CAMBIO DE LIMITES

¿CUÁNDO SE APLICA?

Cuando se nos den ejercicios del teorema fundamental del calculo y para resolver las integrales tenga que aplicarse los métodos cambio de variable o sustitución trigonométrica

¿CÓMO SE APLICA?

Se cambia los limites de integración de la integral definida a valores de **u** en vez de valores de **x**.

$$u = g(x)$$
, Entonces

$$\int_{a}^{b} f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

Si
$$x = -1$$

 $-1 = 2 \operatorname{sen} \theta$
 $-\frac{1}{2} = \operatorname{sen} \theta$
 $\sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \theta$
Si $x = \sqrt{3}$
 $\sqrt{3} = 2 \operatorname{sen} \theta$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} \theta$
 $\sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) = \theta$
 $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \theta$
 $\frac{\pi}{3} = \theta$

Si
$$x = \sqrt{3}$$

 $\sqrt{3} = 2 \operatorname{sen} \theta$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} \theta$
 $\sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$
 $\frac{\pi}{3} = \theta$

$$x = 2 sen\theta$$

$$dx = 2 cos\theta d\theta$$

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - (2 sen\theta)^2}$$

$$= \sqrt{4 - 4 sen^2 \theta}$$

$$= \sqrt{4(1 - sen^2 \theta)}$$

$$= \sqrt{4 cos^2 \theta}$$

$$= 2 cos \theta$$

Cambio de variable

Encontramos los nuevos limites de la integral

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{4sen^2\theta}{2cos\theta} \ 2cos\theta d\theta$$

Sustituyendo la nueva variable y los nuevos limites

$$=4\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} sen^2\theta \ d\theta$$

$$= \frac{4}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 2 \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

Aplicando la identidad
$$sen^2\theta = \frac{1-cos2\theta}{2}$$

$$= [2\theta - sen2\theta]^{\frac{\pi}{3}}_{-\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left[2\frac{\pi}{3} - sen2\frac{\pi}{3}\right] - \left[2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - sen2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\frac{\pi}{3}-sen\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+sen(-\frac{\pi}{3})$$

$$= \pi - 0.866 - 0.866$$

= 1.409

EJEMPLO

Aplicamos el cambio de variable

$$U=\sqrt{2x+1}$$

$$u^2 = 2x+1$$

$$\frac{u^2-1}{2} = x$$

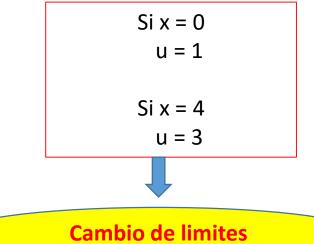
$$2udu = 2dx$$

$$\int_{1}^{3} \frac{\left(\frac{u^{2}-1}{2}\right)}{u} u du$$

$$\int_{1}^{3} \frac{(u^{2}-1)^{2}}{4} du$$

$$\int_{1}^{3} (u^{4}-2u^{2}+1) du$$

$$\int_{0}^{4} \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}} dx$$



Universidad Don Bosco. Departamento de ciencias básicas

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{u^5}{5} - \frac{2}{3} u^3 + u \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{u^5}{20} - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{4}u \right]_1^3$$

$$= \left[\frac{(3)^5}{20} - \frac{1}{6}(3)^3 + \frac{1}{4}(3) \right] - \left[\frac{(1)^5}{20} - \frac{1}{6}(1)^3 + \frac{1}{4}(1) \right]$$

$$= \left[\frac{243}{20} - \frac{9}{2} + \frac{3}{4}\right] - \left[\frac{1}{20} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right]$$

$$=\frac{42}{5}-\frac{2}{15}$$

$$=\frac{124}{15}$$

Aplicación Teorema fundamental del calculo