# MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

*SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA*

silvia.somoza@udb.edu.sv

# ¿CUÁNDO SE APLICA ESTE MÉTODO?

- Se aplica en integrales que contienen binomios de la forma :

$$(a^2 + x^2)^n \quad , \quad (a^2 - x^2)^n \quad , \quad (x^2 - a^2)^n$$

- Es importante aclarar: n es un exponente que corresponde a una raíz cuadrada, pero también puede ser un valor entero. Por ejemplo

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx \quad , \int \frac{dx}{(x^2+2)^4} \quad , \int \frac{(x^2 - 5)^{3/2}}{x^2}\, dx$$

# CASOS

- Según la forma del binomio, se identifican TRES CASOS y cada caso posee definida una expresión a utilizar para sustituir la variable x en términos de la nueva variable $\theta$ .

| CASOS | Sustitución de x |
|---|---|
| $(a^2 - x^2)^n$ | $x = a\,sen(\theta)$ |
| $(a^2 + x^2)^n$ | $x = a\,tan(\theta)$ |
| $(x^2 - a^2)^n$ | $x = a\,sec(\theta)$ |

silvia.somoza@udb.edu.sv

# ¿CÓMO SE APLICA?

Debe sustituirse la variable x por la expresión correspondiente:
a $\operatorname{sen}(\theta)$, a $\tan(\theta)$ ó a $\sec(\theta)$

A PARTIR DE LA EXPRESIÓN QUE CORRESPONDE A X , SE OBTIENEN EL DIFERENCIAL Y TODOS LOS TÉRMINOS QUE CONTIENE EL INTEGRANDO

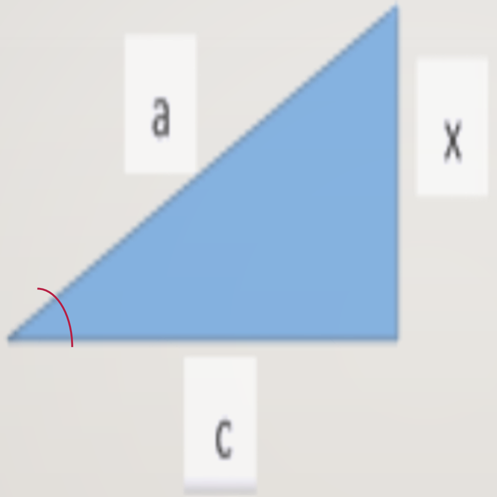
El objetivo es reescribir la integral en términos de funciones trigonométricas y de una nueva variable de integración $\theta$ .

Integre y exprese la respuesta en función de la variable original x.

silvia.somoza@udb.edu.sv

- ✓ Para expresar la respuesta en función de la variable original x ,se utiliza un triangulo rectángulo .
- ✓ Los lados del triángulo provienen de la sustitución de x y la aplicación del teorema de Pitágoras .

Si x = a sen($\theta$)




aplicando Pitágoras:

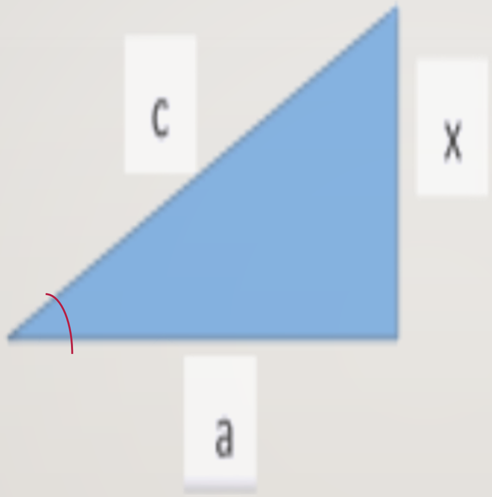
$$c = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Despejando de x :

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

silvia.somoza@udb.edu.sv

Si x = a tan($\theta$)




aplicando Pitágoras:

