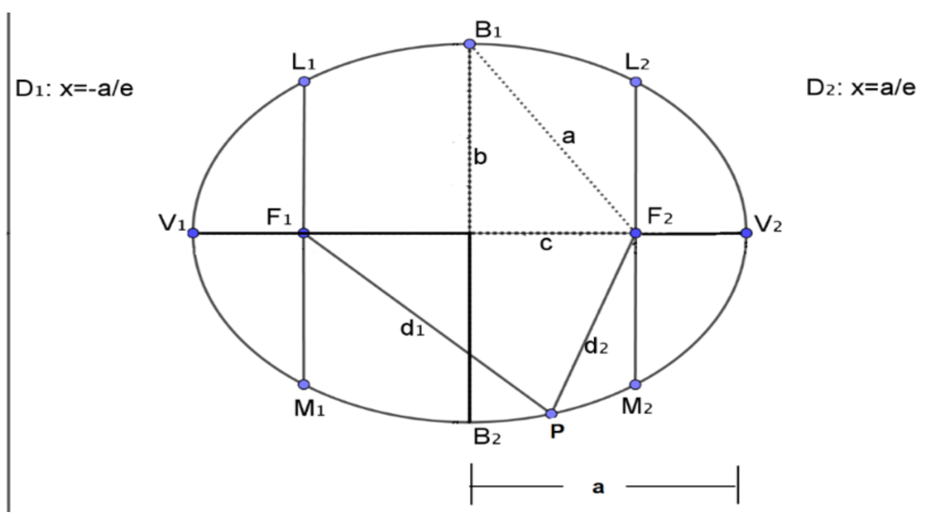
UNIVERSIDAD DON BOSCO - DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES - CICLO 02 - 2020

Semana 9. Unidad 3: Geometría Analítica

Sesión 1: La Elipse

Dados dos puntos $F_1 \ y \ F_2$ llamados focos, se denomina elipse al conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a ambos focos es constante.

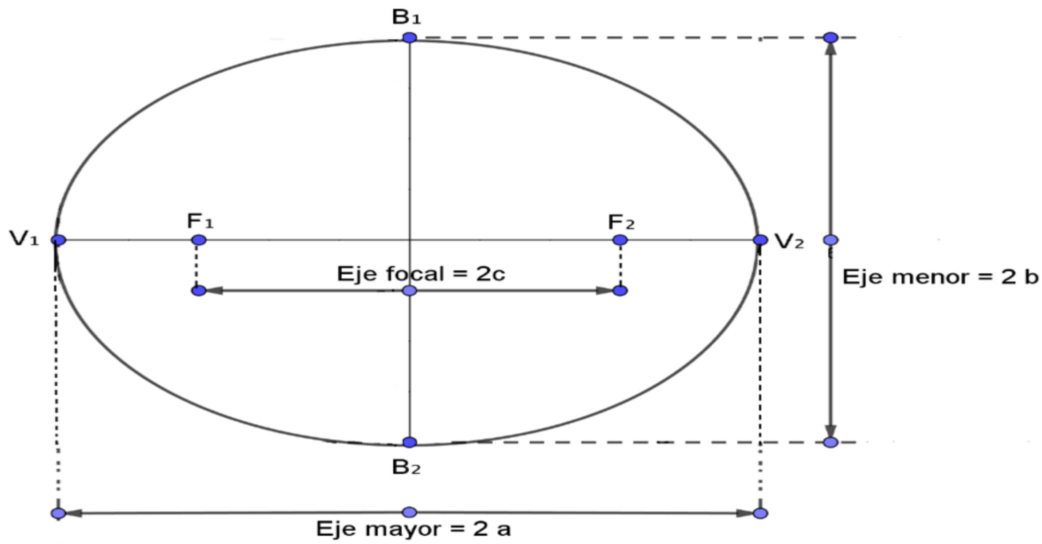
En la figura siguiente se muestran elementos importantes de una elipse.



