2. Vectores

La formulación de las leyes de la naturaleza y la física, y notablemente desde la aparición del "Principia mathematicae" de Newton, las describimos y condensamos mediante ecuaciones y objetos matemáticos. Por ejemplo, uno de las primeras aplicaciones del cálculo diferencial fue la cinemática y dinámica[Newton, 2016], asi como las geometrías riemanianas en Relatividad General o bien los operadores lineales en espacios Banach en mecánica cuántica. Para la Mecánica Clásica los objetos principales son números, funciones y vectores. En mecánica lagrangiana o avanzadas, seran ecuaciones diferenciales parciales y tensores. De ahí nuestra necesidad de entender estas estructuras mejor.

2.1. Cantidades escalares y vectoriales

Entre la multitud de conceptos y cantidades físicas que nos sirven para describir la Mecánica, sobresalen dos tipos de cantidades que se comportan algebráicamente de forma diferente.

Definición 2.1 (Escalar)**.** Una cantidad física escalar es aquella que se deja especificar completamente por un valor único con una unidad adecuada y no tiene dirección. [Serway and Jewett, 2008]

Por ejemplo, la presión p , la temperatura T , la energía E y la masa m representan cantidades físicas escalares típicas. Por otro lado, un vector

Definición 2.2 (Vector)**.** es una cantidad física vectorial es aquella que se especifica por completo mediante un número y unidades apropiadas más una dirección [Serway and Jewett, 2008]. Decimos que los vectores poseen *magnitud* y *dirección*[1].

En esta categoría caben cantidades como la velocidad $\vec{v}$, la posición $\vec{r}$ o las fuerzas $\vec{F}$. Para diferenciarlas de los escalares las indicaremos con una flecha en la parte superior de la letra que las representa. Antes de ver sus propiedades algebraicas sería útil examinar sus propiedades geométricas.

2.2. Representación de vectores

Matemáticamente la representación más simple de un vector es de una flecha orientada. Como se muestra en la figura 2.1 una flecha descansa sobre un recta portadora que indica su *dirección*

[1] Aquí magnitud significa sólo el valor numérico de la cantidad física y no se refiere a la magnitud física como idea o concepto

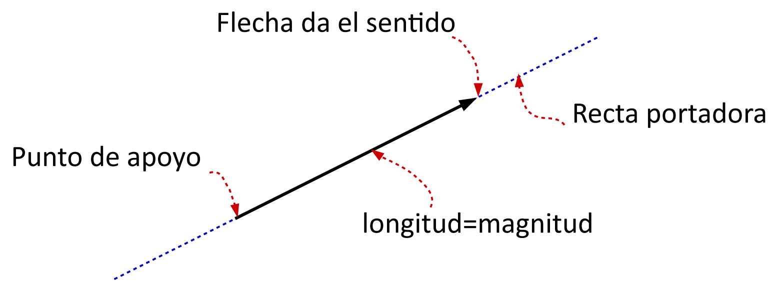

Figura 2.1.: Geométricamente los vectores se representan mediante flechas

general. La longitud de la flecha es una medida de su *magnitud*[2], la cual además posee un *punto de inicio o ancla o apoyo* y una punta indicada por un triángulo al final indicando su *orientación*.
En general en un marco de referencia dos dimensional, los vectores están dados por dos informaciones como se muestra en el ejemplo de la figura 2.2 . Las posiciones de los edificios están dados por la distancia (magnitud) y el ángulo que forma respecto de uno de los ejes o por la cantidad de pasos que hay que dar en de los ejes Norte, Sur, Este y Oeste. Por ejemplo, la iglesia se encuentra a una distancia de 500 m en un ángulo de 36.9 °al norte del Este. El banco por otro lado se encuentra a 200 m al Oeste y 400 m al Norte del origen O. El estadio está a 360.6 m a 33.7° al Este del Sur.

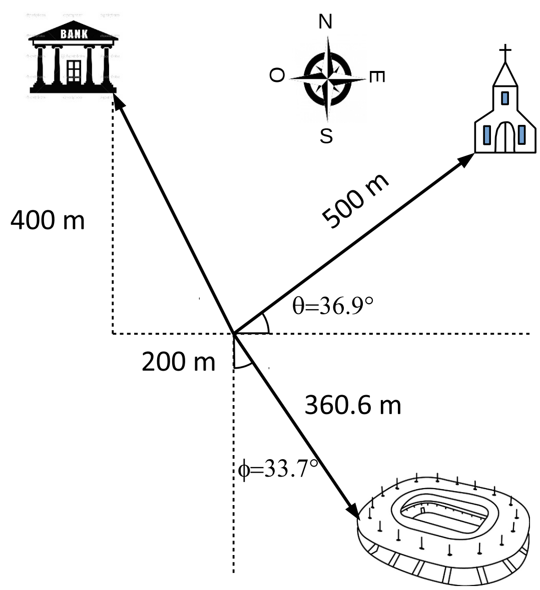

Figura 2.2.: Los vectores de posición de los ediciones están dados por dos informaciones.

⋄ Notamos que para poder comparar los vectores es necesario tener un punto de referencia

[2]Aquí es indispensable tener una escala que asocie la longitud de la flecha con la magnitud de la cantidad observada.

común, que llamaremos el origen O. A veces también llamado polo.

- Un marco de referencia para orientarnos. En el caso de un mapa las direcciones cardinales son un buena referencia, no obstante no todos los vectores se dejan describir en esos criterios [3].

- También notamos que aunque poseamos las dos informaciones, como en el caso del banco, desconocemos la magnitud y dirección (ángulo) del vector. Es necesario entonces que encontremos una forma de transformar una representación en la otra y viceversa.

2.2.1. Representación polar y cartesiana

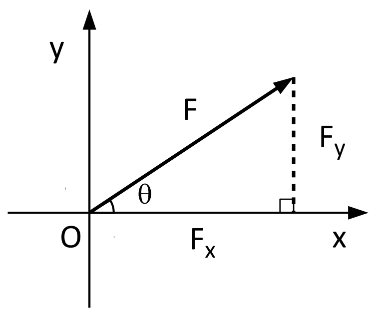

Figura 2.3.: Triángulo que relaciona las coordenadas polares con las cartesianas

Como notamos en el ejemplo de la figura2.3 existen dos formas de notar/indicar los vectores respecto de un marco de referencia cartesiano:

representación polar se indica el *angulo polar* θ que descansa sobre el plano xy y *la magnitud* F. Solemos escribir $\vec{F} = (F, \theta)$. Cuándo el ángulo polar θ empieza en el eje x positivo lo llamamos ángulo estandar

representación cartesiana se indica las *coordenadas* F_x y F_y ,que nos dice cuando debemos avanzar en las direcciones rectangulares dada por los ejes x y y. Solemos escribir $\vec{F} = \left(F_x, F_y\right)$

2.2.2. Transformación de polar a cartesiana

Suponga que tenemos la magnitud y dirección de un vector y deseamos obtener sus coordenadas cartesianas o rectangulares. Observamos el triángulo rectángulo que se forma en la figura 2.3 entre el vector F y las componentes F_x y F_y. Por trigonometría sabemos que:

[3] Además las direcciones cardinales son aproximaciones planes a coordenadas esféricas

$$\frac{F_x}{F} = \cos\ \theta \qquad\qquad \frac{F_y}{F} = \text{sen}\ \theta$$
$$F_x = F \cdot \cos\ \theta \qquad\qquad F_y = F \cdot \text{sen}\ \theta \tag{2.1}$$

