UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

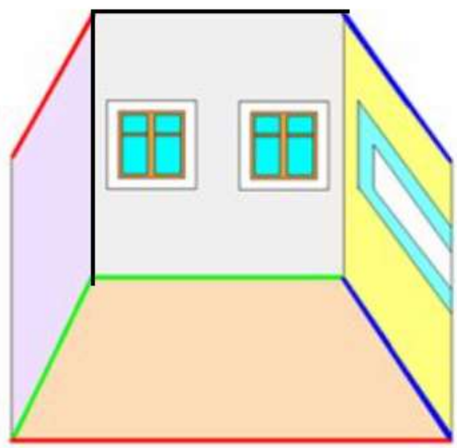
ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 13- Unidad 4: *Rectas y planos en el espacio.*

SESIÓN 2: Posición relativa entre rectas en el espacio (secantes, paralelas, cruzadas, coincidentes), Distancia de un punto a una recta en el espacio, Distancia entre rectas que se cruzan.

Posición relativa entre dos rectas en el espacio.

Figura 1



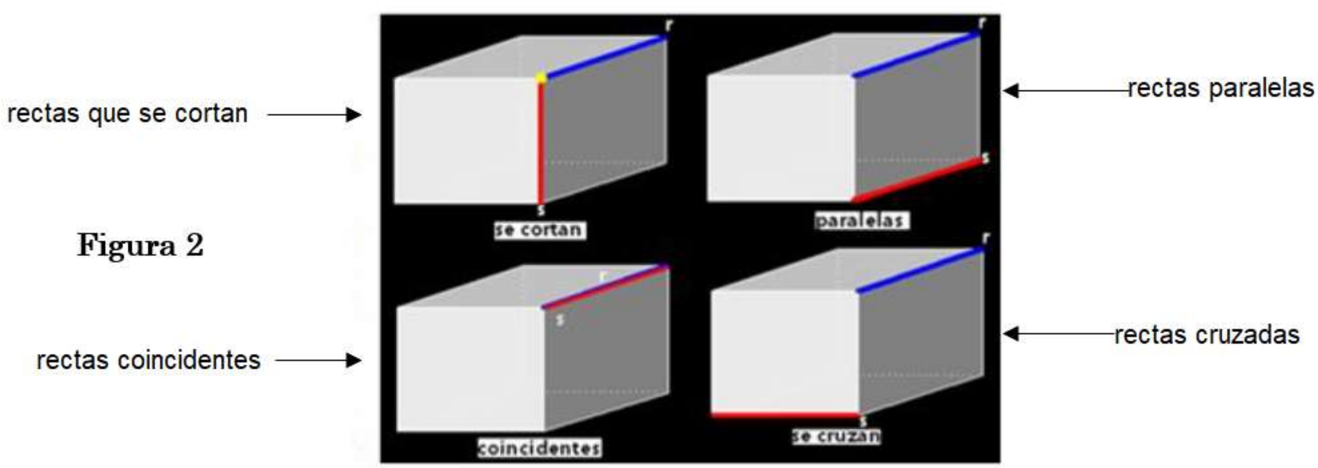
Las rectas de color verde se cortan en un punto. **Son rectas secantes. (son también perpendiculares)**

Las rectas de color azul por mucho que las prolonguemos no se encuentran, y tienen en común el plano de color amarillo. **Son rectas paralelas.**

Las rectas de color rojo por mucho que las prolonguemos no se encuentran y no tienen en común plano alguno. **Son rectas cruzadas.**

Las rectas de color negro son **perpendiculares.**

Figura 2



Si tenemos dos rectas en el espacio:

$$L_1 \begin{cases} x = x_0 + a_0 t \\ y = y_0 + b_0 t \\ z = z_0 + c_0 t \end{cases} \qquad\qquad L_2 \begin{cases} x = x_1 + a_1 s \\ y = y_1 + b_1 s \\ z = z_1 + c_1 s \end{cases}$$

Según su relación geométrica, éstas pueden ser entre sí:

1 Rectas paralelas. $L_1 \parallel L_2$

Son dos rectas que están contenidas en un mismo plano. En este caso los números directores de las dos rectas son proporcionales, es decir:

$$\langle a_0, b_0, c_0 \rangle = K\langle a_1, b_1, c_1 \rangle$$

Se tiene entonces: $a_0 = K a_1 \rightarrow K = \frac{a_0}{a_1}$

$$b_0 = K b_1 \rightarrow K = \frac{b_0}{b_1} \qquad \frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = \frac{c_0}{c_1} = K$$

$c_0 = K c_1 \rightarrow K = \frac{c_0}{c_1}$ (Ver ejemplo en la sesión 1 de esta semana)

Rectas perpendiculares. $L_1 \perp L_2$

2

En este caso el producto de sus vectores direccionales es igual a cero.