$$PF_1 + PF_2 = 2a \quad = \quad d_1 + d_2 = 2a$$

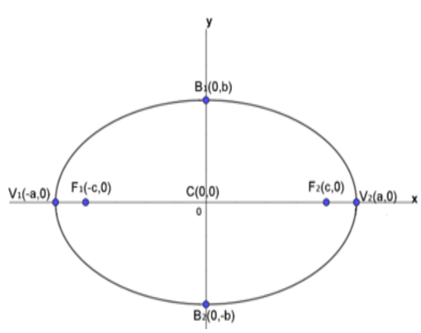
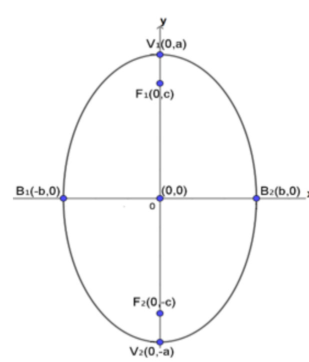
Centro: es el punto medio del segmento que une los vértices (y los focos).
Vértices: son los puntos $V_1 \ y \ V_2$ de intersección de la elipse con el eje mayor.
Focos: son los puntos $F_1 \ y \ F_2$.
Eje mayor: es el segmento $\boldsymbol{V_1V_2}$ que equivale a $2a$. Es la mayor distancia entre dos puntos opuestos de la elipse.
Eje menor: es el segmento B_1B_2 que equivale a $2b$.
Eje focal: es la distancia entre los focos F_1F_2 igual a $2c$.
Lados rectos: son las cuerdas focales $L_1M_1 \ y \ L_2M_2$, cada uno con medida igual a $\frac{2b^2}{a}$.
Directrices: son las rectas $D_1 \ y \ D_2$.

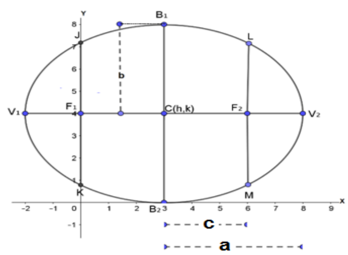
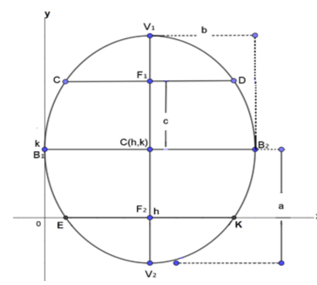
Ilustración gráfica de los ejes mayor, menor y foca



Hay que tener en cuenta que $a > b$. Y que a denota la longitud del semieje mayor, y b la del semieje menor.

Ecuación ordinaria de la elipse cuando el centro está en el origen $C(0,0)$ y cuando está en el punto $C(h,k)$

Elipse	Horizontal	Vertical
Centro en el origen $C(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
Gráficas		

Centro en el punto $C(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
Vértices	$V(h \pm a, k)$	$V(h, k \pm a)$
Focos	$F(h \pm c, k)$	$F(h, k \pm c)$
Extremos del eje menor	$B(h, k \pm b)$	$B(h \pm b, k)$
Gráficas		

Ecuación general de la elipse

La ecuación general de una elipse es

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0,$$

para $A, B, C, D\ y\ E$ constantes reales.

Si desarrollamos la ecuación canónica de la elipse con centro en el punto $(h.k)$ y con eje mayor paralelo al eje x, y haciendo sustituciones y simplificaciones, obtenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$a^2b^2\left[\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}\right]=a^2b^2(1)$$

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$b^2(x^2-2hx+h^2)+a^2(y^2-2ky+k^2)=a^2b^2$$

$$b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2+a^2y^2-2a^2ky+a^2k^2-a^2b^2=0$$

Haciendo las siguientes sustituciones

$$b^2=A, a^2=B, -2b^2h=C, -2a^2k=D, a^2k^2-a^2b^2+b^2h^2=E$$

obtenemos la ecuación general de la elipse (1).

Definición de excentricidad

La excentricidad e es el número

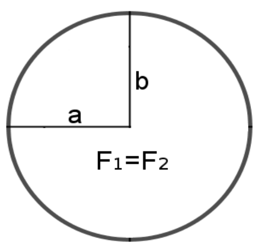
$$e = \frac{c}{a}$$

La excentricidad $\boldsymbol{e}$ de una elipse es la razón entre su semisuma focal (longitud del segmento que parte del centro de la elipse y termina en uno de sus focos) denominada por c, y su semieje mayor a, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

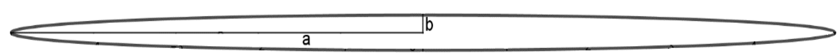
La excentricidad de toda elipse satisface

$$0 < e < 1$$

Es 0 cuando la elipse es una circunferencia. En este caso los semiejes mayor y menor son iguales y los focos $F_1 \ y \ F_2$ coinciden con el centro de la elipse. Cuando la excentricidad crece y se acerca a 1, la elipse se aproxima a un segmento de recta.



