6.4. Colisiones

Una de las aplicaciones principales de la Ley de Conservación del Ímpetu son las colisiones entre dos cuerpos.

Definición 6.5 (Colisión)**.** Es una situación física donde dos cuerpos se acercan, interactúan entre sí por un breve intervalo de tiempo y luego se separan.

OBSERVACIONES

1. Ejemplos de colisiones son por ejemplo: un bate colisionando con una bola de béisbol, dos carros chocando en la autopista, un protón y anti-protón colisionando en un haz de partículas y anti-partículas en un acelerador de partículas.

2. Durante este tiempo consideraremos que las fuerzas son *impulsivas* (es decir son grandes y actúan por poco tiempo comparado al resto del sistema) generando un *impulso de percusión*. mayor que cualquier otro impulso en el mismo intervalo de tiempo.

3. Ignoraremos para el análisis todas las demás fuerzas que no sean las que produzcan la colisión (es decir, normal, peso, etc)

4. Categorizamos a las colisiones en tres tipos: elástica, inelástica y completamente inelástica como se muestra en el esquema 6.8. En general, en toda colisión se puede perder energía cinética en otras forma de energía (calor, trabajo de deformación, onda sonora, etc.), esa pérdida está caracterizada por el *coeficiente de restauración* ε que puede ser 1 si no pierde energía cinética, 0 si no se restituye la velocidad relativa o cualquier cosa en medio si sólo se restituye la velocidad relativa parcialmente.[4].

[4]O se restituye toda la velocidad relativa

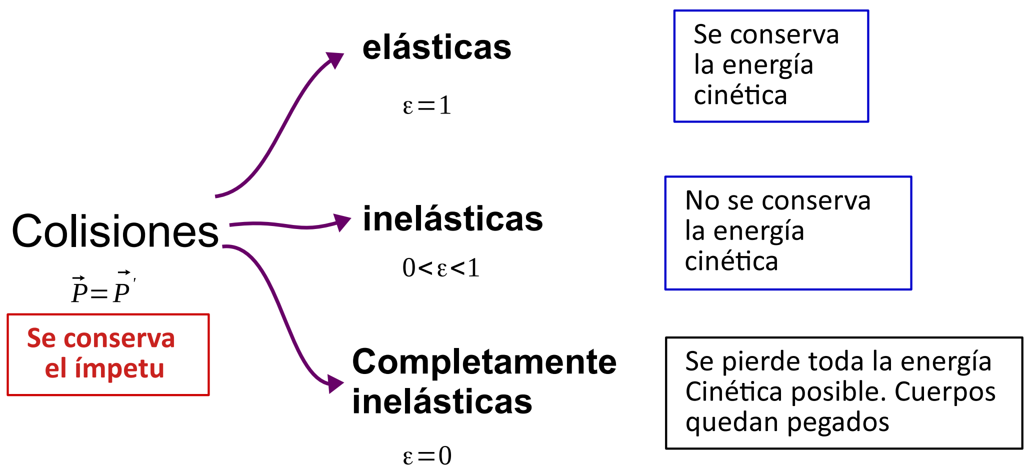

Figura 6.8.: Categorías de las colisiones

5. Ejemplos de colisiones elásticas: bolas de billar chocando, un bate de béisbol golpeando una pelota

6. Ejemplos de colisiones completamente inelásticas: la colisión de dos automóviles que se quedan pegados después del impacto

7. Ejemplo de colisiones inelásticas: el rebotar de una pelota de básquetbol libremente sobre el suelo, notamos que después del primer rebote no regresa a la altura inicial por lo que sabemos que ha perdido energía cinética, pero no tanta que se que pegado en el suelo.

6.5. Colisiones en una dimensión o choque central

En las colisiones en una dimensiones o también llamadas coques centrales de los cuerpos, las velocidades de acercamientos entre los cuerpos están sobre la línea que une a los centros de los cuerpos[5]. La condición básica está dada por la figura 6.9

[5]En caso de partículas ésta condición es trivial ya que no existe otro centro que la posición de la partícula

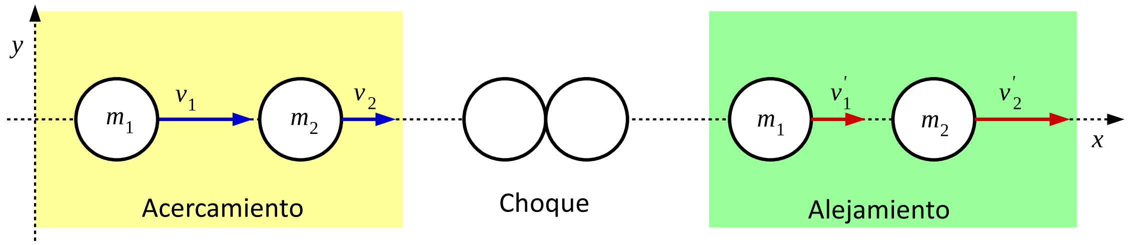

Figura 6.9.: Categorías de las colisiones

Es de notar que se coloca el marco de referencia sobre la línea que soporta las velocidades y pasa por lo centros delos cuerpos de tal forma que $\vec{v}_1 = v_1\, \hat{\imath}$ y $\vec{v}_2 = v_2\, \hat{\imath}$ sólo tengan componentes en dirección x. Las cantidades primadas son las designadas después de la colisión. Dejamos de ocupar la notar de vectores unitarios y nos concentramos en la componente x de las leyes.