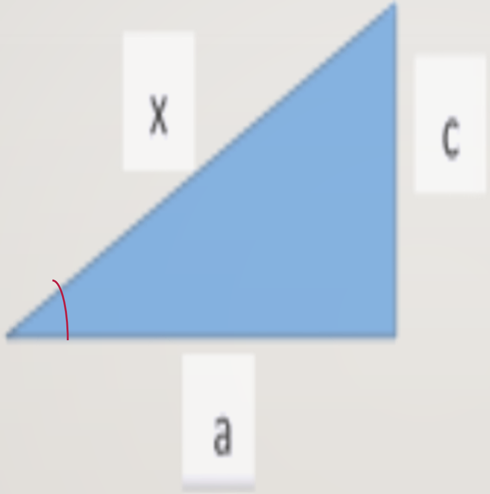
$$c = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Despejando de x :

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{x}{a})$$

silvia.somoza@udb.edu.sv

Si x = a sec($\theta$)




aplicando Pitágoras:

$$c = \sqrt{x^2 - a^2}$$

Despejando de x :

$$\theta = \sec^{-1}(\frac{x}{a})$$

silvia.somoza@udb.edu.sv

# EJEMPLOS

- EJEMPLO I

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx}$$

- $x = 3\,sen(\,\theta)$ , $dx = 3\,cos(\theta)\,d\theta$

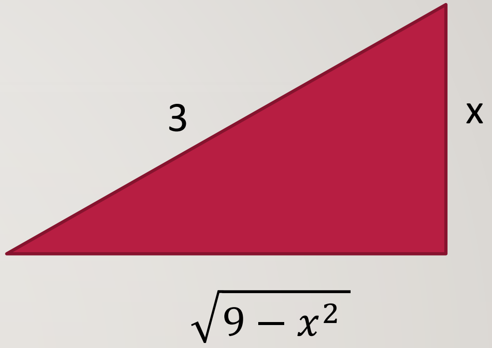
- $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-\left(3\,sen(\,\theta)\right)^2} = \sqrt{9-9\,sen^2(\,\theta)} = \sqrt{9(1-sen^2(\,\theta))} = 3\sqrt{(cos^2(\,\theta))} = 3\cos(\theta)$

Sustituyendo cada parte del integrando obtenemos $\int \frac{3\cos(\theta\,)}{(3\,sen(\theta))^2}\;3\cos(\theta)d\theta$

silvia.somoza@udb.edu.sv

- $\int \frac{9\cos^2(\theta)}{9\,sen^2(\theta)}\,d\theta = \int cot^2(\theta)\,d\theta = \int (csc^2(\theta) - 1)\,d\theta = \int csc^2(\theta)d\theta - \int d\theta$ $\boxed{= -\cot(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{C}}$

- Expresando la respuesta en función de x :




ya que $x = 3\,sen(\theta)$ , despejamos $\frac{x}{3} = sen(\theta)$

Luego, del triángulo $\cot(\theta) = \frac{adyacente}{opuesto} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

Despejando de x : $\theta = sen^{-1}(\frac{x}{3})$

$$\boxed{= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - sen^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C}$$

silvia.somoza@udb.edu.sv

# EJEMPLO 2

$$\boxed{\int \frac{2}{(x^2+5)^2}\,dx}$$

$$x = \sqrt{5}\,tan(\,\theta) \quad , \qquad dx = \sqrt{5}\,sec^2(\theta)\,d\theta$$

$$(x^2+5)^2 = \left(\left(\sqrt{5}\,tan(\theta)\right)^2 + 5\right)^2 = (\,5tan^2(\theta)+5)^2 = (5(\,tan^2(\theta)+1))^2 = \left(5\,sec^2(\theta)\right)^2 = 25\,sec^4(\theta)$$

$$\int \frac{2}{25\;\,sec^4(\theta)}\,\sqrt{5}\,sec^2(\theta)d\theta$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{25}\int \frac{d\theta}{sec^2(\theta)} \quad = \frac{2\sqrt{5}}{25}\int \;cos^2(\theta)d\theta$$

