UNIVERSIDAD DON BOSCO

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

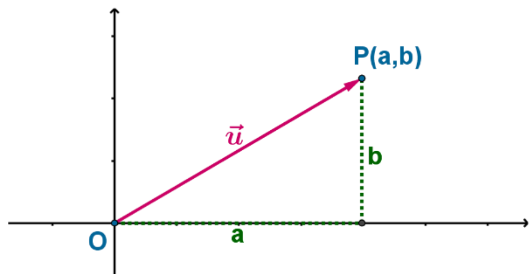
ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020.

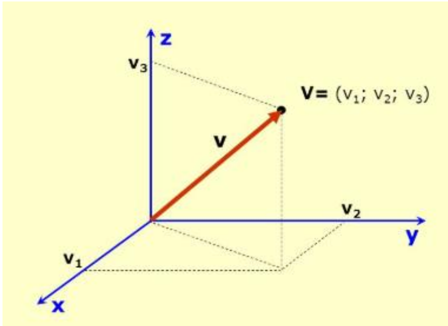
Semana 11: Unidad 4: Vectores en el plano y en el espacio.

Sesión 2: Definición de vectores en el plano y el espacio. Norma de un vector. Vectores unitarios. Propiedades. Combinación Lineal de Vectores . Algebra vectorial: Igualdad de vectores, suma y resta de vectores. Producto punto (producto escalar)

VECTORES.

Un vector es una magnitud física que posee una magnitud escalar (norma), una dirección y un sentido. Los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ pueden ser representados mediante segmentos de rectas dirigidos (o flechas). La dirección de la flecha indica la dirección del vector y la longitud de la flecha nos dice su magnitud.





Notación.

Los vectores se denotarán con letras minúsculas con una flecha arriba $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\boldsymbol{w}}$**.** Los puntos se denotarán con letras mayúsculas A, B, C.

Si el punto inicial de un vector $\vec{\boldsymbol{u}}$ es A y el punto final es B, entonces

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$$

Consideremos los puntos A y B en $\mathbb{R}^n$. Si $A = (a_1, a_2, \cdots a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \cdots b_n)$, entonces el vector

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \langle \boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_2} - \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{b_n} - \boldsymbol{a_n} \rangle$$

Por ejemplo si en $\mathbb{R}^2$ tomamos los puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ entonces el vector

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \langle \boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_2} - \boldsymbol{a_2} \rangle$$

De manera similar si en $\mathbb{R}^3$ tomamos los puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ entonces el vector

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \langle \boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_2} - \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_3} - \boldsymbol{a_3} \rangle$$

Ejemplo1:

Hallar el vector $\vec{u}$ si su punto inicial es $A = (-1,3,-5)$ y su punto final es $B = (2,-3,0)$.

Sol.

El vector $\vec{u}$ vendrá dado por:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A \qquad \text{(Punto final – punto inicial)}$$

$$= (2,-3,0) - (-1,3,-5) \qquad \text{(Sustituyendo A y B)}$$

$$= \langle 2-(-1), -3-3, 0-(-5) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle 3,-6,5 \rangle.$$

El vector nulo o vector cero en $\mathbb{R}^n$se denota y representa por: $\vec{0} = \langle 0,0,\cdots,0 \rangle$.

Norma de un vector.

La norma define la longitud de un vector. Consideramos un vector $\vec{v} = \langle v_{1,} v_2, \cdots, v_n \rangle \in \mathbb{R}^n$.La norma de $\vec{v}$ se denota por $\| \vec{v} \|$ y se define de la siguiente manera:

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2}$$

Ejemplo 2.

a) Calcular la norma del vector $\vec{v} = \langle -4,2,\sqrt{5} \rangle$.
Sol.

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{16+4+5} = 5$$

b) Calcular la norma del vector $\vec{u}$ cuyo punto inicial es $A = (2,3,6)$ y su punto final es $B = (-1,4,8)$.
Sol.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$$
$$\vec{u} = (-1,4,8) - (2,3,6)$$
$$\vec{u} = \langle -1-2, 4-3, 8-6 \rangle$$
$$\vec{u} = \langle -3,1,2 \rangle$$

La norma será

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

Propiedades de la norma de un vector.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores que pertenecen a $\mathbb{R}^n$ y sea α un escalar que pertenece a $\mathbb{R}$, entonces:

1. $\| \vec{u} \| \geq 0$ y $\| \vec{u} \| = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$

2. $\| \overline{\alpha \vec{u}} \| = |\alpha| \, \| \vec{u} \|$

3. $\| \vec{u} - \vec{v} \| = \| \vec{v} - \vec{u} \|$

4. $\| \vec{v} + \vec{u} \| \leq \| \vec{v} \| + \| \vec{u} \|$

5. $\| \vec{v} . \vec{u} \| \leq \| \vec{v} \| \, \| \vec{u} \|$

Vector unitario.

