiene un sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas:

$6a + 5c = 1 \quad (\mathbf{1}) \qquad y \qquad 6b + 5d = 0 \quad (\mathbf{2})$

$-3a + 2c = 0 \quad (\mathbf{3}) \qquad\qquad -3b + 2d = 1 \quad (\mathbf{4}),$

De **(3)** se tiene que: $a = \frac{2c}{3}$, y sustituyendo en **(1)** $6\left(\frac{2c}{3}\right) + 5c = 1 \rightarrow 4c + 5c = 1 \rightarrow 9c = 1$
$c = \frac{1}{9}$. Ahora sustituyendo este valor en $a = \frac{2c}{3} = \frac{2\left(\frac{1}{9}\right)}{27} = \frac{2}{27}$
Luego de **(2)** se tiene $b = \frac{-5d}{6}$, y sustituyendo en **(4)** $-3\left(\frac{-5d}{6}\right) + 2d = 1 \rightarrow \frac{9}{2}d = 1 \rightarrow d = \frac{2}{9}$
Con esto $b = \frac{-5d}{6} = -\frac{5}{27}$

Así las soluciones son $a = \frac{2}{27}, b = \frac{-5}{27}, c = \frac{1}{9}\ \ y\ \ d = \frac{2}{9}$

Luego la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{27} & \frac{-5}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$

Veamos ahora el primer producto AA^{-1}

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{27} & \frac{-5}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (6)\left(\frac{2}{27}\right) + (5)(\frac{1}{9}) & (6)\left(-\frac{5}{27}\right) + (5)(\frac{2}{9}) \\ (-3)\left(\frac{2}{27}\right) + (2)(\frac{3}{27}) & (-3)\left(\frac{-5}{27}\right) + (2)(\frac{6}{27}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{27} + \frac{5}{9} & \frac{-30}{27} + \frac{10}{9} \\ \frac{-6}{27} + \frac{2}{9} & \frac{15}{27} + \frac{4}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{27} & 0 \\ 0 & \frac{27}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le sugiero a usted que compruebe que el producto $A^{-1}A = I$

Este procedimiento es bastante trabajoso y poco recomendable cuando la matriz invertible es de orden mayor que dos, ya que por ejemplo, para una matriz de orden 3, tendríamos que resolver tres sistemas de ecuaciones lineales, cada uno de ellos con tres ecuaciones y tres incógnitas.

Ejemplo 3.

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, encontrar la inversa.

Se inicia calculando el determinante. $|A| = 2 * 3 - 1 * 6 = 6 - 6 = 0$

Dado que el determinante es cero se tendrá que la matriz A no tiene inversa (es singular).

Inversa de una matriz de orden 2.

La siguiente regla nos ayudará a calcular la inversa de una matriz de 2×2, cuando la inversa existe.

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, si $\det(A) \neq 0$, es decir, si $ad \neq bc$ entonces la matriz A tiene como inversa a la matriz:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.

Encuentre la inversa de la matriz $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}$

Solución:

Se calcula el determinante $|\mathrm{A}| = 2 * 4 - 3 * 2 = 8 - 6 = 2$

Aplicando la fórmula anterior tenemos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Inversas de matrices $\boldsymbol{n \times n}$

- <u>Método de la matriz adjunta.</u>

Antes de describir el método para encontrar A^{-1} se dan a conocer algunas definiciones importantes.

Definición.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

La matriz de cofactores de A denotada por $Cof(A)$ se halla mediante el siguiente proceso:

$$cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}M_{11} & (-1)^{1+2}M_{12} & \cdots & (-1)^{1+n}M_{1n} \\ (-1)^{2+1}M_{21} & (-1)^{2+2}M_{22} & & (-1)^{2+n}M_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}M_{n1} & (-1)^{n+2}M_{n2} & \cdots & (-1)^{n+n}M_{nn} \end{bmatrix}$$

Para una matriz de orden 3, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

La matriz $Cof(A)$ es:

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}M_{11} & (-1)^{1+2}M_{12} & (-1)^{1+3}M_{13} \\ (-1)^{2+1}M_{21} & (-1)^{2+2}M_{22} & (-1)^{2+3}M_{23} \\ (-1)^{3+1}M_{31} & (-1)^{3+2}M_{32} & (-1)^{3+3}M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.

