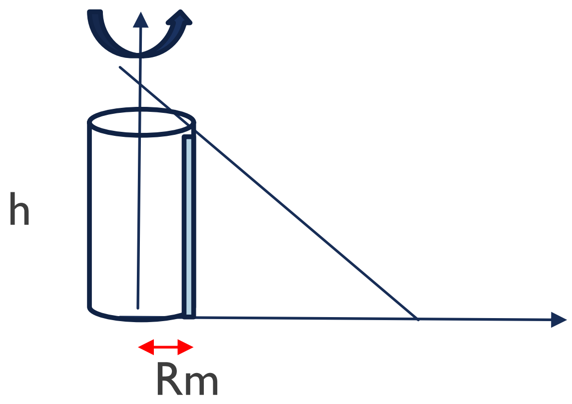
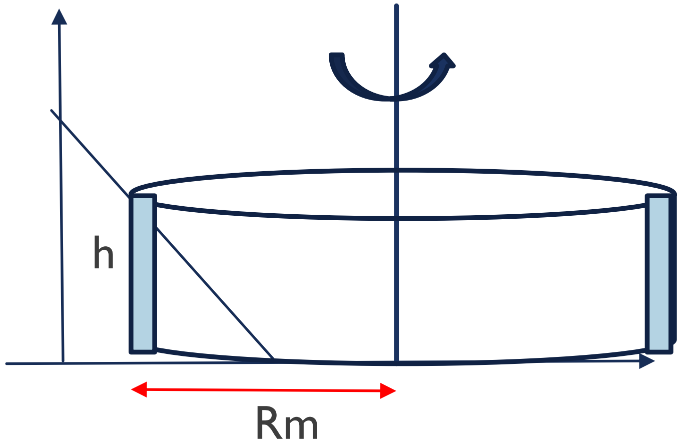
VOLUMEN DE SÓLIDOS: MÉTODO DE CAPAS CILINDRICAS

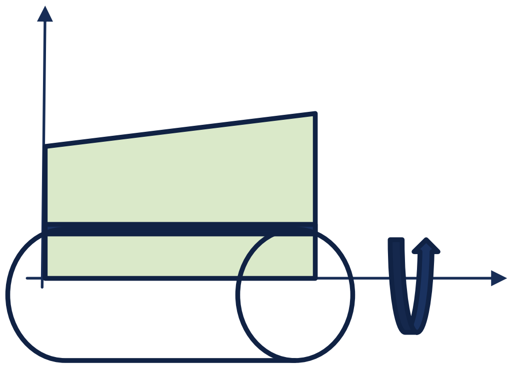
¿CUANDO SE PUEDE UTILIZAR ESTE MÉTODO?

- El método de capas cilíndricas se puede aplicar ya sea que la región plana gira alrededor de una recta que lo limita o alejada del eje de giro .
- La región plana siempre toma como representativo un rectángulo, que gira alrededor del eje de rotación. Pero ahora este elemento representativo es paralelo al eje de giro y genera una capa cilíndrica con altura y radio medio.

