CAMBIO DE LIMITES

¿CUÁNDO SE APLICA?

Cuando se nos den ejercicios del teorema fundamental del calculo y para resolver las integrales tenga que aplicarse los métodos cambio de variable o sustitución trigonométrica

¿CÓMO SE APLICA?

Se cambia los limites de integración de la integral definida a valores de **u** en vez de valores de **x**.

u = g(x) ,Entonces

$$\int_{a}^{b} f\,[g(x)]g^{'}(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

Si x = -1

-1 = 2senθ

$-\frac{1}{2} = sen\ \theta$

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta$

$-\frac{\pi}{6} = \theta$

Si x = $\sqrt{3}$

$\sqrt{3}$ = 2senθ

$\frac{\sqrt{3}}{2} = sen\ \theta$

$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$

$\frac{\pi}{3} = \theta$

Encontramos los nuevos limites de la integral

x = 2senθ

dx = 2cosθdθ

Cambio de variable

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2sen\theta)^2}$

$= \sqrt{4-4sen^2\theta}$

$= \sqrt{4(1-sen^2\theta)}$

$= \sqrt{4cos^2\theta}$

= 2cos θ

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4sen^2\theta}{2cos\theta}\ 2cos\theta d\theta$$

Sustituyendo la nueva variable y los nuevos limites

$$=4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sen^2\theta\ \ d\theta$$

$$=\frac{4}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-cos2\theta)\ \ d\theta$$

Aplicando la identidad
$sen^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}$

$$=2\left[\theta-\frac{sen2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=[2\theta-sen2\theta]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left[2\frac{\pi}{3}\ -sen2\frac{\pi}{3}\right]-\left[2(-\frac{\pi}{6})\ -sen2(-\frac{\pi}{6})\right]$$

Teorema fundamental del calculo

$$=2\frac{\pi}{3}\ -sen\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+sen(-\frac{\pi}{3})$$

$$=\pi - 0.866-0.866$$

$$=1.409$$

EJEMPLO

$$\int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}}dx$$

Aplicamos el cambio de variable

U=$\sqrt{2x+1}$

$u^2 = 2x+1$

$\frac{u^2-1}{2} = x$

2udu = 2dx

Si x = 0

u = 1

Si x = 4

u = 3

Cambio de limites

$$\int_1^3 \frac{\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2}{u} udu$$

$$\int_1^3 \frac{(u^2-1)^2}{4} du$$

$$\frac{1}{4}\int_1^3 (u^4-2u^2+1)du$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{u^5}{5}-\frac{2}{3}u^3+u\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{u^5}{20}-\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{4}u\right]_1^3$$

$$=\left[\frac{(3)^5}{20}-\frac{1}{6}(3)^3+\frac{1}{4}(3)\right]-\left[\frac{(1)^5}{20}-\frac{1}{6}(1)^3+\frac{1}{4}(1)\right]$$

Aplicación Teorema fundamental del calculo

$$=\left[\frac{243}{20}-\frac{9}{2}+\frac{3}{4}\right]-\left[\frac{1}{20}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right]$$

$$=\frac{42}{5}-\frac{2}{15}$$

$$=\frac{124}{15}$$

$$=8.26$$