UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 2- Unidad 1: Los números complejos.

Sesión 1: Soluciones Complejas

Soluciones Complejas

Me gusta iniciar este tema diciendo que lo complejo, se queda en el título, ya que lo que vamos a hacer es resolver ecuaciones de segundo, tercer, cuarto, quinto, etc. grado, en las que algunas o todas sus raíces, son números complejos, de allí el nombre.

Iniciemos, al resolver la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$ obtenemos como raíces o soluciones a esta ecuación cuadrática, los siguientes valores, así:

$$x_2 = 3 \quad y \quad x_2 = 4$$

Ambas raíces o soluciones de la ecuación son valores reales.

Ahora resolvamos la siguiente ecuación: $x^2 + 16 = 0$

Despejemos la x

$$\boldsymbol{x^2 = -16}$$
$$\boldsymbol{\sqrt{x^2} = \sqrt{-16}}$$
$$x = \pm 4i$$

De donde obtenemos entonces que $\boldsymbol{x_1 = 4i}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x_2 = -4i}$

Estas soluciones o raíces NO son REALES, es decir no son números reales, son números IMAGINARIOS, cuya parte real es, en todo caso "cero", entonces nos encontramos en presencia de raíces o solucione COMPLEJAS, ya que son números complejos las raíces obtenidas, de allí el nombre del tema, soluciones complejas.

Recordando las Raíces cuadradas de cantidades negativas, cuando se obtiene la raíz cuadrada de una cantidad negativa, tenemos que hacer hincapié en el hecho que las raíces cuadradas tiene doble signo, es decir que al obtener la raíz cuadrado de 25, lo correcto es decir que + ó - 5, así por ejemplo:

$$\sqrt{4} = \pm 2$$

$$\sqrt{9} = \pm 3$$

$$\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

Y tratándose de raíces cuadradas de cantidades negativas, funcionará de la misma forma, así:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i$$
$$\sqrt{-16} = \pm 4i$$
$$\sqrt{-27} = \pm 3\sqrt{3}i$$

Quiero destacar que, al obtener soluciones complejas en una ecuación, estas soluciones siempre van aparejadas, es decir que si $\boldsymbol{a + bi}$ es una raíz de una ecuación, también será raíz de esa ecuación el número $\boldsymbol{a - bi}$, que es su conjugado.

Por tal razón, la ecuación que acabamos de resolver tiene como raíces los números $\boldsymbol{4i\ y - 4i}$ que son soluciones complejas conjugadas entre si.

Ejemplo 28 Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - x$+5=0
b) $x^2 - 2x + 2 = 0$
c) $2x^2 - x + 3 = 0$
d) $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$
e) $6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$

Solución:

a) $x^2 - x + 5 = 0$

Utilizaremos la llamada fórmula general para resolver esta ecuación, así: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Donde, $a = 1\ ,\quad b = -1 \quad y \quad c = 5$

Tenemos entonces:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{19}i}{2}$$

Entonces tenemos que:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i \quad y \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i}$$

Noten como ambas soluciones son complejas, por lo tanto, son conjugadas entre sí.

b) $x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 1, \quad b = -2 \quad y \quad c = 2$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

De donde obtenemos que:

$$\boldsymbol{x_1 = 1 + i \quad y \quad x_2 = 1 - i}$$

c) $2x^2 - x + 3 = 0$

En este caso $a = 2\,,\quad b = -1 \quad y \quad c = 3$
Sustituyendo en la fórmula general, nos queda:

$$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{1-24}}{4}$$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{-23}}{4}$$

$$x = \frac{1\pm\sqrt{23}i}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{23}}{4}i$$

Entonces nos resulta que:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{23}}{4}i \qquad y \qquad x_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{23}}{4}i}$$

d) $x^3 - 8x^2 + 21x - 20 = 0$

En este caso aplicaremos el procedimiento de factorización llamado *División Sintética*, para hallar los factores, y por ende las raíces que hacen "cero" el polinomio. Por cierto, los "ceros" de un polinomio, son las raíces de dicho polinomio. También quiero destacar, que este método también es llamado *por evaluación, por prueba y error, por ensayo/error, y también se le da el nombre de la Regla de Ruffini.*

El proceso es así:

- Trabajaremos únicamente con los coeficientes del polinomio, lo hemos de ordenar en forma descendente el polinomio con respecto al exponente de la parte literal de dicho termino, del mayor exponente al menor. En el caso que un polinomio no tenga un término cualquiera, en su lugar se deberá colocar "cero"

  En nuestro caso, el polinomio está completo, y nos quedará así:

$$\mathbf{1 - 8 + 21 - 20}$$

- Ahora lo que debemos hacer es tratar de “acortar el polinomio” eliminando el último número de la derecha, el 20, y esto lo haremos mediante un proceso de las operaciones producto, suma o resta. Para ello lo primero que haremos es calcular los divisores de 20, y será con esos valores que empezaremos la prueba de eliminar el 20

  Los divisores de 20 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10\ y\ \pm 20$

  Tenemos 12 números posibles, escogeré el **+4**

$$\boxed{3}$$

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{1 - 8 + 21 - 20} & 4 \ \boxed{2} \ \textbf{entonces } \boldsymbol{x_1 = 4} \\ \boxed{1}\ \mathbf{+ 4 - 16 + 20} & \\ \hline \mathbf{1 - 4 + 5} & \end{array}$$

$$\boxed{4}$$

$\boxed{1}$ Baja el “1” de la primera columna, siempre.

