UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 13- Unidad 4: *Rectas y planos en el espacio.*

SESIÓN 1 : Rectas en el plano Tridimensional -ecuación vectorial -ecuación paramétrica -ecuación simétrica, rectas paralelas y perpendiculares en el espacio, ángulo entre rectas.

Rectas en 3D.

En el plano xy para escribir la ecuación de una recta lo importante es conocer la pendiente de la recta. La pendiente de una recta (o su ángulo de inclinación) nos da una pista de la dirección. Una recta en el plano queda determinada si conocemos un punto y una pendiente o dos puntos diferentes. En el espacio los vectores ayudan a obtener la ecuación de una recta.

Ecuación vectorial

Dado el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector distinto de cero $\vec{v}$. Por el punto P_0 sólo pasa una recta L paralela al vector dado.

Sea $P(x, y, z)$ cualquier punto sobre la recta.

Si $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ y $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$ son los vectores de posición de P y P_0, entonces como el vector $\vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ es paralelo al vector $\vec{v}$, existe un escalar t tal que $\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = t\,\vec{v}$ (vectores proporcionales). Esto nos da una ecuación vectorial

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{v} \text{ de la recta } L. \quad (\alpha)$$

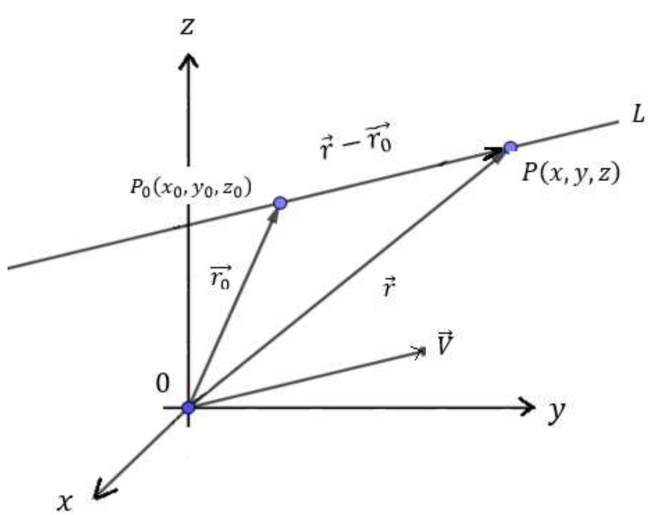


Figura 1

En componentes la ecuación vectorial de la recta es

$$\begin{aligned}\langle x, y, z\rangle &= \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle \\ &= \langle x_0, y_0, z_0\rangle + \langle at, bt, ct\rangle \\ &= \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\rangle \qquad (\beta)\end{aligned}$$

Para todo número real t el vector $\vec{r}$ en (α) es el vector de posición de un punto sobre la recta L y, por ello es posible ver la recta como si se estuviera trazando en el espacio a partir de la punta del vector $\vec{r}$.

Dos puntos distintos cualesquiera $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en R^3 determinan una recta L entre ellos.

Si $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OP_0}$ y $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OP_1}$ son vectores posicionales, vemos en la Figura 1 , que el vector $\vec{v} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}$ es paralelo al vector $\vec{r} - \overrightarrow{r_1}$.

De manera tal que

$$\vec{r} - \overrightarrow{r_1} = \mathrm{t}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \text{ o } \vec{r} = \overrightarrow{r_1} + \mathrm{t}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0})$$

Como $\vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ también es paralelo al vector $\vec{v}$, una ecuación vectorial alternativa para la recta L es

$$\vec{r} - \overrightarrow{r_0} = \mathrm{t}(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \text{ o } \vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \qquad (\gamma)$$

Si escribimos $\vec{v} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = (a, b, c)$, vemos que (γ) es lo mismo que (α).

De hecho, $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t(-\vec{v})$ y $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t(k\vec{v})$ con k un escalar distinto de cero, también son ecuaciones vectoriales de L.