Ejemplo 2.1. Transforme los siguientes vectores a representación cartesiana $\vec{A} = (10\ N, 30°)$, $\vec{B} = (5\ N, 143°)$

Solución
Para el vector $\vec{A}$ tenemos que

$$\begin{aligned} A_x &= A \cdot \cos\ \theta & A_y &= A \cdot \text{sen}\ \theta \\ &= 10\ N \cdot \cos\ 30° & &= 10\ N \cdot \text{sen}\ 30° \\ &= 8.66\ N & &= 5.0\ N \end{aligned}$$

Mientras que para el vector $\vec{B}$ obtenemos

$$\begin{aligned} B_x &= B \cdot \cos\ \theta & B_y &= B \cdot \text{sen}\ \theta \\ &= 5\ N \cdot \cos\ 143° & &= 5\ N \cdot \text{sen}\ 143° \\ &= -3.99\ N & &= 3.00\ N \end{aligned}$$

Es de notar que el signo negativo en la componente x no es accidente y nos indica que el vector se encuentra en el segundo cuadrante dado que el ángulo θ siempre se referencia respecto del eje x positivo si no se indica de otra forma.

2.2.3. Transformación de cartesiano a polar

Supongamos ahora que tenemos el problema inverso, que es muy común en la resolución de ejercicios: Tenemos las coordenadas del vector, pero nos gustaría saber la magnitud y dirección del mismo.
Regresemos a la figura 2.3. y notemos que la magnitud del vector F está dado por la hipotenusa del triángulo, mientras que las componentes x y y son los catetos del triángulo. Utilizando el Teorema de Pitágoras y la definición de la tangente obtenemos

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \qquad\qquad \tan\ \theta = \frac{F_y}{F_x}$$
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad\qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \tag{2.2}$$

Donde hay que hacer la observación que para el cálculo de θ siempre existen dos soluciones (la segunda solución en el cuadrante diagonalmente opuesto) y es necesario orientarse con los signos o un pequeño esquema para saber de cual ángulos estamos hablando

Ejemplo 2.2. Transforme los siguientes vectores a representación cartesiana $\vec{C} = (3\,N, 4\,N)$, $\vec{D} = (-\sqrt{2}\,N, \sqrt{3}\,N)$

SOLUCIÓN
Para el vector $\vec{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \\ &= \sqrt{(3\,N)^2 + (4\,N)^2} \\ C &= 5\,N \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{4\,\cancel{N}}{3\,\cancel{N}}\right) \\ \theta_1 &= 53.13^\circ \\ \theta_2 &= 233.13^\circ \end{aligned}$$

Dado que ambas componentes cartesianas son positivas, sabemos que el vector se encuentra en el primer cuadrante, por lo que sólo el ángulo θ_1 puede ser el correcto. Para calcular el segundo ángulo sólo súmele 180° al primer ángulo calculado, ya que $\tan\theta = \tan(\theta + 180)$.
Mientras que para el vector $\vec{D}$ obtenemos

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{D_x^2 + D_y^2} \\ &= \sqrt{\left(-\sqrt{2}\,N\right)^2 + \left(\sqrt{3}\,N\right)^2} \\ D &= \sqrt{5}\,N \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{D_y}{D_x}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}\,N}{-\sqrt{2}\,N}\right) \\ \theta_1 &= -50.77^\circ \\ \theta_2 &= 129.23^\circ \end{aligned}$$

Obsérvese que hay dos ángulos que dan la misma tangente. En nuestro caso la solución correcta es θ_2 dado que la componente x es negativa y por ende se encuentra en el segundo cuadrante.

2.3. Suma de vectores

Una de las principales diferencias entre las cantidades vectoriales y escalares es su álgebra. Cuando dos cantidades escalares actúan sobre un sistema sus magnitudes sencillamente se suman o restan según signo. Pero cuando dos vectores actúan al mismo tiempo sobre un cuerpo el ángulo que forma entre ellos afecta el resultado de la suma, dando como resultado una nueva álgebra donde por ejemplo $\vec{3} + \vec{4} \neq \vec{7}$ necesariamente.
Suponga que dos fuerzas actúan al mismo tiempo sobre una persona como se muestra en la figura 2.4. Ambos perritos jalan en direcciones diferentes pero el efecto neto de ambas fuerzas es un vector que no posee la misma magnitud de ninguno de los dos vectores originales, ni siquiera es la suma de sus magnitudes y señala en un nueva dirección que se encuentra entre las direcciones de las fuerzas originales.

Definición 2.3 (Vector resultante)**.** La resultante $\vec{R}$ o el vector resultante de un número de vectores similares es aquel vector que tendrá el mismo efecto sobre el cuerpo que todos los vectores juntos. [Tippens, 2007]

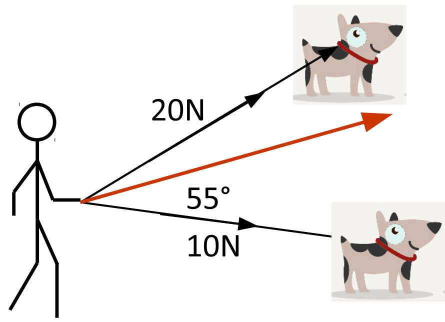

Figura 2.4.: El vector resultante posee una magnitud y dirección diferente a los vectores originales

Notamos que nos interesa el cálculo de la resultante para lo que utilizaremos métodos gráficos/geométricos y numéricos para obtenerlo.
Intuimos que la magnitud de este nuevo vector debe estar entre la suma y la resta de las magnitudes, es decir $\left|\vec{A}\right| - \left|\vec{B}\right| \leq \left|\vec{R}\right| \leq \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|$. Si ambas fuerzas fuesen igual de grandes podríamos intuir que la resultante actuara exactamente a la mitad entre los dos vector originales.

2.3.1. Método de suma por paralelogramo (gráfico)

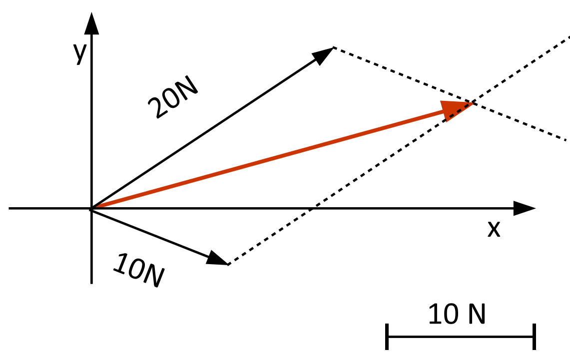

Figura 2.5.: Se completa un paralelogramo con vectores que se suman para determinar la resultante

Uno de los métodos más eficientes para determinar la resultante cuando sólo actúan dos fuerzas/vectores es el de completar un paralelogramo con las fuerzas (ver figura 2.5):

1. Se dibujan las fuerzas en un sistema cartesiano, donde se especifica una escala tanto para el eje x como para el eje y
2. Se colocan los inicios de los vectores a sumar en el origen
3. Se trazan lineas paralelas a ambos vectores que pasen por la punta del otro vector a manera de completar un paralelogramo.

