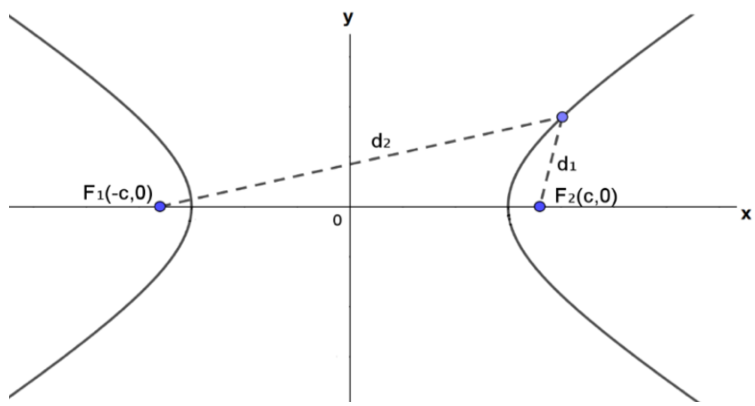
UNIVERSIDAD DON BOSCO - DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES - CICLO 02 - 2020

Semana 9. Unidad 3: Geometría Analítica

Sesión 2: La Hipérbola

Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados focos, se denomina elipse al conjunto de puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a ambos focos es constante.

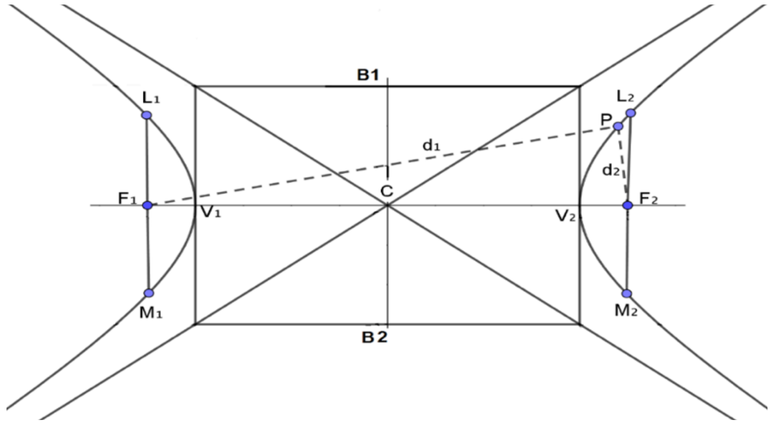
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a = constante$$



Si la distancia entre los focos es $d\left(F_{1,}F_2\right) = 2c$, la condición para tener una hipérbola es:

$$c > a > 0$$
$$c^2 > a^2$$
$$c^2 - a^2 = b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

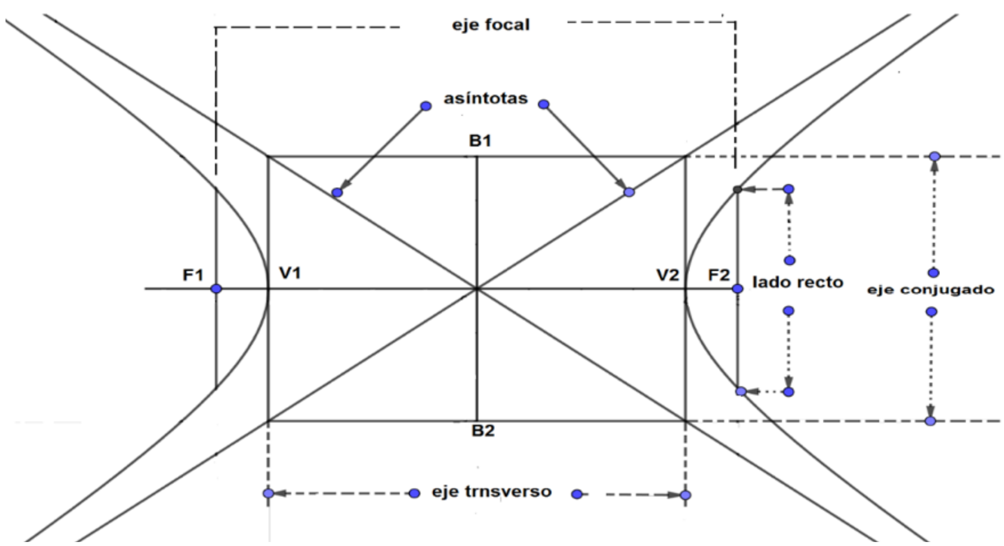
En la figura siguiente se muestran elementos importantes de una hipérbola.