Entonces: $\langle a_0, b_0, c_0 \rangle . \langle a_1, b_1, c_1 \rangle = a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1 = 0$. (Ver ejemplo en la sesión 1 de esta semana)

3 Rectas secantes.

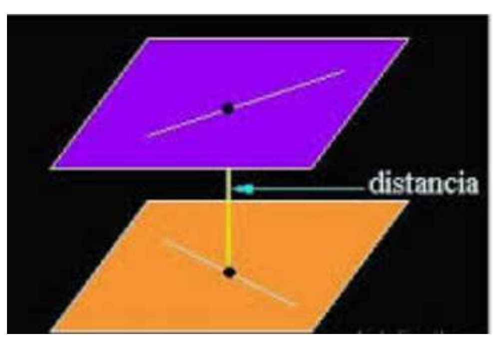
En este caso, las rectas se cortan, es decir entre ambas hay un punto de intersección. Están contenidas en un mismo plano. Sus vectores direccionales no son proporcionales.

4 Rectas cruzadas u oblícuas.

Son aquellas que no se cortan y no están contenidas en un mismo plano. No tienen ningún punto en común. Sus vectores directores no son proporcionales.

Las dos rectas mostradas son cruzadas.

Figura 3



Ejemplo de rectas cruzadas.

Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $P(-3{,}9{,}8)$ y $R(0{,}7{,}6)$, y L_2 la recta que pasa por $Q(1{,}3{,}3)$ y $S(3{,}2{,}1)$.

Demuestre que L_1 y L_2 son rectas cruzadas u oblicuas.

Solución

a) Para probar que las dos rectas no están en un mismo plano se verificará que los dos vectores no se intersecan y que no son paralelas.

Las ecuaciones paramétricas de las dos rectas son:

Punto de L_1: $P(-3{,}9{,}8)$

Vector direccional de L_1: $\vec{u} = \overrightarrow{PR} = \langle 3, -2, -2 \rangle$

Ecuaciones paramétricas de L_1: $x = -3 + 3t \qquad y = 9 - 2t \qquad z = 8 - 2t$

Punto de L_2: $P(1, {,}3{,}3)$

Vector direccional de L_2: $\vec{v} = \overrightarrow{QS} = \langle 2, -1, -2 \rangle$

Ecuaciones paramétricas de L_2: $x = 1 + 2s \qquad y = 3 - s \qquad z = 3 - 2s$

Como los números directores de los dos vectores direccionales no son proporcionales, las rectas L_1 y L_2 no son paralelas.

$$\langle 3, -2, -2 \rangle \neq k\langle 2, -1, -2 \rangle, \text{ para un } k \text{ real.}$$

Si las dos rectas se intersecan, deben existir dos números t y s que nos den el mismo punto (x_1, y_1, z_1) en los dos grupos de ecuaciones paramétricas (L_1 y L_2).

Entonces, igualando los miembros derechos de las ecuaciones correspondientes (x con x, y con y , z con z) obtenemos:

$$-3 + 3t = 1 + 2s$$

$$9 - 2t = 3 - s$$

$$8 - 2t = 3 - 2s$$

Al resolver las dos primeras ecuaciones simultáneamente obtenemos:

$$3t - 2s = 4$$

$$-2t + s = -6$$

$t = 8$ y $s = -9$. Estos dos valores no satisfacen la tercera ecuación

$$8 - 2t = 3 - 2s$$

$$8 - 2(8) \neq 3 - 2(-9)$$

$$-8 \neq 21$$

Por tanto, las dos rectas no se intersectan, de manera que L_1 y L_2 son rectas oblicuas o cruzadas.

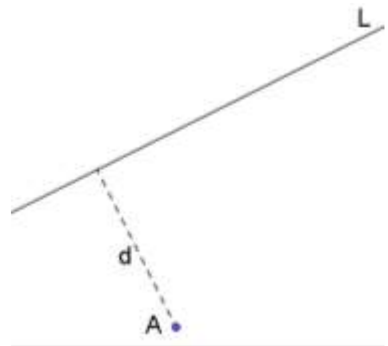
5 Rectas coincidentes.

Sus vectores directores son proporcionales. Son dos líneas que tienen todos sus puntos en común. Por lo tanto, dos rectas coincidentes son completamente idénticas. Ambas tienen la misma dirección, por lo que geométricamente forman un ángulo de 0^0. Están ubicadas en un solo plano. (ver figura 2).

