UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS.

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02,2020.

Semana 6- Unidad 2: Matrices y determinantes.

Sesión 2.

Aplicación del teorema de Rouche-Frobenius para la solución de un SEL.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sea compatible (que tenga solución) es que el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas (matriz A) sea igual al rango de la matriz ampliada con los términos independientes (matriz A^*). Es decir: $rang(A) = rang(A^*)$

Si el valor común de los rangos coincide con el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado, es decir tiene solución única. Si, por el contrario, el valor de los rangos es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado, (o sea que tiene infinitas soluciones)

Ejemplo 1.

Considere el siguiente SEL

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Para hacer una discusión del sistema, primero determina la matriz del sistema y la matriz aumentada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Para calcular el rango de A, elija la siguiente submatriz cuadrada

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

y calcula su determinante

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$$

Como $|A_1| \neq 0$, y como el orden de esta submatriz es 2, entonces el rango de la matriz A es $rang(A) = 2$.

Para el rango de $(A|B)$, toma ahora la matriz

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

y calcule su determinante

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Como $|A^*| \neq 0$ y el orden de esta matriz es 3, entonces $rang(A) = 2 < rang(A^*) = 3$, concluimos que el SEL no tiene solución.

Ejemplo 2.

Ahora analice el siguiente SEL

$$\begin{cases} 3x + y + z = 8 \\ x + z = 4 \\ 3x + 2z = -1 \end{cases}$$

Determine la matriz del sistema y la matriz aumentada

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Tenemos que el $rang(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y el orden de la submatriz es 2.

Para la aumentada, como la primera fila es la suma de las dos últimas, descartamos entonces la fila 1, quedando

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Como estas filas son linealmente independientes, entonces $rang(A|B) = 2$.

Así $rang(A) = rang(A|B)$, y el SEL es compatible. Hay solución.

Pero como $rang(A) = rang(A|B) < 3$ (número de incógnitas del SEL), entonces el SEL es compatible indeterminado, o sea, tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 3.

Dado el SEL

$$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2z = -1 \end{cases}$$

Para discutir este sistema, determine la matriz del sistema y la matriz aumentada.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 1 \neq 0$ tenemos que $rang(A) = 3$. Luego para el rango de $(A|B)$ se debe elegir una submatriz cuadrada de mayor dimensión posible. Esta puede ser la misma matriz A.

De ahí que $rang(A) = rang(A|B) = n = 3$ (Incógnitas), por lo que el SEL es compatible determinado, es decir el SEL tiene solución única.

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Ejemplo 4.

El siguiente SEL es homogéneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Matricialmente el SEL homogéneo se expresa así: $AX = 0$.

Consecuentemente, la matriz aumentada del SEL tendrá la última columna de ceros, de modo que $rang(A) = rang(A|0)$.

De ahí que, según el teorema de Rouché- Frobenius, se puede afirmar que los SEL homogéneos siempre tienen solución. De todas formas, para llegar a esta conclusión no se necesita hacer uso de este teorema, ya que la suma de ceros es cero. Los SEL homogéneos siempre admiten la solución trivial

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$$

Así en un SEL homogéneo suceden dos casos.

1. Si $rang(A) = n$, el SEL es compatible determinado por lo que la única solución del sistema es la trivial.
2. $rang(A) < n$, el SEL es compatible indeterminado.

Ejemplo 5.

Considere el siguiente SEL homogéneo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

La matriz del sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

cuyo determinante es

$$|A| = -4 \neq 0$$

Entonces $rang(A) = 3$.

El SEL es compatible determinado, solamente admite la solución trivial:

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

Métodos matriciales para la solución de un SEL.

Método de Gauss o método de las operaciones elementales de fila

En este método de trata de obtener la forma escalonada reducida de la matriz aumentada del SEL mediante las tres operaciones elementales de fila.

Una vez tenemos la matriz en forma escalonada reducida, la obtención de la solución del SEL es inmediata. Aplicamos el teorema de Rouché- Frobenius para determinar el tipo de sistema.