$$PF_1 - PF_2 = d_1 - d_2 = 2a$$

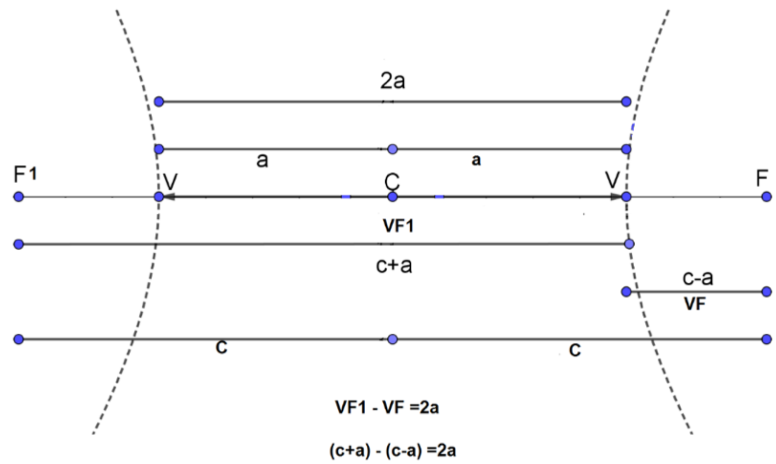
Centro: es el punto medio del segmento que une los vértices (y los focos).
Vértices: son los puntos V_1 y V_2 de intersección de la hipérbola con el eje mayor.
Focos: son los puntos F_1 y F_2.
Eje transverso: es el segmento V_1V_2 que equivale a $2a$.
Eje conjugado: es el segmento B_1B_2 que equivale a $2b$.
Eje focal: es la distancia entre los focos F_1F_2 igual a $2c$.Es la mayor distancia entre dos puntos opuestos de la hipérbola.
Lados rectos: son las cuerdas focales L_1M_1 y L_2M_2, cada uno con medida igual a $\frac{2b^2}{a}$.

Ilustración gráfica de los ejes transverso, conjugado, focal y asíntotas



De acuerdo con la definición de la hipérbola, al tomar cualquiera de sus puntos, y calculamos sus distancias a los focos y luego restamos esas distancias el valor es siempre el mismo, independientemente de cual punto de la hipérbola elijamos.

Si en la siguiente figura llamamos



a = longitud del semieje transverso
c = distancia del centro a cada foco

Observamos lo siguiente:

$$VF1 - VF = constante$$
$$(c + a) - (c - a) = 2a$$

Como el vértice V es un punto P de la hipérbola, lo anterior quiere decir que la constante que se menciona en la definición es igual a $2a$ que es igual a la medida del eje transverso o sea la medida entre los dos vértices.

