UNIVERSIDAD DON BOSCO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

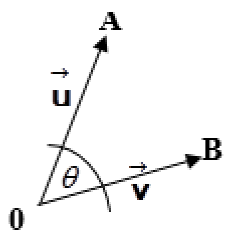
ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020.

Semana 12: Unidad 4: Vectores en el plano y en el espacio.

Sesión 1: Ángulo entre vectores, vectores paralelos y perpendiculares, Cosenos directores, Proyección vectorial y escalar.

ÁNGULO ENTRE VECTORES.

Sea $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores no nulos de $\mathbb{R}^n$, llamamos θ al único ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tal que $\theta \in [0, \pi]$ y se obtiene mediante la siguiente formula:



$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\| \vec{u} \|\| \vec{v} \|}\right)$$

Si conocemos el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ podemos escribir

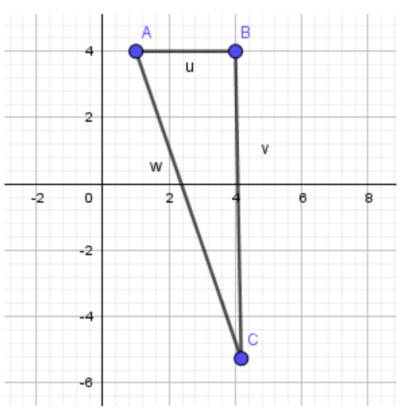
$\vec{u}.\vec{v} = \| \vec{u} \|\| \vec{v} \| \cos(\theta)$ Forma alternativa para calcular el producto punto.

Ejemplo 1

Determinar los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(1,4), B(4,4), C(4,-5)$.Graficar.

Solución.

Al graficar los puntos obtenemos la siguiente figura



Utilizaremos la fórmula para ángulo entre vectores, para ello primero encontramos los vectores que forman los lados del triángulo.

Sea $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$

$$\begin{aligned} &= B(4,4) - (1,4) \\ &= (4-1, 4-4) \\ \vec{u} &= (3,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \overrightarrow{BC} \\ &= (4,-5) - B(4,4) \\ &= (4-4, -5-4) \\ &= (0,-9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \overrightarrow{AC} \\ &= (4,-5) - B(1,4) \\ &= (4-1, -5-4) \end{aligned}$$

$$= (3, -9)$$

Sea θ el ángulo entre $\vec{u}\ y\ \vec{v}$. Entonces, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(3)(0)+(0)(-9)}{\sqrt{(3)^2+(0)^2}\sqrt{(0)^2+(-9)^2}}\right)$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{0}{27}\right)$$
$$= 90°$$

Sea α el ángulo entre $\vec{u}\ y\ \vec{w}$. Entonces, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{w}}{\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(3)(3)+(0)(-9)}{\sqrt{(3)^2+(0)^2}\sqrt{(3)^2+(-9)^2}}\right)$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{9}{3\sqrt{90}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$= 71.57°$$

Por último, sea β el ángulo entre $\vec{v}\ y\ \vec{w}$ utilizamos el hecho que la suma de los ángulos internos de un triángulo debe ser 180°. Por tanto $\beta = 180° - 90° - 71.57° = 18.43°$

Si hubiésemos usado la formula ángulo entre vectores para encontrar β el resultado habría sido el mismo.

Por tanto los ángulos internos del triángulo son $90°,\ 71.57°\ y\ 18.43°$.

Ejemplo 2

Encuentre los valores de c para los cuales los vectores $\vec{u} = \langle -1,2,c \rangle$ y $\vec{v} = \langle 0,1,1 \rangle$ forman un ángulo de 30°.

Solución.