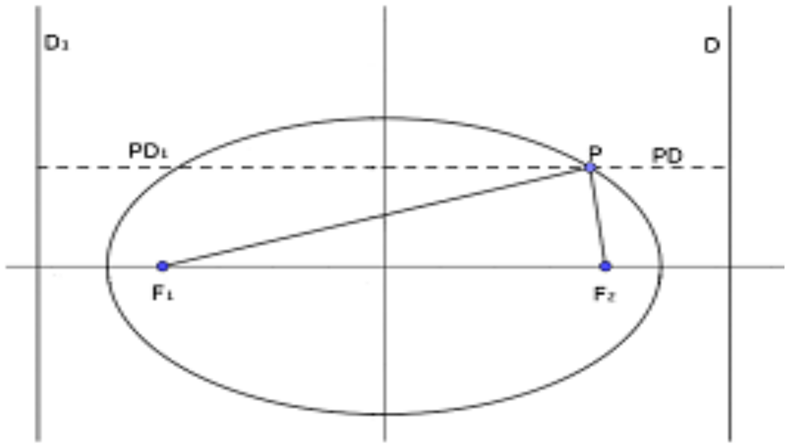
$e = 0$



$e \to 1$

Directrices de una elipse

Las directrices de una elipse horizontal son rectas paralelas al eje menor y están a la misma distancia de dicho eje. La elipse tiene una directriz por cada foco.



Estas directrices cumplen lo siguiente: si tomamos un punto P de la elipse y trazamos una distancia a la directriz D, y del punto P a la directriz D_1, se cumple que el cociente

$$\frac{PF_2}{PD} = e \quad \text{y que} \quad \frac{PF_1}{PD_1} = e$$

Las ecuaciones de las rectas directrices de una elipse horizontal con centro en el origen son

$$x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{a}{e} \quad \text{y} \quad x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$$

Esta propiedad puede ser tomada como otra definición alternativa de la elipse:

“Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano para los cuales se cumple que el cociente entre sus distancias a un punto fijo llamado foco, y a una recta dada llamada directriz permanece constante y es igual a la excentricidad de la misma”

Ejemplos:

1. **Construya la gráfica de $2x^2 + 9y^2 = 18$, y encuentra a) los vértices, b) los focos, c) la excentricidad, d) las ecuaciones de las directrices y e) comprueba que $e = \frac{c}{a} = \frac{PF}{PD}$.**

Solución

$$2x^2 + 9y^2 = 18$$

Dividiendo entre 18, tenemos

$$\frac{2x^2}{18}+\frac{9y^2}{18}=\frac{18}{18} \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$$

Ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ la cual corresponde a una elipse horizontal.

En este caso, $a=3 \quad y \quad b=\sqrt{2}$.

El eje mayor es $2a=2(3)=6$, y el eje menor es $2b=2\sqrt{2}$

Los vértices son $(3,0)$ y $(-3,0)$

Para encontrar los focos, tenemos que como $a=3 \quad y \quad b=\sqrt{2}$, entonces

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{9-2}=\sqrt{7}$$

y los focos son $\left(-\sqrt{7},0\right) \ y \ \left(\sqrt{7},0\right)$

La excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{3}\approx 0.88 \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$

Las ecuaciones de las directrices son:

directriz izquierda: $x=-\frac{a}{e}=-\frac{3}{\frac{\sqrt{7}}{3}}=-\frac{9}{\sqrt{7}}\approx -3.4$

directriz derecha: $x=\frac{a}{e}=\frac{3}{\frac{\sqrt{7}}{3}}=\frac{9}{\sqrt{7}}\approx 3.4$

Comprueba que $e=\frac{c}{a}=\frac{PF}{PD}$

Un punto de la elipse es

$$\left(\sqrt{5},\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\approx(2.23,0.94)$$