4. La resultante es el vector que va desde el origen al punto de intercepción entre las paralelas

5. Para determinar la magnitud y dirección es necesario medir la longitud del nuevo vector, así como el ángulo que forma respecto del eje x

En el caso de la figura 2.5 medimos un ángulo de $15.35\,°$ y una magnitud de $27{,}0\,N$. El método tiene la ventaja de ser simple y directo, pero tiene la desventaja de ser impreciso al depender de la precisión del dibujo. Además en la práctica es necesario tener un estuche de geometría para poder determinar la resultante - que no siempre se tiene a mano. Además cualquier error en los vectores o en la paralelas tendrá un efecto relativamente grande sobre el resultado.

2.3.2. Método de suma por polígono (gráfico)

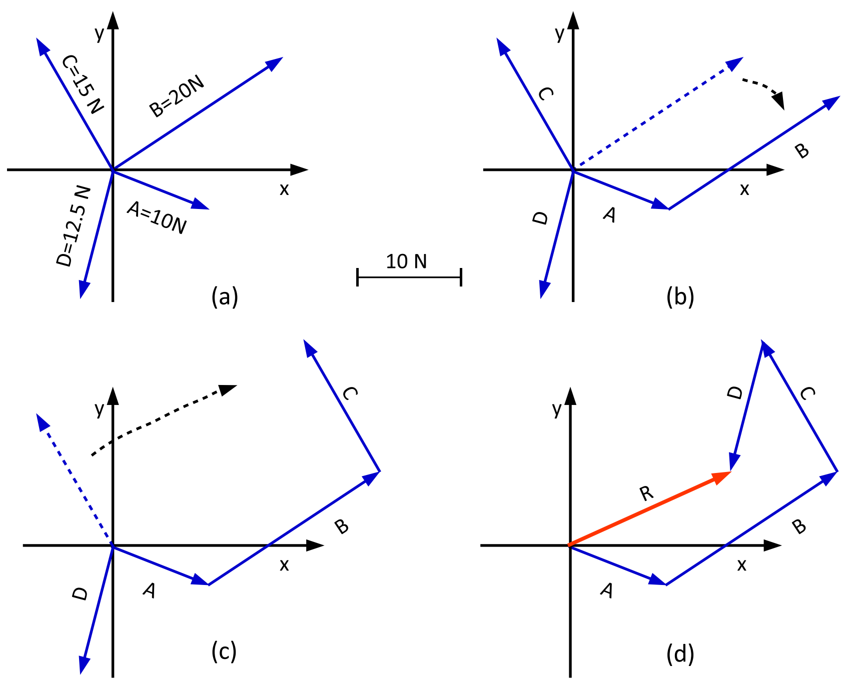

Figura 2.6.: Se completa un polígono con vectores que se suman para determinar la resultante

Cuando tenemos tres o más vectores el método del polígono se vuelve muy engorroso, pues hay que sumar los vector uno a uno, estableciendo un paralelo nuevo por cada nuevo vector a sumar. Si bien los procedimientos son sencillos, se pierde fácilmente la perspectiva total.
El método polígono implica desplazar los vectores uno detrás del otro a manera de formar un polígono incompleto. La resultante es el vector que desde el origen cierra el polígono en la punta del último vector (ver figura):

1. Se dibujan las fuerzas en un sistema cartesiano (ver figura 2.6 a), donde se especifica una

escala tanto para el eje x como para el eje y. En el caso general y a menos que se diga otra cosa, la escala dibujada es válida para ambos ejes.

2. Se desplaza al vector a sumar de manera que su inicio coincida con la punta del vector anterior (ver figura 2.6b).
3. Se repite el procedimiento hasta que no haya más vectores a sumar (ver figuras 2.6 c y d)
4. La resultante $\vec{R}$ es el vector que va desde el origen a la punta del último vector del polígono.
5. Para determinar la magnitud y dirección es necesario medir la longitud del nuevo vector, así como el ángulo que forma respecto del eje x

En el caso de la figura 2.6 medimos un ángulo de $24.34\,°$ y una magnitud de $16.7\,N$. Solemos escribir que $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ dado el orden en el que se hizo la sumatoria.

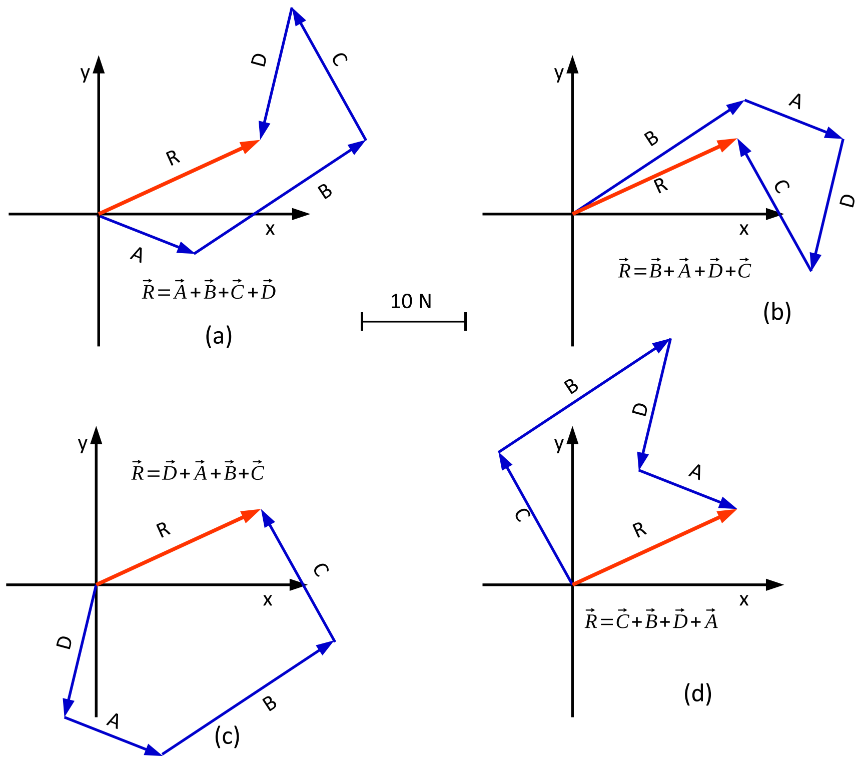

Figura 2.7.: El orden de los sumandos no altera la suma vectorial

No obstante el orden de los sumandos la resultante es siempre la misma. La figura 2.7 demuestra que no importa el polígono elegido, siempre se obtiene el mismo resultado.
Decimos que la suma vectorial es conmutativa:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Justo como en el caso del método del paralelogramo, los inconvenientes de este método radica en la incerteza que se obtiene al graficar nuevamente cada vector y a la hora de medir el ángulo y magnitud de la resultante.

Ejemplo 2.3. Un topógrafo inicia su trabajo en la esquina sudeste de una parcela que necesita medir. Y registra los siguientes desplazamientos: $A = 600\,m$ al Norte; $B = 400\,m$ al Oeste; $C = 200\,m$ al Sur y $D = 100\,m$ al Este. ¿Cuál es la magnitud y dirección del desplazamiento desde el punto de partida?