Un vector es unitario si su norma es 1

Ejemplo 3.

Los vectores $\vec{u} = (\cos\theta, 0, se\theta)$ y $\vec{v} = \left(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}\right)$ son unitarios

ya que

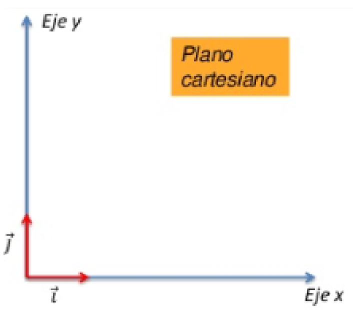
$$\| \vec{u} \| = \sqrt{cos^2(\theta) + 0^2 + sen^2(\theta)} = 1$$

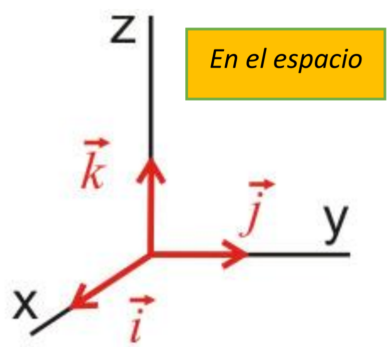
Y

$$\| \vec{v} \| = \sqrt{\left(1/\sqrt{6}\right)^2 + \left(1/\sqrt{6}\right)^2 + \left(-2/\sqrt{6}\right)^2} = 1$$

Vectores unitarios fundamentales.

Sobre cada uno de los ejes coordenados perpendiculares y coincidiendo con el sentido positivo de los mismos, consideramos en el plano los vectores $\vec{\imath} = (1,0)$ y $\vec{\jmath} = (0,1)$ y en el espacio los vectores $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$.Los vectores $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ son llamados vectores fundamentales.





Se comprueba fácilmente que

$$\| i \| = \| j \| = \| k \| = 1$$

Normalización de un vector.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, siempre es posible encontrar un vector unitario en la misma dirección y sentido de $\vec{u}$, esto se logra al dividir $\vec{u}$ por su módulo. Es decir que el vector $\vec{v}$ definido como $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ es unitario.

Ejemplo 4

Sea $\vec{u} = (2, -3, 1)$ encontrar un vector unitario en la misma dirección de $\vec{u}$.

Solución.

Primero encontramos la norma del vector $\vec{u}$

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

Entonces $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(2,-3,1)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$.

$\vec{v}$ es unitario ya que $\| \vec{v} \| = 1$.

ÁLGEBRA VECTORIAL.

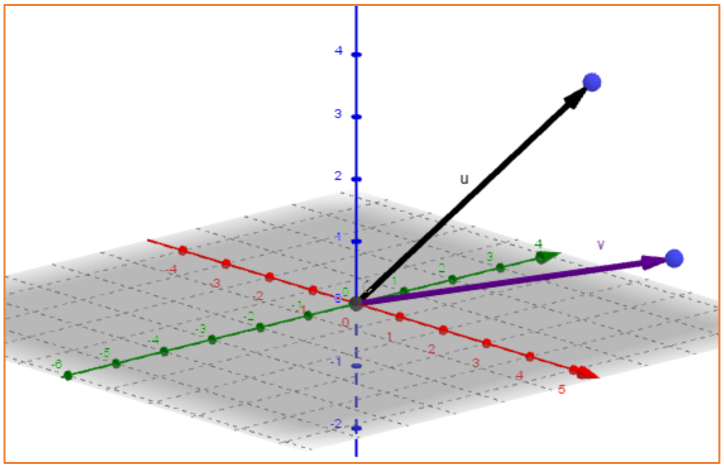
Igualdad de vectores.

Sea $\vec{u} = \langle u_{1,}u_2, \cdots, u_n\rangle$ y $\vec{v} = \langle v_{1,}v_2, \cdots, v_n\rangle$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Diremos que $\vec{u} = \vec{v}$ si y solo si

$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \cdots, u_n = v_n$.

Ejemplo 5

Se observa en la figura que $\vec{u} = (1,4,3)$ y $\vec{v} = (4,3,1)$ no son iguales a pesar que poseen la misma longitud.