Utilizamos la fórmula

$$\vec{u}.\vec{v} = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos(\theta)$$

$$2 + c = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + c^2} * \sqrt{0 + (1)^2 + (1)^2} \cos(30°)$$

$$2 + c = \sqrt{c^2 + 5} * \sqrt{2} * \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2(2 + c) = \sqrt{6} * \sqrt{c^2 + 5}$$

$$4 + 2c = \sqrt{6} * \sqrt{c^2 + 5}$$

$$(4 + 2c)^2 = 6(c^2 + 5)$$

$$16 + 16c + 4c^2 = 6c^2 + 30$$

$$2c^2 - 16c + 14 = 0$$

$$c^2 - 8c + 7 = 0$$

$$(c - 7)(c - 1) = 0$$

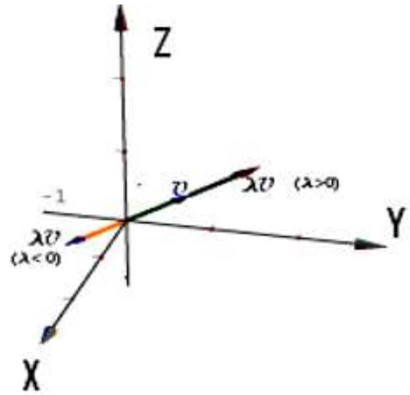
$$c = 7 \text{ y } c = 1$$

Por tanto los valores de c para los cuales los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ forman un ángulo de 30° son c=7 y c=1.

VECTORES PARALELOS

Definición: Dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ no nulos son paralelos si y solo si son proporcionales, es decir

$\vec{u} \parallel \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$ ó $\vec{v} = k\vec{u}$



Se tiene además que dos vectores son paralelos si el ángulo entre ellos es 0° ó 180°.

Ejemplo 3

Demostrar que los vectores $\vec{u} = \langle \frac{3}{4}, -1,2 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 3, -4,8 \rangle$ son paralelos.

Solución:

Utilizamos la definición.

$\vec{u}$ es paralelo a $\vec{v}$ si existe un escalar k tal que $\vec{u} = k\vec{v}$

$$\langle \frac{3}{4}, -1,2 \rangle = k\langle 3, -4,8 \rangle$$
$$\langle \frac{3}{4}, -1,2 \rangle = \langle 3k, -4k, 8k \rangle$$

Por igualdad de vectores tenemos: $\frac{3}{4} = 3k$; $-1 = -4k$; $2 = 8k$

Si despejamos k de las 3 ecuaciones tenemos que $k = \frac{1}{4}$ y por tanto $\vec{u}$ es paralelo a $\vec{v}$ ya que $\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{v}$

Ahora lo probaremos utilizamos el segundo resultado, es decir probaremos que el ángulo entre $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es 0° ó 180°.

Sea θ el ángulo entre $\vec{u}\ y\ \vec{v}$. Entonces, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)(3)+(-1)(-4)+(2)(8)}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-1)^2+(2)^2} * \sqrt{(3)^2+(-4)^2+(8)^2}}\right)$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{22.25}{\sqrt{\frac{89}{16}} * \sqrt{89}}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{22.25}{\frac{\sqrt{89}}{4} * \sqrt{89}}\right)$$
$$= 0°$$

Por tanto $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son paralelos.

VECTORES ORTOGONALES

Dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ no nulos se llaman perpendiculares u ortogonales si el ángulo entre ellos es $\theta = \frac{\pi}{2}$

Ahora bien recordemos que se dedujo una forma alternativa para poder encontrar el producto punto entre dos vectores cuando se conoce el ángulo entre ellos la cual es:

$$\vec{u}.\vec{v} = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos(\theta)$$

Si sustituimos $\theta = \frac{\pi}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| (0) \\ \vec{u}.\vec{v} &= 0\end{aligned}$$

De aquí obtenemos el siguiente resultado

Definición: Dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son ortogonales si y solo si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

El vector $\vec{0}$ es paralelo y ortogonal a todo vector $\vec{u}$.

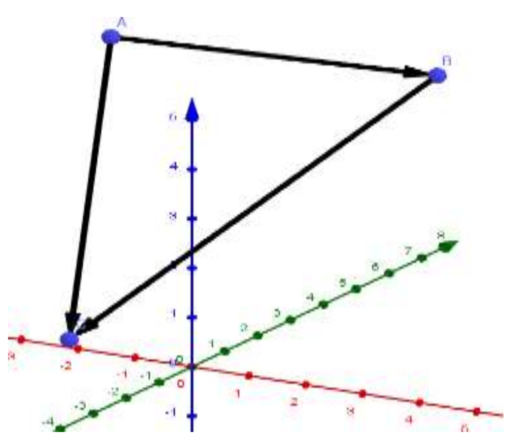
Ejemplo 4

Demuestre empleando vectores que los puntos $A(-2,1,6), B(2,4,5), C(-1,-2,1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Dibujar el triángulo.

