UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 8. Unidad 3: Geometría Analítica

Sesión 2: La parábola: definición, ecuaciones, gráficas y ejercicios

LA PARÁBOLA

Se denomina **parábola** al lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta dada, llamada directriz, y de un punto exterior a ella, llamado foco.

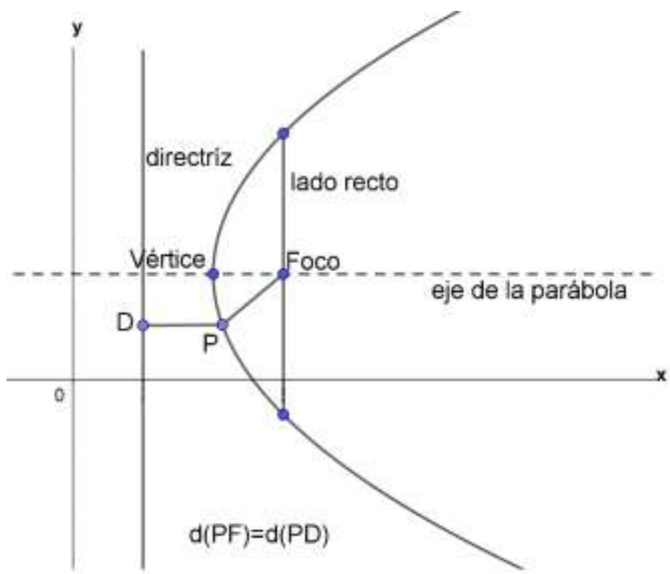


Figura 1

La Figura 1 muestra algunas rectas, puntos y segmentos asociados con una parábola, que son básicos para su descripción, y son:

- ✓ **Vértice** (V). Punto de la parábola ubicado en el eje focal o eje de simetría. Es el punto donde el eje corta a la parábola.
- ✓ **Eje focal o eje de simetría**. Línea recta que divide simétricamente a la parábola en dos brazos y pasa por el vértice y el foco.
- ✓ **Foco (F)**. Punto fijo de referencia que no pertenece a la parábola y que se ubica en el eje focal al interior de los brazos de la misma y a una distancia $\boldsymbol{p}$ del vértice.
- ✓ **Directriz (D)**. Línea recta perpendicular al eje focal ubicada a una distancia $\boldsymbol{p}$ del vértice y fuera de los brazos de la parábola.
- ✓ **Distancia focal ($\boldsymbol{p}$).** Parámetro que indica la magnitud de la distancia entre vértice y foco, así como entre vértice y directriz (ambas distancias son iguales por definición de parábola).
- ✓ **Lado recto (LR).** Segmento de recta comprendido por la parábola que pasa por el foco y es paralelo a la directriz. Su longitud es siempre 4 veces la distancia focal $\boldsymbol{p}$. Lado recto = $|\boldsymbol{4p}|$

Parábolas con vértice en el origen

Estudiaremos la parábola en relación con el sistema de ejes coordenados cartesianos.

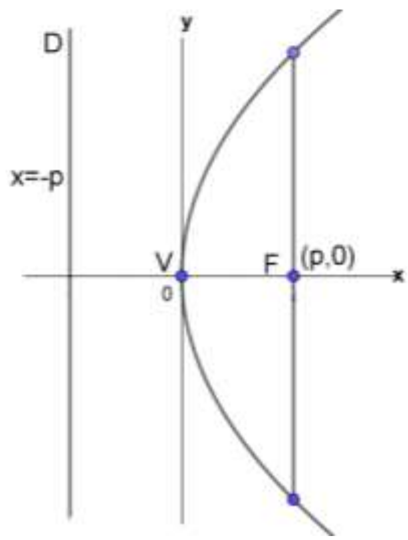
Llamaremos a una parábola horizontal o vertical, según que su eje de simetría esté en la posición horizontal o vertical.