Ejemplo 6.

Resuelve el SEL

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ -3x + 3y = 15 \end{cases}$$

Solución

La matriz aumentada del SEL es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 15 \end{array}\right)$$

Realizamos operaciones elementales de fila para obtener la matriz en forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 15 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{5} f_1 \to f_1^*}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ -3 & 3 & 15 \end{array}\right) \underset{-3f_1 + f_2 \to f_2^*}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & \frac{36}{5} \end{array}\right) \underset{\frac{5}{9} f_2 \to f_2^*}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{-\frac{2}{5} f_2 + f_1 \to f_1^*}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

La última matriz obtenida ya tiene la forma escalonada reducida y nos permite ver con rapidez los rangos de la matriz de coeficientes y la matriz aumentada.

Veamos

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \, , \quad rang \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) = 2.$$

Y por el teorema de Rouché- Frobenius el SEL es compatible determinado; y la solución única del SEL es $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$x = -1 \, , y = 4$$

Ejemplo 7.

Resuelve el SEL $\begin{cases} 5x + 2y = 2 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$

Solución.

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Realizamos operaciones elementales de fila para obtener la matriz en forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -1 & \frac{11}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & \frac{11}{5} & -1 & \frac{11}{5} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{5} f_1 \to f_1^*$

$-2 f_1 + f_2 \to f_2^*$
$-2 f_1 + f_3 \to f_3^*$

$5 f_2 \to f_2^*$

$-\frac{11}{5} f_2 + f_3 \to f_3^*$
$-\frac{2}{5} f_2 + f_1 \to f_1^*$

$\frac{1}{10} f_3 \to f_3^*$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{10} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{10} \end{array}\right)$$

$5 f_3 + f_2 \to f_2^*$
$-2 f_3 + f_1 \to f_1^*$

Esta última matriz está en forma escalonada reducida porque tenemos la matriz identidad. Al tener la matriz identidad, sabemos que se trata de un SEL compatible determinado y obtenemos de ella la única solución del sistema.

Ahora analicemos los rangos

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = rang \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{10} \end{array}\right)$$

Así, por el teorema de Rouché- Frobenius el SEL es compatible determinado, y la solución única del sistema es:

$$x = \frac{-1}{5} \;,\; y = \frac{3}{2} \;,\; z = \frac{11}{10}$$

Ejemplo 8. Sistema sin solución.

Encuentre la solución del SEL:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3x - 2y - z = 2 \\ 4x + 4y + 4z = 3 \end{cases}$$

Solución

La matriz aumentada del SEL es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Haga operaciones elementales de fila para obtener la matriz en forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{4} \\ 0 & -4 & -8 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1.5 \\ 0 & 1 & 2 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$3f_1 + f_2 \to f_2^*$

$-4f_1 + f_3 \to f_3^*$

$\frac{1}{4}f_2 \to f_2^*$

$4f_2 + f_3 \to f_3^*$

$-2f_2 + f_1 \to f_1^*$

Observe que la última fila de A se hizo cero, lo cual indica que **el sistema no tiene solución**.

Esto porque dicha fila puede ser escrita como

$$0x + 0y + 0z = 1$$

y esto es una igualdad imposible $0 \neq 1$.

Tomemos los rangos

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1.5 \\ 0 & 1 & 2 & 1.25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Por el teorema de Rouché- Frobenius, el SEL es incompatible, lo que significa que no tiene solución.

Nota: un SEL no tiene solución cuando alguna fila de A se convierte en ceros al hacer operaciones elementales de filas.

Ejemplo 9. Sistema con infinitas soluciones.

Resuelve el SEL siguiente: $\begin{cases} x + 3y + 2z = -5 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

Solución.

Escribe la matriz aumentada del SEL

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Aplique transformaciones elementales de fila para escalonar la matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -8 & -8 & 16 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -5 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-3f_1 + f_2 \to f_2^*$ $\qquad$ $-\frac{1}{8} f_2 \to f_2^*$ $\qquad$ $5f_2 + f_3 \to f_3^*$

$-2f_1 + f_3 \to f_3^*$

Calcule los rangos en la matriz escalonada final.

