

MÉTODO DE INTEGRACIÓN: FRACCIONES PARCIALES

CONTENIDO

- Presaberes necesarios
- Cuándo se aplica este método
- Cómo se aplica
- Los 4 casos de fracciones parciales
- Ejemplos

PRE SABERES IMPORTANTES

- Existen conocimientos previos que es necesario reforzar para resolver integrales con este método, es decir se requiere aplicar operaciones algebraicas, aprendidas en otro nivel de estudios y deben repasar :
- A) División de polinomios
- B) Casos de factoreo
- C) Obtener factores con división sintética
- D) Complemento de cuadrados.
- E) Suma de fracciones
- F) Solución de sistemas de ecuaciones

¿CUANDO SE APLICA ESTE MÉTODO?

- Cuando trabajamos integrales con funciones racionales, en particular racionales propias.
- Las funciones racionales propias son aquellas donde el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio en el denominador.

$$\int \frac{1}{x-1} \, dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2-1} dx$$

$$\int \frac{1}{x-1} dx \qquad \int \frac{x+1}{x^2-1} dx \qquad \int \frac{2x}{x^3-x^2+x} dx$$

Adicional, son fracciones propias que en su denominador presentan factores lineales o cuadráticos IRREDUCIBLES. El termino IRREDUCIBLES se refiere a expresiones que no puedo seguir factorizando.

$$\int \frac{1}{x^2(x-3)} \, dx$$

$$\int \frac{2x}{(x-1)(x+1)} \, dx$$

$$\int \frac{1}{x^2(x-3)} dx \qquad \int \frac{2x}{(x-1)(x+1)} dx \qquad \int \frac{2x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} dx$$

¿CÓMO SE APLICA?

A – Observar si la fracción es propia o impropia



Si la Fracción es impropia: división de polinomios



B – Factorizar el denominador para obtener el producto de factores lineales ax+b o factores cuadráticos, ax² +bx +c IRREDUCIBLES



C – Identificar el CASO DE FRACCIÓN PARCIAL y separar el integrando en la suma de fracciones más simples.



D – Calcular los valores de las constantes: Obtener un sistema de ecuaciones resultado de sumar fracciones, realizar operaciones e igualar numeradores.



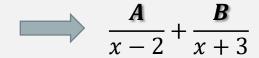
E – Sustituir las constantes en las fracciones, y resolver las integrales obtenidas con métodos adecuados.

CASOS DE FRACCIONES PARCIALES

• Después de obtener factores irreducibles en el denominador, identificamos el caso de fracción parcial a trabajar y se plantean tantas fracciones parciales, como factores posee el denominador.

CASO 1 – FACTORES LINEALES

$$\int \frac{2x}{(x-2)(x+3)} dx$$



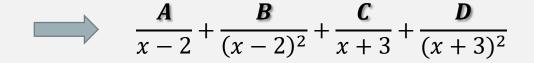
CASO 3 – FACTORES CUADRÁTICOS

$$\int \frac{2x}{(x^2+5)(x^2+x+1)} dx$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+5} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

CASO 2 – FACTORES LINEALES REPETIDOS

$$\int \frac{2}{(x-2)^2(x+3)^2} dx$$



CASO 4 – FACTORES CUADRÁTICOS REPETIDOS

$$\int \frac{2}{(x^2+4)^3} dx$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^3}$$

EJEMPLOS

EJEMPLO I

$$\int \frac{3x+4}{x^3-2x^2} \ dx$$

Es una fracción propia

factorizando

$$\int \frac{3x+4}{x^2(x-2)} \ dx$$

Factor lineal y lineal repetido tipo 1 y 2

Separando en fracciones simples

$$\frac{3x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

Los numeradores son constantes

Separar potencia de lineal repetido

Calculando las constantes

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 2} = \frac{A(x)(x - 2) + B(x - 2) + Cx^2}{x^2(x - 2)}$$