Con este punto calculamos las distancias siguientes: $d(PF) \ y \ d(PD)$

$$d(PF)=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2+\left(0-\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{(0.41)^2+(0.94)^2}=\sqrt{0.1681+0.8836}\approx 1.03$$

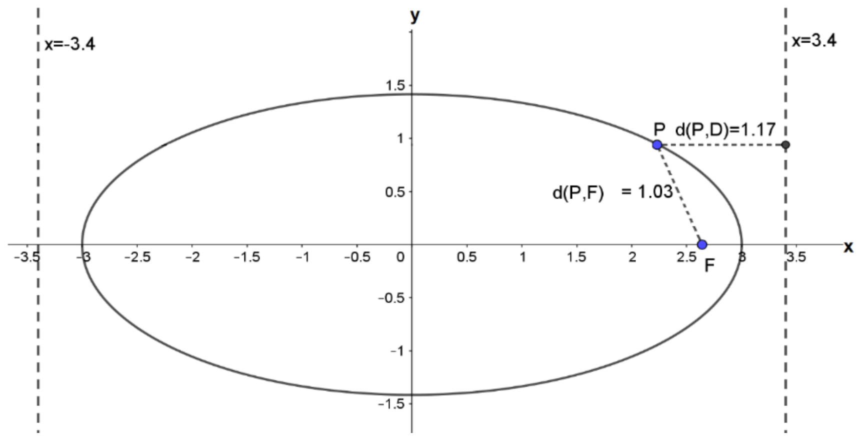
$d(PD)=3.4-2.23=1.17$

Entonces

$$e=\frac{PF}{PD}=\frac{1.03}{1.17}=0.88$$

Se comprueba entonces que este resultado es igual al obtenido en (α)

La gráfica de la elipse se muestra en la siguiente figura.



2. Grafica y analiza la elipse de ecuación $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$

Solución

La ecuación de la elipse es de la forma

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, por tanto es una elipse vertical ya que $9<16$

El centro de la elipse es $C(h,k)=C(-2,1)$

Como $b^2=9\,, b=3$ y como $a^2=16, a=4$

El eje mayor mide $2a=2(4)=8$ y el eje menor,$2b=2(3)=6$

Los vértices son:

$V_1(h,k+a)=(-2,1+4)=(-2,5),$

$V_2(h,k-a)=(-2,1-3)=(-2,-2)$

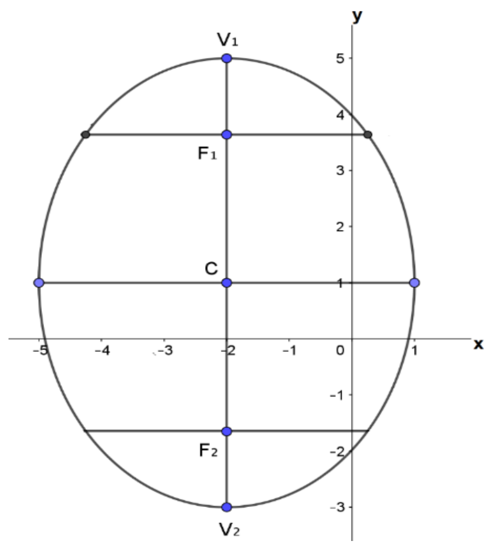
Para hallar los focos utilizamos $c=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$, entonces los focos son

$F_1(h,k+c)=\left(-2,1+\sqrt{7}\right)=(-2,3.64)$

$F_2(h,k-c)=\left(-2,1-\sqrt{7}\right)=(-2,-1.64)$

Los lados rectos miden cada uno $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(9)}{4}=\frac{9}{2}=4.5$

Con estos datos se construye la elipse



3. Halla la ecuación de la elipse con focos en $(4, -2)$ y $(10, -2)$, y con un vértice en $(12, -2)$. Esboza su gráfica.

Solución

El centro que es el punto medio de los focos está en $C\left(\frac{4+10}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}\right) = (7, -2)$, y la distancia entre los focos es de 6 unidades, luego $c = 3$.

El vértice dado está a 5 unidades del centro, quiere decir que $a = 5$. El otro vértice se ubica en el punto $V_1(h - a, k) = (7 - 5, -2) = (2, -2)$.