Solución.

Formamos los vectores que representan los lados del triángulo y se debe cumplir que el producto punto entre dos de ellos debe ser cero.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} = B - A = (4,3,-1) \\ \vec{v} &= \overrightarrow{AC} = C - A = (1,-3,-5) \\ \vec{w} &= \overrightarrow{BC} = C - B = (-3,-6,-4)\end{aligned}$$



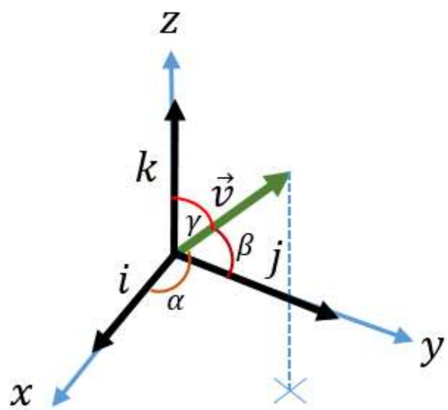
Tomamos a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ y realizamos el producto punto:

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= 4 - 9 + 5 \\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son ortogonales y el triángulo tiene un ángulo de 90° y por tanto el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

COSENOS DIRECTORES.

Sea $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ un vector no nulo, en el espacio tridimensional los ángulos α, β, γ entre el vector $\vec{v}$ y los vectores canónicos $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ respectivamente reciben el nombre de ángulos directores del vector $\vec{v}$.



$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.De la formula de ángulos entre vectores se tiene que $\cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$, entonces

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}.\vec{\imath}}{\|\vec{v}\|\|\vec{\imath}\|}$$

$$\vec{v}.\vec{\imath} = v_1(1) + v_2(0) + v_3(0) = v_1$$

y además $\| \vec{\imath} \| = 1$, por tanto

$$\cos(\alpha) = \frac{v_1}{\| \vec{v} \|}$$

De manera análoga se tiene que

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{v}.\vec{\jmath}}{\| \vec{v} \|\| \vec{\jmath} \|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{v_2}{\| \vec{v} \|}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{v}.k}{\| \vec{v} \|\| \vec{k} \|}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{v_3}{\| \vec{v} \|}$$

Decimos que α, β, γ, son los ángulos directores del vector $\vec{v}$.

Los cosenos directores de un vector diferente de cero $\vec{v}$ simplemente son las componentes del vector unitario $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{v_1}{\|\vec{v}\|}, \frac{v_2}{\|\vec{v}\|}, \frac{v_3}{\|\vec{v}\|}\right) = (\cos(\alpha)\,, \cos(\beta), \cos(\gamma)).$$

Si despejamos $\vec{v}$ tenemos: $\vec{v} = (\parallel \vec{v} \parallel \cos(\alpha), \parallel \vec{v} \parallel \cos(\beta), \parallel \vec{v} \parallel \cos(\gamma))$

$$= \parallel \vec{v} \parallel (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$$

Por último como el módulo de $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = 1$ se tiene la ecuación

$$cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) = 1$$

Ejemplo 5

Calcule los cosenos y ángulos directores del vector $\vec{v} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ y comprobar que

$$cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) = 1$$

Solución.

Primero encontramos la norma del vector $\vec{v}$ para poder sustituirla en las formulas

$$\parallel \vec{v} \parallel = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$\cos(\alpha) = \frac{v_1}{\|\vec{v}\|} \rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{14}}$ despejando $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\right) = 105.50°$

$\cos(\beta) = \frac{v_2}{\|\vec{v}\|} \rightarrow \cos(\beta) = \frac{3}{\sqrt{14}}$ despejando $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = 36.7°$

$\cos(\gamma) = \frac{v_3}{\|\vec{v}\|} \rightarrow \cos(\gamma) = \frac{-2}{\sqrt{14}}$ despejando $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right) = 122.3°$

