**UNIVERSIDAD DON BOSCO**

**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS**

**ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020.**

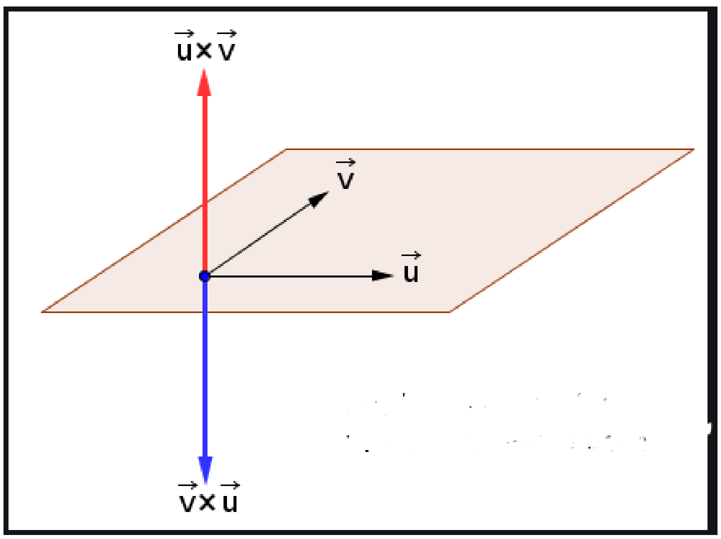
**Semana 12: Unidad 4:** Vectores en el plano y en el espacio.

**Sesión 2:** Producto vectorial, propiedades algebraicas y geométricas del producto vectorial.

## PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ -TRIPLE PRODUCTO ESCALAR.

El producto punto estudiado en esta unidad se opera tanto con vectores bidimensionales como tridimensionales y da como resultado un escalar.

El producto cruz o producto vectorial solamente se define para vectores en el espacio tridimensional y genera otro vector en el espacio tridimensional con las siguientes características: es perpendicular a los dos vectores que nos dan (ver figura)




### Definición de producto vectorial

Para cualquier par de vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota y se define de la siguiente manera:

$$\vec{u} \times \vec{v} = [(u_2v_3 - u_3v_2), -(u_1v_3 - u_3v_1), (u_1v_2 - u_2v_1)]$$
$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{\imath} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

Usando la notación de determinantes tenemos que

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{\imath} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$
$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$ Por tanto tenemos que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Este determinante solo se puede calcular mediante un determinante de orden 3 por cofactores desarrollándolo solamente por la primera fila y sólo por ella.

**Ejemplo 1**

Encontrar $\vec{u} \times \vec{v}$ si $\vec{u} = (2, -1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 3, -1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\imath}(1-6) - \vec{\jmath}(-2+2) + \vec{k}(6-1)$$

$$= -5\vec{\imath} - 0\vec{\jmath} + 5\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-5, 0, 5)$$

**Propiedades del producto vectorial**

**Propiedades algebraicas**

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha$ un escalar que pertenece a los reales, entonces se tienen las siguientes propiedades:

P1 $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{u} = \vec{0}$

P2. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

P3. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

P4. $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

P5. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

P6. $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$

P7. $\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

P8. $\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

La prueba de estas propiedades se realiza utilizando la definición de producto vectorial y escribiendo los vectores en términos de sus componentes.

**Propiedades geométricas del producto vectorial**

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\theta$ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades geométricas:

P9. El vector $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal al vector $\vec{u}$ como al vector $\vec{v}$, es decir:

$\vec{u}.(\vec{u} \times \vec{v}) = 0$ y $\vec{v}.(\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

P10. $\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \, sen(\theta)$

P11. Dos vectores no nulos son paralelos si y sólo si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