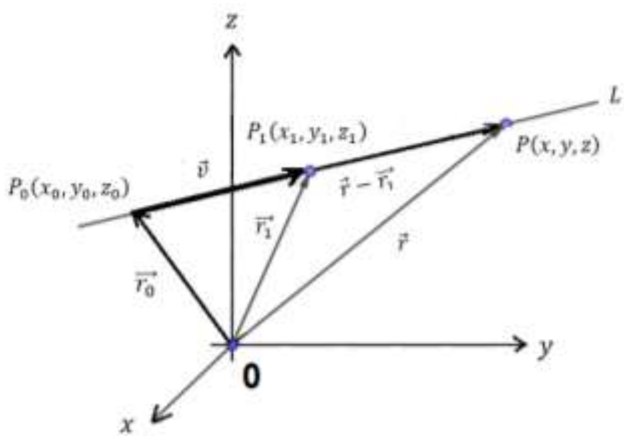


Figura 2

Ejemplo 1

Encuentre la ecuación vectorial para la recta que pasa por el punto $P(-1,1,3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Solución

Si identificamos $x_0 = -1, y_0 = 1, z_0 = 3,$ $a = 3, b = -2$ y $c = 1$ se obtiene de (β) una ecuación vectorial de la recta

$$\langle x, y, z\rangle = \langle -1,1,3\rangle + t\langle 3, -2, 1\rangle = \langle -1,1,3\rangle + \langle 3t, -2t, t\rangle$$

$$= \langle -1 + 3t, 1 - 2t, 3 + t\rangle$$

Ejemplo 2

Halle la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $P_0(1,2,3)\ y$

$P_1(-1,0,2)$.

Solución

Para hallar la ecuación necesitamos un punto (tenemos dos) y un vector de dirección de L.

Como P_0 y P_1 son los puntos de la recta, el vector $\overrightarrow{P_0\ P_1}$ será un vector director de la recta.

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_0\ P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \langle -1-1, 0-2, 2-3\rangle = \langle -2,-2,-1\rangle$$

Así, una ecuación vectorial de la recta es

$$\langle x,y,z\rangle = \langle 1,2,3\rangle + t\langle -2,-2,-1\rangle$$

Ésta es una de las tantas ecuaciones vectoriales de la recta. Por ejemplo, tres ecuaciones vectoriales alternas de la recta son:

$$\langle x,y,z\rangle = \langle -1,0,2\rangle + t\,\langle -2,-2,-1\rangle$$

$$\langle x,y,z\rangle = \langle 3,4,4\rangle + t\langle -2,-2,-1\rangle$$

$$\langle x,y,z\rangle = \langle -1,0,2\rangle + t\langle 2,2,1\rangle$$

Ecuaciones paramétricas

Si igualamos las componentes en $\langle x,y,z\rangle = \langle x_0+at, y_0+bt, z_0+ct\rangle$, obtenemos

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas (**parámetro t) de la recta L que pasa por P_0 . Cuando el parámetro t toma todos los números reales, la recta L completa se extiende indefinidamente en ambas direcciones.

Ejemplo 3

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(-1,1,3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Solución

Si identificamos $x_0 = -1,\ y_0 = 1, z_0 = 3,\ a = 3\,, b = -2\ \ y\ \ c = 1$, tenemos que las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x = -1 + 3t\,,\ \ y = 1 - 2t,\ \ \ z = 3 + t$$

Ejemplo 4

Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(1,2,3)\ \ y\ \ (-1,-2,-3)$.

Solución

Un vector direccional de la recta es $\vec{v} = \langle -1,-2,-3\rangle - \langle 1,2,3\rangle = \langle -2,-4,-6\rangle$

Con los números directores $a = -2,\ b = -4,\ c = -6$ tenemos que las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$x = 1 - 2t\ ,\ \ y = 2 - 4t,\ \ \ z = 3 - 6t$$

Ecuaciones simétricas

A partir de las ecuaciones paramétricas

$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = \ z_0 + ct$, podemos eliminar el parámetro t escribiendo

$$t = \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c},$$

siempre y cuando cada uno de los tres números directores $a, b\ y\ c$ sean distintos de cero.

