UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 8. Unidad 3: Geometría Analítica

Sesión 1: La circunferencia: definición, ecuaciones, gráficas y ejercicios

LA CIRCUNFERENCIA

Una circunferencia con centro en $C(h,k)$ y radio $r > 0$ está formada por todos los puntos del plano cuya distancia al centro es r.

Si un punto arbitrario $P(x,y)$ del plano pertenece a la circunferencia, satisface

$$d(P,C) = r \leftrightarrow r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Así,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (1)$$

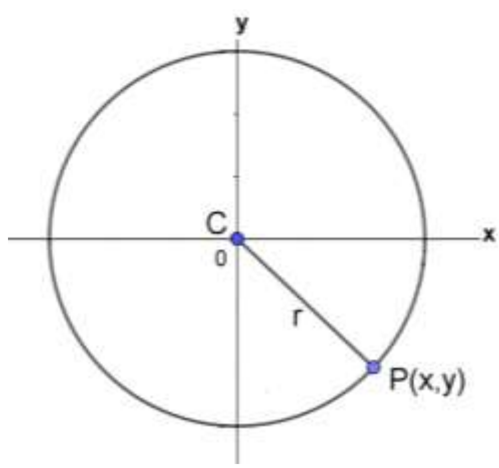
Esta ecuación es satisfecha por todos los puntos $P(x,y)$ que están a r unidades del punto (h,k), y no por ningún otro punto.

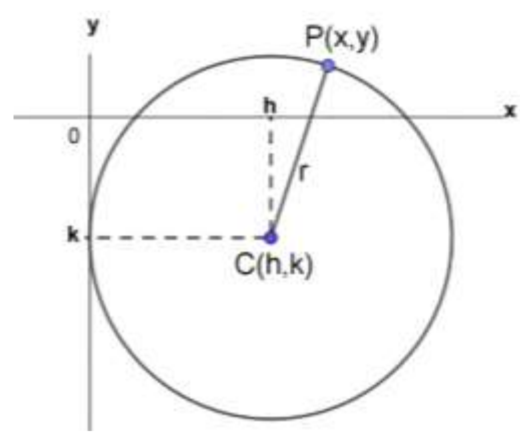
Ecuación *centro − radio* de una circunferencia.

La ecuación de una circunferencia con centro en $C(h,k)$ y radio igual a r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Si el centro de la circunferencia de radio r está en $(0,0)$, la ecuación de la circunferencia se reduce a: $x^2 + y^2 = r^2$





$x^2 + y^2 = r^2$ $(x-h)^2 +$

$(y-k)^2 = r^2$

Figura 1

La ecuación (1) se llama forma ordinaria de la ecuación de una circunferencia.

La circunferencia es real si $r > 0$; es un punto si $r = 0$, y es imaginaria si $r < 0$.

Si desarrollamos $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, obtenemos

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0 \qquad (2)$$

Si hacemos

$$D = -2h$$

$$E = -2k$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

Y reemplazamos en la ecuación (2) se obtiene

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (3)$$

a la que se llama ecuación general de la circunferencia.

Si en esta ecuación (3) completamos cuadrados tenemos:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{E}{2}\right)^2 + F = 0$$

Agrupando y factorizando:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

En esta última ecuación,

$$C = (h, k) = (-D/2, -E/2)$$

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \ \rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Si analizamos la cantidad subradical $D^2 + E^2 - 4F$, tenemos

1) Si $D^2 + E^2 - 4F < 0 \ \rightarrow r < 0$, no existe la circunferencia, es imaginaria.

2) Si $D^2 + E^2 - 4F = 0 \ \rightarrow r = 0$, la circunferencia se convierte en un punto.

3) Si $D^2 + E^2 - 4F > 0 \ \rightarrow r > 0$, la circunferencia existe y es real.

Si se da la forma general de la ecuación de una circunferencia, puede cambiarse a la forma ordinaria completando cuadrados de la expresión cuadrática en x y de la expresión cuadrática en y. Después de completar el cuadrado de cada cuadrática, habrá un término constante como miembro derecho de la ecuación.

Ejemplo 1

Escriba $3x^2 + 3y^2 + 6x - 8y - 48 = 0$ en forma ordinaria, y da el radio de la circunferencia y las coordenadas de su centro.