$$d_1 - d_2 = \overline{VV} = 2a$$

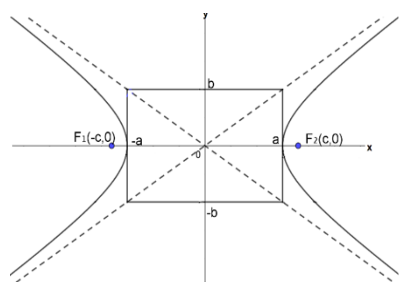
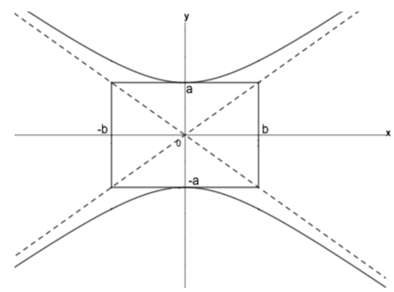
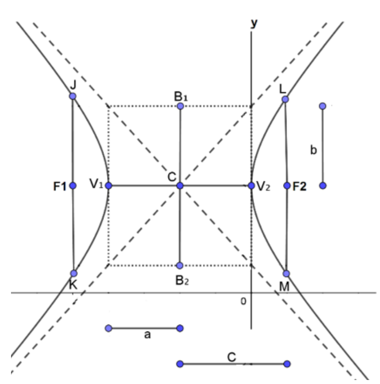
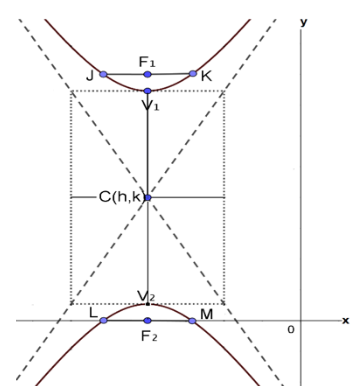
Conociendo la distancia entre los focos y la longitud del eje transverso, es indispensable determinar cuánto mide el eje conjugado para poder trazar la hipérbola. Su longitud está estrechamente ligada a las dos cantidades anteriores mediante la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

En esta expresión,

$$c = longitud\ del\ semieje\ conjugado$$
$$a = longitud\ del\ semieje\ transverso$$
$$b = longitud\ del\ eje\ conjugado$$

Ecuación ordinaria de la hipérbola cuando el centro está en el origen $C(0,0)$ y cuando está en el punto $C(h,k)$

Hipérbola	**Horizontal**	**Vertical**
Centro en el origen $C(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Gráficas		
Centro en el punto $C(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
Vértices	$V(h \pm a, k)$	$V(h, k \pm a)$
Focos	$F(h \pm c, k)$	$F(h, k \pm a)$
Extremos del eje conjugado	$B(h, k \pm b)$	$B(h \pm b, k)$
Asíntotas	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$
Gráficas		

Ecuación general de la hipérbola

Si desarrollamos y simplificamos las ecuaciones ordinarias de la hipérbola y las igualamos a cero, obtenemos la ecuación general de la hipérbola.

Podemos escribir cada una de esas ecuaciones en la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A \ y \ C$ tienen signos opuestos.

Excentricidad

La excentricidad también se puede calcular a partir de los semiejes $a \ y \ b$ mediante la fórmula

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

La excentricidad $\boldsymbol{e}$ de una hipérbola es la razón entre su semisuma focal (longitud del segmento que parte del centro de la hipérbola y termina en uno de sus focos) denominada por c, y su semieje transverso a, donde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Si la excentricidad es muy cercana a 1, la hipérbola tiende a convertirse en una recta cortada.

$$e \approx 1$$

Si la excentricidad crece, la hipérbola tiende a dos rectas paralelas al eje conjugado.

Excentricidad muy grande

La excentricidad mide lo abierta que es la hipérbola. Puesto que c (semidistancia focal) es siempre mayor que a (semieje transverso), la excentricidad de la hipérbola es siempre mayor que 1.

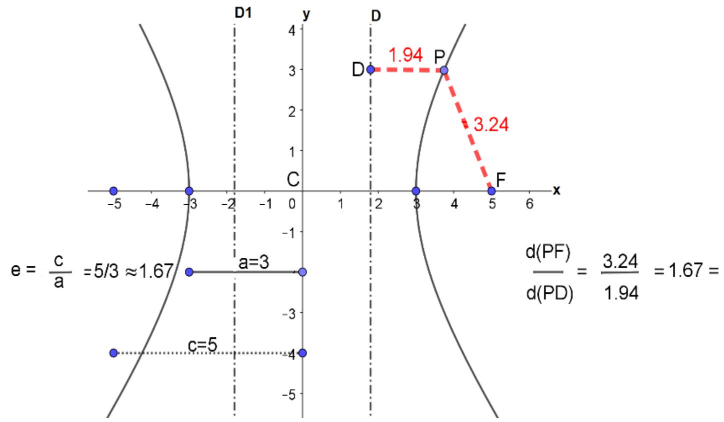
$$e > 1$$

Directrices

Las directrices de una hipérbola horizontal son rectas perpendiculares al eje transverso y están situadas a una distancia $\frac{a}{e}$ del centro de la hipérbola. La hipérbola tiene una directriz por cada foco.