S i una parábola es horizontal o vertical, y su vértice está en el origen, su ecuación toma la forma más sencilla:

$$y^2 = 4px \quad o \quad x^2 = 4py$$

Como toda parábola se abre hacia donde está el foco, las parábolas horizontales o verticales con vértice en (0,0), toman una de las cuatro posiciones siguientes:

Parábola horizontal



Eje horizontal

$$y^2 = 4px$$

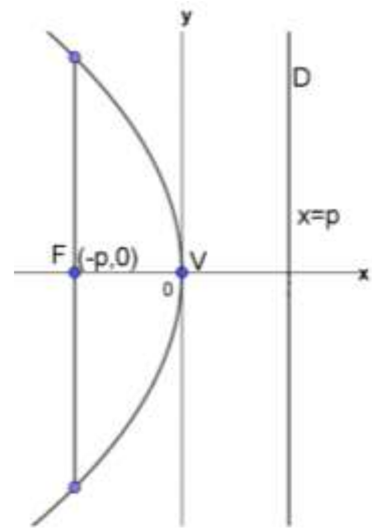
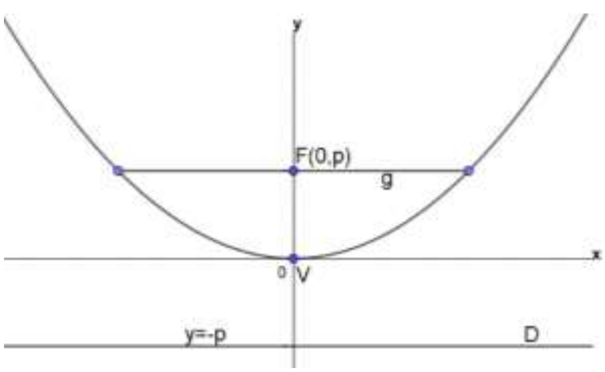
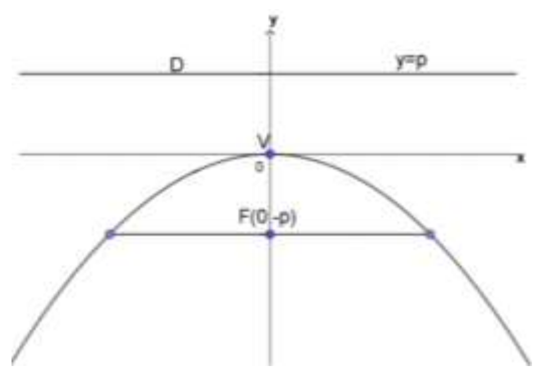


Figura 2

$p > 0$: abierta a la derecha $\qquad$ $p < 0$: abierta a la izquierda

Parábola vertical





Eje vertical

$p > 0$: abierta hacia arriba $\qquad x^2 = 4py \qquad$ $p < 0$: abierta hacia abajo

Figura 3

Ejemplo 1

Halla el foco, la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es $x^2 = 12y$.

Solución la ecuación $x^2 = 12y$ es de la forma $x^2 = 4py$

La parábola es vertical y se abre hacia arriba ya que $4p = 12 \rightarrow p = 3 > 0$.

Como $p = 3$ indica la distancia del vértice $(0,0)$ al foco, entonces las coordenadas del foco son $F(0,3)$, y la directriz es la recta $y = -p = -3$. La longitud del lado recto es $|4p| = |4(3)| = |12| = 12$.Los puntos A y B están cada uno a seis unidades de distancia del foco.