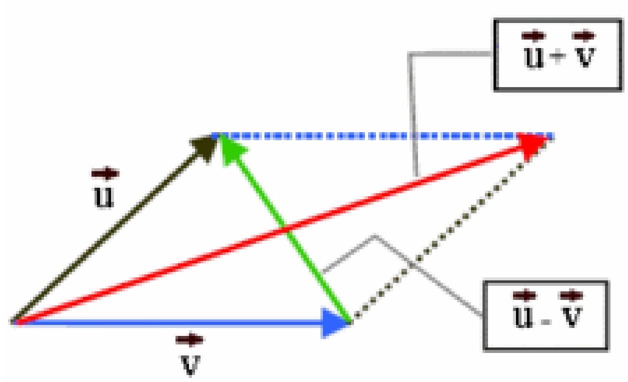
Suma y Resta de vectores.

Consideremos los vectores $\vec{u} = \langle u_{1,}u_2, \cdots, u_n\rangle$ y $\vec{v} = \langle v_{1,}v_2, \cdots, v_n\rangle$ vectores en $\mathbb{R}^n$, se define su suma y resta algebraicamente de la siguiente manera

$$\vec{u} + \vec{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n\rangle$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, \cdots, u_n - v_n\rangle$$

Gráficamente la suma y resta se ilustra en la siguiente figura.

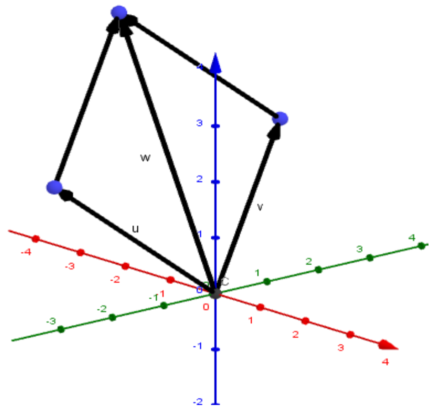


Ejemplo 6.

Sean los vectores $\vec{u} = (1, -4,3)$ y $\vec{v} = (-2,3,2)$. Entonces:

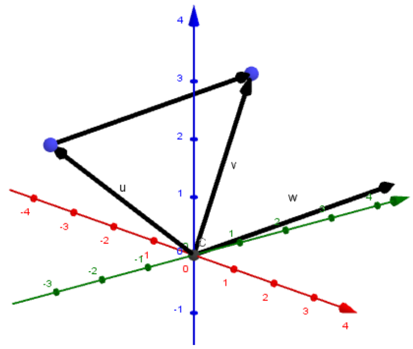
La suma de $\vec{u} + \vec{v}$ es

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (1,-4,3) + (-2,3,2)$
$\vec{w} = (1 + (-2), -4 + 3, 3 + 2)$
$\vec{w} = (-1,-1,5)$



La resta de $\vec{v} - \vec{u}$ es

$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = (-2,3,2) - (1,-4,3)$
$\vec{w} = (-2 - 1, 3 - (-4), 2 - 3)$
$\vec{w} = (-3,7,-1)$



Multiplicación por un escalar.

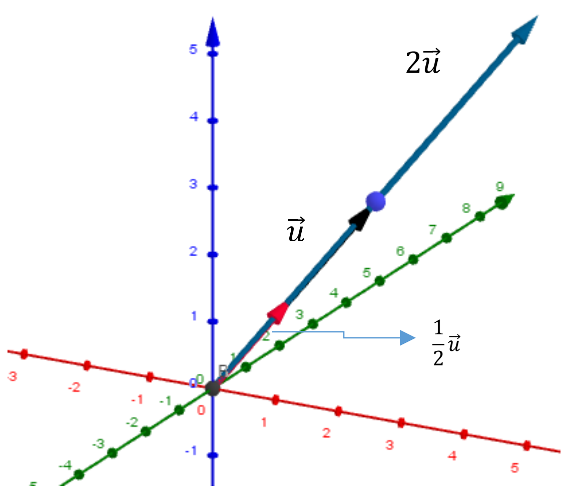
Sea $\vec{u} = \langle u_{1,} u_2, \cdots, u_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ y k un escalar que pertenece a los reales,

el producto $k\vec{u}$ se define de la siguiente manera:

$$k\vec{u} = \langle ku_{1,} ku_2, \cdots, ku_n \rangle$$

Ejemplo 7.

Sea $\vec{u} = (1,3,2)$, entonces $2\vec{u} = (2(1), 2(3), 2(2)) = (2,6,4)$ y $\frac{1}{2}\vec{u} = \left(\frac{1}{2}(1), \frac{1}{2}(3), \frac{1}{2}(2)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$



Combinación lineal de vectores.

Sea el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ y sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbb{R}^n$. Diremos que el vector $\vec{v}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ si existen números escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ tales que el vector

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{u}_n$$

Todo vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores unitarios.

