INTEGRACIÓN NUMÉRICA

¿CUÁNDO SE APLICA?

Se puede utilizar en toda integral definida, pero la importancia de este método es que sirve para evaluar integrales definidas en donde no podemos usar el teorema fundamental del cálculo

¿CÓMO SE APLICA?

Mediante dos reglas de aproximación numérica ;Regla del trapecio y Regla de Simpson.

REGLA DEL TRAPECIO

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Observaciones :

1) La aproximación tiende a volverse mas exacta a medida que n aumenta.
2) Los coeficientes en la regla del trapecio se escriben mediante el patrón
   1,2,2,2,…,2,2,1

REGLA DE SIMPSON

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{3n}\right)[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Observaciones :

1) n debe ser par.
2) Los coeficientes en la regla del trapecio se escriben mediante el patrón
   1,4,2,4,…,2,4,1

Obtenga el valor aproximado de la integral aplicando la regla de Simpson usando n = 8 .

Regla de Simpson

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

Encontrar el ancho de la Partición

$\Delta x = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$

Escribir los i a partir de n=8 iniciando desde cero

I = 0,1,2,3,4,5,6,7,8

Construir x_i que es la partición $\Delta x=\frac{1}{8}$

x_i : $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{3}{2}, \frac{13}{8}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, 2$

Evaluar x_i en la función

f(x_i): $0.707, 0.642, 0.581, 0.527, 0.478, 0.434, 0.396,$
$0.36, 0.333$

Usar k para la regla de Simpson

Multiplicar k por f(x_i)

Obtener la suma de kf(x_i)

Aplicar la fórmula de la regla de Simpson

K:1,4,2,4,2,4,2,4,1

kf(x_i): 0.707,2.568,1.162,2.108,0.956,1.736,0.792, 1.448, 0.333.

Kf(x_i)=11.81

$\frac{(b-a)}{3n}$Kf(x_i) = 0.492

Obtenga el valor aproximado de la integral definida aplicando la regla del trapecio. Realice todos los cálculos con tres cifras decimales $\int_2^4 \sqrt{x^3 + x}\ dx, n = 8.$

i	x_i	$f(x_i)$	K	$Kf(x_i)$
0	2	3.162	1	3.162
1	$\frac{9}{4}$	3.693	2	7.386
2	$\frac{5}{2}$	4.257	2	8.514
3	$\frac{11}{4}$	4.852	2	9.704
4	3	5.477	2	10.954
5	$\frac{13}{4}$	6.130	2	12.26
6	$\frac{7}{2}$	6.809	2	13.618
7	$\frac{15}{4}$	7.515	2	15.03
8	4	8.246	1	8.246
				88.874

$\Delta x = \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Xi = a + i (delta x)

Xi=2+0(1/4)= 2

Xi= 2+ 1(1/4)

$$\int_2^4 \sqrt{x^3+x}\,\mathrm{dx} \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

Aplicamos la regla del trapecio

$$\approx \left(\frac{4-2}{2(8)}\right)[88.874]$$

$$\approx \frac{2}{16}[88.874]$$

$$\approx 11.109\ u^2.$$

FORMULAS DEL ERROR

Formulas del Error para regla del trapecio

$$E \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$$

a,b :Son los limites de integración

n:Partición

M: es el número tal que $|f^{II}(X)| \leq M$

FORMULAS DEL ERROR

Fórmulas del Error para regla de Simpson

$$E \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M$$

a,b :Son los limites de integración

n:Partición

M: es el número tal que $|f^4(X)| \leq M$

Se requiere una mayor cantidad de divisiones con el método del trapecio para obtener el mismo error que con la regla de Simpson.

Ejemplo:

Obtenga el error al aplicar la regla del trapecio con n=10 para aproximar

$$\int_0^6 \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{1}{3}}}$$

Solución:

f(x) = $\frac{1}{(x^2+3)^{\frac{1}{3}}}$

f(x)=$(x^2+3)^{-\frac{1}{3}}$

f(x)=$-\frac{1}{3}(x^2+3)^{-\frac{4}{3}}$ (2x)

f´(x)=$-\frac{2}{3}x(x^2+3)^{-\frac{4}{3}}$ PRIMERA DERIVADA

$$f^{II}(x) = -\frac{2}{3}\left[(x^2+3)^{-\frac{4}{3}} + x\left(-\frac{4}{3}\right)(x^2+3)^{-\frac{7}{3}}(2x)\right]$$

$$f^{II}(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2+3)^4}} + \frac{16}{9}x^2(x^2+3)^{-\frac{7}{3}}$$

Segunda derivada

$$|f^{II}(0)| = \left|-\frac{2}{3\sqrt[3]{81}} + 0\right| = \left|-\frac{2}{9\sqrt[3]{3}}\right| \approx 0.154$$

$$|f^{II}(6)| = \left|-\frac{2}{3\sqrt[3]{(39)^4}} + \frac{16}{9}(36)(39)^{\frac{-7}{3}}\right| \approx 0.007$$

Evaluamos los limites de la integral en la segunda derivada y el mayor resultado en valor absoluto es M

Tomamos M = $\frac{2}{9\sqrt[3]{3}} \approx 0.154$ por ser el mayor valor al aplicarle valor absoluto

$$E \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$$

$$E \leq \frac{(6-0)^3}{12(10)^2}\left(\frac{2}{9\sqrt[3]{3}}\right)$$

$$= \frac{216}{12(100)}\left(\frac{2}{9\sqrt[3]{3}}\right)$$

Sustituimos los valores en la fórmula

E = 0.028

2. Aplique la formula del error para hallar un n tal que el error cometido al aproximar la integral

$$\int_{0}^{2} \sqrt{x+2}\,dx$$

Sea menor que 0.00001 al usar la regla de Simpson

Solución:

f(x) = $(x+2)^{\frac{1}{2}}$

f´(x)=$\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}$

f´´(x) = - $\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{2}}$

f´´´(x) = $\frac{3}{8}(x+2)^{-\frac{5}{2}}$

f^{4}(x) = - $\frac{15}{16}(x+2)^{-\frac{7}{2}}$

Encontramos la primera, segunda, tercera y cuarta derivada

Ahora evaluamos en la cuarta derivada con valor absoluto para encontrar el valor máximo (M)

$$|f^{4}(0)| = \left| -\frac{15}{16}(0+2)^{-\frac{7}{2}} \right| = 0.082$$

$$|f^{4}(2)| = \left| -\frac{15}{16}(2+2)^{-\frac{7}{2}} \right| = 0.007$$

El valor Máximo en la cuarta derivada utilizando valor absoluto es 0.082 y lo tomamos como M

Error con Simpson $E \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M$

$E \leq \frac{(2-0)^5}{180n^4} 0.082 \leq 0.00001$

$$\frac{(2)^5}{180(0.00001)} 0.082 \leq n^4$$

$1457.77 \leq n^4$

$6.2 \leq n$ Donde aproximamos al mayor $n = 8$,ya que La aproximación tiende a volverse mas exacta a medida que n aumenta.