La gráfica de la parábola se muestra en la siguiente figura 4

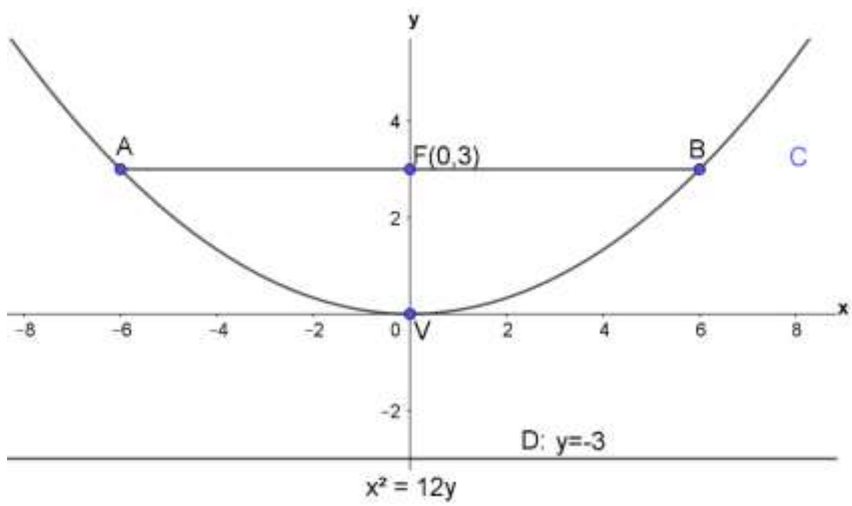


Figura 4

Deducción de la ecuación $y^2 = 4px$

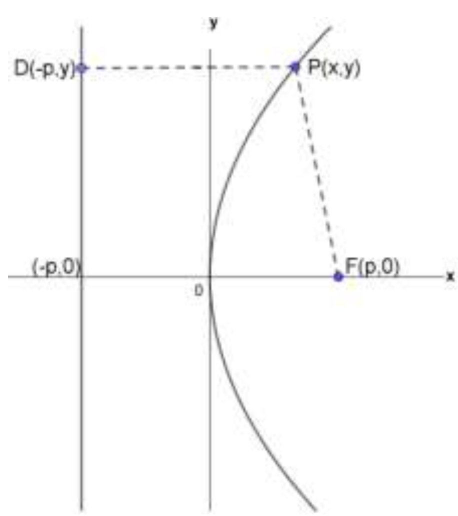


Figura 5

Por definición de parábola tenemos que $\overline{PD} = \overline{PF}$

El trazo $\overline{PD}$ nace en el punto $D(-p, y)$ y usando la fórmula de distancia entre dos puntos tenemos

$$\overline{PD} = \sqrt{(x-(-p))^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x+p)^2} \qquad (1)$$

El trazo $\overline{PF}$ nace en el punto $P(x, y)$ y termina en el punto $F(p, 0)$, y haciendo uso nuevamente de la distancia entre dos puntos, calculamos la distancia entre ellos.

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en la expresión $\overline{PD} = \overline{PF}$, resulta

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

Elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado y desarrollando tenemos

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2$$

Simplificando términos semejantes y reordenando la expresión, tenemos

$$y^2 = 4px$$

que es la ecuación de la parábola en su forma canónica.

Parábolas con vértice fuera del origen

Ahora analizaremos los casos en que se puede obtener la ecuación que describe una parábola cuyo vértice no coincide con el origen del sistema de ejes coordenados.

Cuando el vértice de la parábola se localiza en cualquier punto por ejemplo ubicado en las coordenadas (h, k) diferente del origen, la ecuación que describe a la parábola cambia en función de la posición de este punto y de la orientación de apertura respecto de los ejes x e y.

Debido a estas características, también tenemos cuatro formas de ecuaciones de parábolas cuyo vértice está fuera del origen del sistema de ejes coordenados.

Ecuación ordinaria de la parábola con vértice en (h, k)

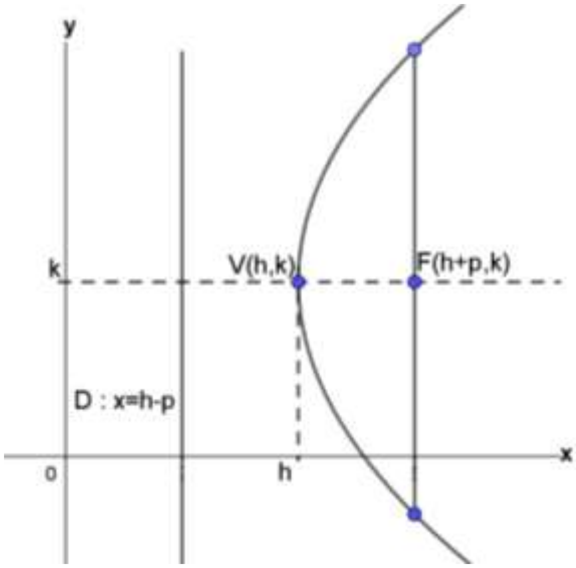
Parábolas horizontales

Las ecuaciones ordinarias para las parábolas cuyos ejes de simetría son paralelos al eje-y, son de la forma

