UNIVERSIDAD DON BOSCO - DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES - CICLO 02 - 2020

Semana 10. Unidad # 3: Vectores en el plano y en el Espacio

Sesión 2:

Punto medio y puntos fuera del punto medio entre dos puntos en el espacio.

La fórmula para las coordenadas de un punto $P_n(x_n, y_n, z_n)$ que no se encuentra a la mitad de los puntos $P_2(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es

$$x_n = x_1 + n(x_2 - x_1)$$
$$y_n = y_1 + n(y_2 - y_1)$$
$$z_n = z_1 + n(z_2 - z_1)$$

Siendo n la constante que se desea desplazar
Si queremos obtener el punto medio entre dos puntos hacemos $n = \frac{1}{2}$ en la fórmula anterior para obtener

$$x_{pm} = x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$y_{pm} = y_1 + \frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{y_1 + y_2}{2}$$
$$z_{pm} = z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

El punto medio del segmento que une los puntos $P_2(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ tiene las coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

Ejemplo 2. Halle el punto que se encuentra a $\frac{3}{7}$ del camino del punto $P_1(4,-1,2)$ al punto $P_2(6,-2,3)$.

Solución: aplicando las fórmulas para hallar puntos fuera del punto medio, obtenemos:

$$x_{\frac{3}{7}} = 4 + \frac{3}{7}(6-4) = \frac{34}{7}$$

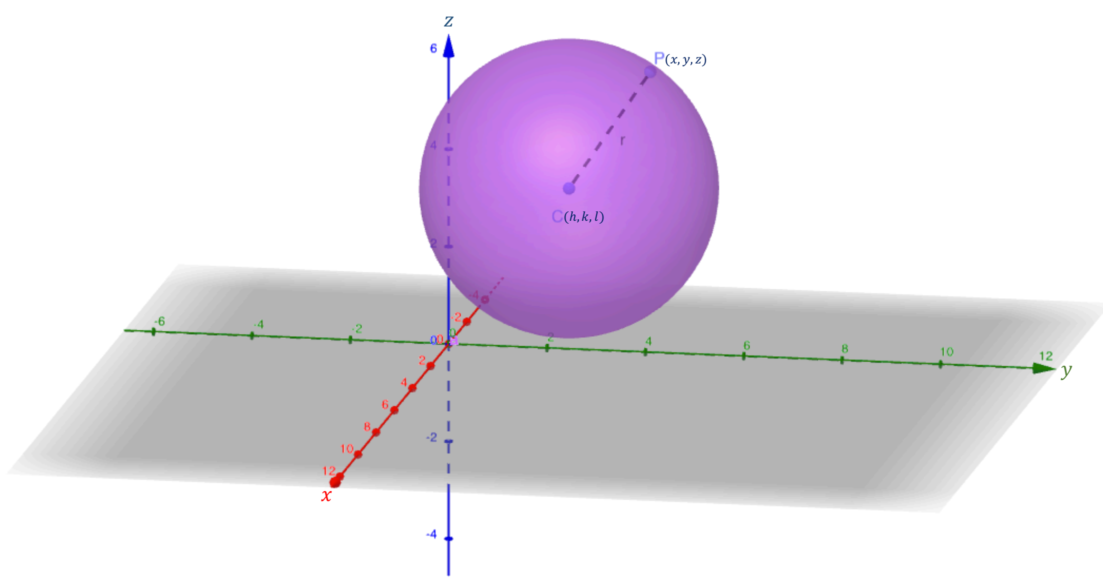
$$y_{\frac{3}{7}} = -1 + \frac{3}{7}(-2+1) = \frac{-10}{7}$$

$$z_{\frac{3}{7}} = 2 + \frac{3}{7}(3-2) = \frac{17}{7}$$

El punto $P_{\frac{3}{7}}$ es $(\frac{34}{7}, \frac{-10}{7}, \frac{17}{7})$.

La esfera

Definición: Es el conjunto de puntos en el espacio que tienen la misma distancia $r > 0$ aun punto fijo llamado centro.



En una esfera con centro $C(h, k, l)$ y un punto $P(x, y, z)$ cualquiera que pertenece a la esfera, se cumple que la distancia del centro al punto P nos da el radio r, es decir

$$d(CP) = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2}=r$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2 \cdots\cdots\cdots (1)$$

A esta última ecuación se le conoce como ecuación ordinaria o ecuación canónica de la esfera. Si en particular el centro es el origen O, entonces la ecuación de la esfera es

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

Por otra parte, si desarrollamos los cuadrados de la ecuación (1) y se reducen los términos semejantes, se obtiene la forma equivalente

$$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

donde D, E, F y G son constantes. Esta ecuación se denomina forma general de la ecuación de una esfera. Donde se cumple que

