MATERIAL DE REFUERZO DE LA CLASE DE LA SESIÓN 1- SEMANA 1.

EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1.

La ecuación polinomial P definida como

$P(x) = (x+3)^3\ (x+1)^2\ (x^2+9) = 0$ es de grado 7, por lo que P tiene 7 raíces; estas son:

$$-3, -3, -3, -1, -1, 3i \quad y \quad -3i$$

El número -3 es una raíz de multiplicidad tres, y -1 es una raíz de multiplicidad dos.

Ejemplo 2.

Encuentra el polinomio $P(x)$ de grado cuatro con coeficientes reales si P tiene a $1-i$ y $-2i$ como raíces.

Solución sabemos que si $1-i$ y $-2i$ son raíces de P, entonces sus conjugados $1+i$ y $2i$ también son raíces de P. Por tanto,

$$P(x) = [x-(1-i)][x-(1+i)][x-(-2i)][x-2i]$$

$$= x^2 - x(1+i) - x(1-i) + (1-i)(1+i) + x^2 - 2xi + 2xi + 4$$

$$= (x^2 - x - xi - x + xi + 1 + 1)(x^2+4)$$

$$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4)$$

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$$

Ejemplo 3.

Para cada una de las siguientes funciones, determina las raíces reales de P , y si es posible determinar las raíces imaginarias. Traza las gráficas de las funciones y verifica la información.

$a)\ P(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15 \quad b)\ P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Solución

a) Las raíces reales posibles son factores de -15. Estos divisores son $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

Se traza la gráfica de P, la cual se muestra en la Figura 1.

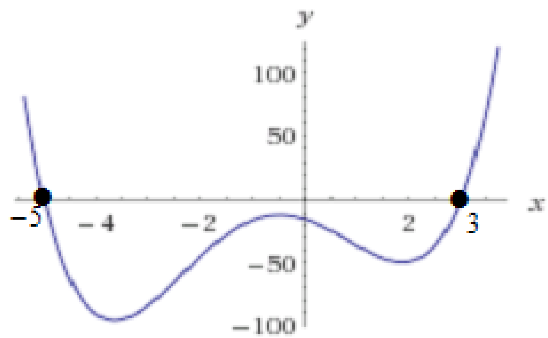


Figura 1.

De la gráfica, las únicas raíces reales posibles son -5 y 3. Si calculamos $P(-5)$ y $P(3)$ en cada caso obtenemos 0. Por tanto -5 y 3 son raíces reales de P

Corroboremos lo anterior mediante división sintética.

1	3	- 12	- 13		- 15	- 5
	- 5	10	10		15	
1	- 2	- 2	- 3	3	0	
	3	3	3			
1	1	1	0			

De esta manera, $P(x) = (x+5)\,(x-3)(x^2+x+1)$

Si se iguala a 0 el factor cuadrático y se resuelve la ecuación mediante la fórmula cuadrática se tiene:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, las cuatro raíces de P son $-5, 3, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \ y \ \ \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

Comenzamos factorizando $P(x)$

$$P(x) = (x^3 - 2x^2) + (x - 2) = x^2(x - 2) + (x - 2)$$
$$= (x - 2)(x^2 + 1)$$

Igualando $P(x)$ a cero tenemos $(x - 2)(x^2 + 1) = 0$, y teniendo en cuenta que para que el producto de dos factores sea 0 basta que lo sea uno de ellos, se tiene

$$x - 2 = 0 \quad \text{O bien} \quad x^2 + 1 = 0$$

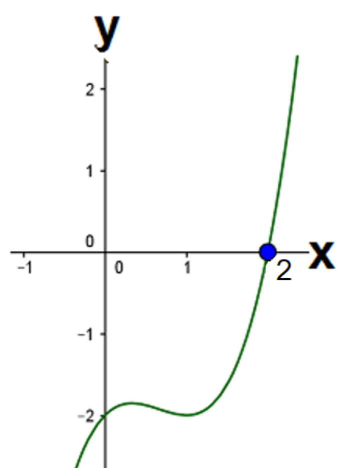
Resolviendo $x - 2 = 0$ se obtiene $x = 2$

Considerando la solución de $x^2 + 1 = 0$, se obtiene $x^2 = -1$, de donde $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Así, las raíces de la ecuación son $2, i \ y \ -i$

La gráfica $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ se muestra en la Figura 2.

Figura 2



De la gráfica 2, vemos que la única raíz real es 2. Si calculamos $P(2)$ obtenemos $P(2) = (2)^3 \ - 2(2)^2 \ + 2 - 2 = 8 - 8 + 2 - 2 = 0$, lo cual garantiza que 2 es raíz real de P .

Mediante división sintética comprobemos que 2 es raíz real de P.

1	- 2	1	- 2	2
	2	0	2	
1	0	1	0	

Y escribimos $P(x) = (x - 2)(x^2 + 1)$ tal como se había factorizado antes.

Ejemplo 4.