Así dispuestas las cosas, la condición para que suceda una colisión será $v_1 > v_2$, que sólo dice que el *proyectil* (cuerpo 1) se acerca al *blanco* (cuerpo 2). A los cuerpos después de la colisión se les llama también *ejectiles*

6.5.1. Colisiones completamente inelásticas

En una colisión completamente inelástica se pierde energía cinética de tal forma que los dos cuerpos queden pegados como se muestra en la figura 6.10.

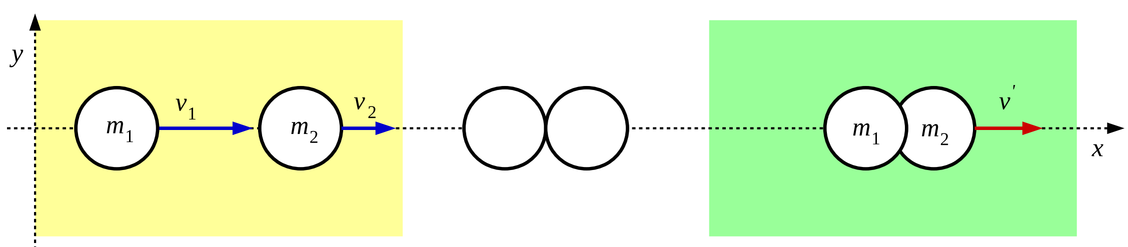

Figura 6.10.: Esquema para las colisiones completamente inelásticas

Es decir $v_1' = v_2' = v'$. Ya que en *toda* colisión se conserva el ímpetu lineal tenemos que

$$\begin{aligned} P &= P' \\ p_1 + p_2 &= p_1' + p_2' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \end{aligned}$$

poniendo la condición de completamente inelástica y despejando hacia v'

$$
\begin{aligned}
m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v' + m_2 v' \\
m_1 v_1 + m_2 v_2 &= (m_1 + m_2)\, v' \\
\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} &= v'
\end{aligned}
$$

Que solemos escribir de la siguiente forma

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\, v_2 \tag{6.9}$$

donde v_1y $v_2$con las componentes x de las velocidades y no sus rapideces, es decir pueden tener valores negativos.

OBSERVACIONES

1. La ecuación también se interpreta como el promedio ponderado de velocidades[6], donde
$$q_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \qquad\qquad q_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$
son las ponderaciones correspondientes.

2. La ponderación es el porcentaje de la masa de un cuerpo respecto de la masa total y la ecuación 6.9 indica que la velocidad del cuerpo mas masivo es la que más contribuye a la velocidad final de los cuerpos pegados

Promedios ponderados

No son cálculos realmente nuevos o ajenos a nuestra realidad. Por ejemplo cuando calcula la nota para sus materias debe hacer un promedio ponderado . Suponga que un estudiante ha sacado las siguientes notas en una materia.

	EC1	RP1	EC2	RP2	Nota
	7.5	5.5	6.5	4.5	
Ponderación 1	25 %	25 %	25 %	25 %	6.0
Ponderación 2	75 %	5 %	15 %	5 %	7.1
Ponderación 3	5 %	40 %	15 %	40 %	5.35

Se multiplica en general la nota por la ponderación y se suman todos los términos. Igual que con la velocidad final en una colisión completamente inelástica o velocidad del centro de masa. Nótese que dependiendo de las ponderación así sera la nota promedio, que va desde reprobar (ponderación 3) hasta pasar solventemente (ponderación 2). Sólo como observación todas las ponderaciones $0 < q_i < |1$ son menores de uno y la suma de todas las ponderaciones debe dar 1 $\sum_i q_i = 1 = 100\,\%$

[6]Mas adelante veremos que está asociado a la velocidad del centro de masa

3. La energía cinética perdido en este tipo de colisiones mecánica suele transformarse en alguna forma de energía interna (ya sea calor o trabajo de deformación) pero también en otras formas de energía asociadas al sonido o la rotación.

4. En general, cuando se pierde energía en una colisión decimos que los canales inelásticos están abiertos e implica que el sistema tiene una estructura interna todavía por determinar.

Ejemplo 6.8 (Colisión completamente inelástica de carros)**.** Tomado de la discusión D6/10. Un carro pequeño que posee una masa de 1200 kg viaja al este a 60 km/h y luego colisiona con un camión de 3000 kg que se desplaza a 40km/h al oeste. Luego del impacto ambos vehículos se mueven juntos como se muestra en la figura 6.11 , a) ¿A qué velocidad se moverán ambos vehículos después del impacto? b) ¿Cuanta energía cinética se perdió en la colisión?