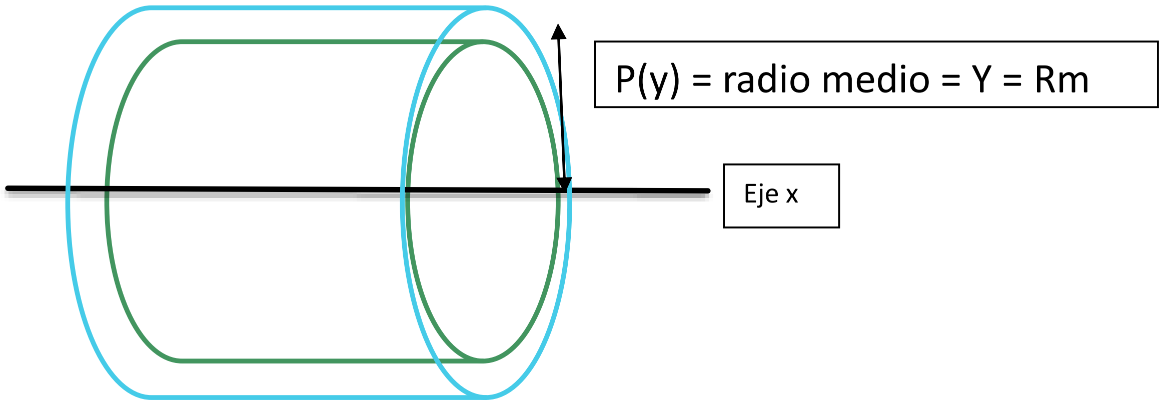




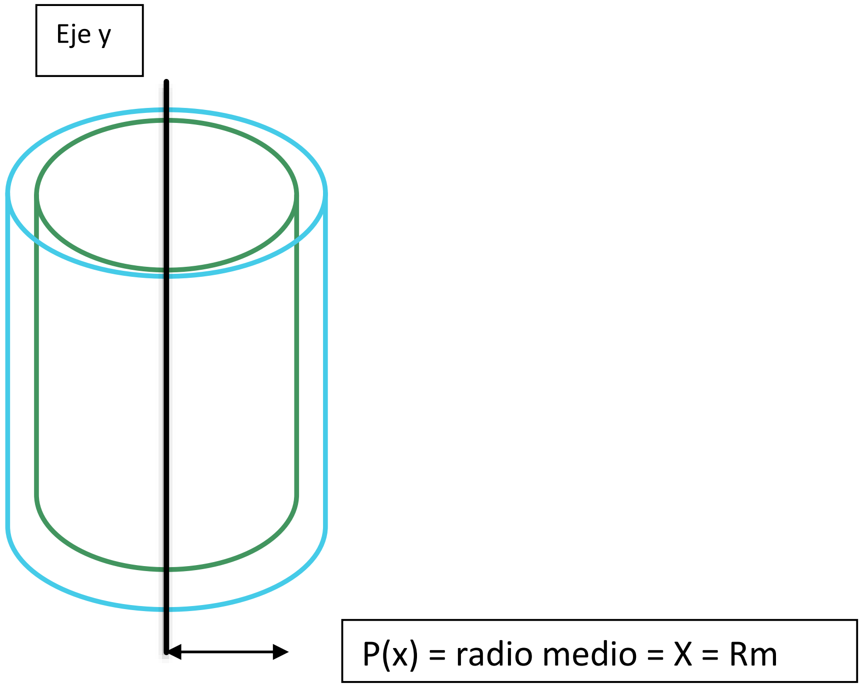
- Esta integral se basa en la sumatoria de volumen de cilindros (ver deducción en el libro texto , pág. 194) siendo el $\Delta V = 2\pi$ (radio medio)(altura)(Δr) .
- **<u>El radio medio</u>** , es la distancia desde el eje de giro hasta la mitad del diferencial , es decir, corresponde a la ubicación de un punto en la región plana , desde el eje de rotación. No tienen relación con las funciones.
- **<u>La altura</u>** , se relaciona con la función, puede observarse en la región que la altura del cilindro es la función o se encuentra entre funciones. Puede expresarse en términos de x ó y.
- **<u>Δr es el ancho</u>** , en el cilindro este ancho es el diferencial dx ó dy que se observa en el rectángulo que hacemos girar.



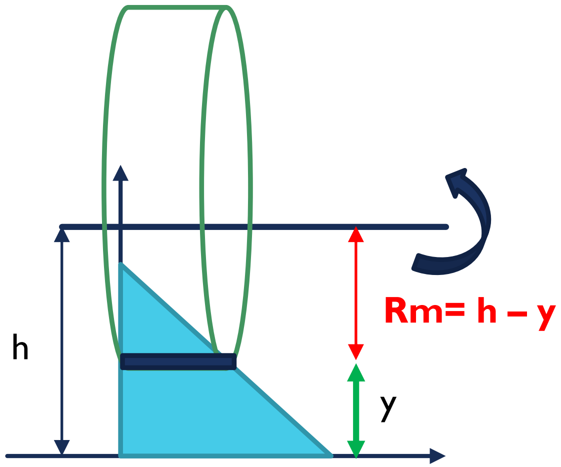
- En el libro texto **P(y)** o **P(x),** es un radio medio que se mide ***desde el eje de giro hasta el centro del diferencial***. Dicho diferencial es el rectángulo que generó la capa cilíndrica.
- Cuando el **<u>giro es respecto al eje x</u>** , ese radio es la ubicación de un punto, en la región, desde el eje x. Todo punto ubicado desde el **eje x** se encuentra a una distancia **Y**. Podemos representar el radio medio también como **Rm**