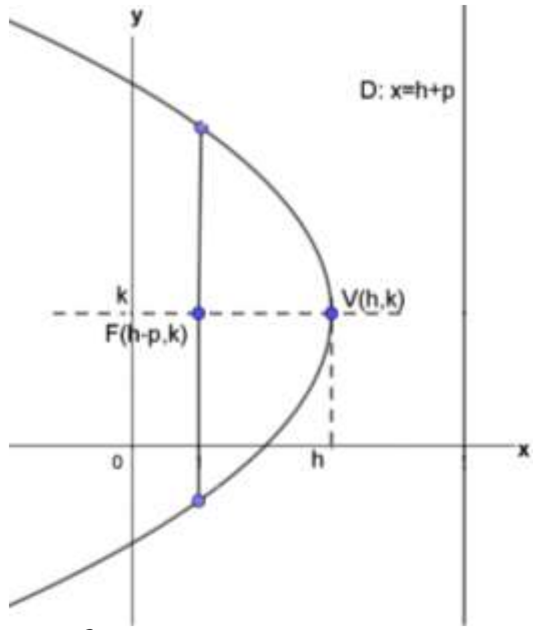
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Si p es positivo, la parábola se abre hacia la derecha.

Si p es negativo, la parábola se abre hacia la izquierda.



$(y-k)^2 = 4p(x-h)$



$(y-k)^2 = -4p(x-h)$

Figura 6

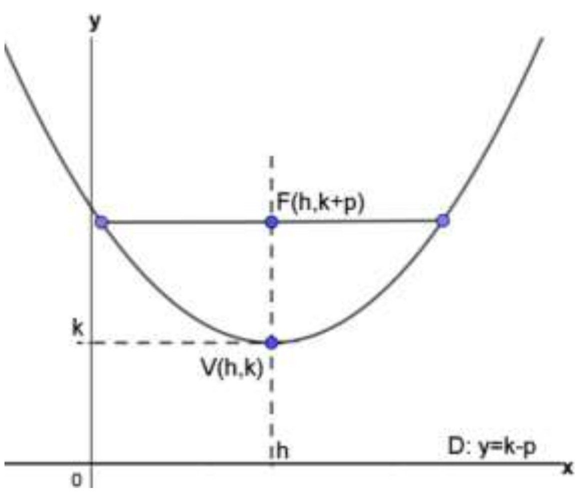
Parábolas verticales

Las ecuaciones ordinarias para las parábolas cuyos ejes de simetría son paralelos al eje-x, son de la forma

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Si p es positivo, la parábola se abre hacia arriba.

Si p es negativo, la parábola se abre hacia abajo.



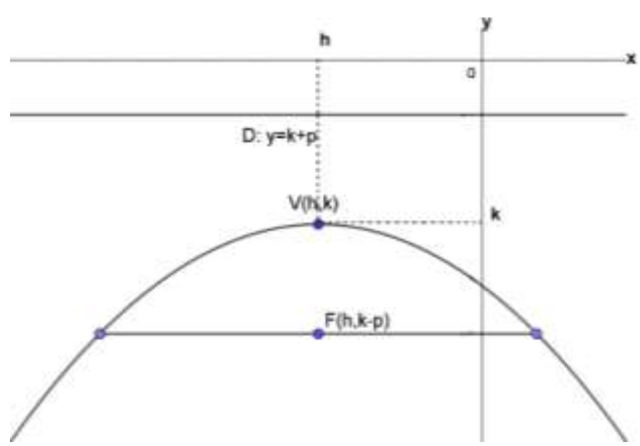


Figura 7

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$(x-h)^2 = -4p(y-k))$

Ejemplo 2

Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en el punto (3,2) y foco en (5,2).

Solución al analizar las coordenadas del vértice y foco vemos que su ordenada $\boldsymbol{y}$ es común ($y = 2$), por lo que los dos puntos están alineados horizontalmente y que el foco está a la derecha del vértice.

Según sabemos, en este caso, la ecuación de la parábola que resulte tiene la forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad (1)$$

Como las coordenadas del vértice son $V(h,k) = (3,2)$ sustituimos en la ecuación (1) , $h = 3$ y $k = 2$, resultando la ecuación

$$(y-2)^2 = 4p(x-3)$$

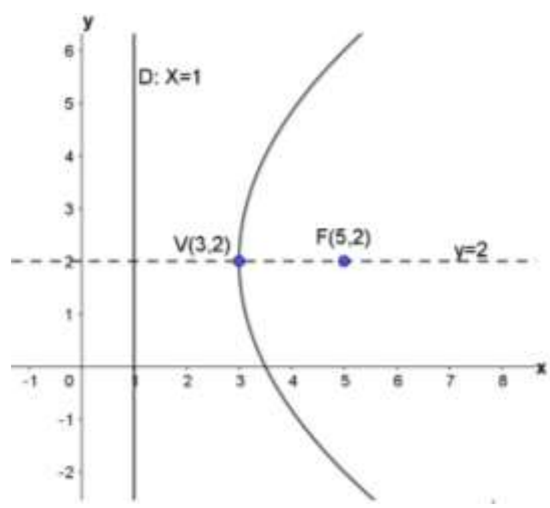
Como la distancia del vértice al foco es de 2 unidades, entonces $p = 2$, y al sustituir, tenemos