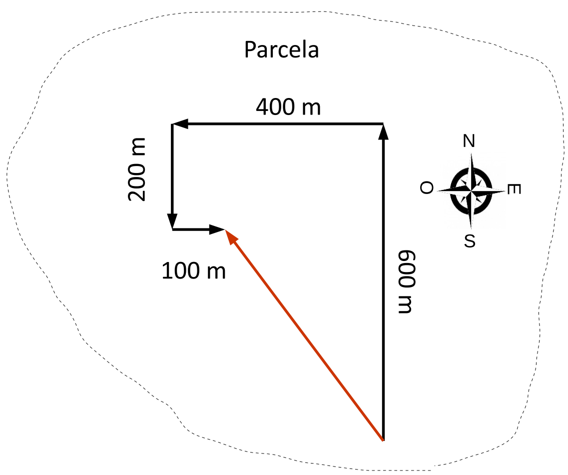

Figura 2.8.: Desplazamientos de topógrafo

Solución

Siempre es útil hacer un esquema de la situación, aun cuando no esté a escala, como se muestra en la figura 2.8

Tomando al eje x como el Este y al eje y como el Norte podemos calcular las componentes de cada desplazamiento en la siguiente tabla

Desplazamiento	Magnitud	Angulo θ	$M_x = M \cdot \cos\theta$	$M_y = M \cdot \text{sen}\,\theta$
A	$600\,m$	$90\,°$	$0\,m$	$600\,m$
B	$400\,m$	$180\,°$	$-400\,m$	$0\,m$
C	$200\,m$	$270\,°$	$0\,m$	$-200\,m$
D	$100\,m$	$0\,°$	$100\,m$	$0\,m$
		$\sum$	$-300\,m$	$400\,m$

utilizando ahora las transformaciones a coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} & \tan\theta &= \frac{R_y}{R_x} \\
&= \sqrt{(-300\ m)^2 + (400\ m)^2} & \tan\theta &= \tfrac{400\ m}{-300\ m} \\
R &= 500\ m & \theta_1 &= -53.13\,^\circ \\
& & \theta_2 &= 126.87\,^\circ
\end{aligned}
$$

Recordando que el vector resultante debe quedar en el segundo cuadrante (o bien al Noroeste) encontramos el ángulo suplementario que también cumple con la razón de la tangente.

2.3.3. Método de suma por trigonometría (analítico)

El siguiente método sigue siendo geométrico, pero tratamos de utilizar los conocimientos sobre triángulos para calcular exactamente las magnitudes y ángulos de vectores. En esencia utilizaremos las ley de senos y la ley de cosenos que están resumidos en el anexo sobre trigonometría.

1. Se dibuja un esquema y se arreglan los vectores de forma que con la resultante formen un triángulo.
2. Se buscan por lo menos tres informaciones para determinar el triángulo (por lo general dos lados y un ángulo o un lado y dos ángulos)
3. Se aplica la ley de cosenos o la ley de senos según convenga hasta que se obtengan todas cantidades deseadas.

Ejemplo 2.4 (Método trigonométrico)**.** Suponga que tenemos dos vectores $\vec{A} = (25\ m, 35°)$ y $\vec{B} = (40\ m, 150°)$ como se muestra en la figura 2.9. Encuentre magnitud y dirección de la resultante por el método trigonométrico.

Solución

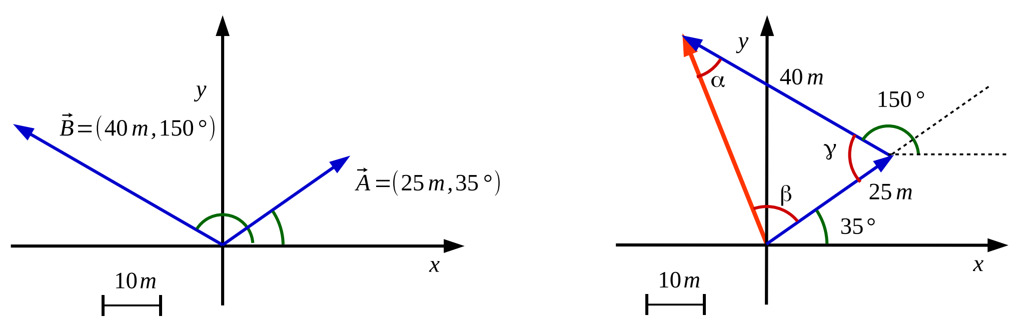

Figura 2.9.: Los vectores se arreglan de manera que formen un triángulo

1. Una vez dibujado el triángulo, necesitamos determinar por lo menos un ángulo. Notamos que los ángulos dados NO corresponden a ningún ángulo dentro del triángulo, por lo que debemos

determinalos por leyes geométricas. Notamos que la línea de proyección del vector corta el ángulo de 150° , por lo podemos decir que el ángulo suplementario de γ es $150° - 35° = 115°$. Es decir

$$\begin{aligned} \gamma + (150^\circ - 35^\circ) &= 180^\circ \\ \gamma &= 65^\circ \end{aligned}$$

Dado que tenemos el ángulo entre los lados A y B podemos utilizar la ley de cosenos

$$\begin{aligned} C^2 &= A^2 + B^2 - 2AB \cdot \cos\gamma \\ C &= \sqrt{25^2 + 40^2 - 2 \times 25 \times 40 \cdot \cos 65^\circ}\ m \\ C &= 37.145\ m \end{aligned}$$

2-El resultado fue simple de encontrar, pero no tiene informaciones sobre el ángulo que forma respecto del eje x, por lo que debemos aplicatr la ley de senos para encontrar el ángulo β necesario:

$$\begin{aligned} \frac{sen\beta}{B} &= \frac{sen\ \gamma}{C} \\ sen\ \beta &= \frac{B \cdot sen\ \gamma}{C} \\ &= \frac{40\cancel{m} \cdot sen\ 65^\circ}{37.145\cancel{m}} \\ \beta &= sen^{-1}\,(0.9759) \\ \beta &= 77.40^\circ \end{aligned}$$

3. Nótese que el ángulo β NO es el ángulo estándar que forma la resultante con el eje x. Sino que todavía falta sumarle 35° del primer vector

$$\begin{aligned} \theta &= 77.40^\circ + 35^\circ \\ \theta &= 112.40^\circ \end{aligned}$$

que encaja con el esquema mostrado en la figura 2.9.
Si bien los cálculos son sencillos, la determinación de los ángulos puede ser muy engorrosa e incluso se puede determinar el triángulo correctamente y aún asi no tener la dirección correcta por obviar la ubicación del triángulo respecto del marco de referencia. Se sugiere utilizar este método con mucha discreción.

2.3.4. Método de suma por componentes (analítico)

Para obviar los problemas de los métodos gráficos y obtener cálculos con mayor precisión, es imperante obtener un método para calcular analíticamente los vectores. El método que utilizaremos de ahora en adelante será el método por componentes, que además es el que necesitaremos para todas las leyes físicas que involucren vectores.