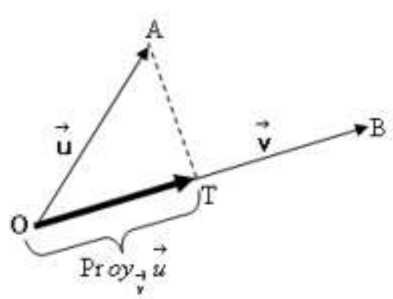
Ahora comprobaremos que se cumple

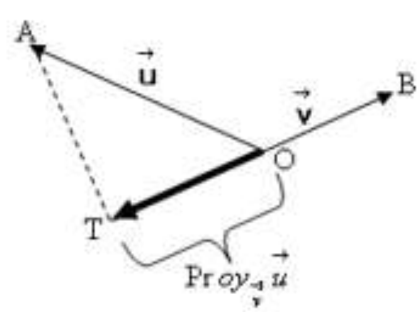
$$cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) = 1$$

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)^2 = 1$$

PROYECCIONES

La siguiente figura muestra las representaciones $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con el mismo origen O. Si T es el pie de la perpendicular trazada de A a la recta que contiene el vector $\overrightarrow{OB}$, entonces el vector $\overrightarrow{OT}$ se llama vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ o proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y se denota por $Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}}$



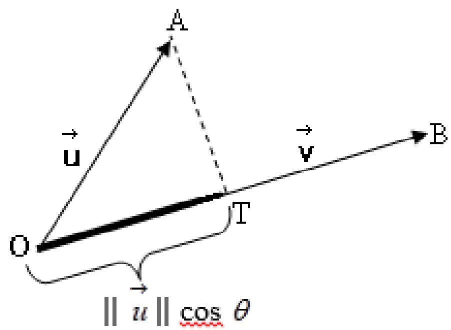


Proyección Escalar

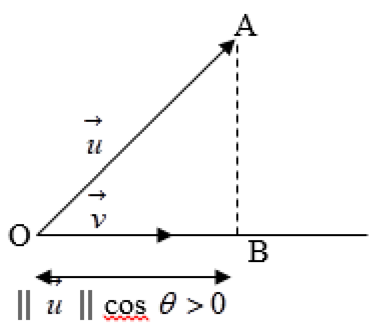
La proyección escalar del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ también llamada la componente de $\vec{u}$ en la dirección del vector $\vec{v}$ se define como el módulo del vector de proyección, que es el número

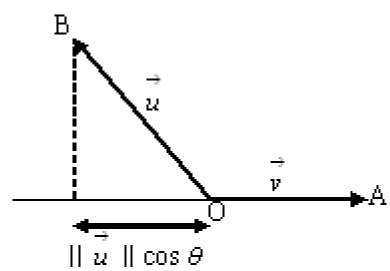
$Comp_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \| \vec{u} \| \cos(\theta),$

donde θ es ángulo entre $\vec{u}$ el vector $\vec{v}$ (ver figura)



Observe que la proyección escalar puede ser positiva o negativa, dependiendo del signo que tome $\cos(\theta)$.





Si despejamos a $\cos(\theta)$ de la ecuación $\vec{u}.\vec{v} = \| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos(\theta)$

$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ y lo sustituimos en la fórmula: $Com_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \| \vec{u} \| \cos(\theta)$ obtenemos que

$$Comp_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \| \vec{u} \| \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\| \vec{u} \| \| \vec{v} \|} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\| \vec{v} \|}$$

Ahora bien la proyección vectorial $Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}}$ está dada por:

$$\begin{aligned} Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}} &= \left(Com_{\vec{v}}^{\vec{u}}\right)\left(\frac{\vec{v}}{\| \vec{v} \|}\right) \\ &= \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\| \vec{v} \|}\left(\frac{\vec{v}}{\| \vec{v} \|}\right) \\ &= \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\| \vec{v} \|^2}\vec{v} \end{aligned}$$

Resumiendo:

Proyección escalar: $\boldsymbol{Comp}_{\vec{\boldsymbol{v}}}^{\overrightarrow{\boldsymbol{u}}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