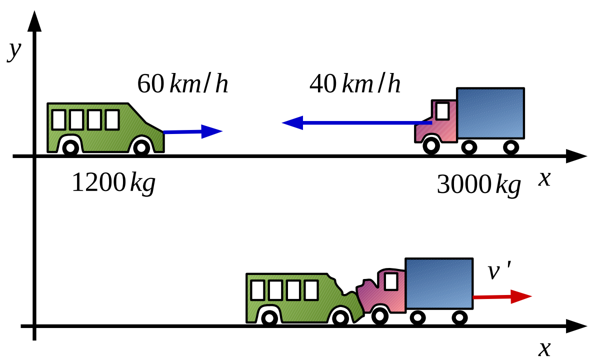

Figura 6.11.: ¿En qué dirección se moverán los dos juntos?

Solución

a) Según la figura 6.11 el carrito de masa $m_s = 1200\ kg$ con una velocidad $v_1 = 60\ km/h$ se mueve hacia el este en dirección este positiva, mientras que el camión de masa $m_2 = 3000\ kg$ se mueve hacia el oeste con una velocidad $v_2 = -40\ km$ ya que el oeste es la dirección x negativa.
Utilizando la ecuación 6.9

$$
\begin{aligned}
v' &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\,v_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\,v_2\\
&= \frac{1200\ kg}{4200\ kg}\,60\,\frac{km}{h} + \frac{3000\ kg}{4200\ kg}\,(-40)\,\frac{km}{h}\\
v' &= -11.42\,\frac{km}{h}
\end{aligned}
$$

Nótese que la velocidad es negativa, lo que significa que se mueve hacia la izquierda (oeste) y el camión a pesar de tener la menor velocidad le gana al carro por tener menor masa y contribuir menos a la velocidad final.
b) Convirtiendo las velocidades $v_1 = 60\ km/h = 16.67\ m/s$, $v_2 = -40\ km/h = -11.11\ m/s$ y $v' = -11.42\ km/h = -3.17\ m/s$, encontramos que la energía cinética inicial es de

$$\begin{aligned}
K_T &= K_1 + K_2 \\
&= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2}1200\ kg \times (16.67\ m/s)^2 + \frac{1}{2}3000\ kg \times (-11.11\ m/s)^2 \\
K_T &= 351.9\ kJ
\end{aligned}$$

mientras que la energía cinética final es

$$\begin{aligned}
K_T' &= K_1' + K_2' \\
&= \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v'^2 \\
&= \frac{1}{2}4200\ kg \times (-11.42)^2 \\
K_T' &= 273.9\ J
\end{aligned}$$

Por lo tanto la pérdida será de $\Delta K = K_T' - K_T = -79\ J$ y porcentualmente $\frac{\Delta K_T}{K_T} = -22.17\ \%$. Nótese que al quedar pegados los cuerpos no se pierda toda la energía cinética, sólo una parte de lo contrario habría que afectar el ímpetu total.

6.5.2. Colisiones elásticas

Suponga que dos cuerpos colisionan centralmente de forma elástica como se muestra en la figura . Al no quedar pegados se debe cumplir la condición que $v_1' < v_2'$ indicando que los cuerpos se alejan después de la colisión.

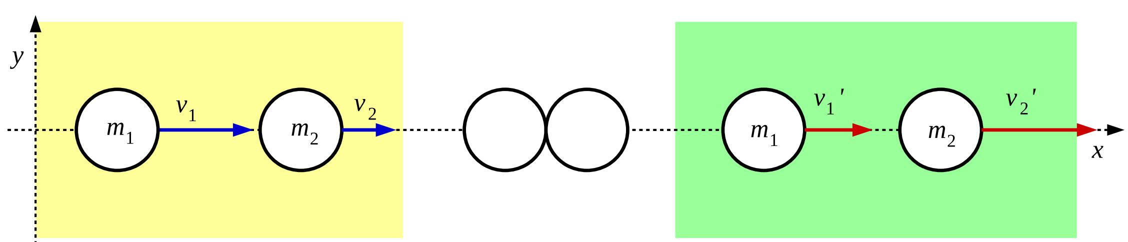

Figura 6.12.: Categorías de las colisiones

En una colisión elástica además de conservarse la cantidad de movimiento se conserva la energía cinética. Es decir

$$K_T = K'_T$$
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

eliminado el factor $\frac{1}{2}$ y pasando los mismo índices al mismo lado obtenemos

$$m_1v_1^2 - m_1v_1'^2 = m_2v_2'^2 - m_2v_2^2$$
$$m_1\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = m_2\left(v_2'^2 - v_2^2\right) \tag{6.10}$$