Distancia de un punto a una recta (en el espacio)

Estudiaremos la distancia de un punto A a una recta L

Figura 4



Sea L la recta definida por un punto P y un vector direccional $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ de L.

Nos piden hallar la distancia desde el punto A a la recta L. Sabemos que la distancia desde el punto A a la recta es el camino más corto que hay entre los dos elementos (punto y recta). Hay varios procedimientos para ello.

Veamos este:

Sean P y Q dos puntos cualesquiera de la recta, unimos el punto P con el punto A, trazamos una paralela a la recta y una paralela a $\overline{PA}$ para formar un paralelogramo, y marcamos los vectores $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{PA}$, y sea $d = h$ la altura del paralelogramo formado.

Recordemos que el área de un paralelogramo es

Área = (base) (altura)

$$A = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| d$$

$$A = \|\vec{v}\| d$$

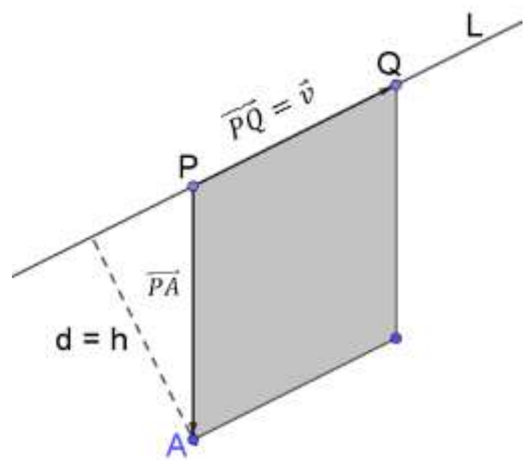


Figura 5

Despejando d tenemos

$$d = \frac{A}{\|\vec{v}\|}$$

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Ejemplo

Halle la distancia del punto $A = (2,4,1)$ a la recta $L: x = 2 + t, y = 3 + 2t,$ $z = -1 + t.$

Solución

Tomemos el punto $P(2,3,-1)$ de L, y sea $\vec{v} = \langle 1,2,1 \rangle$ el vector direccional de la recta con $\|\vec{v}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$ Sea $\overrightarrow{PA} = \langle 2-2, 4-3, 1+1 \rangle = \langle 0,1,2 \rangle$

Calculemos el producto vectorial $\overrightarrow{PA} \times \vec{v}$

$$\overrightarrow{PA} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \langle -3,2,-1 \rangle$$

Así,

$$\|\overrightarrow{PA} \times \vec{V}\| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

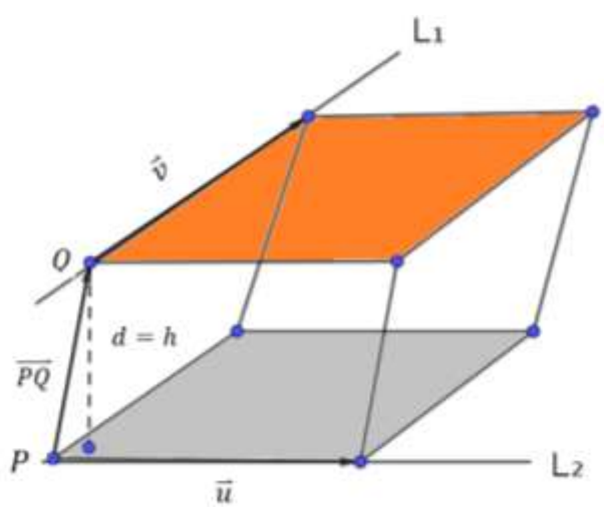
Y aplicando la fórmula

$$d = \frac{\|\overrightarrow{PA} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1.53\ u.l$$

Distancia entre dos rectas cruzadas

Dos rectas se cruzan cuando cada una de ellas pertenece a planos diferentes, y por tanto, por mucho que se prolonguen nunca se encuentran. (ver figura)

Figura 6



Veamos cómo se halla la distancia entre dos rectas que se cruzan, L_1 y L_2.

De la recta L_2 elegimos un punto P y un vector direccional $\vec{u}$. De la recta L_1, tomamos un punto llamado Q y su respectivo vector direccional $\vec{v}$. Trazamos un vector que va de P a Q llamado $\overrightarrow{PQ}$. Dibujamos un paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$. El paralelepípedo nos servirá para calcular la distancia de la recta L_1 a la recta L_2, y la llamamos d(la mínima distancia entre un punto cualquiera de L_1 y un punto cualquiera de L_2). La distancia d es la distancia entre los dos planos paralelos.

¿Cómo calculamos d?