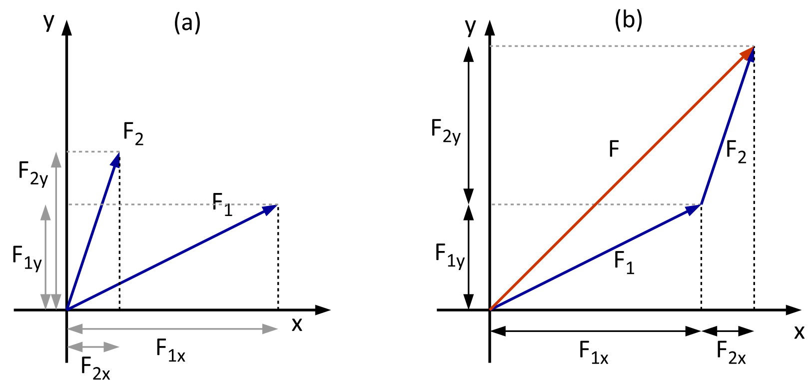

Figura 2.10.: Los vectores se suman por componentes

Considere dos vectores de fuerza $\vec{F_1} = (4\,N, 2\,N)$ y $\vec{F_2} = (1\,N, 3\,N)$ como se muestran en la figura 2.10 a. Sumamos a los vectores con el método del polígono y proyectamos a las flechas hacia los ejes x y y, obteniendo sus componentes. Notamos que las componentes del vector resultante están relacionadas con la componentes de los vectores iniciales de la siguiente forma

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} \end{aligned}$$

lo que se describe mediante la siguiente ley:

Teorema 2.1 (Suma de vectores)**.** *Los vectores se suman por componentes.*

Escribimos de forma abreviada:

$$F_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} \qquad F_y = \sum_{i=1}^{N} F_{iy}$$

donde $\sum$ significa la suma sobre todos los elementos con subíndice i que es un número entero entre 1 y $N \in \mathbb{N}$.
Esto quiere decir que a diferencia de los escalares donde se suman magnitudes, los vectores se deben sumar por componentes. También significa que en las componentes está implícitamente incluida la información de magnitud y dirección y esta es la forma correcta de sumar dos "flechas". En nuestro caso, las componentes x y y de la resultante están dadas por

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} & \qquad F_y &= F_{1y} + F_{2y} \\ &= 4\,N + 1\,N & &= 2\,N + 3\,N \\ &= 5\,N & &= 5\,N \end{aligned}$$

De aquí podemos utilizar las relaciones entre coordenadas polares y cartesianas para deducir magnitud y ángulo.

$$
\begin{aligned}
F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} & \tan\theta &= \frac{F_y}{F_x} \\
&= \sqrt{(5\,N)^2 + (5\,N)^2} & &= \frac{5\,\cancel{N}}{5\,\cancel{N}} \\
&= 5\sqrt{2}\,N & \theta &= \tan^{-1} 1 \\
F &= 7.071\,N & \theta &= 45\,^\circ
\end{aligned}
$$

Estrategia para calcular resultantes y direcciones

1. Hacer un esquema con todas las magnitudes y ángulos o bien componentes si están dados
2. Hacer una tabla con cada una de las fuerzas indicando magnitudes y ángulos
3. Calcular las componentes en la tabla
4. Sumar todas las componentes correspondientes
5. Determinar resultante y dirección mediante ecuaciones de transformación

Ejemplo 2.5. Tomemos como ejemplo los perros de la figura 2.4 y 2.5. Suponga por simplicidad que la fuerza de 20 N forma un ángulo de 40 ° con el eje x y la fuerza de 10 N forma un ángulo de −15 ° respecto del mismo eje. Determine la magnitud y dirección de la resultante F

SOLUCIÓN
El esquema lo tomamos de la figura 2.5, así que hacemos una tabla con los datos dados:

Fuerza	Magnitud F_i	Angulo θ	$F_x = F \cdot \cos\theta$	$F_y = F \cdot \operatorname{sen}\theta$
F_1	$10\,N$	$-15\,^\circ$	$9.660\,N$	$-2.588\,N$
F_2	$20\,N$	$40\,^\circ$	$15.32\,N$	$12.86\,N$
		$\sum$	$24.98\,N$	$10.272\,N$

utilizando ahora las transformaciones a coordenadas polares

$$
\begin{aligned}
F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} & \tan\theta &= \frac{F_y}{F_x} \\
&= \sqrt{(24.98\,N)^2 + (10.272\,N)^2} & &= \frac{10.272\,\cancel{N}}{24.98\,\cancel{N}} \\
&= \sqrt{729.51\,N^2} & \theta &= \tan^{-1} 0.4112 \\
F &= 27.01\,N & \theta_1 &= 22.35^\circ \\
& & \theta_2 &= 202.35^\circ
\end{aligned}
$$

Mientras que la magnitud encaja perfectamente con nuestro cálculo gráfico, el ángulo varía, pues en el dibujo original los ángulos no son los que asumimos para este ejemplo.

2.4. Algunas propiedades de los vectores

Igualdad de dos vectores

Para muchos propósitos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se definen como igual si poseen la misma magnitud y apuntan en la misma dirección. Es decir la flechas de ambos vectores son paralelas y poseen la misma magnitud y sentido.

Vector Cero

Aunque no es realmente un vector, es aquel vector que no posee magnitud y por ende tampoco se le puede asignar una dirección. Solemos denotarlo sencillamente como $\vec{0}$ o simplemente 0 y representa el elemento neutro de la suma vectorial.

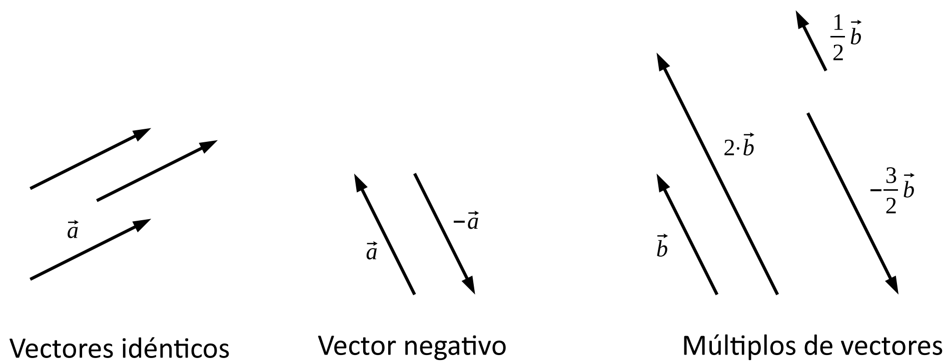

Figura 2.11.: Representación gráfica de algunas propiedades de los vectores

Vector negativo

Decimos que un vector $\vec{B}$ es el negativo del vector $\vec{A}$ si su suma da el vector cero. Es decir

$$\vec{A} + \vec{B} = 0$$

o bien

$$\vec{B} = -\vec{A}$$

interpretamos este resultado como un vector de la misma magnitud que $\vec{A}$, pero que señala en sentido contrario como se muestra en la figura 2.11 .

Multiplicación de un vector por escalar

Al multiplicar un vector por un escalar, la magnitud del vector se ve afectada por esa cantidad. Así el vector $2\vec{A}$ es un vector que señala en la misma dirección de $\vec{A}$, pero posee el doble de magnitud. Por otro lado $\frac{1}{3}\vec{A}$ es un vector que señala en misma dirección pero posee sólo un tercio de su longitud. Por último $-\frac{1}{2}\vec{A}$ es un vector que posee la mitad de la longitud de $\vec{A}$ pero señala en dirección contraria como se muestra en la figura 2.11

Resta de vectores

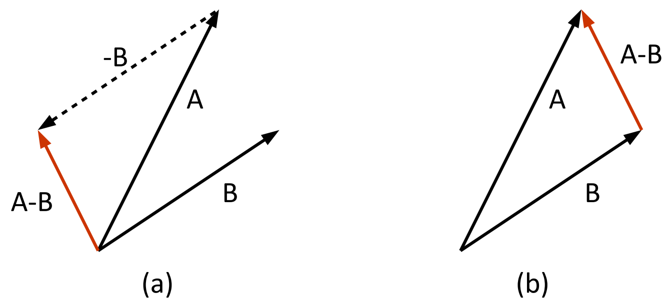

Figura 2.12.: Una resta vectorial es la suma con el inverso del sustraendo

Para restar dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se debe sumar al minuendo el negativo del sustraendo. Es decir

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Gráficamente significa que en vez de formar un polígono se traza un vector que va del sustraendo hasta el minuendo formando un triángulo como se muestra en la figura 2.12.