Por otro lado ya que se conserva el ímpetu total

$$P = P'$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \tag{6.11}$$

trazo vez pasando los términos con mismo índice al mismo lado

$$m_1v_1 - m_1v_1' = m_2v_2' - m_2v_2$$
$$m_1\left(v_1 - v_1'\right) = m_2\left(v_2' - v_2\right) \tag{6.12}$$

Dividiendo ahora la ecuación 6.10entre la ecuación 6.12

$$\frac{\cancel{m_1}\left(v_1^2 - v_1'^2\right)}{\cancel{m_1}\left(v_1 - v_1'\right)} = \frac{\cancel{m_2}\left(v_2'^2 - v_2^2\right)}{\cancel{m_2}\left(v_2' - v_2\right)}$$
$$\frac{\cancel{\left(v_1 - v_1'\right)}\left(v_1 + v_1'\right)}{\cancel{\left(v_1 - v_1'\right)}} = \frac{\cancel{\left(v_2' - v_2\right)}\left(v_2' + v_2\right)}{\cancel{\left(v_2' - v_2\right)}}$$
$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \tag{6.13}$$

A esta ecuación se le llama *condición elástica* de la colisión y dice que la suma de velocidades de un cuerpo antes y después de la colisión es igual a suma de velocidades del otro cuerpo antes y después.. Despejando hacia v_2' obtenemos que $v_2' = v_1 + v_1' - v_2$. Sustituyendo en la fórmula de la conservación del ímpetu 6.11

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2\left(v_1 + v_1' - v_2\right)$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_1 + m_2v_1' - m_2v_2$$

poniendo los términos primados a la derecha y los demás a la izquierda queda

$$m_1v_1 + m_2v_2 - m_2v_1 + m_2v_2 = \left(m_1 + m_2\right)v_1'$$
$$\left(m_1 - m_2\right)v_1 + 2m_2v_2 = \left(m_1 + m_2\right)v_1'$$

lo que finalmente se deja escribir como

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \tag{6.14}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \tag{6.15}$$

Aunque la ecuación 6.15 no fue deducida explícitamente, se deja calcular de forma análoga. Es de notar que ambas formulas tienen una cierta simetría.

Ejemplo 6.9 (Colisiones elásticas)**.** Tomado de la discusión D/9. Un objeto con masa de 2.0 kg experimenta una colisión elástica con otro en reposo, y sigue moviéndose en la dirección original, sólo que con la cuarta parte de su rapidez original como se muestra en la figura 6.13. ¿Qué masa tiene el objeto golpeado?

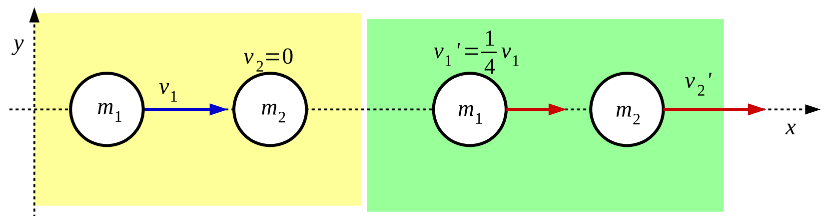

Figura 6.13.: El proyectil continua con menor velocidad

Solución

La situación es la que se muestra en la figura de los casos particulares. Según los datos del ejercicio el blanco se encuentra en reposo$v_2 = 0$, mientras que la velocidad del proyectil de masa $m_1 = 2.0\ kg$ después de la colisión es $v_1' = \frac{1}{4}v_1$. Aunque podríamos utilizar las ecuaciones 6.14 y 6.15 es mas fácil utilizarla condición elástica (ecuación 6.13) directamente para calcular v_2' en función de v_1

$$\begin{aligned} v_1 + v_1' &= v_2 + v_2' \\ v_1 + \frac{1}{4}v_1 &= \cancelto{0}{v_2} + v_2' \\ v_2' &= \frac{5}{4}v_1 \end{aligned}$$

Luego sustituir en la ley de conservación de ímpetu

$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \\ m_1v_1 + \cancelto{0}{m_2v_2} &= +m_2\frac{5}{4}v_1 \\ m_1v_1 - \frac{1}{4}m_1v_1 &= \frac{5}{4}m_2v_1 \end{aligned}$$

Despejando m_2

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \frac{\frac{3}{4} m_1 \cancel{v_1}}{\frac{5}{4} \cancel{v_1}} \\
&= \frac{3}{5} m_1 \\
&= \frac{3}{5} \times 2.0\ kg \\
m_2 &= 1.2\ kg
\end{aligned}
$$

Casos particulares

Aquí trataremos algunos casos particulares para las colisiones elásticas que no ayudarán a comprender su alcance

6.5.2.1. Masas iguales

Suponga que blanco y el proyectil tienen masas igual de tal forma que $m_1 = m_2 = m$ entonces las ecuación 6.14 se convierte en