P12. El área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como lados adyacentes es

$$\| \vec{u} \times \vec{v} \|$$

Demostración propiedad 10

$$\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \, sen(\theta)$$

$\| \vec{u} \times \vec{v} \|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$

$$= {u_2}^2{v_3}^2 - 2u_2u_3v_3v_2 + {u_3}^2{v_2}^2 + {u_3}^2{v_1}^2 - 2u_3u_1v_1v_3 + {u_1}^2{v_3}^2 + {u_1}^2{v_2}^2 - 2u_1u_2v_2v_1 + {u_2}^2{v_1}^2$$

$$= ({u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2)({v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3u_3)^2$$

$$= \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

$$= \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 - \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \left(cos(\theta)\right)^2$$

$$= \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \left(1 - cos^2(\theta)\right)$$

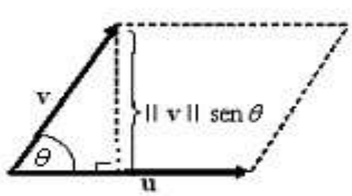
$\| \vec{u} \times \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 \| \vec{v} \|^2 \, sen^2(\theta)$

Tomando las raíces cuadradas a ambos lados tenemos y sabiendo que $\sqrt{sen^2(\theta)} = sen(\theta)$ ya que $sen(\theta) \geq 0$ cuando $\theta \in [0, \pi]$, tenemos

$$\| \vec{u} \times \vec{v} \| = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \, sen(\theta) \text{ ya que } 0 \leq \theta \leq \pi$$

Demostración propiedad 12

Usando la figura:




Se puede observar un paralelogramo con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como lados adyacentes.

El área del paralelogramo es $A = b \times h$

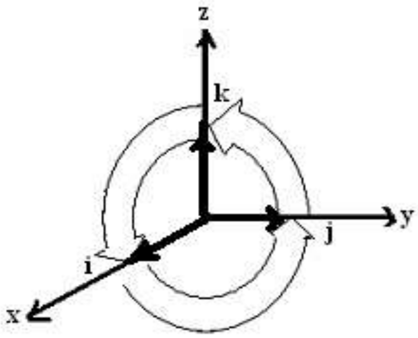
La base de paralelogramos es $\| \vec{u} \|$ y su altura viene dada por $h = \| \vec{v} \| \, sen(\theta)$, sustituyendo tenemos:

$A = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \, sen(\theta)$, por propiedad 10 tenemos que área será igual a:

$$A = \| \vec{u} \times \vec{v} \|$$

**Producto vectorial con vectores fundamentales.**

El producto vectorial de cualquier pareja de vectores unitarios canónicos $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ puede ser obtenido utilizando la siguiente regla circular:




$$\begin{cases}\vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}\\ \vec{\jmath}\times\vec{k}=\vec{\imath}\\ \vec{k}\times\vec{\imath}=\vec{\jmath}\end{cases} \text{ y por la propiedad P3 } \begin{cases}\vec{\jmath}\times\vec{\imath}=-\vec{k}\\ \vec{k}\times\vec{\jmath}=-\vec{\imath}\\ \vec{\imath}\times\vec{k}=-\vec{\jmath}\end{cases}$$

**Ejemplo 2**

Encuentre dos vectores unitarios que sean perpendicular tanto a $\vec{u}$ como $\vec{v}$, si $\vec{u}=\langle -1,-2,4\rangle$ y $\vec{v}=3\vec{\imath}-2\vec{k}$.
Solución.

Primero encontramos el producto cruz $\vec{u}\times\vec{v}$ que es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 4\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 0 & -2\end{vmatrix}-\vec{\jmath}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{\imath}(4-0)-\vec{\jmath}(2-12)+\vec{k}(0+6)$$

$$=4\vec{\imath}+10\vec{\jmath}+6\vec{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=(4,10,6).$$

Encontramos ahora: $\parallel \vec{u}\times\vec{v}\parallel=\sqrt{(4)^2+(10)^2+(6)^2}=2\sqrt{38}$

Entonces un vector unitario ortogonal a ambos vectores es :

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{\parallel \vec{u}\times\vec{v}\parallel}=\frac{1}{2\sqrt{38}}(4,10,6)=\left(\frac{2}{\sqrt{38}},\frac{5}{\sqrt{38}},\frac{3}{\sqrt{38}}\right)$$