$$(y-2)^2 = 4(2)(x-3)$$

$$(y-2)^2 = 8(x-3)$$

ecuación que está en forma ordinaria.

Su gráfica es:



$$(y-2)^2 = 8(x-3)$$

Figura 8

Ejemplo 3

Determina las coordenadas del vértice, del foco, la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz de la parábola $(x+6)^2 = -24(y-2)$.

Solución estando la x al cuadrado en $(x+6)^2$ y siendo $-4p=-24$ sabemos de inmediato que la parábola representada en la ecuación es vertical y se abre hacia abajo. Por tanto, la forma ordinaria de dicha ecuación será

$$(x-h)^2 - 4p(y-k)$$

Las coordenadas del vértice son $V(h,k)=V(-6,2)$

$-4P=-24$, lo cual significa que la longitud del lado recto es $LR=|-24|=24$

Siendo

$-4p=-24$, entonces $p=\frac{-24}{-4}=6$, entonces la distancia del vértice al foco es de 6 unidades, la misma distancia del vértice a la directriz.

Las coordenadas del foco se obtienen por la abscisa del vértice: $x=-6$, y por la resta entre la $y=2$ del vértice y la distancia focal 6. D esta manera las coordenadas del foco son

$$F=(-6,2-6)=(-6,-4)$$

Para determinar la ecuación de la directriz sustituimos los datos conocidos de p y k en $y=k+p=2+6=8$. Luego la ecuación de la directriz es $y=8$.

La gráfica de la parábola se muestra en la siguiente figura:

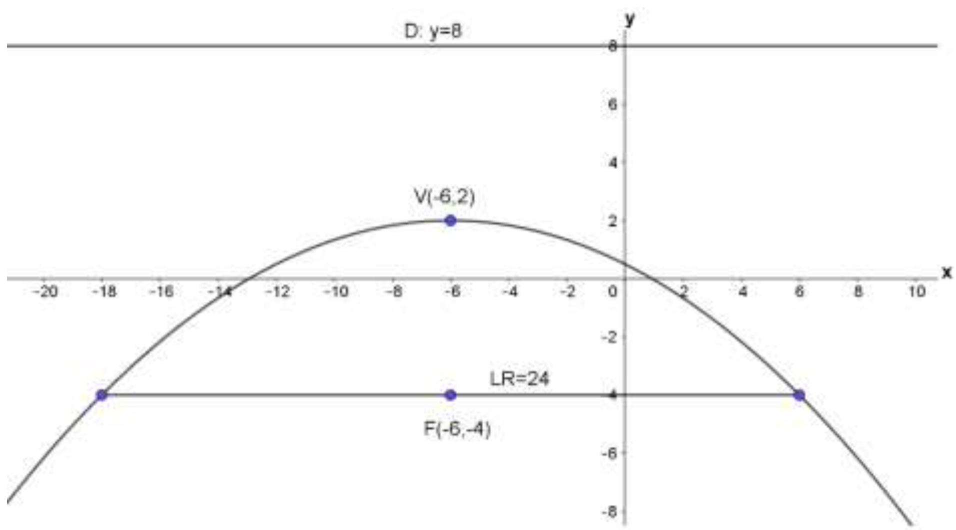


Figura 9

Ejemplo 4

Halla la ecuación de la parábola con eje paralelo al eje $\boldsymbol{x}$ y que pasa por los puntos $A(1,-1), B(3,-3)$ y $C(9,3)$.