2.5. Notación de vectores unitarios

Aprovechando las propiedades de los vectores se introduce una nueva notación para los vectores.

Definición 2.4 (Vector unitario)**.** Un vector unitario es un vector adimensional de magnitud 1 cuya dirección está dada por convención o bien marco de referencia.
Por construcción el vector unitario de $\vec{A}$está dado por

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} \tag{2.3}$$

En el caso de marco de referencia cartesiano en tres dimensiones, éstas se denominan $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ e indican las direcciones de los ejes x, y y z respectivamente (ver figura 2.13) . Así cualquier vector $\vec{A} = (A, \theta)$ se deja representar de la siguiente forma

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$$

Es decir es una forma de escribir las componentes cartesianas en una sola ecuación en vez de tres.

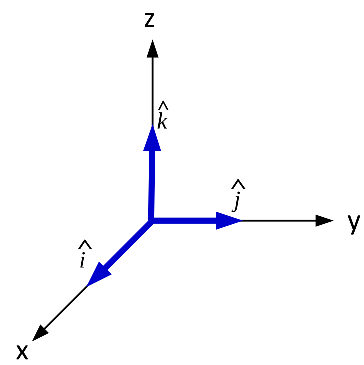

Figura 2.13.: Una resta vectorial es la suma con el inverso del sustraendo

La magnitud del vector de estar forma definida está dado por un Pitágoras extendido[4]:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{2.4}$$

También por definición del ángulo unitario tenemos quede tal forma que

$$\vec{A} = A \cdot \hat{A}$$

es decir que el vector dado por su magnitud A y su dirección $\hat{A}$. Deducimos de ahí que el vector unitario depende exclusivamente del ángulo estándar que forme con el eje x:

$$\hat{A} = \cos\theta\hat{\imath} + sen\,\theta\hat{\jmath} \tag{2.5}$$

Ejemplo 2.6. Suponga que tenemos un vector de fuerza $\vec{F} = (50\,N, 36.87\,°)$ en el plano xy. ¿Cuál sería su representación en vectores unitarios?

SOLUCIÓN
Dado que no hay componente z podemos decir que $F_z = 0$. Por lo que la representación con vectores unitarias se convierte en

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= F_x\,\hat{\imath} + F_y\,\hat{\jmath} + F_z\,\hat{k} \\
&= F \cdot \cos\theta\,\hat{\imath} + F\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} \\
&= 50\,N \cdot \cos 36.87\,°\,\hat{\imath} + 50\,N \cdot \mathrm{sen}\,36.87\,°\,\hat{\jmath} \\
\vec{F} &= 40\,N\,\hat{\imath} + 30\,N\,\hat{\jmath}
\end{aligned}$$

Las ventajas de la nueva notación es que la información se encuentra condensada en una sola suma. Además el objeto se puede tratar algebráicamente como cualquier otra expresión.

[4]Formalmente es la raiz cuadrada del producto punto del espacio vectorial

$$A = \sqrt{\vec{A} \cdot \vec{A}}$$

2.6. Aplicaciones y ejemplos

Ejemplo 2.7. Tomado de la discusión D2/1 b, c, d y e .Representar gráficamente y expresarlos a través de sus coordenadas cartesianas los siguientes vectores de desplazamientos.$\vec{B} = 5.00km$; $\theta_B = 40°$ al Sur del Este;$\vec{C} = 10.0\ km$, $\theta_C = 250°$;$\vec{D} = 25.5\ km$, al noroeste; $E = 20\ km$, 20° al Oeste del Sur

SOLUCIÓN
Haga un esquema (no necesita estar a escala) que tenga toda la información relevante como se muestra en la figura 2.14 . La dificultad en este ejercicio radica en entender del texto cual debe ser el ángulo estandar para cada vector. Así noroeste implica un ángulo estándar $\theta_D = 135°$ ya que es ángulo entre 90° (norte) y |180°(oeste) y el ángulo estándar para el vector $\vec{E}$ se calcula restando del ángulo para el sur (270°) los 20° hacia el oeste: $\theta_E = 270° - 20° = 250°$

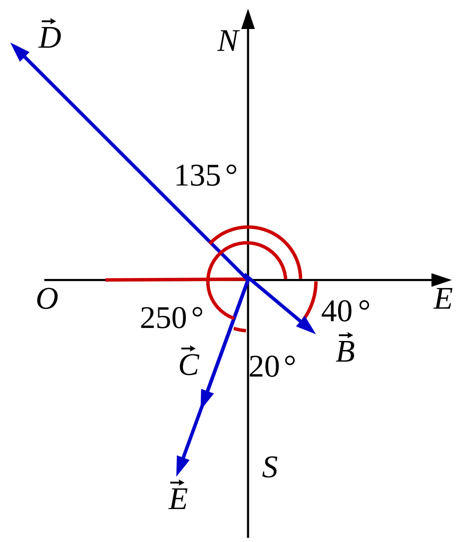

Figura 2.14.: Esquema de vectores segun la información proporcionada

Con eso listo es fácil calcular las componentes cartesianas utilizando una tabla como la que se muestra

Vector	Magnitud	θ	x	y
$\vec{B}$	$5.00\ km$	$-40°$	$3.83\ km$	$-3.21\ km$
$\vec{C}$	$10.00\ km$	$250°$	$-3.42\ km$	$-9.40\ km$
$\vec{D}$	$25.5\ km$	$135°$	$-18.03\ km$	$+18.03\ km$
$\vec{E}$	$20.0\ km$	$250°$	$-6.84\ km$	$-18.79\ km$

Ejemplo 2.8 (componentes polar y cartesianas)**.** Tomado de la discusión D2/2 ¿Cuál es la componente a_y y la magnitud de un vector a ubicado en el plano xy si su dirección es 230° en sentido

contrario al movimiento de giro de las manecillas del reloj medido de desde x positivo y si su componente x es $-6.5\ m$?

Solución

Dado que las informaciones son en parte polar y en parte cartesiana es útil hacer un esquema (véase figura2.15) que represente la situación.

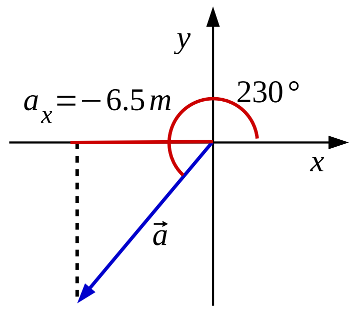

Figura 2.15.: Gráfica del vector $\vec{a}$según los datos proporcionados

Las fórmulas 2.1 y 2.2 deben ser combinadas para obtener la respuestas

1. Camino

Observando la figura 2.15 notamos que el triángulo que forma el vector $\vec{a}$ con el eje $x$es un triángulo rectángulo por lo que podemos utilizar las definiciones trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a_x}{a} \\ a &= \frac{a_x}{\cos\theta} \\ &= \frac{-6.5\ m}{\cos\ 230^\circ} \\ a &= 10.11\ m \end{aligned}$$

La componente y la podemos obtener mediante la ecuación 2.1

$$\begin{aligned} a_y &= a \cdot sen\,\theta \\ &= 10.11\ m \cdot sen\,230^\circ \\ a_y &= -7.75\ m \end{aligned}$$

2. Camino

Se pudo haber tomado otras relaciones trigonométricas y empezado calculando la componente y y luego la magnitud