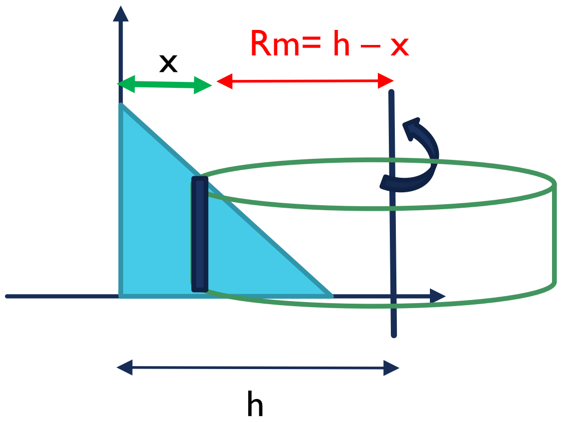


- Cuando el **giro es respecto al eje y** , ese radio es la ubicación de un punto, sobre la región plana, desde el eje y. Todo punto ubicado desde el **eje y** se encuentra a una distancia **X**. Podemos representar el radio medio también como **Rm.**



- Existen sólidos que se generan al revolucionar la región plana en torno a rectas que son paralelas a los ejes coordenados, ubicadas a una distancia h y el planteamiento del radio medio incluye operaciones con X o Y , según sea el giro.





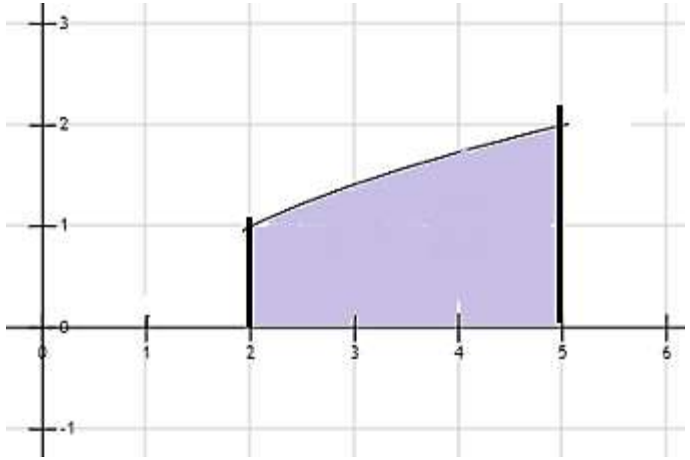
EJEMPLOS

- Ejemplo : Dada la región plana acotada por $y = \sqrt{x-1}$, y = 0 , x = 2 , x =5. Plantee la integral para el volumen del sólido que se forma al realizar cada giro indicado:

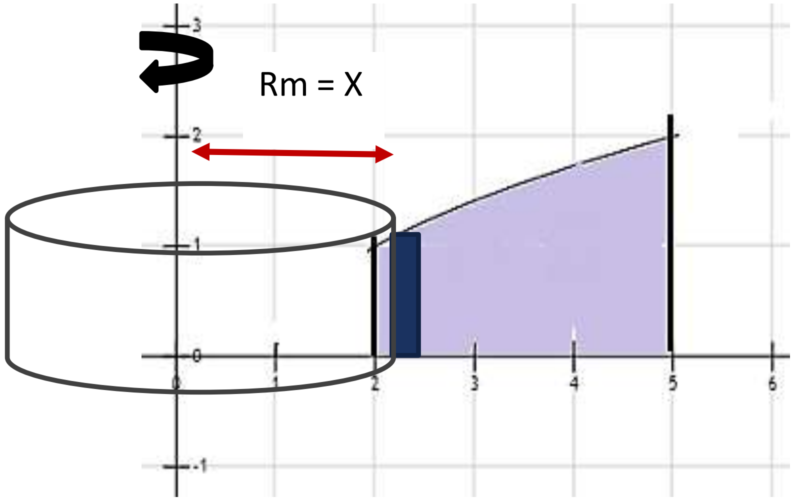
  a) Girando alrededor del eje y

  b) Girando alrededor de la recta x = 5

  c) Girando alrededor de y = - 1



Si esta región gira alrededor del **eje y** , el radio medio es la distancia **X** , siendo la integral para el volumen del sólido de revolución la siguiente



