Método de integración: integración por partes

- I) Deducción de formula
- II) Cuándo se aplica este método
- III) Cómo se aplica
- IV) Ejemplos

Deducción Fórmula del método

- Este método se basa en la derivada de producto de funciones y desde esa derivada se deduce su fórmula.

Fórmula de derivada de un producto

$$\frac{d}{dx}(f(x) * g(x)) = f(x) * \frac{d}{dx}(g(x)) + g(x) * \frac{d}{dx}(f(x))$$

Integrando

$$\int \frac{d}{dx}(f(x) * g(x))\ dx = \int \left[f(x) * \frac{d}{dx}(g(x)) + g(x) * \frac{d}{dx}(f(x)) \right] dx$$

$$\underbrace{f(x)}_{u} * \underbrace{g(x)}_{v} = \int \underbrace{f(x)}_{u} * \underbrace{g'(x)dx}_{dv} + \int \underbrace{g(x)}_{v} * \underbrace{f'(x)dx}_{du}$$

Esta integral se considera formada por el producto de una función f(x) y la derivada de otra función g´(x)dx .

Despejando

$$\int f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int g(x) * f'(x)dx$$

Formula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

¿Cuándo se aplica?

- Producto de funciones de distinto tipo, algebraicas y trascendentes.

$$\int x\, cos(x)dx \quad ; \quad \int \sqrt{x}\ln(x)\, dx$$

- Funciones trigonométricas inversas.
- Función logaritmo.
- Funciones sec(x) ó csc(x) elevadas a potencia IMPAR.

Cómo se aplica este método

- Su aplicación se basa en la identificación correcta de los elementos dentro del integrando ¿quién será **u** y quien **dv**?

- Para ello existe una sigla ILATE que facilita identificar estos elementos y separar el integrando.

- La prioridad en las funciones, según el orden de la sigla **ILATE** es : **inversa trigonométrica, logarítmica, algebraica, trigonométrica , exponencial.**

Procedimiento

a) Seleccionar u (será el primer tipo de función siguiendo el orden de la sigla ILATE)

b) El resto del integrando se considera el diferencial dv. El diferencial dx siempre forma parte de dv.

c) Derivar u, para obtener du e integrar dv, para obtener v.

a) Sustituir en la fórmula de integración por partes

b) Simplificar términos. Resolver la integral planteada.

$$\int x^2 Ln(x)dx$$

A L

$$u = Ln(x) \qquad dv = x^2\, dx$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad \int dv = \int x^2 dx$$

$$v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 Ln(x)dx = \frac{x^3}{3}Ln(x) - \int \frac{x^3}{3} * \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int x\cos(x)\,dx$$

Identificamos tipo de funciones: Algebraica y trigonométrica

Aplicando ILATE

- $u = x \qquad dv = \cos(x)\,dx$

Derivamos u, integramos dv

- $du = dx \qquad \int dv = \int \cos(x)\,dx$

$$v = sen(x) + C$$

Sustituimos en la fórmula

- $= x\,sen(x) - \int sen(x)dx$

Integramos

- $= x\,sen(x) - (-\cos x) + C$
- $= \boldsymbol{x\,sen(x) + \cos(x) + C}$

$$\int x^2\, tan^{-1}(x)\, dx$$

Aplicando ILATE

- $u = tan^{-1}(x)$ $\qquad dv = x^2 dx$
- $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ $\qquad \int dv = \int x^2 dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3} + C$

Derivamos u, integramos dv

- $= \frac{x^3}{3} tan^{-1}(x) - \int \frac{1}{3} \frac{x^3}{1+x^2} dx$

Sustituimos en la fórmula

Realizando división de polinomios

$$= \frac{x^3}{3} tan^{-1}(x) - \frac{1}{3} \int x - \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

- $= \frac{x^3}{3} tan^{-1}(x) - \frac{1}{3}\int x dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$

Realizando cambio de variable

- $u = 1 + x^2 \;\; \rightarrow du = 2x\, dx \;\rightarrow \frac{du}{2} = xdx$

- $= \frac{x^3}{3} tan^{-1}(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\, ln|1 + x^2| + C$

$$\int 3\ \ln\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$$

No aplica ILATE

- $u = ln\left(\frac{x}{2}\right) \qquad dv = dx \rightarrow \quad v = x$
- $du = \frac{1/2}{x/2}\ dx \ \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

Sustituimos en la fórmula

- $= 3x\ Ln\left(\frac{x}{2}\right) - 3x + C$