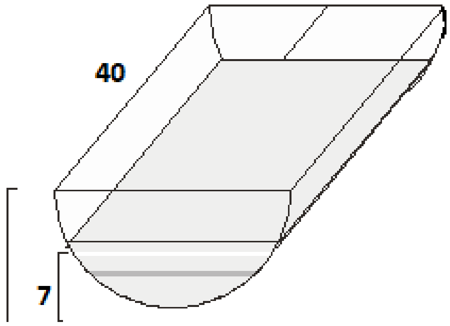
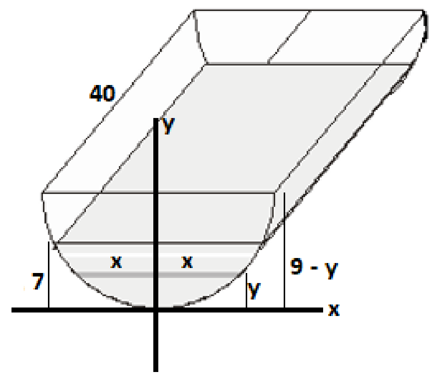
Encontrar el trabajo realizado al bombear agua hasta el borde superior de un depósito de 40 pies de largo y tiene extremos semicirculares de radio = 9 pies, si el depósito está lleno hasta una profundidad de 7 pies (ver la figura)



Solución:

Colocamos un extremo del tanque en un sistema de coordenadas cartesianas, como se visualiza en la figura. Tomamos un elemento representativo del volumen, en este caso es una placa rectangular:



$$Volumen\ de\ la\ placa = 2x(40)\Delta y = 80x\Delta y$$

De la figura, podemos observar que la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + (y-9)^2 = 9^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 18y + 81 = 81 \Longrightarrow x = \sqrt{18y - y^2}$$

Sustituyendo en el volumen de la placa:

$$Volumen\ de\ la\ placa = 80x\Delta y = 80\sqrt{18y - y^2}\Delta y$$

$$Peso\ de\ la\ placa = (62.4)80\sqrt{18y - y^2}\Delta y$$

$$Distancia\ que\ recorre\ el\ líquido = 9 - y$$

Por tanto, el trabajo realizado se calcula así:

$$w = \int_0^7 (62.4)80\sqrt{18y - y^2}\,(9-y)dy = 4992\int_0^7 \sqrt{18y - y^2}\,(9-y)dy = 4992\left[\int_0^7 \sqrt{81 - (y-9)^2}\,(9-y)dy\right]$$

Completando cuadrados: $18y - y^2 = -(y^2 - 18y + 81) + 81 = 81 - (y-9)^2$

Haciendo el cambio de variables:

$$u = y - 9 \Rightarrow du = dy\,, si\ y = 0 \ \Rightarrow u = -9\,, si\ y = 7 \Rightarrow u = -2\ \ además\ 9 - y = -u$$

Sustituyendo en la integral:

$$w = 4992\left[\int_{-9}^{-2} \sqrt{81 - u^2}\,(-u)dy\right]$$

Integrando usando la regla de la potencia:

$$w = 4992\left[\frac{1}{3}(81 - u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-9}^{-2}$$

LIC. JONATHAN GUEVARA

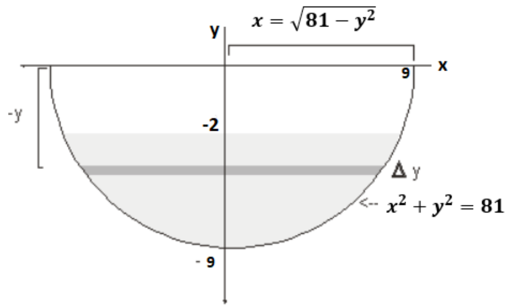
Evaluando:

$$w = 4992\left\{\left[\frac{1}{3}(81-(-2)^2)^{\frac{3}{2}}\right]-\left[\frac{1}{3}(81-(-9)^2)^{\frac{3}{2}}\right]\right\} = \frac{4992}{3}(77)^{\frac{3}{2}} = 1{,}124{,}318.637\ libras\ pies$$

Rpta. El trabajo realizado es $\mathbf{1,124,310.637}$ *libras pies*

Otra solución:

También podemos colocar los ejes coordenados de esta forma y resulta mucho más sencillo resolverlo, nada más debemos tener cuidado con el signo de la distancia que recorre el líquido:



En este caso tenemos que:

$Volumen\ de\ la\ placa = 80x\Delta y = 80\sqrt{81-y^2}\Delta y$

$Peso\ de\ la\ placa = (62.4)80\sqrt{81-y^2}\Delta y$

$Distancia\ que\ recorre\ el\ líquido = -y$

Por tanto, el trabajo realizado se calcula así:

$$w = \int_{-9}^{-2}(62.4)80\sqrt{81-y^2}\,(-y)dy = 4992\int_{-9}^{-2}\sqrt{81-y^2}\,(-y)dy = 1{,}124{,}318.637\ libras\ pies$$