El otro vector unitario ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es

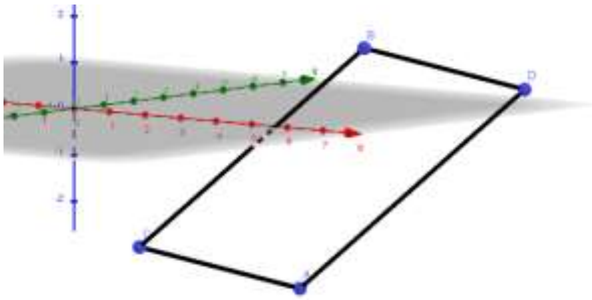
$$-\left(\frac{2}{\sqrt{38}},\frac{5}{\sqrt{38}},\frac{3}{\sqrt{38}}\right)=\left(\frac{-2}{\sqrt{38}},\frac{-5}{\sqrt{38}},\frac{-3}{\sqrt{38}}\right)$$

**Ejemplo 3.**

Determinar el área del paralelogramo cuyos vértices son: $A(3,4,-4), B(9,-1,2), C(1,1,-3), D(11,2,1)$

Solución.

Primero graficamos los cuatro puntos en el espacio y obtenemos la siguiente figura:



Necesitamos dos vectores que sean lados adyacentes del paralelogramo. Tomamos el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AD} = (8,-2,5)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-2,-3,1)$.

El área será:

$$A = \| \vec{u} \times \vec{v} \|$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -2 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2+15) - \vec{j}(8+10) + \vec{k}(-24-4)$$

$$= 13\vec{i} - 18\vec{j} - 28\vec{k}$$

$A = \| \vec{u} \times \vec{v} \| \sqrt{(13)^2 + (-18)^2 + (-28)^2} \cong 35.74$

Por tanto, el área del paralelogramo es $35.74u^2$

**Ejemplo 4**

Encuentre el área del triángulo determinado por los puntos $A(1,1,2), B(1,1,1), C(1,2,1)$.

Solución.

El área del triángulo vendrá dada por la fórmula: $\frac{\| \vec{u} \times \vec{v} \|}{2}$ ; donde $\vec{u}$ $y$ $\vec{v}$ son dos lados adyacentes del triángulo.

Formamos los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,0,-1)$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0,1,-1)$.

Calculamos el producto cruz entre los vectores

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(0+1) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-0)$$

$$= \vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

$\| \vec{u} \times \vec{v} \| \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1$

$$A_{\Delta} = \frac{\| \vec{u} \times \vec{v} \|}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el área del triángulo es $\frac{1}{2} u^2$

**Triple producto escalar.**

Sean los vectores del espacio $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ , $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$. Se llama **triple producto escalar** de los tres vectores **u**, **v** y **w** al producto escalar de los vectores **u** y **v x w**

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$$

Ahora bien,

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}).\left[\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right]$$

$$= u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

De manera que

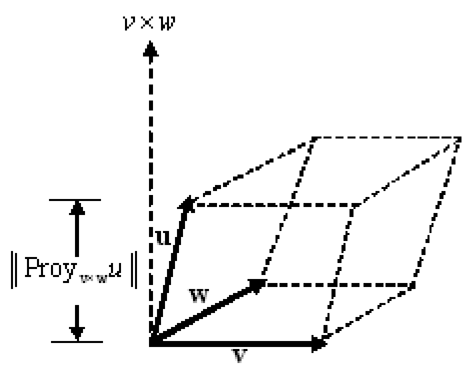
$$u.(v\times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Por las propiedades de los determinantes (Unidad No.2), se sabe que el valor de un determinante cambia de signo si se intercambian dos filas. Si el intercambio lo hacemos dos veces, el valor del determinante no es alterado. Por lo tanto, los siguientes triples productos escalares son equivalentes:

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v}).\mathbf{w}$$

**Significado geométrico de $\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$**

Si los vectores $\mathbf{u},\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no son coplanares , es decir no están en un mismo plano, entonces el triple producto escalar $\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$, puede usarse para calcular el volumen de un paralelepípedo con lados adyacentes $\mathbf{u},\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. (ver figura).