Solución como la parábola tiene eje paralelo al eje x, su ecuación ordinaria es de la forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Sustituyendo cada en la ecuación ordinaria, obtenemos

$A(1,-1) \rightarrow (-1-k)^2 = 4p(1-h) \rightarrow 4p = \frac{(-1-k)^2}{1-h}$ (1)

$B(3,-3) \rightarrow (-3-k)^2 = 4p(3-h) \rightarrow 4p = \frac{(-3-k)^2}{3-h}$ (2)

$C(9,3) \rightarrow (3-k)^2 = 4p(9-h) \rightarrow 4p = \frac{(3-k)^2}{9-h}$ (3)

Igualando (1) con (2) y (2) con (3), tenemos

$$\frac{(-1-k)^2}{1-h} = \frac{(-3-k)^2}{3-h} \qquad (4)$$

$$\frac{(-3-k)^2}{3-h} = \frac{(3-k)^2}{9-h} \qquad (5)$$

Resolviendo ambas igualdades tenemos que $h = 1$ y $k = -1$

Estos valores de h y k los sustituimos en (3) :

$$4p = \frac{(3+1)^2}{9-1} = \frac{16}{8} = 2 \rightarrow p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto la ecuación ordinaria de la parábola es

$$(y+1)^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$(y+1)^2 = 2(x-1)$$

Gráfica:

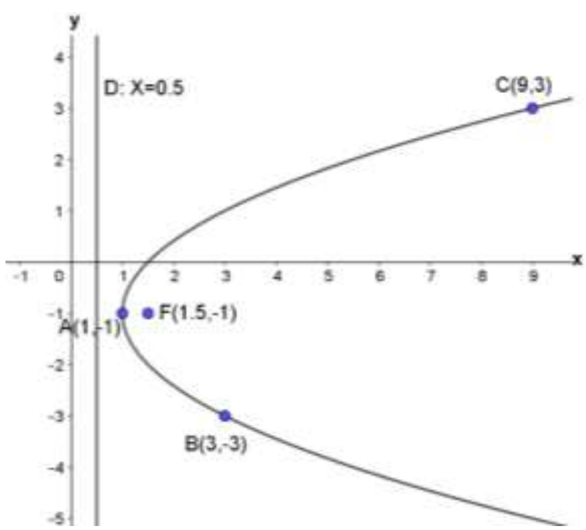


Figura 10

Ecuación general de la parábola

Para llegar a la forma general de la parábola partiendo de la forma ordinaria es necesario desarrollar algebraicamente la forma ordinaria de la ecuación.

Tomemos como ejemplo la forma ordinaria de la parábola vertical

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad \text{Eje de simetría paralelo al eje } y$$

Desarrollando el binomio al cuadrado y simplificando, resulta

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk$$

$$x^2 - 2hx + h^2 - 4py + 4pk = 0 \qquad (1)$$

Asignando valores a:

$$-2h = D$$

$$-4p = E$$

$$h^2 + 4pk = F$$

y sustituyendo estos valores en (1),obtenemos la ecuación general de la parábola vertical:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ con } D, E \text{ y } F \text{ números reales.}$$

Tomando la ecuación ordinaria de la parábola horizontal en la forma

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \quad \text{Eje de simetría paralelo al eje } x$$

Si desarrollamos el binomio al cuadrado y simplificamos, obtenemos la forma general de la ecuación de la parábola

$$y^2 + Dy + Ex + F = 0, \text{ con } D, E \text{ y } F \text{ números reales.}$$

Ejemplo 5

Convierta la ecuación $(x-3)^2 = 8(y-4)$ a la forma general.

Solución desarrollando el binomio al cuadrado del lado izquierdo de la igualdad y haciendo el producto del lado derecho de la igual en $x^2 - 6x + 9 = 8y - 32$ y pasando los términos del lado derecho al lado izquierdo de la igualdad tenemos $x^2 - 6x + 9 - 8y + 32 = 0$ y simplificando obtenemos $x^2 - 6x - 8y + 41 = 0,$ que es la forma general de la ecuación ordinaria dada. Este desarrollo puede hacerse para cualquier parábola, ya sea horizontal o vertical.

Ejemplo 6

Halla las coordenadas del vértice, del foco, la longitud del lado recta y la ecuación de la directriz; de la parábola con ecuación general

$$y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$$

Solución $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$ Ecuación dada

$y^2 + 6y = 8x - 1$ Agrupando términos en y

$y^2 + 6y + 9 = 8x - 1 + 9$ Completando cuadrado en y

$(y+3)^2 = 8(x+1)$ Factorizando en y , y simplificando

El vértice se encuentra en $V(-1, -3)$

Como $4p = 8 \rightarrow p = 2$ que es la distancia del vértice al foco, así, las coordenadas del foco son $F(-1 + 2, -3) = (1, -3)$.