Conociendo $a = 5$ y $c = 3$ podemos hallar b^2:

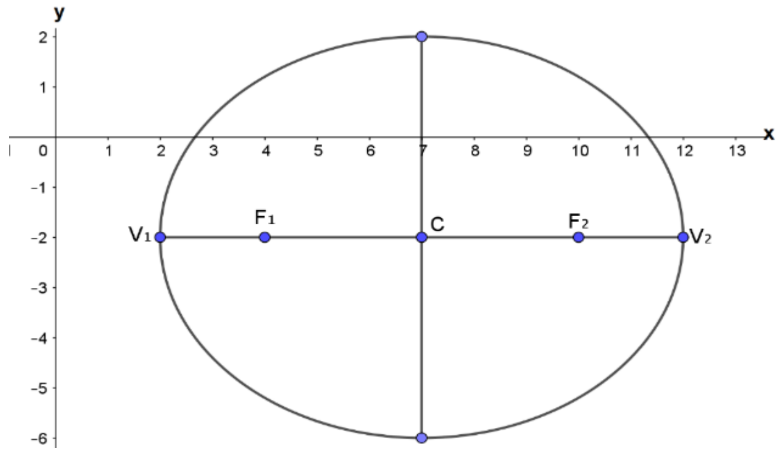
$$b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

Como el eje mayor es paralelo al eje x (elipse horizontal), sustituimos

$a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, y el centro $C(7, -2)$ en la ecuación ordinaria y obtenemos la ecuación

$$\frac{(x - 7)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$$

Gráfica



4. **Halla la ecuación de la elipse de centro $\boldsymbol{C(-1,-1)}$, uno de los vértices el punto $\boldsymbol{V(5,-1)}$ y excentricidad $\boldsymbol{e=\frac{2}{3}}$.**

Solución

Como el centro es el punto $C(-1,-1)$ y el vértice el punto $V(5,-1)$, se tiene que

$$a = d(CV) = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-1-(-1))^2} = 6$$

y como $e = \frac{c}{a} = \frac{c}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow c = 4$. Por otra parte, $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.

Así, la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$$

5. **Obtenga la ecuación general de la elipse $\boldsymbol{\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1}$**

Solución

Transformamos esta ecuación ordinaria a la forma general:

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

$$(25)(9)\left[\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9}\right] = (25)(9)(1)$$

$$9(x-5)^2 + 25(y-4)^2 = 225$$
$$9(x^2 - 10x + 25) + 25(y^2 - 8y + 16) = 225$$
$$9x^2 - 90x + 225 + 25y^2 - 200y + 400 - 225 = 0$$
$$9x^2 + 25y^2 - 90x - 200y + 400 = 0$$

Ejercicios propuestos

1. Para cada una de las siguientes ecuaciones de elipse, determine: a) su posición, b) la longitud del eje mayor y eje menor, c) la lungitud de cada lado recto d) la exentricidad e) las coodenadas del centro, los focos, los vértices, los extremos del eje menor, los extremos de cada uno de los lados rectos y trace su grafica.
    i. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$
    ii. $x^2 + 16y^2 = 4$
    iii. $25(x-3)^2 + 9(y+3)^2 = 225$
    iv. $9x^2 + 4(y-4)^2 = 36$
    v. $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$
2. Hallar las ecuaciones de la siguientes elipses que satisface las condiciones dadas, después encuentre los elementos que faltan y trace la gráfica de cada una de ellas.
    a. $b = 7$, $c = 24$, eje mayor paralelo al eje x, centro $(-4\,, 3)$.
    b. Sus focos tienen por coordenadas: $F_1(0, -\ 6)$ y $F_2(0, 6)$ y la longitud del semieje mayor es igual a 8.
    c. El centro es el punto de coordeandas $(1, 2)$, uno de los focos tiene por coordenadas $(6{,}2)$ y el punto $(4{,}6)$ pertenece a la elipse.
    d. El centro es el punto de coordeandas $(-1, -1)$, uno de los vértices tiene por coordenadas $(5, -1)$ y su excentricidad es $\frac{2}{3}$.
3. Encuentre la ecuación general del lugar geométrico cuya distancia al origen es $\frac{1}{2}$ de su distancia a la recta $x = -3$.