Ahora podemos definir la excentricidad e $(e > 1)$ de la hipérbola como el cociente entre las distancias desde un punto P de la hipérbola a uno de los focos y su correspondiente directriz.

$$e = \frac{d(PF)}{d(PD)}$$



Las ecuaciones de las rectas directrices de una hipérbola horizontal con centro en el origen son

$$x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{a}{e} \quad \text{y} \quad x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$$

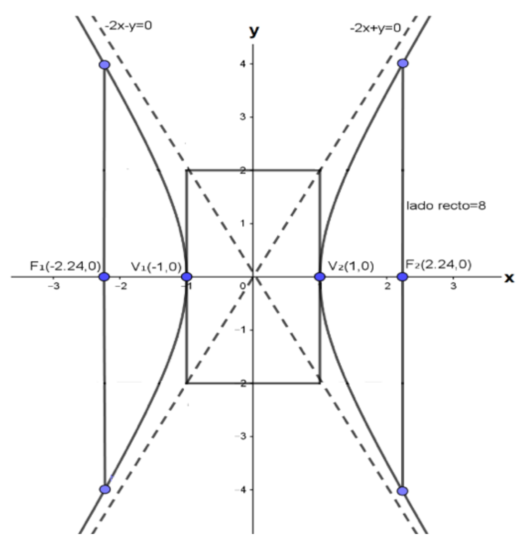
Y las ecuaciones de las directrices de una hipérbola vertical con centro en el origen son:

$$y = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} \quad y \quad y = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$$

Ejercicios:

1. Grafica la curva definida por la ecuación $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$

Solución



La ecuación responde a la forma canónica de una hipérbola horizontal (eje focal: eje x). Luego $C(0,0)$.

Semieje transverso : $a = 1$

Semieje conjugado : $b = 2$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Coordenadas de los vértices: $V_1(-1,0)$ y $V_2(1,0)$

Coordenadas de los focos:$F_1\left(-\sqrt{5},0\right)\ y\ \ F_2\left(\sqrt{5},0\right)$

Asíntotas: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{2}{1}x=\pm 2x$

2. **Calcula la ecuación y todos sus elementos de la hipérbola con centro en el punto $\boldsymbol{C(-1,-4)}$, uno de sus vértices el punto $\boldsymbol{V_1(-1,12)}$ y con excentricidad $\boldsymbol{e=\frac{17}{8}}$.**

Solución

Sabemos que la distancia del centro de la hipérbola cualquiera de sus vértices es a. Así que

$$a=|12-(-4)|=|16|=16$$

Con el valor de excentricidad de la hipérbola, podemos calcular el valor de c.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{16}=\frac{17}{8}\Rightarrow c=34$$

Para encontrar el parámetro b, lo hacemos por medio de

$$b=\sqrt{c^2-a^2}\ =\sqrt{1{,}156-256}=\sqrt{900}=30$$

Pasamos a encontrar los elementos de la hipérbola.

Como el vértice está arriba del centro de la hipérbola, su posición es vertical, es decir es de la forma

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Entonces el otro vértice está debajo del centro a 16 unidades de él:

$$V_2(-1,-4-16)=V_2(-1,-20)$$

Los focos están uno arriba y otro abajo del centro.

$$F_1(-1,-4+34)=F_2(-1{,}30)\ \ y\ \ \ F_2(-1,-4-34)=F_2(-1,-38)$$

La longitud del eje transverso es $2a=2(16)=32$

La longitud del eje conjugado es $2b=2(30)=60$

La longitud de cada lado recto es

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(900)}{16}=112.5$$

La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{\left(y-(-4)\right)^2}{16^2}-\frac{\left(x-(-1)\right)^2}{30^2}=1$$

$$\frac{(y+4)^2}{256}-\frac{(x+1)^2}{900}=1$$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y+4=\pm\frac{8}{15}(x+1)$$

$$y=\pm\frac{8}{15}(x+1)-4 \quad\begin{cases} y=\dfrac{8}{15}x-\dfrac{52}{15} \\ y=-\dfrac{8}{15}x-\dfrac{68}{15}\end{cases}$$

3. Grafica la hipérbola $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ junto a las dos directrices y calcula la excentricidad.