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$
$$a_x \cdot \tan\theta = a_y$$
$$a_y = -6.5\ m \cdot \tan 230°$$
$$a_y = -7.75\ m$$

Utilizando Pitágoras

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$= \sqrt{(-6.5)^2 + (-7.75)^2}\ m$$
$$a = 10.11\ m$$

Ejemplo 2.9 (Comparación entre métodos gráficos y analíticos). Tomado de la discusión D2/8. Basándose en la figura 2.16, calcule:
a) El vector resultante de la suma de los vectores $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ (Por método gráfico)
c) El vector resultante de la suma $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ por método de componentes rectangulares. (Comparar la respuesta con la obtenida en literal a)
d) Resta de $\vec{D} - \vec{B}$ (Expresar en polares)
SOLUCIÓN

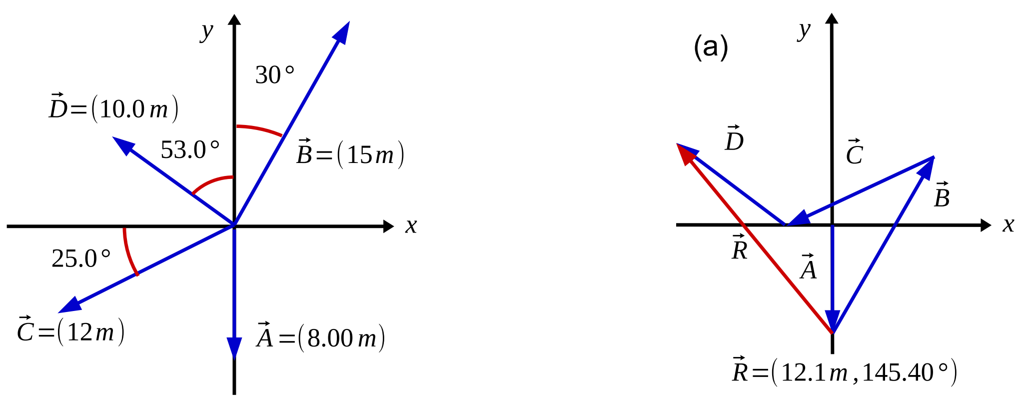

Figura 2.16.: Gráfica del vector $\vec{a}$según los datos proporcionados

a) Como se muestra en la figura 2.16, utilizando un programa capaz de graficar vectores con coordenadas polares (GeoGebra o LibreOffice Draw en este caso) obtenemos una magnitud para la suma de $R = 12.1\ m$ y un ángulo estándar de $\theta = 145.40°$.
c) Para el cálculo por componentes notamos que los ángulos dados no són los estándares y debe encontrarlos por métodos geométricos así $\theta_A = 270°$, $\theta_B = 90° - 30° = 60°$, $\theta_C = 180° + 25° = 205°$, $\theta_D = 90° + 53° = 143°$. Tabelando los vectores como aprendimos anteriormente obtenemos

Vector	Magnitud	θ	x	y
$\vec{A}$	8.00 m	270°	0 m	−8.00 m
$\vec{B}$	15.00 m	60°	7.50 m	12.99 m
$\vec{C}$	12.00 m	205°	−10.86 m	−5.07 m
$\vec{D}$	10.0 m	143°	−7.99 m	6.09 m
$\vec{R}$			−11.35 m	6.01 m

Para poder compararlo con el resultado en a) necesitamos encontrar la magnitud y dirección

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} & \tan\theta &= \tfrac{R_y}{R_x} \\ &= \sqrt{11.35^2 + 6.01^2}\ m & \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{6.01\,\cancel{m}}{-11.35\,\cancel{m}}\right) \\ R &= 12.84\ m & \theta_1 &= -27.90° \\ & & \theta_2 &= 152.10° \end{aligned}$$

Los resultados difieren con los esperados en a) pues un al hacer incluso con un programa de dibujo es dificil poner los ángulos y magnitudes con cierta exactitud en las posiciones indicadas. (GeoGebra a pesar que entiende polar calcula por componentes y por eso el resulta es idéntica al que calculamos nosotros). Es obvio que el método gráfico es impreciso y aunque parezca más trabajo termina siendo más confiable el método por componentes, incluso contra el de trigonometría.
d) Para calcular esta parte utilizaremos la notación de vectores unitarios

$$\begin{aligned} \vec{D} &= -7.99\,\hat{\imath} + \ 6.09\,\hat{\jmath}\ m \\ -\vec{C} &= 10.86\,\hat{\imath} + \ 5.07\,\hat{\jmath}\ m \\ \hline \vec{R} = \vec{D} - \vec{C} &= \ 2.87\,\hat{\imath} - 11.16\,\hat{\jmath}\ m \end{aligned}$$

Su magnitud y dirección están dados por

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} & \tan\theta &= \tfrac{R_y}{R_x} \\ &= \sqrt{2.87^2 + 11.16^2}\ m & \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{-11.16\,\cancel{m}}{2.87\,\cancel{m}}\right) \\ R &= 11.52\ m & \theta_1 &= -75.58° \\ & & \theta_2 &= 104.42° \end{aligned}$$

La magnitud es 11.52 m y un ángulo de −75.58° ya que el vector se encuentra claramente en cuarto cuadrante.

Ejemplo 2.10 (Suma de múltiples vectores)**.** Tomado de la discusión D2/5. Dados los vectores: $\vec{A} = \hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 5\,\hat{k}$; $\vec{B} = -5\,\hat{\imath} + 10\,\hat{\jmath}$; $\vec{C} = 20\,\hat{k}$. Obtener:
a) El módulo de cada uno de ellos
b) Los vectores: $\vec{X} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$;$\vec{Y} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$
c) $\vec{R} = 3\vec{A} - 4\left(\vec{B} + \vec{C}\right)$

SOLUCIÓN

a) Aplicando la fórmula para la magnitud obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1^2+2^2+5^2} & B &= \sqrt{(-5)^2+10^2} & C &= \sqrt{20^2} \\ &= \sqrt{30} & &= 5\sqrt{5} & &= 20 \\ A &= 5.477 & B &= 11.180 & C &= 20 \end{aligned}$$

b) Escribimos los vectores en su notación de vectores unitarios en una columnas cuidando el orden de los componentes

$$\begin{array}{rl} \vec{A} & = \ 1\hat{\imath} + \ 2\hat{\jmath} + 5\hat{k} \\ \vec{B} & = -5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} \\ \vec{C} & = \ 0\hat{\imath} + \ 0\hat{\jmath} + 20\hat{k} \\ \hline \vec{X} & = -4\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 25\hat{k} \end{array}$$

Repetimos el cálculo para $\vec{Y}$con el cuidado de cambiar los signos del vector $\vec{B}$

$$\begin{array}{rl} \vec{A} & = \ 1\hat{\imath} + \ 2\hat{\jmath} + 5\hat{k} \\ -\vec{B} & = \ 5\hat{\imath} - 10\hat{\jmath} \\ \vec{C} & = \ 0\hat{\imath} + \ 0\hat{\jmath} + 20\hat{k} \\ \hline \vec{Y} & = 6\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 25\hat{k} \end{array}$$

c) Para este cálculo es útil utilizar las propiedas distributivas de los escalar en vectores

$$\vec{R} = 3\vec{A} - 4\left(\vec{B} + \vec{C}\right)$$
$$\vec{R} = 3\vec{A} - 4\vec{B} - 4\vec{C}$$

escribiendo los vectores en notación unitaria y en columnas obtenemos

$$\begin{array}{rl} 3\vec{A} & = \ 3\hat{\imath} + \ 6\hat{\jmath} + 15\hat{k} \\ -4\vec{B} & = \ 20\hat{\imath} - 40\hat{\jmath} \\ -4\vec{C} & = \ 0\hat{\imath} + \ 0\hat{\jmath} - 80\hat{k} \\ \hline \vec{Y} & = 23\hat{\imath} - 34\hat{\jmath} - 65\hat{k} \end{array}$$

Esta forma de calcular se parece mucho a las tablas anteriores con la diferencia que la notación es un poco más eficiente.