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\
&= \cancelto{0}{\frac{m - m}{m + m}} v_1 + \frac{2m}{m + m} v_2 \\
v_1' &= v_2
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \\
&= \frac{2m}{m + m} v_1 + \frac{m - m}{m + m} v_2 \\
v_2' &= v_1
\end{aligned}
$$

Es decir los cuerpos intercambian velocidades antes y después de la colisión

6.5.2.2. Blanco en reposo y proyectil de menor masa (rebote)

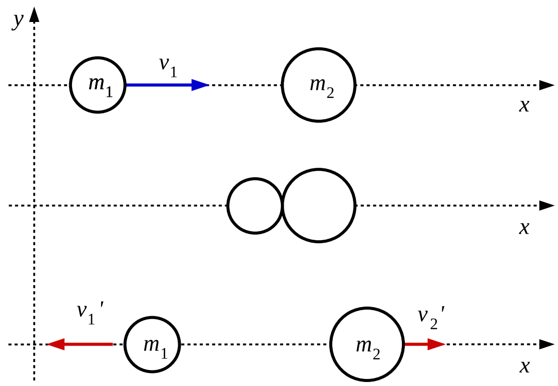

Figura 6.14.: El proyectil rebota contra un blanco masivo

Suponga ahora que un blanco masivo en reposo es impactado por un proyectil de menor masa $m_1 < m_2$. En este caso las ecuaciones 6.14 y6.15 se convierten en

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \cancelto{0}{\frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2} \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \cancelto{0}{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2}$$

$$= \frac{\cancel{m_2}\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}{\cancel{m_2}\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)} v_1$$

$$v_1' = -\frac{\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} v_1 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Ya que $\frac{m_1}{m_2} < 1$y es un cociente positivo, la velocidad v_1' es negativa, mientras que v_2 es positiva. Lo que dicen estas ecuaciones es que mientras el cuerpo 2 es propulsado hacia adelante, el cuerpo 1 debe rebotar y moverse hacia atrás no importa que tan rápido haya golpeado tal como se muestra en la figura 6.14. Para la dirección del movimiento después de colisionar sólo interesa la relación de masa..

En el caso extremo que $m_1 \ll m_2$el blanco sea masivo entonces el cociente $\frac{m_1}{m_2"} \approx 0$ y por ende

$$v_1' \approx -v_1 \qquad v_2' \approx 0$$

que es lo que sucede cuando se lanza una pelota de tenis contra una pared. Dado que la pared es muy masiva la pelota de tenis rebota con la misma rapidez que impactó justificando la premisa del ejercicio D6/6.

6.5.2.3. Blanco en reposo y proyectil de mayor masa (arrollar)

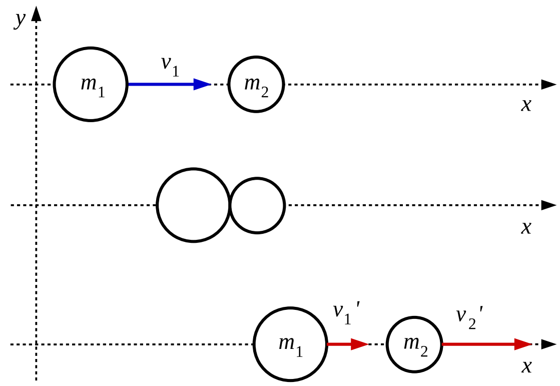

Figura 6.15.: El proyectil rebota contra un blanco masivo

Suponga ahora el caso contrario donde un proyectil masivo colisiona con un blanco en reposo como se muestra en la figura 6.15, es decir $m_1 > m_2$, entonces las ecuaciones 6.14 y6.15 se convierten en

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \cancelto{0}{\frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2} & \qquad v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \cancelto{0}{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2} \\
&= \frac{\cancel{m_1}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)}{\cancel{m_1}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_1 & &= \frac{2\cancel{m_1}}{\cancel{m_1}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_1 \\
v_1' &= \frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_1 & v_2' &= \frac{2}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_1
\end{aligned}
$$

Nótese que la velocidad del proyectil después de la colisión es positiva, así como la del blanco. Es decir el proyectil arrasa con el blanco y lo propulsión hacia adelante con una gran velocidad.

En el caso extremo que el proyectil sea supermasivo $m_1 \gg m_2$ entonces el cociente $\frac{m_2}{m_1} \approx 0$ y por ende

$$v'_{|1} = v_1 \qquad\qquad v'_2 = 2v_1$$

Es interesante que la máxima velocidad que le puede proporcional el cuerpo 1 al 2 es dos veces la velocidad inicial del proyectil. Eso significa por ejemplo, que si un golfista quiere golpear la bola especialmente lejos, debe hacer girar al palo especialmente rápido a la vez de ser más pesados que los otros.