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad y \quad rang\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = 2$$

Y como $rang(A) = 2 = rang(A^*) < 3$ (número de incógnitas del sistema), el SEL es compatible indeterminado, es decir el sistema tiene infinitas soluciones.

En este punto $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Para encontrar dichas soluciones, escriba el SEL escalonado al que ha llegado y lo resuelve.

$$x + 3y + 2z = -5$$

$$y + z = -2$$

La variable z es secundaria, mientras que las variables x y y son principales. Entonces se toma a z como un parámetro.

Por tanto escriba $z = t$, donde t es un parámetro real, y despeja de abajo hacia arriba las incógnitas x y y en términos de t, obteniendo:

$$x + 3y = -5 - 2t$$

$$y = -2 - t$$

Sustituya el valor de y de la segunda ecuación en la primera tenemos:

$$x + 3(-2 - t) = -5 - 2t$$

$$x = -5 - 2t + 6 + 3t = t + 1$$

Se deduce entonces que estamos ante un SEL con infinitas soluciones de la forma:

$$x = 1 + t,\ y = -2 - t,\ z = t,$$

con t cualquier número real.

Si considera cada solución como una terna, vemos que es de la forma

$$(x, y, z) = (1 + t, -2 - 2t, t)$$

Algunas soluciones particulares son:

Si $t = 0 \rightarrow x = 1,\ y = -2$, y tenemos una solución: $x = 1, y = -2, z = 0$

Si $t = -1 \rightarrow x = 0$,$y = -1$ y obtenemos otra solución: $x = 0, y = -1, z = -1$

Podemos verificar cada solución reemplazando los valores de x, y y z en el SEL inicial.

Nota: Un sistema tiene infinitas soluciones cuando alguna fila de la matriz aumentada $A^* = (A|B)$ se hace cero al momento de aplicar operaciones elementales.

Método por la matriz inversa

Si sabemos calcular la matriz inversa (por cualquiera de los métodos estudiados: por la adjunta o por operaciones elementales de fila), y multiplicando matrices también es posible resolver un SEL que tenga igual número de ecuaciones que de incógnitas, y que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero.

Escriba el SEL en la forma matricial

$$AX = B$$

Resolviendo la ecuación matricial tendremos:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Es decir, la solución del SEL se encuentra multiplicando la inversa de la matriz de coeficientes por la matriz de términos independientes.

Nota: este método es aplicable si el sistema es cuadrado (igual número de ecuaciones que de incógnitas) y si la matriz A tiene inversa entonces existe una solución única. En caso contrario no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 10.

Resuelve el SEL haciendo uso de la matriz inversa.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 10 \\ 4x + 3y + 4z = 21 \\ 2x + y + 2z = 9 \end{cases}$$

Solución.

Dado que es cuadrado si puede aplicarse este método. Escriba las matrices de coeficientes del sistema y la correspondiente matriz aumentada.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 & 21 \\ 2 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

ya que $\det(A) = 2 \neq 0$ entonces la matriz inversa de A existe.

Calcule su inversa por el método de la matriz adjunta.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

Entonces

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplique

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det(A)}$$

Obtienes,

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -0.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Por tanto la matriz X de las incógnitas es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -0.5 & 2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 21 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

de donde se concluye que la solución única del SEL es : $x = 1\,,\ y = 3\,, z = 2$

Ejemplo 11.

Resuelve el sistema de ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ \quad y + 2z = 8 \\ \quad y + 3z = 10 \end{cases}$$

Solución

Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ por medio de operaciones elementales de fila.

