UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 3- Unidad 1: Los números complejos.

Sesión 1: **Producto y cociente de números complejos en forma trigonométrica y Teorema de De Moivre.**

Producto y Cociente de números complejos en forma Trigonométrica

Ya hemos visto el producto y el cociente de números complejos, pero lo estudiamos en su forma binomial o forma algebraica: $\boldsymbol{a + bi}$.

En este apartado veremos que existe una forma diferente de efectuar el producto y el cociente, si el número complejo lo tenemos expresado en forma trigonométrica. Quizá a alguien le resulte más cómodo hacerlo de forma binomial, es necesario aprenderlo de manera trigonométrica.

Producto de Complejos en forma trigonométrica

Si $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ y $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, entonces:

$$\boldsymbol{z_1 . z_2 = [r_1 . r_2] . (\cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))}$$

No debemos olvidar que el argumento debe cumplir dos condiciones:

a) Ser menor de 360^o
b) Ser positivo, es decir que debe corregir según el cuadrante en el que esté ubicado el número complejo que se multiplica, esto se debe hacer antes de efectuar el producto.

Ejemplo 1. Efectuar $5(\cos 75° + i\mathrm{sen} 75°).4(\cos 255° + i\mathrm{sen} 255°)$

En el ejemplo podemos ver que son 2 números complejos los que se multiplican, ambos están ya expresados en forma trigonométrica, entonces procederemos a utilizar la expresión anterior para efectuar el producto de estos dos números complejos, así:

$$z_1 = 5(cos75^o + isen75^o) \qquad y \qquad z_2 = 4(cos255^o + isen255^o)$$

Donde:

$r_1 = 5$ $\quad\theta_1 = 75^o$
$r_2 = 4$ $\quad\theta_2 = 255^o$

Aplicando la fórmula:

$$z_1.z_2 = [r_1.r_2].(\cos(\theta_1+\theta_2) + isen(\theta_1+\theta_2))$$

$$z_1.z_2 = [5x4].(\cos(75^o+255^o) + isen(75^o+255^o))$$

$$z_1.z_2 = [20].(\cos(330^o) + isen(330^o))$$

$$\boldsymbol{z_1.z_2 = 20(\cos(330^o) + isen(330^o)) = 20\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$\boldsymbol{z_1.z_2 = 10\sqrt{3} - \frac{1}{2}i}$$

$$\boldsymbol{z_1.z_2 = 17.32 - 0.5i}$$

Cociente de Complejos en forma trigonométrica

Si $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ y $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, entonces:

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}\right].(\cos(\theta_1-\theta_2) + isen(\theta_1-\theta_2))}$$

Al igual que en el Producto, no debemos olvidar que el argumento debe cumplir tres condiciones:

a) Se debe obtener restando el argumento del numerador (θ_1), menos el del denominador (θ_2), en ese estricto orden, como se diría más simple, el argumento de arriba menos el argumento de abajo.
b) Debe ser menor de 360^o
c) Debe ser positivo, es decir que debe corregir según el cuadrante en el que esté ubicado el número complejo que se multiplica, esto se debe hacer antes de efectuar el cociente, pero además si el resultado final es negativo, debemos expresarlo en forma positiva, simplemente restándolo con 360^o.

Ejemplo 2. Efectuar $3(\cos 30° + \text{i sen } 30°) \div \frac{1}{2}(\cos 85° + isen 85°)$

En este ejemplo podemos ver que son 2 números complejos los que se deben dividir, ambos están ya expresados en forma trigonométrica, entonces procederemos a utilizar la expresión que existe para realizar la división en forma trigonométrica, así:

Si $z_1 = 3(cos30^o + isen30^o)$ y $z_2 = \frac{1}{2}(cos85^o + isen85^o)$

Donde:

$r_1 = 3 \qquad \theta_1 = 30^o$

$r_2 = \frac{1}{2} \qquad \theta_2 = 85^o$

Aplicando la fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{r_1}{r_2}\right].(\cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{3}{1/2}\right].(\cos(30^o - 85^o) + isen(30^o - 85^o))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = [6].(\cos(-55^o) + isen(-55^o))$$

En este caso, aunque el argumento es menor de 360^o, no cumple ser positvo. Entonces lo volveremos positivo haciendo la siguiente operación:

$$\boldsymbol{\theta_c = 360^o - |\theta_o|}$$

En donde:

$\boldsymbol{\theta_c}$ **:** Argumento corregido, el que dejaremos en la respuesta final

$\boldsymbol{|\theta_o|}$ **:** Argumento Obtenido del cálculo (Tomamos el valor absoluto del ángulo)

En nuestro caso tendríamos:

$$\theta_c = 360^o - |\theta_o|$$

$$\theta_c = 360^o - |-55^0|$$

$$\theta_c = 360^o - 55^o$$

$$\theta_c = 305^o$$

Finalmente tenemos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = [6].\left(\cos(-55^o) + isen(-55^o)\right) = 6(\cos(305^o) + isen(305^o))$$

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = 3.44 - 4.91i}$$

Producto y Cociente de números complejos en forma Polar.

Producto de números complejos en forma polar.

Regla: Para multiplicar dos números complejos en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Ejemplo 3. El producto de:

$$z_1 = 5_{45^0} \text{ y } z_2 = 3_{30^0} \text{ es } z_1.z_2 = (5_{45^0}).(3_{30^0}) = (5)(3)_{45^0+30^0} = 15_{75^0}$$

Cociente de números complejos en forma polar.

Regla: Para dividir dos números complejos en forma polar se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Ejemplo 4. El cociente de:

$$z_1 = 12_{135^0} \text{ y } z_2 = 3_{45^0} \text{ es } \frac{z_1}{z_2} = \frac{12_{135^0}}{3_{45^0}} = \left(\frac{12}{3}\right)_{135^0-45^0} = 4_{90^0}$$

<u>EJERCICIOS PARA PRACTICAR</u>

1.Realiza los siguientes productos en forma trigonométrica y en forma polar, y escriba la respuesta en forma $a + bi$

a) $2(\cos 20^\circ + i\ sen\ 20^\circ)$ por $5(cos70^0 + i\ sen70^0)$

b) $(\cos 70^\circ + isen70^\circ)$ por $4(cos110^0 + i\ sen110^0)$

c) $3\left(cos\frac{\pi}{18} + isen\frac{\pi}{18}\right)$ por $\frac{2}{3}\left(cos\frac{5\pi}{8} + isen\frac{5\pi}{8}\right)$

d) $10\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ sen\ \frac{\pi}{6}\right)$ por $3\left(cos\frac{\pi}{12} + isen\frac{\pi}{12}\right)$

2. Realiza los siguientes cocientes en forma trigonométrica y en forma polar, y escriba la respuesta en forma $a + bi$

a) $6(\cos 70^\circ + isen70^\circ) \div 3(cos40^\circ + isen40^\circ)$

b) $\frac{2}{3}(cos350^\circ + isen350^\circ) \div (cos180^0 + isen180^0)$

c) $3(cos310^\circ + isen310^\circ) \div \frac{1}{2}(cos85^0 + isen85^0)$

d) $5\left(cos\frac{5\pi}{18} + isen\frac{5\pi}{18}\right) \div \left(cos\frac{11\pi}{18} + isen\frac{11\pi}{18}\right)$