Ejemplo 6.10 (Ejemplo complejo colisión elástica y conservación de energía)**.** Tomado de la discusión D6/13. Dos bloques son libres de deslizarse a lo largo de la pista de madera sin fricción ABC, que se muestra en la figura 6.16. El bloque de masa$m_1 = 5.00\ kg$ se libera desde el reposo en A. De su extremo frontal sobresale el polo norte de un poderoso imán, que repele el polo norte de de un imán incrustado en el extremo posterior del bloque de masa $m_2 = 10.0\ kg$, inicialmente en reposo. Los dos bloques nunca se tocan. Calcule la altura máxima a la que se eleva m_1 después de la colisión elástica.

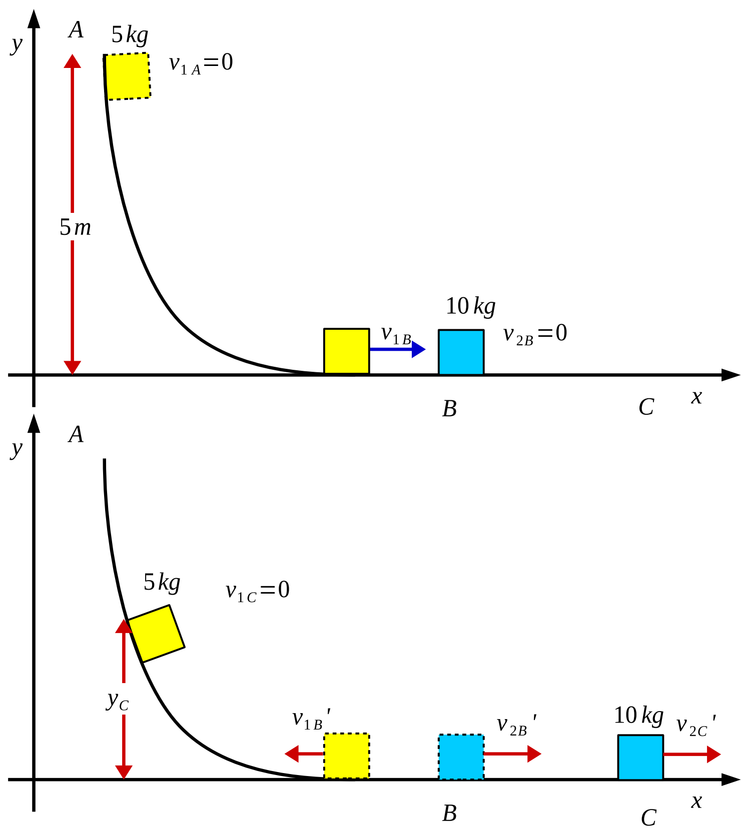

Figura 6.16.: Bloque colisiona elásticamente con otro

SOLUCIÓN (ESPERADA)

Se soluciona el ejercicio en tres pasos: primero de $A \longrightarrow B$, justo antes de la colisión, utilizamos conservación de energía para calcular la rapidez inicial del proyectil, segundo en B calculamos las velocidades final después de la colisión y por último de $B \longrightarrow C$, después de la colisión utilizamos otra vez la conservación de energía para calcular la nueva altura y_C.

De $A \longrightarrow B$ asumimos que no existen fuerzas no conservativas actuando y como la normal no realiza trabajo podemos asumir que la energía se conserva y utilizaremos la siguiente fórmula

$$\Delta E = 0$$
$$\Delta E_1 + \cancelto{0}{\Delta E_2} = 0$$

Ya que cuerpo 2 antes de la colisión ni cambia rapidez ni altura entonces no cambia su energía mecánica $\Delta E_2 = 0$ por lo que el única cambio de energía mecánica es el cuerpo 1

$$E_{1B} - E_{1A} = 0$$
$$K_{1B} + U_{1B} - K_{1A} - U_{1A} = 0$$

ya que parte del reposo en A y en B la altura es cero

$$K_{1B} + \cancelto{0}{U_{1B}} - \cancelto{0}{K_{1A}} - U_{1A} = 0$$
$$\frac{1}{2}\cancel{m_1} v_{1B}^2 = \cancel{m_1} g y_A$$
$$v_{1B} = \sqrt{2 g y_A}$$
$$v_{1B} = \sqrt{2 \times 9.8\ m/s^2 \times 5\ m}$$
$$v_{1B} = 9.90\ m/s$$

Colisión en B aquí la velocidad inicial del proyectil será $v_1 = +v_{1B}$ dado el marco de referencia dado y $v_2 = 0$ ya que el cuerpo 2 está todavía en reposo, por lo que la velocidad con que rebotara será (ecuación 6.14

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \cancelto{0}{\frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2}$$
$$= \frac{(5 - 10)\ kg}{15\ kg}\ 9.90\ m/s$$
$$v_1' = -3.30\ m/s$$