Solución dividiendo cada término de la ecuación dada por el coeficiente 3 de x^2 y y^2, obtenemos

$$x^2 + y^2 + 2x - \frac{8}{3}y - 16 = 0$$

Si completamos el cuadrado de cada expresión cuadrática sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente del término de primer grado apropiado, obtenemos,

$$x^2 + 2x + 1^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 16 + 1 + \frac{16}{9}$$

Agrupando términos y poniendo la ecuación en forma ordinaria, tenemos

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{13}{3}\right)^2$$

Por tanto el radio es $r = \frac{13}{3}$ y el centro está en $\left(-1, \frac{4}{3}\right)$.

Ejemplo 2

¿Qué tipo de circunferencia es representado por $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$?

Solución si completamos cuadrados tenemos

$$(x+1)^2 + (y-2))^2 = -5 + 1 + 4 = 0.$$

Por tanto, la ecuación dada representa un punto: $(-1,2)$

Ejemplo 3

¿Qué tipo de circunferencia es representado por $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0$?

Solución complementando cuadrados tenemos

$(x+1)^2 + (y-2))^2 = -7 + 1 + 4 = -2.$

Luego la ecuación dada representa una circunferencia imaginaria, es decir, no existe.

Ejemplo 4

Obtenga la ecuación ordinaria de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $C_1: (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$, que es tangente a la recta $L: 2x - y + 2 = 0$.

Solución por ser ambas circunferencias concéntricas el centro de la circunferencia 1: $C(2,-1)$ es el centro de la circunferencia que se busca. El radio de la circunferencia 2 es la distancia del punto $C(2,-1)$ a la recta $L: 2x - y + 2 = 0$.

Es decir,

$$r = d(C,L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|2(2)-(-1)+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|4+1+2|}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia 2 es

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{5}$$

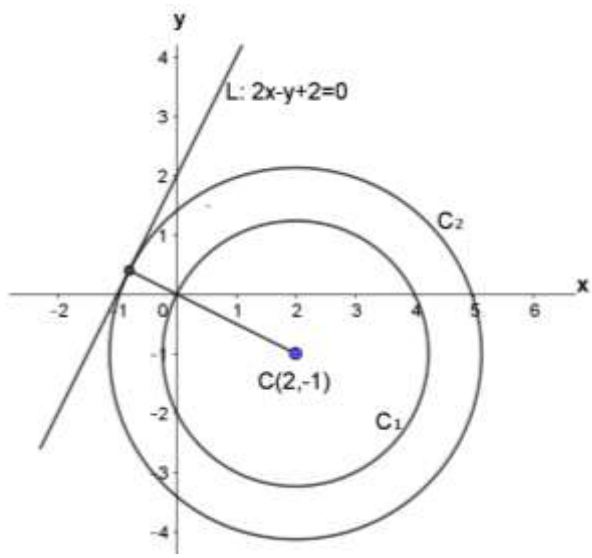


Figura 2

Ejemplo 5

Obtenga la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $x + 3y - 6 = 0 \quad y \quad x - 2y - 1 = 0$.

Solución al resolver simultáneamente el SEL:

$$x + 3y = 6$$

$$x - 2y = 1$$

obtenemos $x = 3 = h$ y $y = 1 = k$. Luego el centro de la circunferencia es $C(3,1)$.

Como la circunferencia pasa por el origen tenemos que

$$r = d(O, C) = \sqrt{10} \quad \text{es el valor del radio.}$$

Empleando la ecuación centro-radio con $h = 3, k = 1$ y $r = \sqrt{10}$, se obtiene la ecuación

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$$

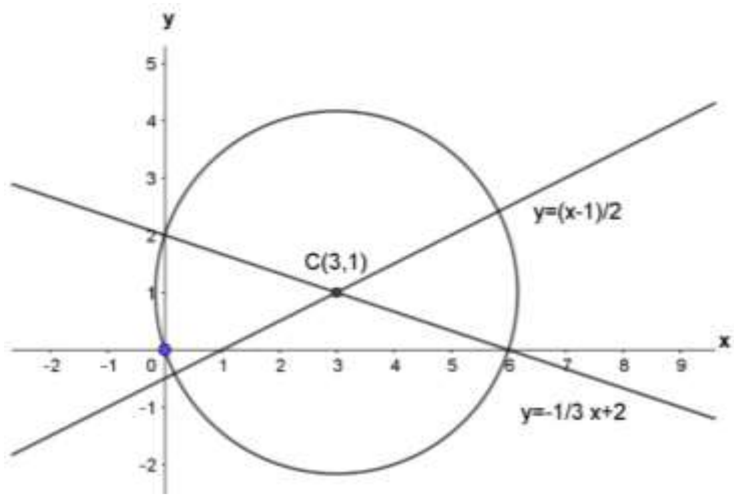


Figura 3

Ejemplo 6

Halla el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,-2)$, $B(3,-4)$ y $C(5,0)$.