Escribe la siguiente matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$-2f_2 + f_1 \to f_1^* \qquad -2f_3 + f_2 \to f_2^*$$

$$-f_2 + f_3 \to f_3^* \qquad f_3 + f_1 \to f_1^*$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Despeje la matriz de incógnitas X de $A^{-1}B = X$

$$A^{-1} \quad * \quad B \qquad = \qquad X$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 20 - 24 + 10 \\ 0 + 24 - 20 \\ 0 - 8 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

La solución es entonces:

$$x = 6, \; y = 4, \; z = 2$$

Compruebe que estos valores satisfacen el SEL.

Método por la Regla de Cramer

Se dice que un SEL es un sistema de Crámer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es diferente de cero.

Los sistemas de Cramer son siempre compatibles determinados. Es decir siempre tendrán solución unica

En un sistema de Cramer cada incógnita se puede obtener mediante el cociente de dos determinantes, en donde el numerador es el determinante de la matriz de los coeficientes en el que se ha sustituido la columna que corresponde a la incógnita que queremos encontrar por la columna de los términos independientes; y el denominador es el determinante de la matriz de los coeficientes.

Sea el sistema de Cramer siguiente de n ecuaciones con n incógnitas, escrito matricialmente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}$$

Entonces la solución de este sistema es:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ b_n & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} & b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Y así sucesivamente,

$$x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Donde $|A|$ es el determinante de la matriz de los coeficientes.

Ejemplo 12.

Resuelve el siguiente SEL por medio de la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ \quad y + 2z = 8 \\ \quad y + 3z = 10 \end{cases}$$

Solución.

Primeramente calcule el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Las soluciones de este SEL son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{20} & 2 & 3 \\ \mathbf{8} & 1 & 2 \\ \mathbf{10} & 1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 10 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-(-6)}{1} = 6$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{20} & 3 \\ 0 & \mathbf{8} & 2 \\ 0 & \mathbf{10} & 3 \end{vmatrix}}{1} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}}{1} = 4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{20} \\ 0 & 1 & \mathbf{8} \\ 0 & 1 & \mathbf{10} \end{vmatrix}}{1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}}{1} = 2$$

La solución del SEL es $x = 6, y = 4, z = 2$

Observe que es la misma solución del ejemplo anterior. Además observe que en negro se coloca la columna de términos independientes.

Problemas de aplicación que conducen a un sistema de ecuaciones lineales

En primer lugar, antes de comenzar a practicar este tipo de problemas debemos tener en cuenta una serie de consejos que nos serán útiles:

Para resolver un problema de este tipo debemos:

- Antes de comenzar, realizar una lectura detenida del mismo. Familiarizarnos con el problema es clave antes de empezar.
- Una vez hemos entendido el contexto y el tipo de problema que se nos plantea, debemos realizar el planteamiento del mismo.
- Si es necesario, realizaremos un dibujo, una tabla, o una representación de lo expuesto. Una vez hecho, intentamos identificar la incógnita y los datos que aporta el problema.
- Para plantear las ecuaciones volveremos al problema y debemos "traducir" el mismo a una expresión algebraica.
- En este tipo de problemas con más de una incógnita debemos encontrar tantas ecuaciones como incógnitas se nos presenten. Es decir, si tenemos dos incógnitas debemos encontrar dos ecuaciones, si tenemos tres, tres ecuaciones.
- El siguiente paso es resolver el sistema de ecuaciones por los métodos matriciales estudiados.
- Por .último y <u>muy importante</u>, debemos interpretar la solución.

Ejemplo 13.

Si a los dos términos de una fracción se añade 3, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$ .Halle la fracción.

Solución

Sea x el numerador y y el denominador.

Entonces $\frac{x}{y}$ es la fracción.

Añadiendo 3 a cada término, la fracción se convierte en $\frac{x+3}{y+3}$ y como el valor de esta fracción es $\frac{1}{2}$; luego $\frac{x+3}{y+3}=\frac{1}{2}$.

Restando 1 a cada término, la fracción se convierte en $\frac{x-1}{y-1}$, y según las condiciones del problema el valor de esta fracción es $\frac{1}{3}$, entonces $\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{3}$.

