UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 4- Unidad 2: Matrices y Determinantes.

Sesión 1: Operaciones con matrices: suma de matrices, resta de matrices, producto de un escalar por una matriz, potencia de matrices, Determinantes, propiedades, cálculo de determinantes 2x2, por Sarrus 3x3.

Operaciones con matrices

Suma de matrices

Sólo se pueden sumar matrices de la misma dimensión.

Definición: la suma de dos matrices de igual dimensión A y B es otra matriz que se denota como A+B con la misma dimensión que las otras dos y definida como

A+B= (aij)+ (bij)= (aij+bij). Es decir, A+B se obtiene sumando los elementos que ocupan la misma posición en las dos matrices que suman.

Si las matrices tienen diferente tamaño no se pueden sumar.

Ejemplo 1. Sean A y B dos matrices de orden 2×3, entonces

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2. Halle la siguiente suma

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -9 & -5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-6) & -3 + 2 \\ 4 + (-9) & 5 + (-5) \\ 1 + 4 & 0 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -5 & 0 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Nota: La "resta" de dos matrices es la suma de la matriz "minuendo" con la opuesta de la matriz "sustraendo", es decir, A -B = A + (-B). En la práctica se restan los elementos directamente.

Ejemplo 3. Sean $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ambas de orden 3×2,

entonces $\mathrm{B} - \mathrm{C} = \mathrm{B} + (-\mathrm{C}) = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 5 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -14 \\ 8 & 6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de matrices

Como la suma de matrices se define a partir de la suma de números reales, entonces cumple las mismas propiedades que éstos, es decir:

1) Conmutativa: $A + B = B + A$

2) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

3) Elemento neutro: $A + 0 = 0 + A$, con 0 la matriz nula de igual dimensión que la matriz A.

4) Elemento opuesto: $A + (-A) = -A + A = 0$, con $-A$ como la matriz opuesta de A.

Multiplicación de una matriz por un escalar

El producto de una matriz A por un escalar α se define como αA, esto es, se multiplica cada uno de los elementos de la matriz por el escalar.

.

Ejemplo 4. SI $\begin{bmatrix} 7 & 10 & -6 & 4 & 2 \\ -1 & -9 & 0 & 8 & -5 \end{bmatrix}_{2x5}$ y $\alpha = -3$, entonces

$$\alpha A = -3\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -3(7) & -3(10) & -3(-6) & -3(4) & -3(2) \\ -3(-1) & -3(-9) & -3(0) & -3(8) & -3(-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -21 & -30 & 18 & -12 & -6 \\ 3 & 27 & 0 & -24 & 15 \end{bmatrix}_{2X5}$$

El producto de un escalar por una matriz cumple las siguientes propiedades.

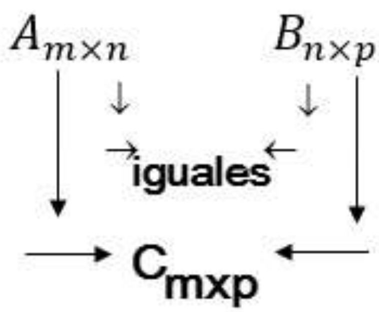
Sean α y β dos escalares y sean A y B dos matrices de orden $m \times n$.
P1) Distributiva respecto a la suma de matrices: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
P2) Distributiva respecto a la suma de escalares: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
P3) Asociativa: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = (\alpha A)B$
P4) Elemento neutro: $1A = A$
P5) Propiedad multiplicativa del cero: $0\mathrm{A} = 0_{m\times n}$

Multiplicación de matrices

Desde un principio debemos dejar claro que no todas las matrices pueden multiplicarse. Dos matrices se pueden multiplicar cuando se cumple la siguiente condición: *"Para multiplicar dos natrices A y B en este orden AB, es condición indispensable que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B"*

Si esta condición no se satisface, el producto AB no se puede realizar.

Una vez comprobado que el producto es factible, si la matriz A es de orden $m \times n$ necesariamente el orden de la matriz B debe ser $n \times p$; entonces el producto AB da como resultado una nueva matriz C de orden $m \times p$.



Es decir, si tenemos una matriz 2×3 y la multiplicamos por otra de orden 3×5, la matriz resultante será de orden 2×5.

$$(2 \times 3) \times (3 \times 5) = (2 \times 5)$$

Se puede observar que el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa, ya que, en el ejemplo anterior, si multiplicamos la segunda por la primera, no podríamos efectuar la operación. 3×5 por 2×3, puesto que la primera matriz no tiene el mismo número de columnas que filas de la segunda.

Se define entonces el producto $A \cdot B$ *de la siguiente forma:*

El elemento que ocupa el lugar (i, j) en la matriz producto se obtiene sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por el correspondiente de la columna j de la matriz B.

Resulta más fácil comprender el producto de matrices a partir de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5.