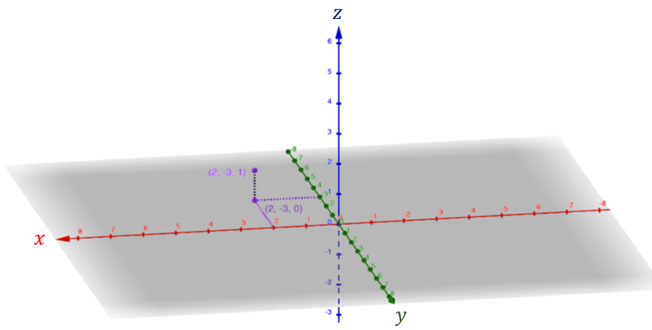
$$h=-\tfrac{1}{2}D\ ; \quad k=-\tfrac{1}{2}E\ ;\ l=-\tfrac{1}{2}F \quad \text{y} \quad r=\tfrac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2+F^2-4G}$$

Hay que tener en cuenta que si $r>0$, entonce se tiene una esfera con centro $C(h,k,l)$. Si $r<0$, entonces la gráfica es el conjunto vacío debido a que la suma de los cuadrados de tres números reales es no negativa. Si $r=0$, la gráfica de la ecuación es un punto (h,k,l).

Ejercicios:

1. **Encuentre la ecuación de la esfera con centro $C(2,-3,1)$ y tangente al plano xy.**

Solución: Graficando el centro de la esfera



En la gráfica se puede apreciar que el centro de la esfera se encuantra en el cuarto octante y que además el punto $(2,-3,0)$ pertenece al plano xy.

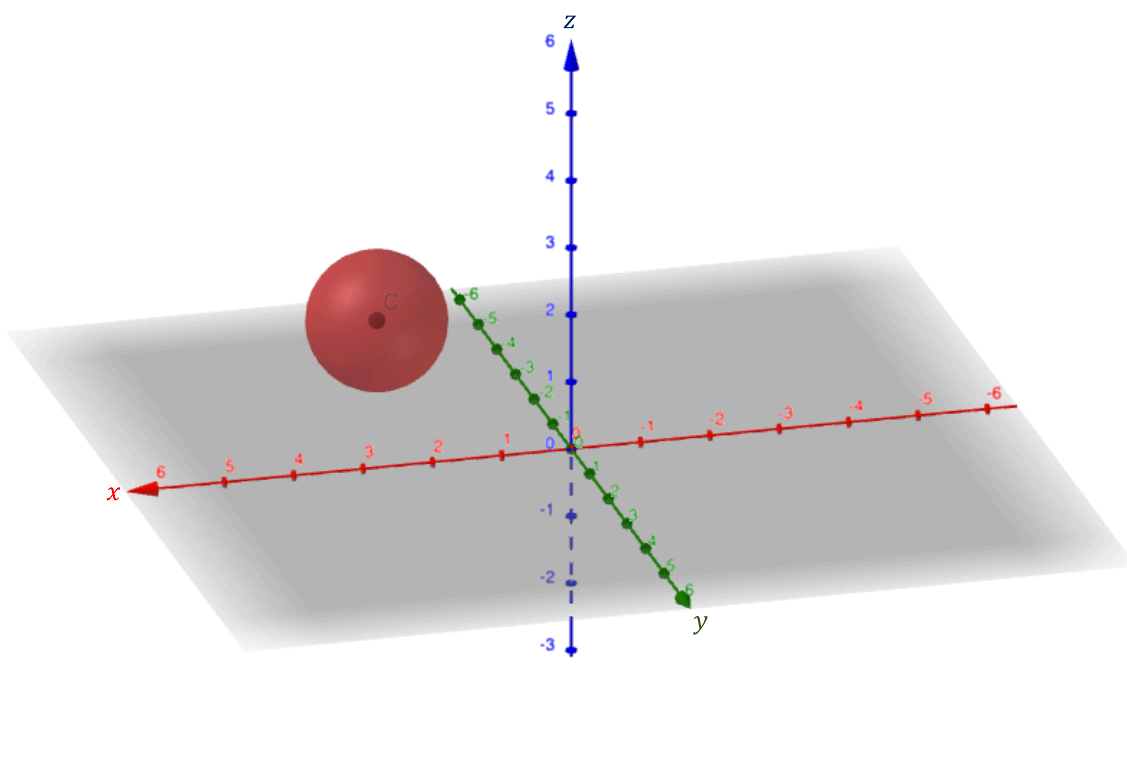
Como la ecuación de la esfera que buscamos es tangente al plano xy, por lo que, si calculamos la distancia del centro al punto $(2,-3,0)$ encontraremos el radio de la esfera, es decir

$$r=\sqrt{(2-2)^2+(-3+3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1}=1$$

Por lo tanto la escuación estaría dada por

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=1$$

Ilustración gráfica



2. **Encuentre la ecuación de la esfera que tiene como extremos de uno de sus diámetros $\boldsymbol{A(9,4,0)}$ y $\boldsymbol{B(-5,6,-2)}$.**

Solución: Necesitamos encontrar el centro y el radio para lograr formar la ecuación de la esfera.