Resuelva las ecuaciones polinomiales siguientes:

$a) x^6 + 20x^4 + 64x^2 = 0$

$b)\ x^4 + 30x^2 + 225 = 0$

$c)\ x^4 + 4x^2 + 16 = 0$

$d)\ 2x^5 - 7x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0$

Solución

$a)\ x^6 + 20x^4 + 64x^2 = 0$

$x^6 + 20x^4 + 64x^2 = x^2(x^4 + 20x^2 + 64) = 0$

De donde $x^2 = 0 \quad y \quad x^4 + 20x^2 + 64 = 0$

Si $x^2 = 0$ entonces $x_1 = 0 \;\; y \;\; x_2 = 0$

Si $x^4 + 20x^2 + 64 = 0$ entonces $(x^2 + 4)(x^2 + 16) = 0$

Para $x^2 + 4 = 0$ tenemos $x^2 = -4 \rightarrow x = \pm 2i$

Para $x^2 + 16 = 0$ tenemos $x^2 = -16 \rightarrow x = \pm 4i$

Las seis raíces de a) son:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 2i, x_4 = -2i, x_5 = 4i,\ x_6 = -4i$

$b)\ x^4 + 30x^2 + 225 = 0$

Factorizando tenemos: $(x^2 + 15)(x^2 + 15) = 0$

Igualando a cero cada factor $x^2 + 15 = 0 \ \rightarrow\ x^2 = -15 \ \rightarrow x = \pm\sqrt{15}i$

$$x^2 + 15 = 0 \ \rightarrow x^2 = -15 \ \rightarrow x = \pm\sqrt{15}i$$

Las cuatro raíces son $x_1 = \sqrt{15}i, x_2 = -\sqrt{15}i, x_3 = \sqrt{15}i, x_4 = -\sqrt{15}$i

Las raíces $x_1 \;\; y \;\; x_3$ son iguales y se dice que tienen multiplicidad dos. Lo mismo ocurre con las raíces $x_2 \;\; y \;\; x_4$.

$c)\ x^4 + 4x^2 + 16 = 0$

Manipulando algebraicamente la ecuación polinomial dada obtenemos:

$$x^4 + 4x^2 + 16 = (x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2 = 0$$

$$= (x^2 + 4)^2 \; - 4x^2 = 0$$

$$= [(x^2 + 4) + 2x][(x^2 + 4) - 2x] = 0$$

Igualando cada factor a cero:

$$x^2 + 2x + 4 = 0 \quad y \quad x^2 - 2x + 4 = 0$$

Resolviendo por la fórmula general cada ecuación cuadrática, tenemos

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2}$$

Haciendo lo mismo para la segunda ecuación, se tiene

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 \; - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2}$$

Las cuatro raíces complejas son:

$x_1 = -1 + \sqrt{3}i, x_2 = -1 - \sqrt{3}i, x_3 = 1 + \sqrt{3}$i ,$x_4 = 1 - \sqrt{3}i$

$d) 2\, x^5 - 7x^4 + 10x^3 - 5x^2 - 2x + 2 = 0$

Para resolver este ejercicio haremos uso de la división sintética.

Escriba primeramente los coeficientes del polinomio: $2, -7, 10, -5, -2, 2$

Denota por p a los divisores del término constante 2.

Denota por q a los divisores del coeficiente principal $2x^5$, es decir 2

Comienza encontrando los divisores.

Divisores de p (divisores de 2) $= \pm 1, \pm 2$

Divisores de q (divisores de 2) $= \pm 1, \pm 2$

Entonces los valores posibles de

$\frac{p}{q} = \frac{divisores\ \ de\ \ 2}{divisores\ \ de\ \ 2} = \pm 1,\ \pm \frac{1}{2},\ \pm 2 =$ posibles raíces reales del polinomio.

Ahora verifiquemos por división sintética, cuáles de estas posibles raíces lo son realmente. Sustituimos una por una en el polinomio hasta que determinemos una que haga a $P(x) = 0$

Comenzamos a aplicar la división sintética

Probemos con $x = 1$

2	-7	10	-5	-2	2	1
	2	-5	5	0	-2	
2	-5	5	0	-2	0	

Como el residuo obtenido es **0**, entonces 1 es una raíz del polinomio.

Trabajaremos ahora con los coeficientes del polinomio rebajado.

2	-5	5	0	-2	1
	2	-3	2	2	
2	-3	2	2	0	

Hemos probado nuevamente con 1 y obtenido residuo **0**, entonces la raíz 1 se repite (raíz de multiplicidad dos).

Probemos con $\frac{-1}{2}$ utilizando los últimos coeficientes rebajados.

2	-3	2	2	-1/2
	-1	2	-2	
2	-4	4	0	

$\frac{-1}{2}$ es otra raíz.

Por último, formamos una ecuación de segundo grado con los últimos coeficientes rebajados.

$$2x^2 - 4x + 4 = 0$$

Como el discriminante $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(4) = 16 - 32 = -16 < 0$, entonces ya no hay raíces reales. Las dos raíces que faltan son complejas.

Apliquemos la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(4)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} \pm \frac{4i}{2}$$

Las cinco raíces son: $x_1 = 1, x_2 = 1,\ x_3 = -\frac{1}{2}, x_4 = 2 + 2i, x_5 = 2 - 2i$

Ejemplo 5.

Resuelva la ecuación $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0$ sabiendo que $1 - i$ es una de las raíces del polinomio asociado.

Solución

Por división sintética tenemos

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & -4 & 10 & -4 & 1-i \\ & 2-2i & -1-3i & -8+2i & 4 & \\ \hline 2 & 1-2i & -5-3i & 2+2i & 0 & \end{array}$$

Como la raíz conjugada de $1 - i$ también es raíz, entonces hacemos uso de la división sintética nuevamente.

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1-2i & -5-3i & 2+2i & 1+i \\ & 2+2i & 3+3i & -2-2i & \\ \hline 2 & 3 & -2 & 0 & \end{array}$$

Con los números 2 3 y -2, formamos la ecuación $2x^2 + 3x - 2 = 0$ y la resolvemos por factorización:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow (2x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}\ y\ x = -2$$

Así las cuatro raíces son $x_1 = 1 - i,\ x_2 = 1 + i, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -2$.