Encuentre la matriz de cofactores de la matriz A $= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

Solución:

Encuentre en total 9 cofactores, uno por cada elemento de la matriz A.

Así $c_{11} = +M_{11} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 * 1 - 5 * (-4) = 20$

$c_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\big(4 * 1 - 2 * (-4)\big) = -(4 + 8) = -12$

Sucesivamente se calculan los 9 cofactores y se tiene

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -12 & 20 \\ 3 & -5 & 19 \\ -8 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta. Sea A una matriz, la matriz adjunta de A denotada por $Adj(A)$ es la transpuesta de la matriz de cofactores de A

Esto es: $Adj(A) = \left(Cof(A)\right)^t$

Ejemplo 6.

Para el ejemplo anterior la matriz adjunta es

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 20 & -12 & 20 \\ 3 & -5 & 19 \\ -8 & -8 & -8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 20 & 3 & -8 \\ -12 & -5 & -8 \\ 20 & 19 & -8 \end{bmatrix}$$

Para encontrar la inversa de una matriz A mediante el método de la adjunta se deben seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el determinante de la matriz A y verificar que $\det(A) \neq 0$.
2. Encontrar la matriz de cofactores $Cof(A)$.
3. Encontrar la matriz adjunta $Adj(A) = \left(Cof(A)\right)^t$.
4. Encontrar la inversa quien será $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} * Adj(A)$.

Ejemplo 7.

Encuentre la matriz inversa de A por medio de la matriz adjunta.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

a) Primero encontramos el determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 1*2*1 + 2*1*1 + 3*3*0 - 1*2*3 - 0*1*1 - 1*3*2$$
$$= 2 + 2 - 6 - 6 = -8 \neq 0$$

b) $$Cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^2 det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & (-1)^3 det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & (-1)^4 det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ (-1)^3 det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & (-1)^4 det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & (-1)^5 det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ (-1)^4 det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & (-1)^5 det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & (-1)^6 det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

c) $$(Cof(A))^t = Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

d) $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . Adj(A) = \frac{1}{-8}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Verifique que se cumple $A.A^{-1} = I = A^{-1}A$

CÁLCULO DE LA INVERSA POR MEDIO DE OPERACIONES ELEMENTALES DE FILA.

La inversa de una matriz también se puede encontrar haciendo uso de operaciones elementales de fila.

Operaciones elementales de fila

Las operaciones elementales de fila son tres:

OEF1: Intercambiar dos filas cualesquiera. $f_i \leftrightarrow f_j$

OEF2: Multiplicar una fila por un número diferente de cero. $\alpha f_i \to f_i^*$

OEF3: Sumar el múltiplo de una fila a otra fila. $\alpha f_i + f_j \to f_j^*$

Estas operaciones elementales sobre filas son tan sólo las operaciones que realizamos normalmente cuando resolvemos sistemas de ecuaciones lineales usando el método de suma y resta (Reducción).

Antes de realizar algunos ejemplos de aplicaciones de las operaciones elementales de fila, introduciremos la siguiente notación para cada uno de los tres tipos de operaciones.

OEF1: $f_1 \leftrightarrow f_3$ significa que la fila 1 se ha intercambiado con la fila 3.

Ilustración:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\sim}_{f_1 \leftrightarrow f_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \underbrace{\sim}_{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

El símbolo $\sim$ nos indica que las matrices son equivalentes y lo usaremos a medida que vayamos avanzando por medio de una operación de fila, de un paso al siguiente.

OEF2: $\alpha f_2 \to f_2^*$ significa que todos los elementos de la fila 2 se han multiplicado por el número α y obtener una nueva fila 2.