Practicar y realizar la integral de este caso

silvia.somoza@udb.edu.sv

El resultado de la integral indefinida es :

$$= \frac{\sqrt{5}}{25}\theta + \frac{\sqrt{5}}{50}\,\text{sen}(2\theta) + C$$

Sustituyendo por la identidad trigonométrica: $sen(2\theta) = 2\,sen(\theta)\cos(\theta)$

$$\frac{\sqrt{5}}{\cancel{50}}(\cancel{2}\,\text{sen}\theta\cos\theta)$$

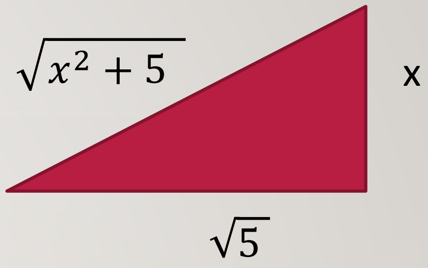
$$= \frac{\sqrt{5}}{25}\theta + \frac{\sqrt{5}}{25}\,\text{sen}\theta\cos\theta + C$$

Practicar el planteamiento del triangulo y expresar la respuesta en función de x

silvia.somoza@udb.edu.sv

Verifiquen que el resultado, en función de la variable x, es el siguiente :

$$= \frac{\sqrt{5}}{25}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\sqrt{5}}{25}\left(\frac{x}{\sqrt{5+x^2}}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+x^2}}\right) + C$$




Luego de simplificar, el resultado de la integral será :

$$= \frac{\sqrt{5}}{25}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + \frac{x}{5(5+x^2)} + C$$

silvia.somoza@udb.edu.sv

# EJEMPLO 3

$$\boxed{\int \frac{dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}}$$

- ✓ Reescribir realizando complemento de cuadrados. $\left(-(x^2+4x-5)\right)^{3/2} = (9-(x+2)^2)^{3/2}$
- ✓ Como resultado la integral se reescribe de la siguiente forma: $$\int \frac{dx}{(9-(x+2)^2)^{3/2}}$$
- ✓ Aplicando cambio de variable: $\boldsymbol{u = x+2}$ $\boldsymbol{du = dx}$ $$\int \frac{\boldsymbol{du}}{\boldsymbol{(9-(u)^2)^{3/2}}}$$
- ✓ Aplicando sustitución trigonométrica : $\boldsymbol{u = 3\,sen(\theta)}$

$$\boldsymbol{du = 3\,cos(\theta)\,d\theta}$$

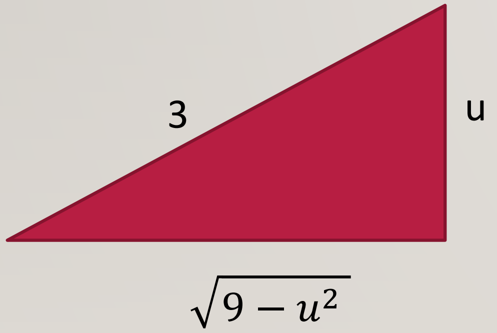
silvia.somoza@udb.edu.sv

$$(9-u^2)^{3/2} = \left(9-(3\,sen(\theta))^2\right)^{3/2} = \left(9-9sen^2(\theta)\right)^{3/2} = \left(9\,(1-sen^2(\theta))\right)^{3/2}$$

$$= \left(9\cos^2(\theta)\right)^{3/2} = 27\cos^3(\theta)$$

$$\int \frac{3\cos(\theta)\,d\theta}{27\cos^3(\theta)} = \int \frac{d\theta}{9\cos^2(\theta)} = \frac{1}{9}\int sec^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{9}\tan(\theta) + C$$

- ✓ El resultado de la integral indefinida, en función de la variable x, es el siguiente :




$$\boxed{\frac{1}{9}\left(\frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\right) + C = \frac{x+2}{9\sqrt{9-(x+2)^2}} + C}$$

silvia.somoza@udb.edu.sv

# GRACIAS POR SU ATENCIÓN

*Practique los siguientes ejercicios, adicionales a la guia de estudio y consulte con su docente las dudas :*

*a)* $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\ dx$

*b)* $\int \sqrt{6x-x^2}\ dx$

*c)* $\int \frac{x^3}{\sqrt{4\,x^2+5}}\,dx$