UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 2- Unidad 1: Los números complejos.

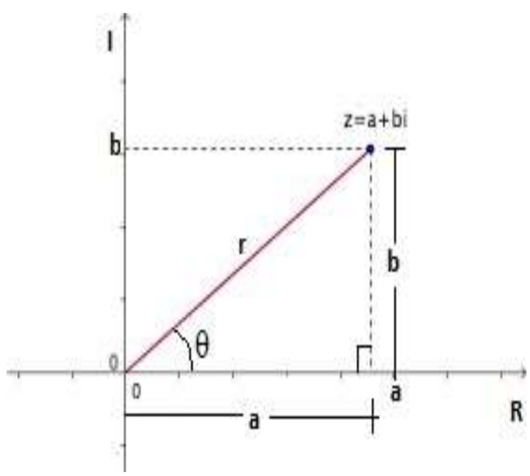
Sesión 2: Los Números Complejos en Forma Trigonométrica. Notación

Forma trigonométrica de un número complejo

Cuando se tiene un número complejo $\boldsymbol{z = a + bi}$, se puede escribir de otra manera, a la **forma trigonométrica**, llamado también **módulo argumental**, y para ello procedemos de la siguiente manera:

1. Hallamos el **módulo** de $z = a + bi$

   Para ello consideremos el plano de Argand, y podremos observar que al representar el número complejo se forma un triángulo rectángulo.



En este triángulo rectángulo, la distancia $\boldsymbol{r}$, es la hipotenusa de dicho triángulo y los catetos son los valores $\boldsymbol{a}$ (La parte real) y $\boldsymbol{b}$ (La parte imaginaria) del número representado, luego aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos en valor de $\boldsymbol{r}$, que es:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Este valor $\boldsymbol{r}$ recibe el nombre de **Módulo del número complejo**

2. Hallamos el argumento o ángulo del número complejo (θ)

   En el triángulo rectángulo anterior, observamos que el ángulo θ, se relaciona los lados $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{b}$ mediante la función trigonométrica: $\tan\theta$, ya que:

$\tan\theta = \frac{b}{a}$

Recuerde que la tangente de un ángulo

Es el cociente del lado opuesto sobre su lado adyacente

De donde, encontramos θ, así:

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$$

Este ángulo recibe el nombre de **Argumento**

3. Escribimos el número complejo en la forma trigonométrica, el cual nos quedaría así:

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Esta es la representación trigonométrica de un número complejo

Es necesario hacer notar que si el argumento $\boldsymbol{\theta}$ de un número complejo, también será su argumento $\boldsymbol{\theta_c = \theta + 2k\pi}$, con $k \in Z\ (Enteros)$, esto da lugar a decir que un número complejo tiene infinitos argumentos. Para efectos prácticos, convenimos considerar a $\boldsymbol{\theta > 0\ (Positivo)}$ y que cumpla con $\boldsymbol{0 \leq \theta \leq 2\pi}$, para ello haremos uso de la siguiente tabla:

Condiciones	$\boldsymbol{\theta}$	**Corrección**	**Ubicación**
$\boldsymbol{a}\ (+)$ $\boldsymbol{b}\ (+)$	$\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$	No se hace corrección al ángulo.	I cuadrante
$\boldsymbol{a}\ (-)$ $\boldsymbol{b}\ (+)$	$\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{-a})$	$\theta_c = 180^0 - \lvert\theta\rvert$	II cuadrante
$\boldsymbol{a}\ (-)$ $\boldsymbol{b}\ (-)$	$\theta = \tan^{-1}(\frac{-b}{-a})$	$\theta_c = 180^0 + \theta$	III cuadrante

$\boldsymbol{a}\,(+)$ $\boldsymbol{b}\,(-)$	$\theta = \tan^{-1}(\frac{-b}{a})$	$\theta_c = 360^0 - \lvert\theta\rvert$	IV cuadrante

Otros casos para considerar, que nos ayudarán a determinar el argumento $\boldsymbol{\theta}$ del número complejo de una manera práctica son los siguientes:

Condiciones	$\boldsymbol{\theta}$	**Corrección**	**Ubicación**
$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ $\boldsymbol{b}\,(+)$	$\theta = 90^0$	No se hace corrección al ángulo. Es un ángulo notable.	El número esta sobre el eje "**Y**" positivo.
$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ $\boldsymbol{b}\,(-)$	$\theta = 270^0$	No se hace corrección al ángulo. Es un ángulo notable.	El número esta sobre el eje "**Y**" negativo.
$\boldsymbol{a}\,(+)$ $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$	$\theta = 0^0$	No se hace corrección al ángulo. Es un ángulo notable.	El número esta sobre el eje "**X**" positivo.
$\boldsymbol{a}\,(-)$ $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$	$\theta = 180^0$	No se hace corrección al ángulo. Es un ángulo notable.	El número esta sobre el eje "**X**" negativo.