Las ecuaciones que resultan

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

son llamadas ecuaciones simétricas de la recta L que pasa por el punto P_0.

Si alguna o algunas de las componentes del vector direccional $a, b\ \ o\ \ c$ de la recta son ceros, la forma de representar la ecuación simétrica se modifica para no dividir entre cero. Por ejemplo, si $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$, entonces las ecuaciones simétricas de la recta se escriben

$$x = x_0\,, \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

Como $x = x_0$ corresponde a la ecuación de un plano vertical perpendicular al eje x , la recta está en ese plano y es paralela al plano yz .

Ejemplo 5

Vector director de L	Punto de L	Ecuaciones simétricas de L	Comentario
$\vec{V} = \langle 0,2,3 \rangle$	$P(2,-1,3)$	$x = 2, \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$	Recta contenida en el plano $x = 2$ y paralela al plano yz.
$\vec{V} = \langle 9,0,3 \rangle$	$P(5,-4,-1)$	$\frac{x-5}{9} = \frac{z+1}{3}, y = -4$	Recta contenida en el plano $y = -4$ y paralela al plano xz.
$\vec{V} = \langle 1,-2,0 \rangle$	$P(1,-4,3)$	$\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{-2}, z = 3$	Recta contenida en el plano $z = 3$ y paralela al plano xy.

Rectas paralelas y perpendiculares

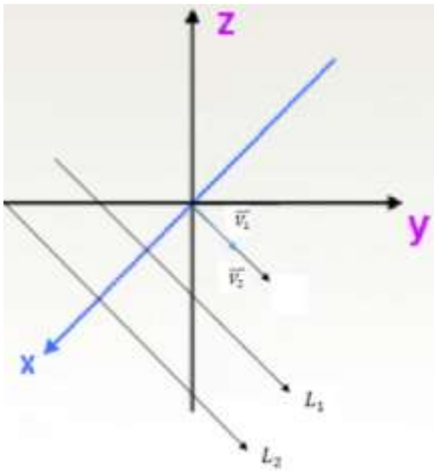
Definición:

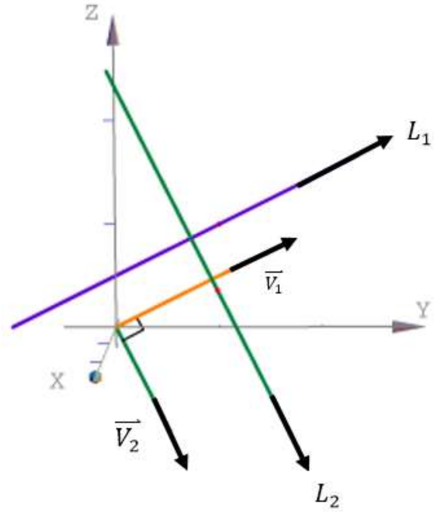
Dos rectas $L_1\ \ y\ \ L_2$ con vectores direccionales $\overrightarrow{v_1}\ \ y\ \ \overrightarrow{v_2}$ respectivamente, son:

a) paralelas si los vectores directores son paralelos, es decir $\overrightarrow{v_1} = k\overrightarrow{v_2}$ para algún $k \neq 0$.

b) perpendiculares si el producto escalar $\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = 0$

Figura 3





Ejemplo 6

Determine si

a) las siguientes rectas son paralelas

$$L_1: x = 2 - 4t, \;\; y = 1 + 2t, \; z = 3 - 2t$$

$$L_2: x = 2s \quad , \; y = 2 - s, \quad z = 1 + s$$

b) las siguientes rectas son perpendiculares

$$L_3: x = -1 - t, \;\; y = 2 + 4t \;, \; z = 4 + 5t$$

$$L_4: x = 2 + 2s \,, \;\; y = -3 - 2s, \; z = 1 + 2s$$

Solución

a) A partir de las ecuaciones paramétricas $L_1 \; y \;\; L_2$ formamos los respectivos vectores direccionales:

$$\overrightarrow{v_1} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k} \;\; , \;\; \overrightarrow{v_2} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$$