Al reunir las dos ecuaciones tenemos el siguiente sistema

$$\frac{x+3}{y+3}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{3}$$

Quitando denominadores y trasponiendo términos tenemos:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por Cramer se tendrá.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad |A| = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{5}{1} = 5, \rightarrow \; x = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{13}{1} = 13, \rightarrow \; y = 13$$

Comprobación:

$$\frac{5+3}{13+3} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{5-1}{13-1} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 14.

El departamento de innovación de una multinacional farmacéutica recibió una donación de \$ $1_1360{,}000$ para realizar investigaciones sobre un nuevo fármaco.
El dinero se dividió entre 100 científicos de tres grupos de investigación: A, B, C.
Cada científico del grupo A recibió \$ 20,000; cada científico del grupo B, \$8,000 y cada uno del grupo C, \$ 10,000. El grupo de investigación B recibió la quinta parte de los fondos de del grupo A. ¿Cuántos científicos pertenecen a cada grupo?

Solución

Sean x , y y z el número de científicos de los grupos A,B y C, respectivamente.
El total de científicos es $x + y + z$, por tanto $\boldsymbol{x + y + z = 100}$.
Cada científico del grupo A recibe \$ 20,000. Como el grupo A está formado de x científicos, el dinero que recibe el grupo A en su totalidad es \$$\boldsymbol{20,000x}$.Del mismo modo, el grupo B recibe **\$** $\boldsymbol{8,000y}$, & el grupo C, **\$**$\boldsymbol{10,000z}$.
El total que recebe cada grupo es la cantidad total de dinero:

$$\boldsymbol{20,000x + 8.000y + 10,000z = 1_1360,000}.$$

Por otra parte, el problema dice que el grupo B recibe la quinta parte del dinero que recibe el grupo A. Es decir $\boldsymbol{8,000y = \frac{20,000x}{5}}$
Entonces el SEL es el siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 20{,}000x + 8{,}000y + 10{,}000z = 1360{,}000 \\ 8{,}000y = \dfrac{20{,}000x}{5} \end{cases}$$

A efecto de simplificar los cálculos en la obtención de las soluciones dividimos por 1000 la ec 2 y la ec 3. Escribimos el sistema en la forma siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 20x+8y+10z=1{,}360 \\ 20x-40y=0 \end{cases}$$

Resolviendo el SEL por la regla de Cramer tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 20 & 8 & 10 \\ 20 & -40 & 0 \end{vmatrix} = 200-800-160+400=-360$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \mathbf{100} & 1 & 1 \\ \mathbf{1,360} & 8 & 10 \\ \mathbf{0} & -40 & 0 \end{vmatrix}}{-360}=\frac{\begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 360 & -2 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \end{vmatrix}}{-360}=\frac{\begin{vmatrix} 360 & -2 \\ 0 & -40 \end{vmatrix}}{-360}=\frac{-14{,}400}{-360}=40$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{100} & 1 \\ 20 & \mathbf{1,360} & 10 \\ 20 & \mathbf{0} & 0 \end{vmatrix}}{-360}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 10 & 360 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-360}=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 360 \\ 20 & 0 \end{vmatrix}}{-360}=\frac{-7{,}200}{-360}=20$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{100} \\ 20 & 8 & \mathbf{1,360} \\ 20 & -40 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{-360}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 0 & -12 & -640 \\ 0 & -60 & -2{,}000 \end{vmatrix}}{-360}=\frac{\begin{vmatrix} -12 & -640 \\ -60 & -2{,}000 \end{vmatrix}}{-360}=\frac{-14{,}400}{-360}=40$$

La solución del problema es:

40 científicos pertenecen al grupo A

20 al grupo B

40 al grupo C

Usted puede verificar que en efecto ésta es la respuesta al problema sustituyendo las soluciones encontradas en las tres ecuaciones del SEL.

Ejercicios.