Solución

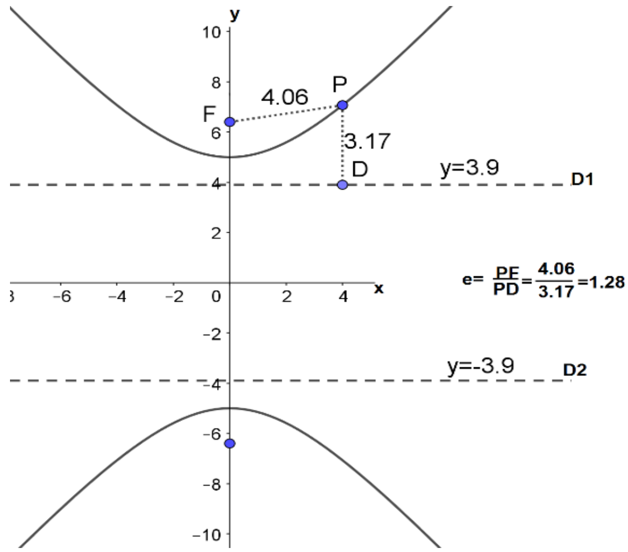
$$a^2=25 \Rightarrow a=5;\;\; b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow c=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{41}}{5}\approx 1.2$$

Las ecuaciones de las dos directrices son:

$y=\frac{a}{e}=\frac{5}{1.28}\approx 3.9=\frac{a^2}{c}=\frac{25}{\sqrt{41}}\approx 3.9$ y $y=-\frac{a}{e}=-\frac{5}{1.28}\approx -3.9=-\frac{25}{\sqrt{41}}$

La gráfica de la hipérbola es



4. **Muestra que la gráfica de la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$ que es una hipérbola. Determina su centro, una ecuación del eje principal y los vértices. Dibuja la hipérbola y muestra el rectángulo o caja auxiliar y sus asíntotas.**

Solución

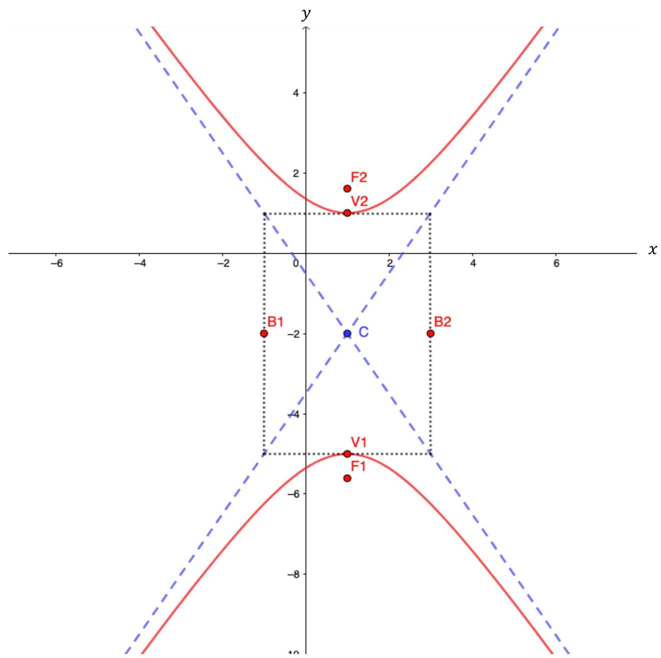
Comienza completando cuadrados en x y y. Así,

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) = -29$$
$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) = -29 + 9 - 16$$
$$9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = -36$$
$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

