LONGITUD DE ARCO

Calcule la longitud de arco de la curva definida por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = arcsen(t)\,, y = \ln\sqrt{1-t^2}\,, \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2}$$

Solución:

Primero calculamos $\frac{dx}{dt}$ y luego elevamos al cuadrado:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1-t^2}$$

Ahora calculamos $\frac{dy}{dt}$ y también elevamos al cuadrado, pero primero vamos a reescribir la expresión $y = \ln\sqrt{1-t^2}$

$$y = \ln\sqrt{1-t^2} \Rightarrow y = \ln(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\ln(1-t^2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-2t}{1-t^2} = -\frac{t}{1-t^2} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(-\frac{t}{1-t^2}\right)^2 = \frac{t^2}{(1-t^2)^2}$$

Ahora sustituimos en la fórmula:

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \Rightarrow L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + \frac{t^2}{(1-t^2)^2}}\,dt \Rightarrow L = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)^2}}\,dt \Rightarrow L$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{(1-t^2)^2}}\,dt$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

Resolvamos la integral indefinida $\int \frac{1}{1-t^2}dt$ por medio de fracciones parciales:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} \Rightarrow \frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{(-A+B)t + (A+B)}{(1+t)(1-t)}$$

Estos nos lleva a formular el siguiente sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} \boldsymbol{-A+B=0} \\ \boldsymbol{A+B=1} \end{cases}$ cuya solución es $A = \frac{1}{2}$ y $B = \frac{1}{2}$

Volvemos a la integral:

$$\int \frac{1}{1-t^2}dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln(1+t) + \frac{1}{2}\ln(1-t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$

Ahora volvamos al cálculo de la longitud de arco:

$$L = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\0\end{matrix} = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right| - \ln\left|\frac{1+0}{1-0}\right|\right] = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) - \ln 1\right] = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$\approx 0.55\; unidades$$

Rpta. La longitud de arco de la curva es $\mathbf{0.55}\; \boldsymbol{unidades}$