$$= \frac{A(x^2 - 2x) + Bx - 2B + Cx^2}{x^2(x - 2)}$$

$$= \frac{Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2}{x^2(x - 2)}$$

$$= \frac{x^2(A + C) + x(B - 2A) - 2B}{x^2(x - 2)}$$

Suma de fracciones

Realizar operaciones

Agrupar términos

$$\frac{3x+4}{x^2(x-2)} = \frac{x^2(A+C) + x(B-2A) - 2B}{x^2(x-2)}$$

Igualar los coeficientes de numeradores

$$3x + 4 = x^2(A + C) + x(B - 2A) - 2B$$

$$A + C = 0$$
 Cuando falta el coeficiente correspondiente, se iguala a cero
$$B - 2A = 3$$

$$-2B = 4 \rightarrow B = -2$$

$$-2 - 2A = 3 \rightarrow A = -\frac{5}{2}$$

$$C = -A \longrightarrow C = \frac{5}{2}$$

Resolver sistema de ecuaciones

Sustituir las constantes e integrar

$$\int \frac{3x+4}{x^2(x-2)} = \int \frac{-5/2}{x} dx + \int \frac{-2}{x^2} dx + \int \frac{5/2}{x-2} dx$$

Formulas básicas Cambio de variable

$$u = x - 2 \rightarrow du = dx \rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

Cambio de variable

$$\int \frac{3x+4}{x^2(x-2)} = -\frac{5}{2}Ln|x| - 2\int x^{-2}dx + Ln|x-2|$$

$$= -\frac{5}{2}Ln|x| - 2\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + Ln|x-2| + C = -\frac{5}{2}Ln|x| + \frac{2}{x} + Ln|x-2| + C$$

EJEMPLO 2

$$\int \frac{4x^2+x+2}{x(x^2+1)} dx$$

Es una fracción propia

factorizando

$$\int \frac{4x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} dx$$

Factor lineal y cuadrático tipo 1 y 3

Separando en fracciones simples

$$\frac{4x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A + Bx + C}{x + x^2 + 1}$$

constante para factor lineal y expresión lineal para factor cuadrático

Calculando las constantes

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)x}{x(x^2 + 1)}$$
$$= \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x^2(x - 2)}$$

Suma de fracciones

$$\frac{x^2(A+B)+Cx+A}{x^2(x-2)}$$

$$\frac{4x^2 + 1x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^2(A + B) + Cx + A}{x^2(x - 2)}$$

$$A + B = 4$$

$$C = 1$$

$$A = 2$$

Sustituimos el valor de A en la primera ecuación Obteniendo B = 2 Agrupar términos

Igualar los coeficientes de numeradores

Resolver sistema de ecuaciones

Sustituir las constantes e integrar

$$\int \frac{4x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{2x + 1}{x^2 + 1} dx$$
$$= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

Cambio de variable

$$u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x dx \rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= 2ln|x| + ln|x^2 + 1| + \arctan(x) + C$$

EJEMPLO 3

$$\int \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

Separando en fracciones simples

factorizando

$$\int \frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} dx$$

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Calculando las constantes

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{\left(Ax^3 + Ax + Bx^2 + B\right) + \left(Cx^3 + 4Cx + Dx^2 + 4D\right)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

Agrupar términos

$$=\frac{x^3(A+C)+x^2(B+D)+x(A+4C)+(B+4D)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

Igualar los coeficientes de numeradores

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{x^3(A+C) + x^2(B+D) + x(A+4C) + (B+4D)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$\mathbf{A} = -\mathbf{C}$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{D}$$

$$3 \quad A + 4C = 0$$

Sustituyendo
$$-C + 4C = 0$$

$$C = 0$$
 \longrightarrow $A = 0$

$$4 B + 4D = 1$$

Sustituyendo
$$-D + 4D = 1$$

$$D = 1/3 \longrightarrow B = -1/3$$

Resolver sistema de ecuaciones

Sustituir las constantes e integrar

$$\frac{1}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{\mathbf{0}-\mathbf{1}/3}{x^2+4} + \frac{\mathbf{0}+\mathbf{1}/3}{x^2+1}$$

$$\int \frac{-1/3}{x^2 + 4} dx + \int \frac{1/3}{x^2 + 1} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + 4} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$
$$= -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \right] + \frac{1}{3} \arctan(x) + C$$

$$= -\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3}\arctan(x) + C$$