Como $\vec{v}_1 = -2\overrightarrow{v_2}$, los vectores directores son paralelos y las rectas son paralelas.

b) Con los coeficientes de los parámetros $s \;\; y \;\;\; t$ vemos que

$$\vec{v}_1 = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}, \qquad \overrightarrow{v_2} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

son los vectores direccionales de $L_3 \;\; y \;\;\; L_4$, respectivamente. Como

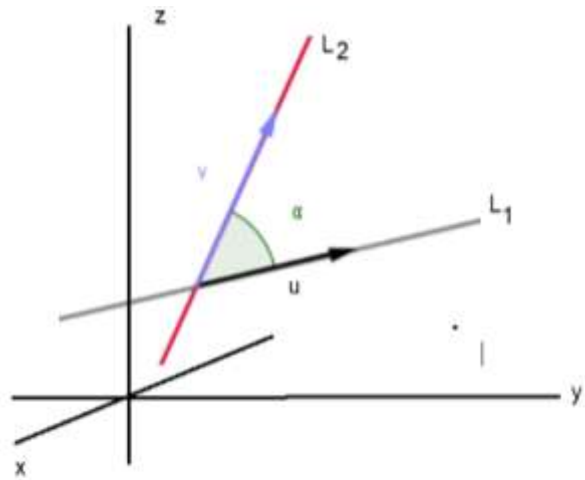
$\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2} = (-1)(2) + (4)(-2) + (5)(2) = 0$, entonces los vectores direccionales son perpendiculares y por tanto, las rectas $3 \;\; y \;\; 4$ son perpendiculares.

Ángulo entre dos rectas en el espacio.

El ángulo que forman dos rectas en el espacio viene dado por el ángulo que forman sus vectores directores.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores directores de las rectas L_1 y L_2 , entonces:

$$\alpha = arc\ cos\left[\frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right],\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Verifique que el ángulo α entre las rectas:

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

$$L_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$$ es $\alpha = 61.87^0$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por el punto y es paralela al vector dado.

a) $(4,6,-7), \vec{\mathrm{v}} = \langle 3, \frac{1}{2}, \frac{-3}{2} \rangle$

$b)$ $(0,0,0), \vec{v} = \langle 5,9,4 \rangle$

2. Encuentre la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos

$a)$ $(1,2,1), (3,5,-2)$

$b)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

$c)$ $(1,1,-1), (-4,1,-1)$

3. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos indicados.

$a)$ $(2,3,5), (6,-1,8)$

$b)$ $(1,0,0)$, $(3,-2,-7)$

$c)$ $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(-6, \frac{-1}{4}, \frac{1}{6}\right)$

4. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta por los puntos indicados

$a)$ $(1,4,-9), (10,14,.2)$

$b)$ $(4,2,1), (-7,2,5)$

$c)$ $(5,10,), (5,1,-14)$

5. Encuentre ecuaciones paramétricas y simétricas para la recta:

a) que pasa por el punto $(6,4,-2)$ y que es paralela a la recta

$$a)\ \frac{x}{2} = \frac{1-y}{3} = \frac{z-5}{6}$$

$b)$ que pasa por $(0,2,-1)$ y es paralela a la recta

$$x = 1 - 2t, \qquad y = 3t, \qquad z = 5 - 7t$$

c) pasa por el punto $(-2,0,4)$ paralela al vector $\vec{v} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$

d) pasa por el origen y paralela al vector $\vec{v} = 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

e) pasa por $(1,1,1)$ paralela al eje z