Sabemos que el volumen del paralelepípedo es igual al área de la base por la altura.

$$V = A_{base}.h$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}.(\vec{u} \times \vec{v})\right| = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.d$$

Entonces,
$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}.(\vec{u} \times \vec{v})\right|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Ejemplo de distancia entre dos rectas cruzadas.

Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $P(-3,9,8)$ y $R(0,7,6)$, y L_2 la recta que pasa por $Q(1,3,3)$ y $S(3,2,1)$. Ya verificamos que ambas rectas son cruzadas.

Hallar la distancia entre ellas.

Solución

La recta L_1 tiene a los puntos $P(-3,9,8)$ y $R(0,7,6)$ y la recta L_2 a los puntos

$Q(1,3,3)$ y $S(3,2,1)$. Como las dos rectas son cruzadas, existen planos paralelos P_1 y P_2 que contienen a las rectas L_1 y L_2 respectivamente.

Sea d la distancia entre los dos planos. La distancia entre las dos rectas también es d unidades.

Aplicamos la expresión que permite calcular la distancia d:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}.(\vec{u} \times \vec{v})\right|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

Sea $\overrightarrow{PQ} = \langle 4, -6, -5\rangle$, entonces $\overrightarrow{PQ}.(\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -5 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9$

Sea $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \langle 2,2,1\rangle$, y $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{9} = 3$

Así,

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ}.(\vec{u} \times \vec{v})\right|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|-9|}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ u.l}$$

Ejemplo de dos rectas que se cortan.

Demuestre que las rectas $L_1\ y\ \ L_2$ se cortan. Halle el punto de corte.

$$L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3} \quad , \qquad L_2 = \frac{x}{1} = \frac{z}{1}, y = 0$$

Solución

Los vectores directores de ambas rectas $\vec{u}_1 = \langle 1,1,3\rangle\ y\ \vec{u}_2 = \langle 1,0,1\rangle$ no son proporcionales, luego $\vec{u}_1\ y\ \ \vec{u}_2$ no son paralelos y por ende, las rectas no son paralelas. Sean $A(2,0,2)\ y\ B(0,0,0)$ puntos de $L_1\ y\ L_2$, respectivamente.

Formemos entonces el vector $\overrightarrow{AB} = \langle -2,0,-2\rangle$, y calculemos el $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overrightarrow{AB})$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, entonces las rectas se cortan, formando un plano, y los vectores $\vec{u}_1,\ \vec{u}_2\ y\ \overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes. Para encontrar el punto de corte hacemos:

L_1:	L_2:
$x = 2 + t$	$x = s$
$y = t$	$y = 0$
$z = 2 + 3t$	$z = s$

Haciendo $x = x$, $y = y$, tenemos que $2 + t = s$ y que $t = 0$, entonces $s = 2$. Sustituimos estos valores de $t\ \ y\ \ s$ en las z, obteniendo en ambos casos $z = 2$

Así, el punto de corte es $(2,0,2)$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR.

1. Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, perpendiculares, oblicuas, o se cortan. Si se cortan, encuentre el punto de intersección.

a) $L_1: \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-3}$

$L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$

b) $L_1: x = -6t, y = 1 + 9t, z = -3t$

$L_2: x = 1 + 2s, y = 4 - 3s, z = s$

c) $L_1: x = 3 + 2t, y = -1 + 4t, z = 2 - t$

$L_2: x = 1 + 4s, y = 1 + 2s, z = -3 + 4s$

2. Determine cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares y cuáles paralelas.

$a)$ $L_1: x = 1 + 9t, y = 12t, z = 2 - 6t$

$b)$ $L_2: x = 2t, y = -3t, z = 4t$

$c)$ $L_3: x = 1 + t, y = 2 + 2t, z = t$

$d)$ $L_4: x = 2 + 3t, y = 1 + 4t, \quad z = 3 - 2t$

$e)$ L_5: pasa por los puntos $(2, -1, -5)$ y $(8,8,7)$

3. Determina si las rectas L_1 y L_2 se intersecan. Si es así, encuentra el punto de intersección.

a) $L_1: x = 4 + t, y = 5 + t, z = -1 + 2t$

$L_2: x = 6 + 2s, y = 11 + 4s, z = -3 + s$

b) $L_1: x = 2 - t, y = 3 + t, z = 1 + t$

$L_2: x = 4 + s, y = 1 + s, z = 1 - s$

4. Encuentre la distancia del punto a las rectas.

a) $(0,0,12), x = 4t, y = -2t, z = 2t$

b) $(2,1,3), x = 2 + 2t, y = 1 + 6t, z = 3$

5. Determine si las rectas L_1 y L_2 se cruzan. Si se cruzan, la distancia entre ellas.

a) $L_1: \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-3}$

$L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$