Ejemplo 2.11 (Expresión vectorial)**.** Suponga que los siguientes vectores de fuerza son conocidos $\vec{F}_1 = (4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})\ N$, $\vec{F}_2 = (-7\hat{\imath} + 8\hat{\jmath})\ N$, $\vec{F}_3 = (-3\hat{\imath} - 13\hat{\jmath})\ N$, $F_4 = (14\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})\ N$, $\vec{F}_5 = -9\hat{\jmath}\,N$. Determine el vector resultante de la siguiente expresión algebráica: $\vec{R} = 2\cdot\vec{F}_1 - 3\cdot\vec{F}_2 + 10\cdot\vec{F}_3 + 0.5\cdot\vec{F}_4 - \vec{F}_5$

SOLUCIÓN

Se escriben las expresiones en una forma eficiente para sumar, alineando las $\hat{\imath}$ y las $\hat{\jmath}$ como si fuesen coeficientes algebraicos. Nótese que al multiplicar un escalar por un vector, es necesario multiplicar cada componente por ese factor. (Ley distributiva del álgebra)

$$\begin{aligned}
2\cdot\vec{F}_1 &= 8\,\hat{\imath} - 6\,\hat{\jmath} \quad N\\
-3\cdot\vec{F}_2 &= 21\,\hat{\imath} - 24\,\hat{\jmath} \quad N\\
10\cdot\vec{F}_3 &= -30\,\hat{\imath} - 130\,\hat{\jmath} \quad N\\
0.5\cdot\vec{F}_4 &= 7\,\hat{\imath} + 2.5\,\hat{\jmath} \quad N\\
-\vec{F}_5 &= 0\,\hat{\imath} + 9\,\hat{\jmath} \quad N\\
\sum_{i=1}^{5}\vec{F}_i &= 6\,\hat{\imath} - 148.5\,\hat{\jmath} \quad N
\end{aligned}$$

La notación es eficiente para cálculos de múltiples vectores en expresiones algebraicas.

Ejemplo 2.12 (Ejemplo de velero)**.** Tomado de la discusión D2/12. Una marinera en un velero pequeño se topa con vientos cambiantes. Navega 2.00 km al este, luego 3.5 km al sureste y después otro tramo en una dirección desconocida. Su posición final es de 5.80 km directamente al este del punto inicial. Determine la magnitud y dirección del tercer tramo. Dibuje el diagrama de suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

SOLUCIÓN

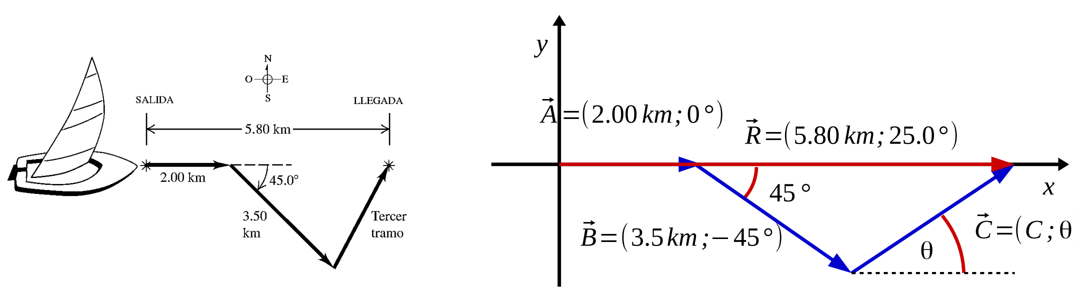

Figura 2.17.: ¿Que longitud y dirección siguió la marinera en el trayecto C?

1. Empezaremos calculando todos los vectores dados, sin embargo, por simplicidad escribiremos los vectores directamente en notación unitaria

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= 2.00\times\cos 0°\,\hat{\imath} + 2.00\times\text{sen }0°\,\hat{\jmath}\,km &&= 2.00\,\hat{\imath}\,km\\
\vec{B} &= 3.50\times\cos -45°\,\hat{\imath} + 23.50\times\text{sen }-45°\,\hat{\jmath}\,km &&= 2.475\,\hat{\imath} - 2.475\,\hat{\jmath}\,km\\
\vec{C} &= C\cdot\cos\theta\,\hat{\imath} + C\cdot\sin\theta\,\hat{\jmath} &&= C_x\,\hat{\imath} + C_y\,\hat{\jmath}\\
\vec{R} &= 5.80\times\cos 0°\,\hat{\imath} + 5.80\times\text{sen }0°\,\hat{\jmath}\,km &&= 5.80\,\hat{\imath}\,km
\end{aligned}$$

2. Ahora encontramos la suma y el vector incógnito

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$
$$\vec{R} - \vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$$

escribiendolo en forma de columna, obtenemos

$$\begin{array}{rl} \vec{R} & = 5.80\,\hat{\imath}\; km \\ -\vec{A} & = -2.00\,\hat{\imath}\; km \\ -\vec{B} & = -2.475\,\hat{\imath} + 2.475\,\hat{\jmath}\; km \\ \hline \vec{C} & = 1.325\,\hat{\imath} + 2.475\,\hat{\jmath}\; km \end{array}$$

Para su magnitud y dirección tenemos

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \\ &= \sqrt{1.325^2 + 2.475^2}\; km \\ R &= 2.81\; km \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \tfrac{C_y}{C_x} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{+2.475\,\cancel{m}}{1.325\,\cancel{m}}\right) \\ \theta_1 &= 61.84^\circ \\ \theta_2 &= 241.84^\circ \end{aligned}$$

donde el ángulo correcto es obviamente 61.84° ya que el vector $\vec{C}$ se encuentra en el primer cuadrante.

Ejemplo 2.13 (Vectores unitarios)**.** . Tomado de la discusion D2/14. El vector $\vec{A}$ tiene componentes x, y y z de 10.00, 12.00 y −5.00 unidades, respectivamente.
a) Calcule el vector unitario de $\hat{A}$
b) Obtenga una expresión en notación vectores unitarios para un vector $\vec{B}$ que tenga tres veces la longitud de $\vec{A}$ y que apunte en la dirección opuesta a la dirección de $\vec{A}$.

Solución
a) Por definición del vector unitario necesitamos dividir el vector entre su magnitud(ecuación 2.3). Por lo tanto lo primero que hay que calcular es la magnitud del vector. Utilizando el Pitágoras extendido

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \\ &= \sqrt{10^2 + 12^2 + 5^2} \\ A &= 16.40 \end{aligned}$$

el vector unitario será entonces

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\vec{A}}{A} \\ &= \frac{10\,\hat{\imath} + 12\,\hat{\jmath} - 5\,\hat{k}}{16.40} \\ \hat{A} &= 0.6098\,\hat{\imath} + 0.7317\,\hat{\jmath} - 0.3049\,\hat{k} \end{aligned}$$