Ahora bien de $B \rightarrow C$ utilizamos otra vez energía sabiendo que la rapidez del cuerpo 1 en C es cero

$$\Delta E = 0$$
$$\Delta E_1 + \Delta E_2 = 0$$

Ya que el cuerpo 2 no cambia su rapidez una vez impulsado, ni cambia altura tiene otra vez un cambio de energía mecánica de $B \rightarrow C$ igual a cero

$$
\begin{aligned}
E_{1C} - E_{1B} &= 0 \\
\cancelto{0}{K_{1C}} + U_{1C} - K_{1B} - \cancelto{0}{U_{1B}} &= 0 \\
\cancel{m_1} g y_C &= \frac{1}{2} \cancel{m_1} v_1'^2 \\
y_C &= \frac{v_1'^2}{2g} \\
&= \frac{(3.30\ m/s)^2}{2 \times 9.8\ m/s^2} \\
y_C &= 0.556\ m
\end{aligned}
$$

Solución teórica

Dado que es una colisión inelástica y se conserva la energía se está tentado a tratar de solucionar el sistema directamente de $A \rightarrow C$. Primero reconocemos que al inicio (A) toda la energía del sistema está en la energía potencial del cuerpo 1 y en (B) antes de la colisión toda la energía mecánica está en la energía cinética del cuerpo 1 por lo que podemos decir que $E = mgy_A = \frac{1}{2}mv_1^2$

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= 0 \\
\Delta E_1 + \Delta E_2 &= 0 \\
\Delta K_1 + \Delta U_1 + \Delta K_2 + \Delta U_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Ya que el cuerpo 1 parte y retorna al reposo no posee cambio de energía cinética $\Delta K_1 = 0$ y ya que el cuerpo 2 no cambia su altura tampoco posee energía potencial $\Delta U_2 = 0$ obteniendo

$$
\begin{aligned}
\cancelto{0}{\Delta K_1} + \Delta U_1 + \Delta K_2 + \cancel{\Delta U_2} &= 0 \\
\Delta U_1 &= -\Delta K_2 \qquad (6.16)
\end{aligned}
$$

que dice algo obvio, lo que perdió el cuerpo 1 en energía potencial se lo llevó el cuerpo 2 durante la colisión . Si pudiésemos averiguar como se fracciona la energía cinética durante la colisión se podría calcular la altura buscada.

Observando las relaciones energéticas entre la energía cinética antes y después del cuerpo

1 tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{K_1'}{K_1} &= \frac{\cancel{\frac{1}{2}m_1}v_1'^2}{\cancel{\frac{1}{2}m_1}v_1^2} \\
&= \frac{\left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1\right)^2}{v_1^2} \\
&= \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2\frac{\cancel{v_1^2}}{\cancel{v_1^2}} \\
\frac{K_1'}{K_1} &= \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)^2
\end{aligned}
$$

lo que en sí es un resultado interesante ya que la distribución de energía cinética después de la colisión depende exclusivamente de las masas m_1 y m_2. Evaluando

$$
\begin{aligned}
\frac{K_1'}{K_1} &= \left(\frac{5kg-10kg}{5kg+10kg}\right)^2 \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \\
\frac{K_1'}{K_1} &= \frac{1}{9} \\
K_1' &= \frac{1}{9}K_1 \\
K_1' &= \frac{1}{9}E
\end{aligned}
$$

sabiendo que $K_1 = E$, vemos que el cuerpo 1 se queda con un noveno de la energía total del sistema y por otro lado el cuerpo 2 se lleva la energía restante. En la colisión elástica se conserva la energía

$$
\begin{aligned}
K &= K' \\
K_1 + \cancelto{0}{K_2} &= K_1' + K_2' \\
E - \frac{1}{9}E &= K_2' \\
K_2' &= \frac{8}{9}E
\end{aligned}
$$

o la energía cinética del cuerpo 2 es ocho novenos de la energía total del sistema. Sustituyendo en la ecuación 6.16

$$\begin{aligned}
\Delta U_1 &= -\Delta K_2 \\
U_{1C} - U_{1A} &= -(K_{2C} - \cancelto{0}{K_{2A}}) \\
U_{1C} &= -\frac{8}{9}E + E \\
\cancel{mg}y_C &= \frac{1}{9}\cancel{mg}y_A \\
y_C &= \frac{1}{9}y_A \\
&= \frac{5\ m}{9} \\
y_C &= 0.556\ m
\end{aligned}$$

que el mismo resultado obtenido por el otro camino. El método también nos da informaciones interesantes como el hecho que si el blanco tiene el doble de masa que el proyectil siempre se llevará 89 % de la energía del sistema, independientemente del valor de las masas.

6.5.3. Colisiones inelásticas (opcional)

¿Que sucede si un cuerpo colisiona centralmente con otro, se pierde energía cinética pero los cuerpos no quedan pegados? La única ecuación sigue funcionando es la Conservación del Ímpetu lineal. Se introduce una nueva cantidad física que caracteriza a las colisiones inelásticas: el coeficiente de restitución. La situación de variables es la misma que se presenta en la figura 6.12

Definición 6.6 (Coeficiente de restitución)**.** Para un choque central se define el coeficiente de restitución como el cociente de la velocidad relativa de alejamiento entre la velocidad relativa de acercamiento

$$\varepsilon = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \tag{6.17}$$

el signo negativo es necesario ya que si la velocidad relativa de acercamiento es positiva, la de alejamiento será negativa y viceversa.