El volumen de este paralelepípedo es:

$$V = (\text{área de la base})\ (\text{altura})$$

$$= \|\vec{v}x\vec{w}\|\ \|Proy_{vxw}^{u}\|$$

$$= \|\vec{v}x\vec{w}\|\ \left|\frac{u\,.(v\times w)}{\|v\times w\|}\right| = |u\,.(v\times w)|$$

**Ejemplo 1.**

Dados A (3,-1,2), B (1, 2,-2), C (2, 1,-2) y D (-1, 3,2), halle el volumen del paralelepípedo con aristas AB, AC, y AD.

**Solución:** Tenemos

$$\mathbf{u} = \vec{\mathbf{AB}} = \langle -2,3,-4\rangle$$

$$\mathbf{v} = \vec{\mathbf{AC}} = \langle -1,2,-4\rangle$$

$$\mathbf{w} = \vec{\mathbf{AD}} = \langle -4,4,0\rangle$$

Calculamos v **x w** = $\langle 16,16,4\rangle$. Por lo tanto,

$$|\, u\,.(v\times w)\,| = |\, -32+48-16\,| = 0$$

Vemos que no se forma un paralelepípedo. En este caso se dice que los cuatro puntos están en un mismo plano (son coplanares) y el volumen es cero.

**Criterio para los vectores coplanares.**

Si los vectores $\mathbf{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$, $\mathbf{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ y $\mathbf{w} = w_1 i + w_2 j + w_3 k$ tienen el mismo punto inicial , entonces están en un mismo plano si y sólo si

$$|\, u\,.(v\times w)\,| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

**Ejercicios para practicar**

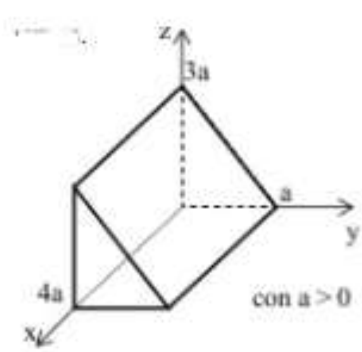
1. Calcule dos vectores unitarios que sean ortogonales a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.
   Si $\vec{u} = (1,-1,1)$ y $\vec{v} = 6\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$

2. Determine el área del triángulo formado por los puntos: $A(1,2,4), B(1,-1,3), C(-1,-1,2)$.Dibujar al triángulo.

3. Calcule el área del paralelogramo con vértices:$A(2,2,2), B(2,0,1), C(4,1,-1), D(4,3,0)$.Realice el dibujo del paralelogramo

4. Hallar el área del paralelogramo que tiene tres de sus vértices en los puntos:$A(0,0,0), B(1,5,4), C(2,-1,3)$

5. Verifique que el cuadrilátero dado es un paralelogramo y encuentre el área del paralelogramo.



6. Calcule el volumen del paralelepípedo de vértices dados.

a) (0,0,0), (1,1,0), (1,0,2), (0,1,1), (2,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (2,2,3).

7. Encuentre el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\mathbf{u} = \langle 1,0,6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2,3,-8 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 8,-5,6 \rangle$.

8. Calcule el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes PQ, PR y PS.

a) P (1, 1,1 ), Q (2, 0, 3), R (4, 1, 7), S (3,-1,-2).

B) P (0,1,2), Q (2,4,5), R (-1,0,1), S (6, -1,4).

9. Utiice el T.P.E. para verificar que los vectores $\mathbf{u} = \langle 2,3,1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1,-1,0 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 7,3,2 \rangle$, son coplanares.

10. Utilice el T.P. E para verificar que los puntos P (1, 0,1), Q (2, 4,6), R (3,-1,2), S (6, 2,8) son coplanares, y calcule el área del polígono que forman.