1. Determine el tipo de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el teorema de Rouché-Frobenius.

$$a)\begin{cases} 5x-2y+6z=-7 \\ x+y+3z=2 \\ 2x+y=0 \end{cases},\quad b)\begin{cases} 2x-3y-5z=4 \\ x+7y+6z=-7 \\ 7x-2y-9z=6 \end{cases},\quad c)\begin{cases} x+y=1 \\ -x+y+z=2 \\ 2y+z=3 \end{cases},$$

$$d)\begin{cases} 2w+3x-4y-z=3 \\ 5w+x+y+2z=1 \\ w-2x+3y-z=0 \\ w-2x-y-9z=5 \end{cases},\quad e)\begin{cases} x+4y-3z=5 \\ 2x+y+5z=2 \\ 3x-2y-4z=4 \\ 4x-5y+4z=-3 \end{cases}$$

2. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, si es posible, por medio de la matriz inversa.

$$a)\begin{cases} x+4y=3 \\ 3x-2y=-5 \end{cases},\quad b)\begin{cases} 2x+4y=1 \\ -3x-6y=5 \end{cases},\quad c)\begin{cases} 2x+y+6z=3 \\ x-y+4z=1 \\ 3x+2y-2z=2 \end{cases},\quad d)\begin{cases} 2x+y+4z=1 \\ 3x+2y+5z=2 \\ -y+z=3 \end{cases}$$

3. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de Gauss.

$$a)\begin{cases} 2x+3y=2 \\ x-2y=8 \end{cases},\quad b)\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+y-4z=3 \\ -3x+4y-z=-2 \end{cases},c)\begin{cases} x-y+z=3 \\ -3x+2y+z=2 \\ -2x+y+2z=1 \end{cases},d)\begin{cases} -2x+3y+4z=-1 \\ x-2z+2w=1 \\ y+z-w=0 \\ 3x+y-2z-w=3 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x+3y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ x-2y-4z=0 \end{cases},\quad f)\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+y-2z=2 \\ 3x-z=3 \end{cases}$$

4. Resuelva los sistemas mediante la regla de Cramer.

$$a)\begin{cases} 7x+4y=8 \\ 7x+4y=6 \end{cases},\quad b)\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases},\quad c)\begin{cases} 2x+y+4z=12 \\ x+2y+2z=9 \\ 3x-3y-2z=1 \end{cases},\quad d)\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y-z=0, \\ x-y+z=2 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} x+2y+3w=0 \\ y+z+w=1 \\ y+w=2 \\ x+2y+2w=3 \end{cases}$$

5. Resuelva usando matrices los siguientes problemas.

a) El dígito de las decenas de un número de dos dígitos es 2 más que el doble del dígito de las unidades. El número con dígitos invertidos es 45 menos que el número original. Encuentre el número original.

b) Un hotel tiene habitaciones dobles y sencillas. En total hay 50 habitaciones y 7 camas. ¿Cuántas habitaciones hay de cada tipo?

c) El perímetro de un rectángulo es 64 cm y la diferencia entre las medidas de la base y la altura es 6 cm. Calcule las dimensiones de dicho rectángulo.

d) Una compañía fabrica dos clases de refracciones para máquina. La primera requiere 3 horas de mano de obra, 4 libras de metal y puede producirse por \$20.40. La segunda toma 4 horas de mano de obra, 3.5 libras de metal y su producción cuesta \$22.8. ¿Cuál es el costo de la mano de hora por hora y el costo de metal por libra?

e) En un triángulo ΔABC, el ángulo A es 100° menor que la suma de los ángulos B y C, y el ángulo C es 40° menor que el doble del ángulo B. Calcule el valor de cada ángulo.

f) Una empresa fabrica 3 tipos de martillo bueno, mejor y calidad extra. El costo de fabricación de cada tipo es \$4, \$6, y \$7, respectivamente, y se venden a \$6, \$9, y \$12 cada uno. Cada día, el costo de fabricación de 100 martillos es \$520, y el ingreso por ventas es \$810. ¿Cuántos martillos de cada tipo se fabrican?