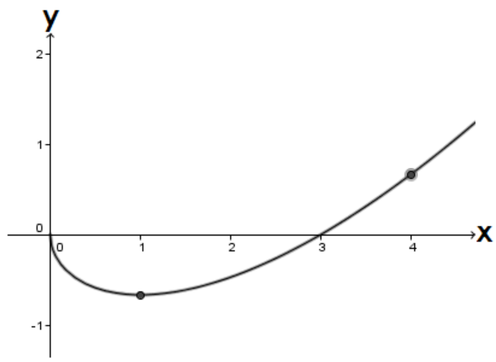
➢ **Ejemplo 2: Determine la longitud de la gráfica de ecuación $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$**



Solución:

- Reescribiendo la función: $y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$
- Derivando: $y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
- Elevando al cuadrado: $(y')^2 = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow (y')^2 = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

  $\Rightarrow (y')^2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^{-1}$
- Sustituyendo en la fórmula para calcular la longitud de la curva:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^{-1}}\, dx$$

- Reduciendo términos y factorizando la expresión del radical obtenemos:

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^{-1}}\, dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

- Integrando:

$$L = \left[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$$

- Evaluando, utilizando el teorema fundamental del cálculo:

$$L = \left[\frac{1}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + (4)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}} + (1)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{10}{3}$$

Rpta. La longitud de la curva en el intervalo indicado es $\frac{10}{3}$ u.