Ejemplo 21. Convierta los siguientes números complejos en su forma trigonométrica.

a) $z = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}i$
b) $z = -5i$
c) $z = 1 - i$

Solución:

a) $z = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}i$

Encontraremos el módulo de z.

En este caso $a = 3\sqrt{2}$ $\quad y \quad$ $b = 2\sqrt{3}$, entonces:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$r = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{18 + 12}$$
$$r = \sqrt{40}$$
$$r = 2\sqrt{10}$$

Hallemos el argumento de z

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$
$$\theta = 39.23^0$$

Escribimos el número en forma trigonométrica:

$$\boldsymbol{z = \sqrt{40}(\cos 39.23^0 + i \sin 39.23^0)}$$

b) $z = -5i$

$a = 0 \quad y \quad b = -5$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$r = \sqrt{0^2 + (-5)^2}$$
$$r = \sqrt{25}$$

$$r = 5$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{-5}{0}$$

$$\tan\theta = ????$$

En este caso es imposible obtener la tangente inversa ya que la fracción se hace indeterminada al dividir por cero, ¿qué hacer entonces?

Recurrimos a los cuadros de corrección de ángulos, recuerden que $\theta > 0 \;\wedge\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Como $a = 0$ y $b(-)$, entonces el argumento toma el valor de 270^0 o lo que es lo mismo $\frac{3}{2}\pi\ radianes$, según sea el sistema de ángulos que estemos utilizando.

c) $z = 1 - i$

$a = 1 \quad y \quad b = -1$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan\theta = -1$$

$$\theta = \tan^{-1}(-1)$$

$$\theta = -45^0$$

En este caso, $a\ (+)\ y\ \ b\ (-)$, lo cual corresponde al **IV cuadrante** y debemos emplear la corrección del ángulo para satisfacer las condiciones de $\boldsymbol{\theta}$, esta corrección será: $\theta_c = 360^0 - |\theta|$, en nuestro caso nos quedará así:

$$\theta_c = 360^0 - |-45^0|$$

$$\theta_c = 360^0 - 45^0$$

$$\theta_c = 315^0$$

El número complejo nos quedará de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{z = \sqrt{2}(\cos 315^0 + i \sin 315^0)}$$

Finalmente, el número son queda así:

$$\boldsymbol{z = 5(\cos 270^0 + i \sin 270^0)}$$

Forma Polar de los números complejos

Un número complejo se puede expresar de una forma denominada polar, y se hace utilizando modulo y el argumento del número complejo que está ya escrito en forma trigonométrica, es decir:

Si $\boldsymbol{z = a + bi}$, en tonces su forma trigonométrica está dada por la expresión:

$\boldsymbol{z = r(cos\theta + isen\theta)}$, donde $r\ es\ el\ módulo\ de\ z$ y $\theta\ \ es\ su\ argumento.$

Entonces, se define el número en forma polar cuando se escribe de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{z = r_\theta}$$

Por ejemplo:

$$2_{30^0} = 2(cos30^0 + isen20^0)$$

$$5_{53.27^0} = 5(cos53.27^0 + isen53.27^0)$$

$$7_{\frac{\pi}{3}} = 7(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Muestre la representación geométrica del número complejo en el plano complejo y escriba dicho número en la forma a+bi.

   a) $3(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3})$

   b) $\sqrt{2}(\cos 45 + \mathrm{isen} 45)$

   c) $\frac{2}{3}(cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi)$

2. Exprese los siguientes números en forma trigonométrica

   a) $-2 + 4\mathrm{i}$
   b) $4 - 4\mathrm{i}$
   c) $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\mathrm{i}$
   d) $-7\mathrm{i}$
   e) 5
   f) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$

3. Convierta los siguientes números complejos a su forma polar

   a) $1 - 3i$
   b) $2 + 3i$
   c) $-5 - i$
   d) 1
   e) $-2i$
   f) -5
   g) $3i$

4. Efectuar:

   a) $3_{60^0} + 4_{90^0} - 2_{30^0}$

   b) $5\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) - 2[3\left(cos\frac{\pi}{6} + isen\frac{\pi}{6}\right)] + (\cos\pi + \mathrm{isen}\pi)$