La longitud del lado recto es $8 = |4p| = |4(2)|$ unidades.

La ecuación de la directriz es $x = -3$

Excentricidad.

Es un parámetro importante en la definición de parábola, elipse e hipérbola.

Para cualquier punto perteneciente a una sección cónica, la razón de su distancia a un punto fijo F (foco) y a una recta fija L (directriz) es siempre igual a una constante positiva llamada excentricidad.

Excentricidad de la parábola.

Viene dada por el cociente entre las distancias del foco (F) a un punto (P) de la misma, y la que hay desde ese punto P a la directriz D. Como las dos distancias son iguales, decimos que la excentricidad de la parábola es $e = 1$.

$$\frac{d(FP)}{d(PD)} = 1$$

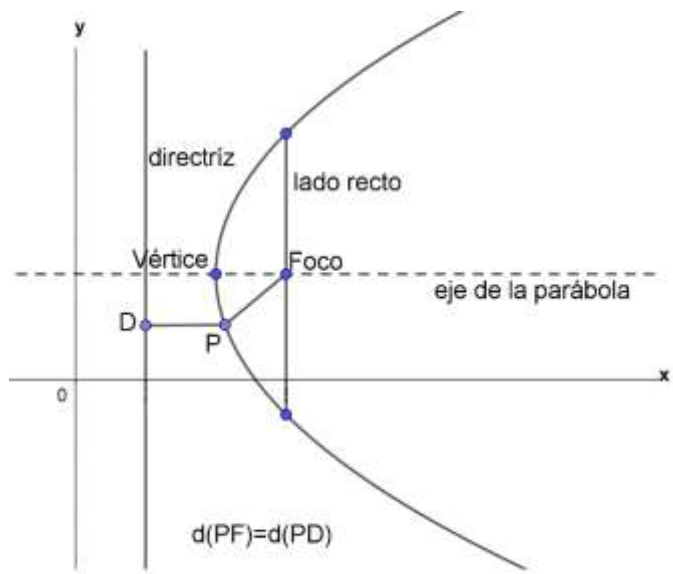


Figura 12

<u>EJERCICIOS PARA PRACTICAR.</u>

1) En cada literal se la medida del lado recto de una parábola. ¿A qué distancia se encuentra el vértice del foco en cada parábola?
   a. $4p = 8$
   b. $4p = 2$
   c. $4p = 5$
   d. $4p = \frac{7}{2}$

2) Dadas las parábolas indica
   a. La distancia entre directriz y el foco
   b. La distancia entre la directriz y el vértice
   c. La longitud del lado recto
   d. La abertura de la parábola
      i. $y^2 = -24x$
      ii. $x^2 = -12y$
      iii. $y^2 = 8x$
      iv. $x^2 = 20y$

3) Determine la ecuación de las parábolas que tienen las propiedades dadas. Dibuje cada parábola
   a. $V(3,2), F(4,2)$
   b. $V(-1,1),\ D: y = 3$
   c. $F(-5,2),\ D: x = -1$
   d. $V(3,1),\ F(3,-1)$
   e. $V(-3,2),\ D: x = 1$
   f. $Extremos\ del\ lado\ recto\ en\ (-3,0) y (9,0). Vértice\ (3.-3)$
   g. $V(4,-2)\ directriz\ vertical, lr = 7$
   h. $V(-1,0), pasa\ por\ (-1,2), eje\ vertical$

4) Para cada una de las siguientes parábolas indique:

   i)La posición, ii) las coordenadas del vértice, iii) las coordenadas del foco, iv) la ecuación de la directriz, v)la distancia que separa la directriz del foco vi) la distancia que separa el vértice al foco, vii) la longitud del lado recto. Trazar la gráfica de cada parábola

   a. $(x-3)^2 = 12(y-1)$
   b. $(y+2)^2 = 8(x+1)$
   c. $(x+2)^2 = -4(y+3)$
   d. $(y-4)^2 = -6(x-3)$

5) Calcula las coordenadas del vértice y el foco; y la ecuación de la directriz
   a. $y^2 - 2y + 4x + 2 = 0$
   b. $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$
   c. $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$
   d. $y = x^2 - 6x + 11$