Multiplique $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times1}$

Solución

Disponemos las dos matrices en la forma siguiente

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\begin{bmatrix}9\\ 0\\ -1\end{bmatrix}_{3\times1}$$

Obtengamos el primer elemento "a"

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ & & \end{bmatrix} \quad : \quad 1(9)+2(0)+3(-1)=6=a$$

$$\begin{bmatrix}9\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

Elemento "b"

$$\begin{bmatrix} & & \\ 4 & 5 & 6\\ & & \end{bmatrix} \quad : \quad 4(9)+5(0)+6(-1)=30=b$$

$$\begin{bmatrix}9\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

Elemento "c"

$$\begin{bmatrix} & & \\ 7 & 8 & 0\end{bmatrix} \quad : \quad 7(9)+8(0)+0(-1)=63=c$$

$$\begin{bmatrix}9\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}6\\ 30\\ 63\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

Respuesta $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 30 \\ 63 \end{bmatrix}_{3\times1}$

Ejemplo 6.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{3X2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & \mathbf{5} \\ -2 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}_{2X3} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 14 \\ 0 & 4 & \mathbf{7} \\ -8 & 0 & 12 \end{bmatrix}_{3X3} = C$$

En negritas: **2(5) + -1(3) = 10+ (-3) = 7**

Ejemplo 7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(-1)+3(3) & 1(0)+2(2)+3(-4) \\ 4(1)+5(-1)+6(3) & 4(0)+5(2)+6(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 17 & -14 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices

El producto de matrices (para matrices multiplicables) cumple las siguientes propiedades:

P1) Asociatividad: Si A, B y C son matrices tales que los productos siguientes existen, entonces

$$(AB)C = A(BC)$$

P2) No conmutatividad: el producto de matrices no es necesariamente conmutativo. $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BA}$

P3) Distributividad: el producto de matrices es distributivo respecto a la suma de matrices, es decir

$\mathrm{A.(B + C) = AB + AC}$, $\mathrm{(A + B)C = AC + BC}$

P4) Si A es una matriz cuadrada de orden n y si I_n es la matriz identidad multiplicativa, entonces

$$\mathrm{AI_n = A \quad y \quad I_nA = A}$$

P5) $\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$

P6) El producto de una matriz $A_{m\times n}$ por la matriz nula $0_{n\times p}$ es una matriz nula $O_{m\times p}$

Potencia de una matriz cuadrada A

Si A es una matriz cuadrada y "n" es un entero positivo, entonces la e-ésima potencia de A que se escribe A^n es el producto de n factores de A:

$$\mathrm{A.A.A\dots.A = A^n}(n \ \ factores)$$

Dada una matriz cuadrada A, nos piden encontrar A^n
Comenzamos hallando $A^2, A^3, A^4, \dots$
¿Cuántas potencias debemos encontrar?

Tantas que nos permitan obtener: a) la matriz identidad, o b) la matriz nula, c) o que no nos de la matriz I ni la matriz 0; pero que encontremos algún patrón para A^n(algo que se repita y que nos permita encontrar una fórmula para A^n).

Caso a)

Ejemplo 8. Dada la matriz $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

encuentre A^{115} y A^{224}.

Solución

Comience hallando $\mathrm{A^2, A^3, A^4, \dots}$

$$\mathrm{A^2 = A.A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{I}$$

$$A^3 = A^2.A = I.A = A$$
$$A^4 = A^3.A = A.A = A^2 = I$$
$$A^5 = A^4.A = I.A = A$$
$$A^6 = A^5.A = A.A = A^2 = I$$

Observamos que si la potencia es par se obtiene I, y si la potencia es impar, obtenemos A.

Entonces $A^{115} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$ y $A^{224} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Siendo más rigurosos en estos resultados hacemos lo siguiente:

$$A^{115} = A^{114+1} = A^{114}.A = (A^2)^{57}.A = I^{57}.A = I.A = A$$

$$A^{224} = (A^2)^{112} = I^{112} = I$$

Caso b)

Ejemplo 9.

Calcule $\boldsymbol{A^n}$ para todo valor entero positivo n, y donde $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$A^4 = A^3.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.A = 0$$

Lo anterior nos permite escribir los siguientes resultados:

$$A^n = \begin{cases} A \quad si \;\; n = 1 \\ A^2 \; si \; n = 2 \\ 0 \;\; si \;\; n \geq 3 \end{cases}$$

Veamos un caso particular cuando $a = 2$.

a) Si $n = 1$, entonces $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Si $n = 2$, entonces $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Si $n = 3$, entonces $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Comprobación:

$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso c)

Ejemplo 10.

Calcule A^{100} $con\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solución

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que en las matrices A, A^2 y A^3 los números en negrilla que ocupan la posición a_{13}, siguen el patrón $\mathrm{n} = 1,2,3, \ldots$

Entonces a partir del resultado anterior suponemos que

$$\mathrm{A}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así que

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 11.

Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calcule A^{n}
b) Calcule $A^{320} - A^{220}$

Solución:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$
$$A^4 = A^3.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de los resultados se supone que

a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{bmatrix}$

b) $A^{320} - A^{220} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3(320) & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3(220) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 960 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 660 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{bmatrix}$

Determinantes.

Un determinante es la expresión numérica de una matriz cuadrada.
Usualmente representamos el determinante de una matriz cuadrada A por $det(A)$ o por $|A|$.
Visto como una función, el dominio de la función determinante es el conjunto de todas las matrices cuadradas y el rango (conjunto imagen) es el conjunto de todos los números reales.

$$\underset{matriz\ \text{cuadrada}}{A} \quad \rightarrow \quad \underset{\text{número real}}{|A|} = \text{determinante de A}$$

Si A es una matriz cuadrada entonces la función determinante asocia con A exactamente un número real llamado determinante de A.

Definición

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2, entonces

$$|A| = ad - bc$$

Esto es, el determinante de una matriz de 2×2 se obtiene haciendo el producto de los elementos de la diagonal principal y restándole el producto de los elementos de la otra diagonal:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo 12.

Evalúe los siguientes determinantes de orden 2.

$$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (3)(-5) - (1)(2) = -15 - 2 = -17$$

$$b)\ \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (-4)(1) - (-5)(6) = -4 + 30 = 26$$

$$c)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (0)(4) = 1$$

$$d)\ \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = (2)(-5) - (5)(-2) = -10 + 10 = 0$$

$$e)\ \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix} = (a)(1) - (0)(b) = a$$

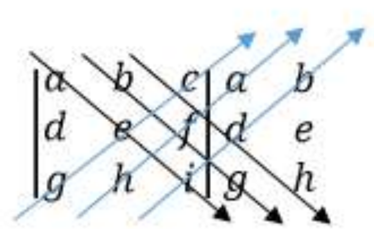
Definición

Si $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3, entonces exclusivamente para matrices de este orden podemos aplicar la regle de Sarrus como sigue:

(1) Copiamos la primera y la segunda columnas a la derecha como se muestra a continuación:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

(2) Calculamos los productos indicados por las flechas:



(3) Tome la suma de los tres productos de los elementos sobre las flechas que apuntan hacia abajo $(aei + bfg + cdh)$ y reste de esta suma, la suma de los tres productos de los elementos sobre las flechas que apuntan hacia arriba $(gec + hfa + idb)$.

El resultado es: $(\mathrm{aei} + \mathrm{bfg} + \mathrm{cdh}) - (\mathrm{gec} + \mathrm{hfa} + \mathrm{idb})$

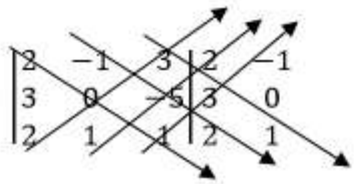
Ejemplo 13.

Verifique la regla de Sarrus para el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$(1)\quad : \left|\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

(2): 

(3): $det(A) = [(2)(0)(1) + (-1)(-5)(2) + (3)(3)(1)] - [(2)(0)(3) + (1)(-5)(2) + (1)(3)(-1)] = (0 + 10 + 9) - (0 - 10 - 3) = 19 - (-13) = 19 + 13 = 32$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 32$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1.Clasifique las matrices en simétrica, antisimétrica, diagonal, escalar, ortogonal, idempotente, normal, triangular, involutiva, nilpotente.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}, b) \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, c) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, d) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, e) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & 6 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}, g) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, h) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, i) \begin{bmatrix} -i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}$$

2.Calcule las transpuestas de las siguientes matrices. ¿Cuáles de ellas son simétricas?

$$a) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ b) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}, c) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, d) \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

3. Escribe la siguiente matriz como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Efectúe las siguientes sumas y restas de matrices. Simplifique.

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 3 \\ -5 & \frac{-3}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{2}{5} & 6 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -9 \\ 6 & -8 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -10 & -3 \\ -8 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$,

5.En los siguientes ejercicios, determine el producto de escalar por matriz y producto de matrices.

a) $-3\begin{bmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -8 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

6.Calcule según convenga los valores de $x, y, z, u,$ que verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\begin{pmatrix} -x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+u & -3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} x+y & z+1 \\ y+u & 2y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y-x & x-z \\ 2u & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & u \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x+y & 2 & 0 \\ 3 & y-x & 0 \\ 0 & 1 & y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$

7. Calcule para las matrices $a) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, b) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$; A^3

8. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule A^3, A^n, A^{100}

9. Calcule todas las potencias $A^2, A^3, \dots, A^n$ para las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Calcule A^n para todo entero positivo n y donde:

a) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix}$, $b) A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & a & a \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. Calcule a) A^n y b) $A^{250} + A^{20}$, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. Evalúe los siguientes determinantes por medio de la definición.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$, $d)$ $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

13. Encuentre el determinante por la regla de Sarrus.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $b)$ $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \\ 6 & -4 & -2 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$