Método 1.

Solución los tres puntos dados siempre que no sean colineales determinan tres condiciones geométricas que permiten definir a la circunferencia.

Al sustituir x e y en la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ por las coordenadas de los puntos A, B y C , obtenemos

$$a)\ A(1,-2)\text{: } 1^2 + (-2)^2 + D - 2E + F = 0$$

$$D - 2E + F = -5 \qquad Ec.1$$

$$b)\ B(3,-4)\text{: } 3^2 + (-4)^2 + 3D - 4E + F = 0$$

$$3D - 4E + F = -25 \qquad Ec.2$$

$$c)\ C(5,0)\text{: } 5^2 + 0^2 + 5D + F = 0$$

$$5D + F = -25 \qquad Ec. 3$$

Formando y resolviendo el sistema

$$D - 2E + F = -5$$

$$3D - 4E + F = -25$$

$$5D + F = -25$$

Este SEL puede resolverse por cualquiera de los varios métodos, independiente del método empleado, encontramos que

$$D = -\frac{20}{3}, E = \frac{10}{3} \quad y \quad F = \frac{25}{3}$$

Al sustituir estos valores en

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Tenemos que la ecuación general de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x + \frac{10}{3}y + \frac{25}{3} = 0$$

Por tanto, $\quad 3x^2 + 3y^2 - 20x + 10y + 25 = 0$

es la ecuación buscada.

Para encontrar el centro y el radio, completamos cuadrado, simplificamos y obtenemos la ecuación ordinaria

$$x^2 + y^2 - \frac{20}{3}x + \frac{10}{3}y + \frac{25}{3} = 0$$

$$\left(x - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{50}{9}$$

Por tanto el centro es $\quad C\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ y el radio es $r = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

La gráfica de la circunferencia se muestra en la siguiente figura 3.49

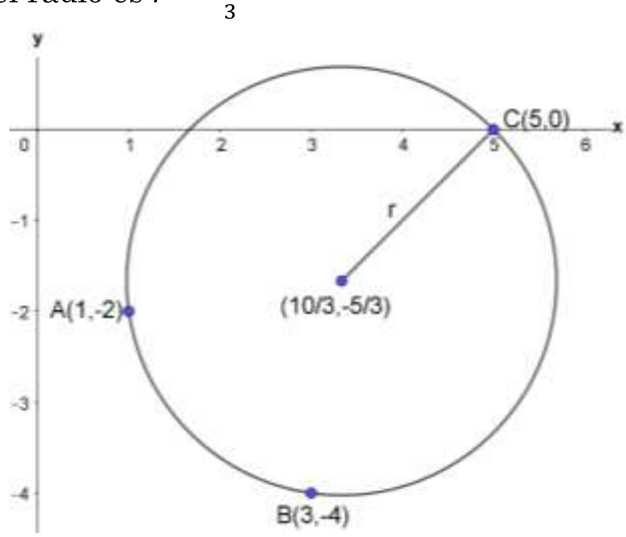


Figura 4

Método 2.

Este problema puede resolverse por un segundo método, que tiene la ventaja de dar la ecuación de la circunferencia directamente en función del radio y las coordenadas del centro.

Como el centro es equidistante de los tres puntos, se encuentra sobre las bisectrices perpendiculares de $AB,\ AC\ \ y\ BC$.

En consecuencia, está en su punto de intersección.

Obtendremos las ecuaciones de dos de estas rectas y encontramos su punto de intersección como primer paso para determinar la ecuación de la circunferencia.

Para un mejor entendimiento seguimos los siguientes pasos.

1) Trazamos un segmento o cuerda del punto A al punto B.

2) Encontramos su punto medio

$$P_{m(AB)} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{-2+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{-6}{2}\right) = (2,-3)$$

3) Hallamos la pendiente del segmento AB

$$m = \frac{-4-(-2)}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

4) La bisectriz perpendicular de AB pasa por el punto medio $(2,-3)$ del segmento que une a los puntos, y su pendiente es igual a 1 ya que la pendiente del segmento es -1.