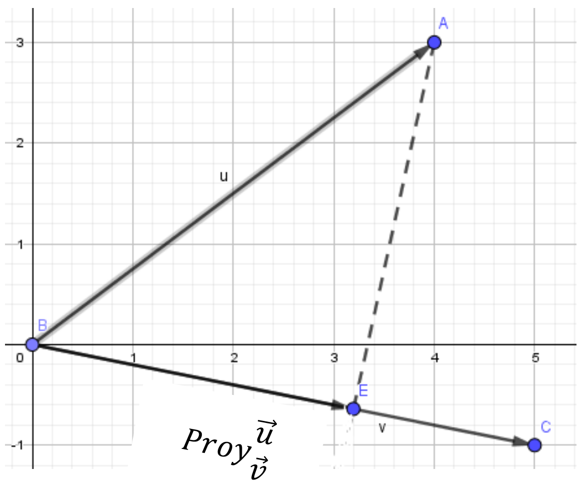
Proyección vectorial: $\boldsymbol{Proy}_{\vec{\boldsymbol{v}}}^{\vec{\boldsymbol{u}}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{\boldsymbol{v}}$

y además $\| Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}} \| = Comp_{\vec{v}}^{\vec{u}}$

Ejemplo 6

a) Determine $Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}}$ si $\vec{u} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ y $\vec{v} = 5 - \vec{\jmath}$.

Solución:



$$Proy_{\vec{v}}^{\vec{u}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\| \vec{v} \|^2}\vec{v}$$

$$= \frac{(20-3)}{\left(\sqrt{(5)^2+(-1)^2}\right)^2}(-5,-1)$$

$$= \frac{17}{26}(5,-1) = \left(\frac{85}{26}, \frac{-17}{26}\right)$$

b) Encuentre la proyección escalar y la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$ siendo $\vec{u} = (4,2,0)$ y $\vec{v} = (1,1,1)$

$$Proy_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\| \vec{u} \|^2}\vec{u}$$

$$= \frac{6}{20}(4,2,0)$$

$$= \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

$$Comp_{\vec{u}}^{\vec{v}} = \| Proy_{\vec{u}}^{\vec{v}} \| = \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 0} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Ejercicios para practicar.

1. Calcule y corrija al grado más cercano los tres ángulos del triángulo cuyos vértices son:
   a. $A(1,2,3), B(6,1,5), C(-1,-2,0)$
   b. $A(0,-1,6), B(2,1,-3), C(5,4,2)$

2. Calcular el valor de x para que los vectores $\vec{u} = (-3, x, -2)$ y $\vec{v} = (x, 9,6)$ sean

a. Paralelos
b. Ortogonales.

3. Determine el valor de c de manera que el ángulo entre $\vec{u} = (1, c, 0)$ y $\vec{v} = (1,1,0)$ sea 45°.

4. Encuentre los valores de x tales que los vectores dados son ortogonales
   a. $x\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$; $x\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$
   b. $\langle x, 1,2\rangle, \langle 3,4, x\rangle$
   c. $\langle x, x, -1\rangle, \langle 1, x, 6\rangle$

5. Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos, o ninguno de los dos.
   a. $\vec{u} = \langle 2, -4\rangle,\ \vec{v} = \langle -1,2\rangle$
   b. $\vec{u} = \langle \cos(\theta), sen(\theta), -1\rangle, \vec{v} = \langle sen(\theta), -\cos(\theta), 0\rangle$
   c. $\vec{u} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{v} = -3\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} + 6\vec{k}$

6. Demuestre por medio de vectores que los puntos dados son los vértices de un paralelogramo
$$A(1,12,5), B(0,10,2), C(2,9,1), D(3,11,4)$$
7. Determine los cosenos directores de $\overrightarrow{AB}$ y verifique las respuestas al mostrar que la suma de sus cuadrados es 1.
   a. $A(-2,6,1), B(7,2,4)$
   b. $A(1,3,5), B(2, -1,4)$
8. Si un vector tiene ángulos directores $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $\beta = \frac{\pi}{3}$ calcule el tercer ángulo director γ.
9. Determine lo indicado si $\vec{u} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{v} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$
   a. La proyección vectorial y la proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$
   b. $Proy_{(\vec{v}-\vec{u})}^{2\vec{u}}$
   c. $Comp_{(-3\vec{v})}^{(\vec{u}-2\vec{v})}$
10. Si $\vec{u} = \langle 3,0, -1\rangle$ encuentre el vector $\vec{v}$ talque $Comp_{\vec{u}}^{\vec{v}} = 2$