Observaciones

1. Así definido el coeficiente tiene valores entre $0 \leq \varepsilon \leq 1$ no posee unidad y es adimensional. Donde $\varepsilon = 0$ para una colisión completamente inelástica y $\varepsilon = 1$ para una colisión elástica

2. La ecuación 6.17 nos lleva a un ecuación a la condición elástica donde se relaciona las velocidades antes y después de las partículas

$$\varepsilon = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1}$$
$$\varepsilon\left(v_2 - v_1\right) = -\left(v_2' - v_1'\right)$$

poniendo los mismo índices al mismo lado

$$v_2' + \varepsilon v_2 = v_1' + \varepsilon v_1 \tag{6.18}$$

A esta la podemos llamar la condición inelástica de los choques centrales.

3. La ecuación 6.18 sirve para los casos elásticos e inelásticos. Dándonos en el primer caso la condición elástica y en la segunda la relación de que las velocidades después de la colisión son iguales.

Despejando hacia $v_2' = v_1' + \varepsilon v_1 - \varepsilon v_2$ y sustituyendo en la conservación de energía

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2\left(v_1' + \varepsilon v_1 - \varepsilon v_2\right) \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_1' + \varepsilon m_2 v_1 - \varepsilon m_2 v_2 \end{aligned}$$

poniendo a los términos primados a la derecha y los no primados a la izquierda nos queda que

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_1' \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 - \varepsilon m_2 v_1 + \varepsilon m_2 v_2 &= \left(m_1 + m_2\right) v_1' \\ v_1' &= \frac{\left(m_1 - \varepsilon m_2\right) v_1 + \left(m_2 + \varepsilon m_2\right) v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

lo que nos da las ecuaciones para las colisiones inelásticas centrales

$$v_1' = \frac{\left(m_1 - \varepsilon m_2\right)}{m_1 + m_2} v_1 + + \frac{\left(1 + \varepsilon\right) m_2}{m_1 + m_2} v_2 \tag{6.19}$$
$$v_2' = \frac{\left(1 + \varepsilon\right) m_1}{m_1 + m_2} v_1 + + \frac{\left(m_2 - \varepsilon m_1\right)}{m_1 + m_2} v_2 \tag{6.20}$$

Es de notar que cuando $\varepsilon = 1$ se obtienen las fórmulas de los choques inelásticos y para $\varepsilon = 0$ la velocidad del centro de masa.

Ejemplo 6.11 (Colisión inelástica)**.** Un bloque en reposo de masa 5 kg es golpeado inelásticamente por otro bloque con la misma masa de 5 kg con una velocidad de 20 m/s. Si el coeficiente de restitución es de $\varepsilon = 0.75$ a) Calcule las velocidades finales de ambos cuerpos b) las energías cinéticas y c) la energía cinética perdida

SOLUCIÓN

Según el texto del problema $m_1 = m = 5kg = m_2$, $v_1 = 20\ m/s$ y $v_2 = 0$. Utilizando la ecuación 6.19

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{(m - \varepsilon m)}{m + m} v_1 + \cancel{\frac{(1 + \varepsilon)\, m}{m + m} v_2}^{\,0} \\
&= \frac{(1 - \varepsilon)\, \cancel{m}}{2\cancel{m}} v_1 \\
v_1' &= \frac{(1 - \varepsilon)}{2} v_1 \\
&= \frac{1 - 0.75}{2} v_1 \\
v_1' &= 0.125 v_1 \\
&= 0.125 \times 20\ m/s \\
v_1' &= 2.5\ m/s
\end{aligned}
$$

y correspondientemente

$$
\begin{aligned}
v_2' &= \frac{1 + \varepsilon}{2} v_1 \\
&= \frac{1 + 0.75}{2} v_1 \\
v_2' &= 0.875 v_1 \\
&= 0.875 \times 20\ m/s \\
v_2' &= 17.5\ m/s
\end{aligned}
$$

b) La energías cinéticas serán

$$
\begin{aligned}
K_1' &= \tfrac{1}{2} m v_1'^2 & \qquad K_2' &= \tfrac{1}{2} m v_2'^2 \\
&= \tfrac{1}{2} 5kg\ (2.5\ m/s)^2 & &= \tfrac{1}{2} 5kg\ (17.5\ m/s)^2 \\
K_1' &= 15.625\ J & K_2' &= 765.625\ J
\end{aligned}
$$

c) La energía cinética inicial era de $K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 1000\ J$. Por lo tanto se ha perdido

$$
\begin{aligned}
\Delta K_T &= K - K_1' - K_2' \\
&= 1000\ J - 15.625\ J - 765.625\ J \\
\Delta K_T &= 218.75\ J
\end{aligned}
$$

o alrededor del 22 % de la energía cinética se ha perdido en la colisión elástica.