Esta ecuación es la de la hipérbola cuyo centro está en $(1.-2)$ y por estar en posición vertical su eje principal es la recta que tiene la ecuación $x = 1$. Debido a que $a^2 = 9 \ y \ b^2 = 4\,, a = 3 \ y \ b = 2$, los vértices están sobre el eje principal, 3 unidades arriba y abajo del centro, de modo que los vértices son

$$V_1(h, k-a) = V_1(1, -2-3) = V_1(1, -5) \qquad \text{y} \qquad V_2(h, k+a) = V_2(1, -2+3) = V_2(1,1).$$

El rectángulo auxiliar tiene lados de longitudes $2a = 6$ y $2b = 4$ y se muestra la gráfica junto con las asíntotas y la hipérbola.



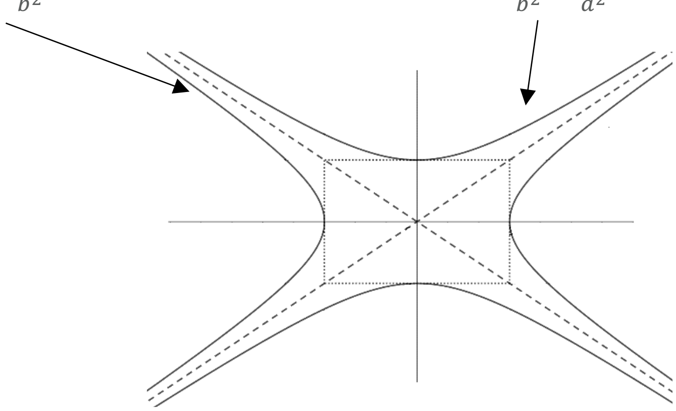
Hipérbolas conjugadas

Dos hipérbolas son conjugadas cuando el eje transverso de una es el eje conjugado de la otra.

Las hipérbolas conjugadas tienen el mismo rectángulo básico y las mismas asíntotas.

En términos analíticos se las reconoce porque los signos están cambiados, y los coeficientes de x y de y siguen siendo los mismos en términos absolutos. Las siguientes hipérbolas son conjugadas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

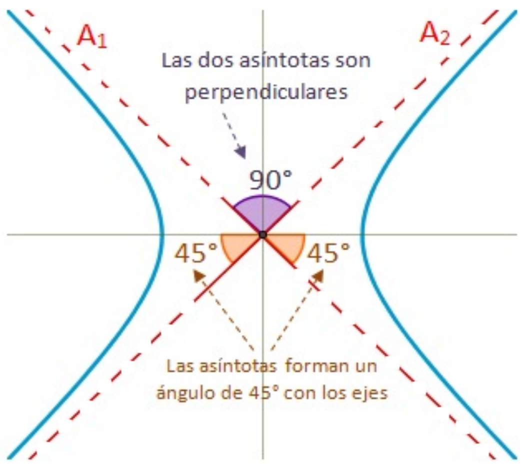


Hipérbolas equiláteras

Si en las ecuaciones

$$a)\ \ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad o \qquad b)\ \ \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

los semiejes $a \;\; y \;\; b$ son iguales $(a=b)$, las hipérbolas se denominan equiláteras, ya que el rectángulo principal de la hipérbola equilátera es un cuadrado, y por tanto, sus asíntotas son perpendiculares entre sí.



Sus ecuaciones entonces son

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{o bien} \quad x^2-y^2=a^2$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad \text{o bien} \quad y^2-x^2=a^2$$

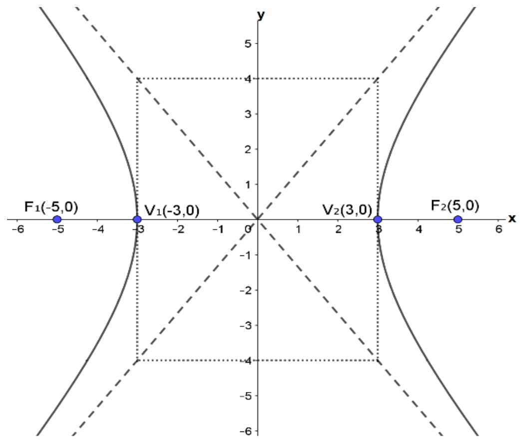
Ejercicio 1

a) Traza la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$
b) Escriba la ecuación de la hipérbola conjugada.
c) Grafica su hipérbola conjugada.
d) Obtenga las ecuaciones de las asíntotas.