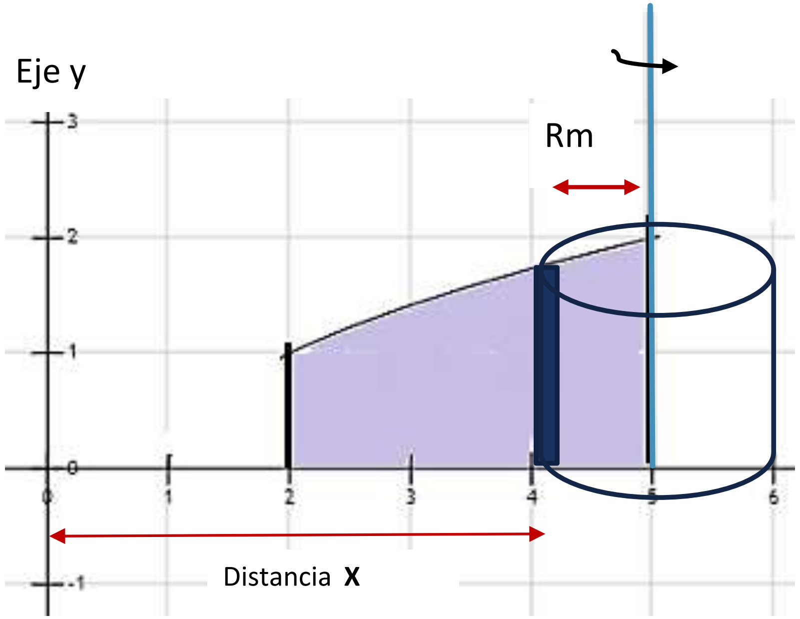
$$V = \int_{2}^{5} 2\pi \, h(x)\, Rm \, dx$$

$$\boldsymbol{V} = \int_{2}^{5} 2\boldsymbol{\pi} \left(\sqrt{\boldsymbol{x}-1}\right)(\,\boldsymbol{x}\,)\boldsymbol{dx}$$

La altura de la capa cilíndrica es la altura del rectángulo, es decir la función f(x)

$$h(x) \;=\; \sqrt{x-1}$$

Esta región también puede girar alrededor de la recta ***x = 5***, el radio medio ***es la distancia desde el eje de giro hasta el centro del diferencial***. Recordemos que el diferencial base es un rectángulo paralelo al eje de rotación, el cual al rotar forma una capa cilíndrica, la cual es el representativo del sólido.



*Las **distancias x** solamente se pueden medir desde eje coordenado, es decir desde el **eje y**, porque toda ubicación de un punto sobre la gráfica es una distancia horizontal medida desde el eje vertical.*

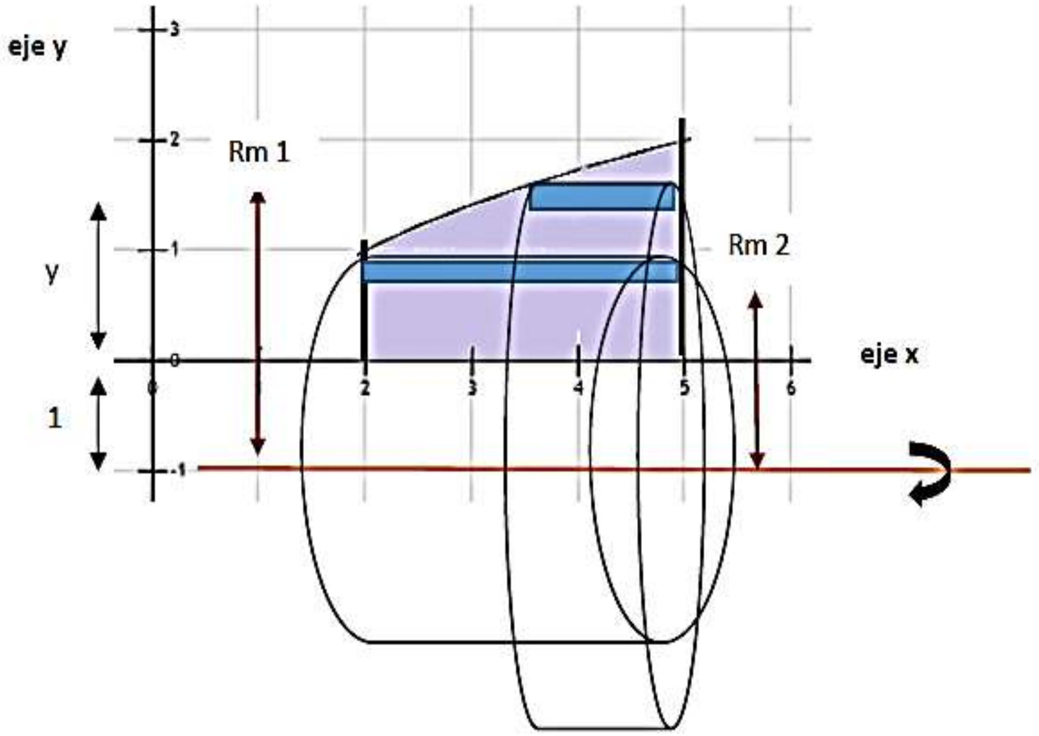
La integral para obtener el volumen del solido con el método de capas quedará planteada de la siguiente manera:

$$V = \int_2^5 2\pi \; h(x)\, Rm \; dx = \int_2^5 2\pi \sqrt{x-1}\,(5-x)\, dx$$

Rm = 5 - x

$$h(x) = \sqrt{x-1}$$

Si esta misma región plana ahora gira alrededor de la recta **y = - 1**, la capa cilíndrica deberá ser horizontal y si se observa la gráfica, la altura de la capa cambia, generando la necesidad de trabajar con dos integrales y el radio medio se planteará de diferente manera.



Este radio toma en cuenta siempre a la distancia **Y** , la cual solamente puede medirse desde el eje x , ya que es la referencia para toda distancia vertical hacia un punto dentro de la gráfica.

Cada una de las alturas se plantean como la resta de funciones en la variable “y”. Restando función de la derecha menos función de la izquierda.

El radio medio de la capa cilíndrica 1 (Rm1) se plantea como una suma **Rm 1 = 1 + y** , que incluye la ubicación del eje de giro respecto al eje x (uno) con la distancia que se mide desde el eje x hasta el centro del diferencial.

El radio medio de la segunda capa es igual, **Rm 2 = 1 + y ,** porque son las mismas distancias planteadas en el cilindro 1.

La integral para obtener el volumen del solido con el método de capas quedará planteada de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{V} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} 2\boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{Rm}\, \boldsymbol{dy} = \int_0^1 2\boldsymbol{\pi}\, (5-2)(1+\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy} + \int_1^2 2\boldsymbol{\pi}\, [\, 5 - (\boldsymbol{y}^2+1)\,](1+\boldsymbol{y})\, \boldsymbol{dy}$$

Simplificando integrando

$$\boldsymbol{V} = \int_0^1 2\boldsymbol{\pi}\, (3)(1+\boldsymbol{y})\boldsymbol{dy} + \int_1^2 2\boldsymbol{\pi}\, [\, 5+5y - (\boldsymbol{y}^2+1)\; - y(y^2+1)]\, \boldsymbol{dy}$$

$$\boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{\pi} \int_0^1 (3+\boldsymbol{3y})\boldsymbol{dy} + 2\boldsymbol{\pi} \int_1^2 [\, 5+5y - (\boldsymbol{y}^2+2\mathrm{y}+1)\; - (y^3+y)]\, \boldsymbol{dy}$$

$$\boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{\pi}\int_{0}^{1}(3+\boldsymbol{3y})\boldsymbol{dy} + 2\boldsymbol{\pi}\int_{1}^{2}[\,5+5y-y^2-2y-1\;-y^3-y]\,\boldsymbol{dy}$$

$$\boldsymbol{V} = 2\boldsymbol{\pi}\int_{0}^{1}(3+\boldsymbol{3y})\boldsymbol{dy} + 2\boldsymbol{\pi}\int_{1}^{2}[-y^3-y^2+2y+4]\,\boldsymbol{dy}$$