5) Con el punto $(2,-3)$ y la pendiente 1, hallamos la ecuación de esta bisectriz

$$y-(-3) = (x-2) \leftrightarrow x-y = 5$$

6) Trazamos un nuevo segmento (cuerda) del punto B al punto C

7) Hallamos su punto medio.

$$P_{m(BC)} = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-4+0}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{-4}{2}\right) = (4,-2)$$

8) Encontramos la pendiente de este segmento BC

$$m = \frac{0-(-4)}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$$

9) La bisectriz perpendicular de BC pasa por el punto medio $(4,-2)$ del segmento que une a los puntos, y su pendiente es igual a $\frac{-1}{2}$ ya que la pendiente del segmento es 2.

10) Con el punto medio $(4,-2)$ y la pendiente $\frac{-1}{2}$, la ecuación de esta bisectriz es

$$y+2=\frac{-1}{2}(x-4) \leftrightarrow x+2y=0$$

11) Simultaneamos el SEL

$$x-y=5$$

$$x+2y=0$$

obteniendo

$$x=\frac{10}{3}=h\,,\ \ y=-\frac{5}{3}=k$$

12) Este punto de intersección es el centro de la circunferencia:

$$C(h,k)=\left(\frac{10}{3},\frac{-5}{3}\right)$$

13) El radio es igual a la distancia del centro a cualquiera de los tres puntos dados.

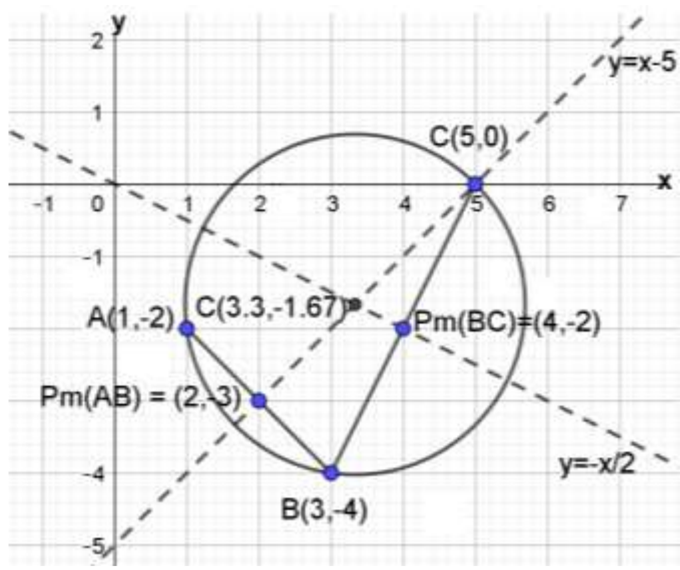
$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(5-\frac{10}{3}\right)^2+\left(0+\frac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{25}{9}}=\sqrt{\frac{50}{9}}=\frac{5}{3}\sqrt{2}$$

Por tanto la ecuación de la circunferencia es

$$\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$$

Ilustración gráfica.

Figura 5



Ejemplo 7

Una circunferencia es tangente a la recta $L_1: 2x - y + 1 = 0$ en el punto $(2{,}5)$ y su centro está sobre la recta $L_2: x + y - 9 = 0$.

Encuentra la ecuación de la circunferencia.

Solución a la recta que pasa por $(2{,}5)$ y es perpendicular a $L_1: 2x - y + 1 = 0$

y que pasa por el centro de la circunferencia le llamamos L_3.

Como la pendiente de L_1 es $m_1 = -\frac{A}{B} = -\frac{2}{-1} = 2$, entonces la pendiente de L_3 es $m_3 = -\frac{1}{2}$ por ser L_1 y L_3 perpendiculares.

Luego hacemos uso de la ecuación punto –pendiente para hallar la ecuación de la recta L_3, así

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

Desarrollando encontramos

$$L_3 = x + 2y - 12 = 0 \leftrightarrow x + 2y = 12$$

Se forma entonces el SEL, cuya solución es nos da las coordenadas del centro de la circunferencia.

$$x + 2y = 12$$

$$x + y = 9$$

Resolviendo el SEL obtenemos

$$x = h = 6, \ \ y = k = 3$$

Y el centro es $C(h, k) = (6{,}3)$

Ahora, la distancia de dicho centro al punto $(2{,}5)$ es $\sqrt{20}$ que es el radio.