Solución

a) En la ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1,\ a^2 = 9 \Rightarrow a = 3\ \ y\ \ b^2 = 16\ \Rightarrow b = 4.$

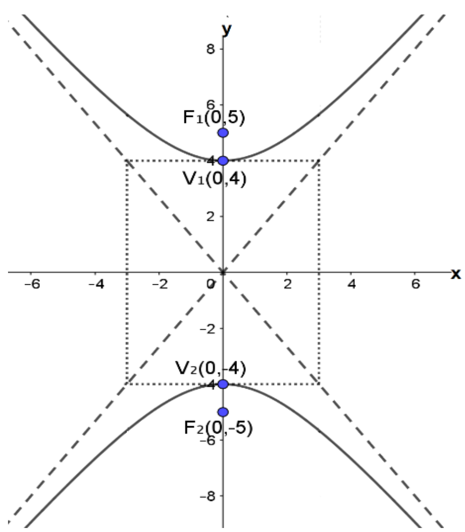
La ecuación entonces, corresponde a una hipérbola horizontal con centro en $(0,0)$.
Una vez dibujado el rectángulo básico de lados $2a\ y\ 2b$, sus diagonales nos ayudarán a trazar las gráficas solicitadas.



b) La hipérbola conjugada es vertical, los valores de $a\ y\ \ b$ se obtienen intercambiando los valores de $a\ y\ b$ en la ecuación de su conjugada, es decir, para esta nueva ecuación $a = 4\ \ y\ \ b = 3$. Sustituyendo estos valores obtenemos la ecuación

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

c) Gráfica de la hipérbola conjugada:



d) Las pendientes de las rectas asíntotas son $m = \frac{4}{3}$ y $m = -\frac{4}{3}$.

Las ecuaciones de las asíntotas para ambas hipérbolas son $y = \pm\frac{4}{3}x$

Ejercicios propuestos

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones de hipérbola, encuentre: a) su posición, b) la longitud del eje transverso y eje conjugado, c) la lungitud de cada lado recto d) la exentricidad e) las coodenadas del centro, los focos, los vértices, los extremos del eje conjugado, extremos de cada uno de los lados rectos y trace su gráfica.
    i. $9(y+3)^2 - 4(x-1)^2 = 1$
    ii. $\frac{y^2}{25} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$
    iii. $\frac{(y-3)^2}{36} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$
    iv. $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 4 = 0$
2. Hallar las ecuaciones de la siguientes hipérbolas que satisface las condiciones dadas, después encuentre los elementos que faltan y trace la grafica de cada una de ellas.
    a. Sus vértices tienen por coordenadas $(0,0)$ y $(0,6)$, y uno de los focos tiene por coordenadas $(0,8)$.
    b. Su centro es el punto de coordeandas $(2,-1)$, uno de los focos tiene por coordenadas $(5,-1)$ y uno de sus vértices tiene por coordenadas: $(4,-1)$.
    c. Con centro en el origen, un vértice en el punto $(3,0)$, longitud del lado recto 24. Graficar.
    d. Cento en $(-5,1)$, excentricidad $\frac{4}{3}$, un vértice en $(-5,-3)$.
3. Una hipérbola tiene un vértice en (-5,0) y las asíntotas tienen ecuación $x - 3y + 2 = 0$; $x + 3y + 2 = 0$. Encuentre su otro vértice, los focos, su ecuación y grafique indicando cada uno de sus elementos así como su rectángulo básico.
4. Encuentra la conjugada de la siguiente hipérbola. Trazar la grafica de la hipérbola y su conjugada.
    a. $\frac{(x+1)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
5. Halla la ecuación de la hipérbola equilátera de distancia focal en en $c = 3\sqrt{2}$. ¿Está el punto $P(5,4)$ en la hipérbola.?