Ejemplo 8

Sea $\vec{u} = (2, -1,3)$, $\vec{u}$ se puede escribir como: $\vec{u} = 2(1,0,0) - 1(0,1,0) + 3(0,0,1)$

$$= 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

De manera general si $\vec{u} = (a, b, c)$ entonces $\vec{u}$ se puede escribir como:

$$\vec{u} = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$
$$= a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$$

Propiedades de los vectores

Consideremos los vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha\ y\ \beta$ escalares, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
2. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
3. $0 * \vec{u} = \vec{0}$
4. $1 * \vec{u} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
6. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
7. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
8. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
9. $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$

Se demostrará la propiedad 7: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$, tomando vectores de $\mathbb{R}^3$.

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$

$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ Definición de suma de vectores

$= \big(\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2), \alpha(u_3 + v_3)\big)$ Definición de producto por escalar

$= (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2, \alpha u_2 + \alpha v_3)$ Propiedad distributiva

$= (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) + (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$ Definición de suma de vectores

$= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ Definición de producto por un escalar

Se deja como ejercicio probar las otras propiedades.

PRODUCTO PUNTO

Es conocido también como producto interno o producto escalar. El producto punto es una operación entre vectores que devuelve como resultado un número real o un escalar.

Consideremos los vectores $\vec{u} = \langle u_{1,} u_2, \cdots, u_n \rangle$ y $\vec{v} = \langle v_{1,} v_2, \cdots, v_n \rangle$ $\in \mathbb{R}^n$.El producto punto entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como $\vec{u}.\vec{v}$ y se define de la siguiente forma:

$$\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Ejemplo 9

a) Sean los vectores $\vec{u} = \langle -1,3,2 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 2, -1, ,4 \rangle$. Calcular $\vec{u}.\vec{v}$.

Solución

$$\begin{aligned} \vec{u}.\vec{v} &= (-1)(2) + (3)(-1) + (2)(4) \\ &= -2 - 3 + 8 \\ &= 3 \end{aligned}$$

b) Si $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, entonces $\vec{u}.\vec{u} = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 = \| \vec{u} \|^2$

De aquí deducimos que:

$$\vec{u}.\vec{u} \geq 0$$

Propiedades del producto escalar

Consideremos los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ $\in \mathbb{R}^n$ y α un escalar, entonces

1. $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
3. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
4. $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = (\alpha\vec{u}).\vec{v} = \alpha(\vec{u}.\vec{v})$
5. $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$
6. $\vec{u}.\vec{u} = \| \vec{u} \|^2$

La demostración de cada propiedad se deduce de la definición del producto punto y las propiedades de números reales.

Ejercicios para practicar.

1. Dados los siguientes vectores $\vec{u} = \langle 2,1,-3 \rangle$, $\vec{v} = \langle 3,-2,-2 \rangle$, $\vec{w} = \langle -3,-2,4 \rangle$ y $\vec{x} = \langle -3,2,5 \rangle$.Calcule
   a. $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{x}$
   b. $\| \vec{u} + 2\vec{v} \|$
   c. $\| \vec{u} \| \| \vec{v} \| (-\vec{w} + \vec{x})$
2. Dados los puntos $P_1(3,4,5)$ y $P_2(1,-2,6)$ se pide:
   a. Encontrar el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$
   b. Dibuje al vector $\overrightarrow{P_1P_2}$
   c. Dibuje al vector posicional
   d. Encuentre un vector unitario en la misma dirección y sentido de $\overrightarrow{P_1P_2}$
   e. Encuentre un vector unitario en la misma dirección pero en sentido opuesto a $\overrightarrow{P_1P_2}$.

3. Sean los vectores $\vec{u} = \langle -3,1,2\rangle$, $\vec{v} = \langle 4,0,-8\rangle$ y $\vec{w} = \langle 6,-1,-4\rangle$.Probar que el vector $\vec{x}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$.

4. Dados los vectores $\vec{U} = (1,-2,-2)\quad y\quad \vec{W} = (2,3,5)$. Hallar el vector $\vec{V}$ tal que se cumple $\vec{W} = 2\vec{U} + 3\vec{V}$. Graficar.

5. Un vector $\overrightarrow{AB}$ tiene componentes $\overrightarrow{AB} = 5\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$. Hallar las coordenadas del punto A si se conoce el extremo $B = (12\ ,-3)$.

6. Dados los vectores $\vec{u} = \langle 2,-3,4\rangle$, $\vec{v} = \langle -1,2,5\rangle$ y $\vec{w} = \langle 3,6,-1\rangle$.Determine el vector o escalar indicado:
    a. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w})$
    b. $(2\vec{u}).(3\vec{w})$
    c. $(2\vec{u}).(\vec{u} - 2\vec{v})$
    d. $\left(\frac{\vec{u}.\vec{u}}{v.\vec{v}}\right)\vec{v}$