$\boxed{2}$ Multiplica ese “1” que bajó con “4”, que es el valor que se ha escogido para probar

$\boxed{3}$ El resultado, que es “4”, lo coloca en la siguiente columna, bajo el -8

$\boxed{4}$ Realiza la operación aritmética en la segunda columna, obteniendo -4

A partir de allí se repite el proceso, solo que esta vez comenzando con **-4**.

Este polinomio, al volverle a colocar la parte literal, es de grado 2, ya que al eliminar el 20, el polinomio que era grado 3, ahora ya es grado 2,

Por lo tanto, el polinomio lo reescribo así:

$$\boldsymbol{x^2 - 4x + 5 = 0}$$

Y ahora lo puedo resolver con la fórmula general, y obtenemos que:

$$\boldsymbol{x_2 = 2 + i \quad y \quad x_3 = 2 - i}$$

Recuerde que la ecuación, por ser de tercer grado, tendrá 3 raíces, si fuera de quinto grado, debe tener 5 raíces, si el exponente mayor fuera 4, la ecuación sería de cuarto grado, y debería tener 4 raíces, y así sucesivamente.

e) $6x^4 - x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$

En este caso encontraremos 4 raíces, ya que el polinomio es de 4º grado. Aplicando la Regla de Ruffini tenemos,

$$\mathbf{6 - 1 + 5 - 1 - 1}$$

El aspecto por destacar en este ejercicio es que los divisores con los que tengo que probar, no solo serán los divisores de "1", que es el número que está a la derecha en el polinomio, sino que tenemos que tomar en cuenta el coeficiente del primer término, ya que en esta ocasión NO es "1" como lo teníamos en el ejemplo anterior, en nuestro caso es "6".

Por lo tanto, los divisores a considerar serán una combinación de los números de los extremos del polinomio, así:

Llamaremos P, a los divisores de 1, $P: \pm 1$

Y llamaremos Q, a los divisores de 6, $Q: \pm 1, \pm 2, \pm 3 \;\; y \;\; \pm 6$

Entonces los divisores, los números con los que probaré reducir el polinomio serán:

$$\frac{P}{Q}: \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}$$

Apliquemos la regla de Ruffini, así:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{6 - 1 + 5 - 1 - 1} & \\ +3 + 1 + \;3 + 1 & \frac{1}{2} \\ \hline \mathbf{6 + 2 + 6 + 2} \qquad & \end{array}$$

Como pudimos reducir la última columna, la de la derecha, el polinomio, ya no es de 4º grado, ahora es de 3er grado, lo que supone que debo de volver a aplicar el método de Ruffini, con el fin de llevar el polinomio a que sea de 2º grado, y aplicar la fórmula general.

Con estos datos, notemos que debemos calcular los valores con los que evaluaremos o probaremos reducir el polinomio una vez más, en este caso, tenemos que:

Los divisores $P, son \pm 1, \pm 2$, ya que son los divisores del número más a la derecha, o sea 2

Los divisores $Q, son \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, ya que son los divisores del número más a la izquierda, o sea 6

Por lo tanto, los divisores con los que debemos probar son:

$$\frac{P}{Q}: \frac{+}{-}1, \frac{+1}{-2}, \frac{+1}{-3}, \frac{+1}{-6}, \frac{+}{-}2, \frac{+2}{-3}, \frac{+2}{-6}$$

Este último divisor puede simplificarse, quedándonos $\frac{\boldsymbol{+1}}{\boldsymbol{-3}}$

Y será justamente **-** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ el valor que probaré, así:

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{6+2+6+2} & \\ \mathbf{-2+0-2} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ \hline \mathbf{6+0+6} & \end{array}$$

Como logramos reducir el polinomio, que era de 3er grado, ahora tenemos el polinomio de 2º grado, y ya podemos aplicar la fórmula general.

Primero lo reescribimos como polinomio, agregándoles su parte literal, así:

$$6x^2 + 0x + 6 = 0$$

Simplificando: $6x^2 + 6 = 0$

Despejando x: $6(x^2 + 1) = 0$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

De donde obtenemos que: $x_1 = i \quad y \quad x_2 = -i$

Finalmente reunimos las cuatro raíces, y tenemos que:

$$\boldsymbol{x_1 = i, \qquad x_2 = -i, \qquad x_3 = \frac{1}{2} \qquad y \qquad x_4 = -\frac{1}{3}}$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Resolver $3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x - 40 = 0$ si $2i$ es una de sus raíces

2. Encuentre las raíces o los "ceros" de la siguiente ecuación polinómica:

$$x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x - 32 = 0$$

3. Encontrar los ''ceros'' de la ecuación polinómica y usarlos para expresar p(x) = 0 como un producto de polinomios lineales, si la ecuación es:

$$x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$$

4. Resolver: $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0$

5. Resolver: $x^3 + 10x^2 + 169x = 0$

6. Resolver: $x^4 - 1 = 0$

7. Resolver: $x^5 - x^3 - 20x = 0$