Por lo que la ecuación de la circunferencia es

$$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 20$$

Ilustración gráfica.

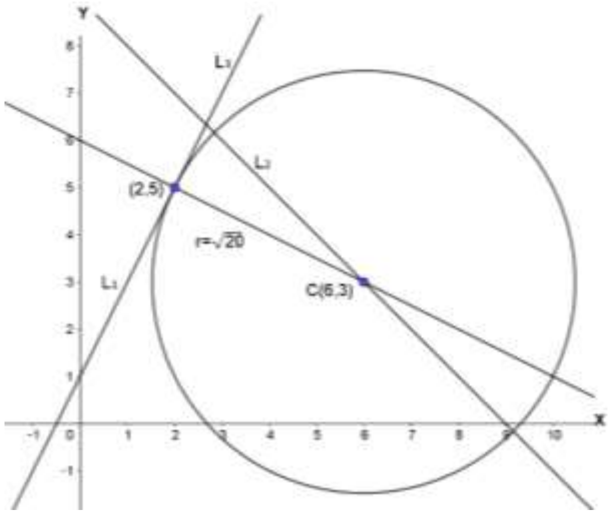


Figura 6

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en el origen radio mide.
   a. $r = 5$
   b. $r = \frac{1}{4}$
   c. $r = \sqrt{2}$
2. Halle el centro y radio de cada circunferencia
   a. $x^{2+}y^2 = 25$
   b. $x^2 + y^2 = \sqrt{5}$
   c. $x^2 + y^2 = 5$
3. Escriba la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyos centros y radios se dan:
   a. $C(1{,}3),\ r = 3$
   b. $C(-2{,}3),\ r = \frac{1}{5}$
   c. $C(\quad),\ r = \sqrt{7}$
   d. $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),\ r = 1$
4. i) ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias Cecon centro en el origen y cuáles no?. Obtenga el centro y el radio de cada una, ii) ¿Cuáles de ellas tienen su centro sobre el eje 'x'?, iii) ¿Cuáles sobre el eje 'y'.
   a. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$

b. $x^2 + y^2 = 25$
c. $x^2 + (y-4)^2 = 25$
d. $(x+5)^2 + y^2 = 11$

5. Escriba la ecuación general de las circunferencias
   a. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$
   b. $(x-1)^2 + y^2 = 9$

6. Halle el radio y centro de las circunferencias
   a. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
   b. $4x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 25 = 0$
   c. $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$
   d. $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$

7. Encuentra las ecuaciones de las siguientes circunferencias, y traza la gráfica de cada una de ellas.
   a. $Centro\ en\ (0,0), pasa\ por\ (3,4)$
   b. $Centro\ en\ (0,0), tangente\ a\ la\ recta\ 4x + y - 2 = 0$
   c. $Centro\ en\ (-1,2), pasa\ por\ el\ origen$
   d. $Centro\ (3,1),\ perímetro\ de\ la\ circunferencia\ 12\pi$
   e. $Centro\ en\ (2,4), tangente\ a\ la\ recta\ x + y - 2 = 0$
   f. $Centro\ en\ (-1,2), pasa\ por\ (3,3)$
   g. $Los\ extremos\ de\ un\ diámetro\ son: (-1,3)\ y\ (4,-2)$
   h. $Pasa\ por\ (1,-3)\ y\ concentrica\ con: x^2 + y^2 - 10x + 8y + 25 = 0$

8. Halla la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas
   a. Pasa por los puntos $A(2,0), B(2,3), C(1,3)$
   b. Tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $x + 3y + 3 = 0$ y $x + y + 1 = 0$ y su radio $r = 5$
   c. Pasa por los puntos $A(2,1)\ y\ B(-2,3)$ y tiene su centro sobre la recta $x + y + 4 = 0$
   d. Tangente a la recta $3x - 4y - 4 = 0$ y cuyo centro esta sobre las rectas $5x - y + 7 = 0\ \ y\ \ x - 4y + 9 = 0$
   e. Tangente a la recta $3x - 4y = 10$ y concéntrica con $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$
9. Grafica las circunferencias: $x^2 + y^2 + 16x + 59 = 0\ \ y\ \ x^2 + y^2 - 8y - 29 = 0$ encuentre el punto de tangencia algebraicamente