CALCULO CON ECUACIONES PARAMÉTRICAS

- CALCULO DIFERENCIAL : DERIVADAS , RECTA TANGENTE
- CALCULO INTEGRAL : LONGITUD DE ARCO

Mg. Silvia Somoza

CALCULO DIFERENCIAL

- VAMOS A APLICAR EL CALCULO DIFERENCIAL A LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y EXISTEN CONCEPTOS O PRE SABERES A RECORDAR:

a) INICIANDO CON LA PRIMERA DERIVADA QUE SE REPRESENTA COMO $\frac{dy}{dx}$, LA PRIMERA DERIVADA ES LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A UNA GRAFICA, EN UN PUNTO O UN PARÁMETRO ESPECIFICO. ESTO PERMITIRÁ CONOCER LA ECUACIÓN DE RECTA TANGENTE A ESTA CURVA.

b) PARA LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE SE NECESITA : PENDIENTE Y COORDENADA (X,Y)

c) SE OBTENDRÁN DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR, SEGUNDA $\frac{d^2y}{dx^2}$ O TERCERA $\frac{d^3y}{dx^3}$, PERO NO SE TRABAJARA SU APLICACIÓN EN GRAFICAS.

Mg. Silvia Somoza

¿COMO SE DERIVAN LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS?

- La primera derivada de las ecuaciones paramétricas se basa en regla de cadena , de manera que se obtiene lo siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} * \frac{dx}{dt}$$ al despejar la derivada $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$, si $\frac{dx}{dt} \neq 0$

siendo el cociente de las derivadas de x e y respecto a t .

- Para obtener las derivadas de orden superior se toma como base el cociente de las derivadas de la siguiente manera

Segunda derivada $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$$

Tercera derivada $$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx/dt}$$

Mg. Silvia Somoza

EJEMPLO

- DADAS LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS $x = t^2, y = t^6 + 3t^2 - 1$, OBTENGA $\frac{dy}{dx}$ Y $\frac{d^2y}{dx^2}$
- $$\frac{dy}{dx} = \frac{6t^5+6t}{2t}$$

Derivada de y respecto a t

Derivada de X respecto a t

Las derivadas siempre se simplifican

- SIMPLIFICANDO $\frac{dy}{dx} = \frac{(6t)\,(t^4+1)}{2t} = 3t^4 + 3$

Derivando la primera derivada respecto a t

- SEGUNDA DERIVADA $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(3t^4+3)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12t^3}{2t} = 6t^2$

La misma Derivada de X respecto a t

Mg. Silvia Somoza

¿COMO SE OBTIENE LA ECUACIÓN DE RECTA TANGENTE ?

- PARA LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE DEBEMOS OBTENER EL VALOR DE LA PENDIENTE, EVALUANDO LA PRIMERA DERIVADA EN EL PARÁMETRO QUE CORRESPONDA. LUEGO OBTENER LA COORDENADA (X,Y) .
- SE SUSTITUYEN ESTOS DATOS EN LA ECUACIÓN DE LA RECTA $y - y_o = m(\, x - x_o)$
- EJEMPLO :

DADAS LAS ECUACIONES PARAMÉTRICAS $x = t^2, y = t^6 + 3t^2 - 1$, OBTENGA LA ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA EN EL PARÁMETRO $t = 1.$

Mg. Silvia Somoza

- YA CONOCEMOS LA PRIMERA DERIVADA DE ESTAS ECUACIONES , POR LO TANTO, EVALUAREMOS EN EL PARÁMETRO DADO PARA OBTENER LA PENDIENTE.

- $m = \frac{dy}{dx} = \frac{6t^5+6t}{2t} = 3t^2 + 3 \Big|_{t=1}$

Significa que evalúa en t

- La pendiente toma el valor de $m = 6$

evaluando en las ecuaciones x e y

- Utilizando la ecuación de la recta $y - y_o = m(x - x_o)$, el punto $(x_o , y_o) = (1, 3)$

- $y - 3 = 6(x - 1)$, al despejar $y = 6x - 3$ es la ecuación de la recta tangente a la curva C que representan las paramétricas del enunciado, en el parámetro t =1

Mg. Silvia Somoza

CALCULO INTEGRAL

- AL SER UNA CURVA , PODEMOS CALCULAR LA LONGITUD DE ESTA EN UN INTERVALO DADO, ESTA REQUIERE LA APLICACIÓN DE CALCULO INTEGRAL CON EL CONCEPTO DE LONGITUD DE ARCO.
- AQUÍ LA LONGITUD DE ARCO SE OBTIENE CON UNA INTEGRAL DE LA FORMA

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\; dt\,, \qquad en\ el\ intervalo\ a \leq t \leq b$$

PASOS PRINCIPALES :

a) Derivar x=f(t) , y=g(t)

b) Plantear la integral y desarrollar el cuadrado de cada derivada.

c) Integrar

d) Aplicar teorema y detallar valores intermedios

e) Resultado

EJEMPLO

- Obtener la longitud de arco de la curva dada por las ecuaciones $x = t^2 + 1, y = 4t^3 + 3$, en el intervalo $2 \leq t \leq 3$
- a)derivando x e y : $\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} = 2t$, $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}} = 12t^2$
- b)planteando la integral : $L = \int_2^3 \sqrt{[2t]^2 + [12t^2]^2}\ dt$
- c)integrando $L = \int_2^3 \sqrt{4t^2 + 144\, t^4}\ dt = \int_2^3 \sqrt{(4t^2)(1 + 36\, t^2)}\ dt = 2\int_2^3 t\sqrt{1 + 36t^2}\, dt$
- $u = 1 + 36t^2$, $du = 72t\, dt$
- $\boldsymbol{L = \frac{2}{72} \int_2^3 \sqrt{u}\ du = \frac{4}{216}\left[u^{3/2}\right] = \frac{4}{216}\left[1 + 36t^2\right]^{3/2}}$ continúe el ejercicio y evalúe
- **L = 76.17 u**

Mg. Silvia Somoza

FUENTES CONSULTADAS:

- LEITHOLD, L. (1998). El Cálculo , México: Oxford University press - Harla.
- Arenivar, L. (2017). Cálculo integral, El Salvador: editorial Universidad Don Bosco.

Mg. Silvia Somoza