El centro será el punto medio entre los puntos A y B, que son los extremos del diámetro dado.

$$C(h,k,l)=\left(\frac{9-5}{2},\frac{4+6}{2},\frac{0-2}{2}\right)=(2,5,-1)$$

Encontrando el radio r, el cual lo podemos encontrar de las siguientes maneras

$$r=\frac{d(AB)}{2} \quad \text{ó} \quad r=d(CA)=d(CB)$$

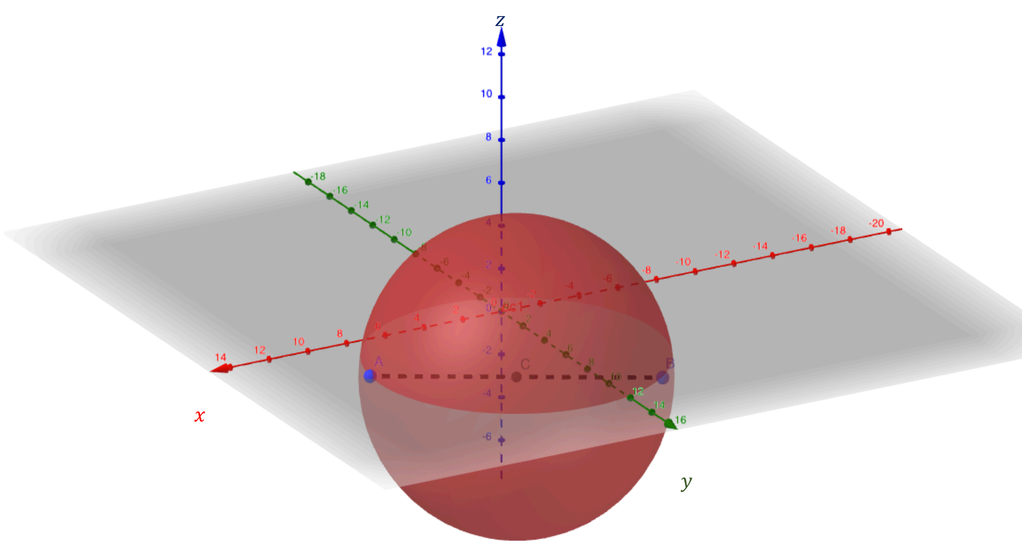
ocupando

$$r=d(CA)=\sqrt{(9-2)^2+(4-5)^2+(0+1)^2}=\sqrt{49+1+1}=\sqrt{51}$$

Por lo tanto, la ecuación de la esfera en su forma ordinaria es

$$(x-2)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=51$$

Ilustración gráfica



3. Obtenga la ecuación de la esfera cuyo centro está en el punto que se encuentra a $\frac{2}{9}$ del camino del punto $\boldsymbol{P}\ (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{3})$ a $\boldsymbol{Q}\ (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{6})$, y además la esfera pasa por $\boldsymbol{Q}$.

Solución: encontrando el centro de la esfera,

$$\mathbf{h} = 1 + \frac{2}{9}(1-1) = 1, \qquad \mathbf{k} = 3 + \frac{2}{9}(3-3) = 3 \qquad \mathbf{l} = 3 + \frac{2}{9}(6-3) = \frac{11}{3}$$

El centro es entonces $C(1,3,\frac{11}{3})$

Como el punto Q es de la esfera, para hallar el radio encontramos la distancia entre C y Q:

$$r = \sqrt{0 + 0 + \frac{49}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{7}{3}$$

La ecuación de la esfera es

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z - \frac{11}{3})^2 = \frac{49}{9}$$

4. Analice la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - z - \frac{23}{4} = 0$

Solución: Primero completamos cuadrados de la manera siguiente:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - z + \frac{1}{4}) = \frac{23}{4} + 9 + 1 + \frac{1}{4}$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = 16$$

En consecuencia, la gráfica es una esfera de radio 4 con centro en (3,-1,1/2).

Ejercicios Propuestos

1. Las coodenadas del punto medio del segmento entre $P_1(x_1, y_{1,} z_1)$ y $P_2(2,3,6)$ son $(-1,-4,8)$. Halle las coordenadas de P_1.

2. Determine los vértices del triángulo cuyos lados tienen los puntos medios en $A(3,2,3), B(-1,1,5),\ C(0,3,4)$.

3. Halle el punto R que se encuentra a una razón n del camino del punto P al punto Q. Grafique los tre puntos.
    a. $P(5,5,6)$, $Q(10,5,1)$, $n = \frac{2}{5}$
    b. $P(1,0,2)$, $Q(3,1,1)$, $n = \frac{1}{4}$

4. Obtén la ecuación de la esfera cuyo centro está en el punto que se encuentra a $\frac{2}{9}$ del camino del punto $P(1,3,1)$ al punto $Q(1,3,10)$, y además la esfera pasa por Q.

5. Encuentre el centro y el radio de la esfera

$$9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$$

6. Encuentre la ecuacón de la esfera que satisface las siguientes condiciones
    a. Centro $C(-2,1,1)$ y es tangente a los tres planos coordenados.
    b. Tiene su centro en $(3,2,1)$ y pasa por $(3,1,5)$.
    c. Contiene a los puntos $(0,2,6)$, $(2,1,3)$ y $(0,0,4)$ y su centro está en el plano $x = 0$

7. Considere los puntos P cuya distancia de P a $Q(-1,5,3)$ sea el doble de la distancia de P a $R(6,2,-2)$.