Ilustración:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2(3) & 2(1) & 2(5) \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$2f_1 \to f_1^*$ $\qquad$ $2f_1 \to f_1^*$

OEF3: $-\alpha f_1 + f_3 \to f_3^*$ significa que todos los elementos de la fila 1 se han multiplicado por el número $-\alpha$ y sumar cada producto obtenido con los elementos de la fila 3, y obtener una nueva fila 3.

Ilustración:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2(3)+7 & -2(1)+2 & -2(5)+0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -10 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$-2f_1 + f_2 \to f_2^*$

Ejemplo 8.

Haciendo uso de las operaciones elementales de fila, halle a partir de la matriz A, la matriz identidad.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -6 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución

Para obtener a partir de la matriz A, la matriz identidad de A debemos aplicar correctamente las operaciones elementales de fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & -6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-2f_1 + f_2 \to f_2^* \qquad -2f_2 + f_1 \to f_1^* \qquad -12f_3 + f_2 \to f_2^*$$

$$3f_1 + f_3 \to f_3^* \qquad 27f_3 + f_1 \to f_1^*$$

Una vez practicado el manejo de las operaciones elementales de fila pasaremos a encontrar la matriz inversa de A haciendo uso de ellas.
Supongamos que la matriz $A_{n\times n}$ tiene inversa A^{-1}

Este método se resume en los siguientes pasos:

(**1**) Primeramente se forma la siguiente matriz aumentada $(A|I)$, donde I es la matriz identidad de orden $n \times n$.

(**2**) Una vez escrita la matriz aumentada comenzamos a aplicar las operaciones elementales de fila cuantas veces se requieran y detener el proceso hasta que hayamos transformado la matriz aumentada $(A|I)$ en la nueva matriz $(I|B)$.

(**3**) La matriz B obtenida es la matriz inversa de A.

Ejemplo 9.

Haciendo uso de operaciones elementales, encuentre la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Solución.

Observe que es la misma matriz del ejemplo 4.

(1) Se forma la matriz aumentada. $(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

(2)Aplicando operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{-3}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 2 & -1 \\ 0 & 1 & | & \frac{-3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} f_1 \to f_1^{*} \qquad -3 f_1 + f_2 \to f_2^{*} \qquad - f_2 + f_1 \to f_1^{*}$$

Así $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Se ha colocado color a la fila que va cambiando. Para poder llevar a la matriz identidad, se transforma en 1 al elemento que está en la diagonal principal (pivote) y con este se hacen ceros los que están fuera de la diagonal. Esto se ve mejor reflejado en una matriz de orden 3.

Ejemplo 10.

Encuentre la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solución. Fórmese la matriz aumentada y realizar operaciones elementales.

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} - f_1 + f_2 \to f_2^{*} \\ - f_1 + f_3 \to f_3^{*} \end{matrix} \qquad \frac{1}{2} f_2 \to f_2^{*}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -2 f_2 + f_1 \to f_1^{*} \\ - f_2 + f_3 \to f_3^{*} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 f_3 + f_1 \to f_1^{*} \\ -2 f_3 + f_2 \to f_2^{*} \end{matrix}$$

La matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Puede comprobarse que $A * A^{-1} = I = A^{-1} * A$.

Nota: puede observarse que para convertir la matriz A en la matriz I, se hacen convierten en 1 los elementos de la diagonal principal y se utilizan para hacer ceros los elementos fuera de la diagonal de cada columna. A estos elementos le llamamos **pivotes.**

Ejercicios:

1. Encuentre la inversa de las siguientes matrices, si es que existe, por dos métodos. Por la definición y usando la fórmula dada para matrices de orden 2.

   a) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $b)$ $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $c)$ $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$

2. Encuentre la matriz $(-A-C)^{-1}$ Dado que $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. Demuestre que la matriz B es la inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Encuentre la matriz inversa en cada literal, si es que existe, aplicando el método de la matriz adjunta.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad e) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Mediante operaciones elementales de fila transforme la matriz A en la matriz identidad.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Haciendo uso de operaciones elementales de fila encuentre a partir de la matriz A una matriz triangular superior.

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Haciendo uso de operaciones elementales encuentre la inversa de las siguientes matrices, si existen.

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$