UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 7. Unidad 3: Geometría Analítica

Sesión 1: Sistema coordenado en 2D, distancia entre dos puntos, punto medio, división de un segmento en una razón dada, pendiente de una recta, rectas paralelas y perpendiculares.

SISTEMA COORDENADO EN DOS DIMENSIONES (2D)

Sistemas de coordenadas

Un **sistema de coordenadas** es una geometría métrica (una geometría donde la distancia puede ser medida) donde la localización se puede identificar por coordenadas. En geometría, un sistema de coordenadas es un sistema que utiliza uno o más números (coordenadas) para determinar sin lugar a duda la posición de un punto de otro objeto geométrico. Un sistema de coordenadas permite que los que estudian matemática tracen puntos y creen una representación visual de ecuaciones que permitan hacer gráficos. El sistema lo más comúnmente posible coordenado es el **sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas** en honor a su inventor, el matemático francés Rene Descartes

Un sistema de coordenadas de 2 dimensiones se llama un **plano cartesiano**.

En el sistema de coordenadas cartesianas de 2 dimensiones, hay 2 ejes, generalmente el eje $\boldsymbol{x}$ y el eje $\boldsymbol{y}$, y forman la base de un sistema de coordenadas cartesianas en dos dimensiones. Al punto de intersección de los dos ejes se le llama origen (O). Cualquier punto en este plano se puede identificar por un par ordenado de números que representan las distancias a los dos ejes. Por ejemplo, en los pares ordenados de los números $(x_{0,}y_0)$, x_0 dice la distancia del origen paralelo al eje $\boldsymbol{x}$ y el y_0 dice la distancia del origen paralelo al eje $\boldsymbol{y}$.

Así, el par ordenado (4, 2) es el punto que se encuentra alejado 4 unidades del eje $\boldsymbol{y}$ en la dirección positiva del eje $\boldsymbol{x}$ y a 2 unidades del eje $\boldsymbol{x}$ en la dirección positiva del eje $\boldsymbol{y}$. Entonces 4 y 2 son las coordenadas del punto.

Para trazar un punto por ejemplo (2,1) comience del origen, después mueva 2 unidad a la derecha (dirección positiva) a lo largo del eje $\boldsymbol{x}$, y 1 unidad hacia arriba paralelo para el eje $\boldsymbol{y}$.

El estudio de los sistemas de coordenadas es objeto de la geometría analítica, permite formular los problemas geométricos de forma "numérica".

Cómo representar un punto en el plano de coordenadas cartesianas.

Un par de números enteros se puede representar mediante puntos en el plano. Para ello necesitamos dividir el plano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas que se corten perpendicularmente: son los ejes cartesianos.

El eje horizontal: EJE X o eje de abscisas.

El eje vertical: EJE Y o eje de ordenadas.

El punto de corte de las dos rectas es el origen de coordenadas.

Los puntos del plano los representaremos así: (x, y). Por ejemplo, A (-2,4), B (3,1), C (-4,-2), D (2,-3).

En el eje X localizaremos siempre el primer número del par ordenado. En el eje Y el segundo. El punto correspondiente al par será el resultado del corte de dos líneas perpendiculares a los ejes.

Observe el ejemplo donde se han ubicado los cuatro pares ordenados A, B, C y D.

Ejemplo 1

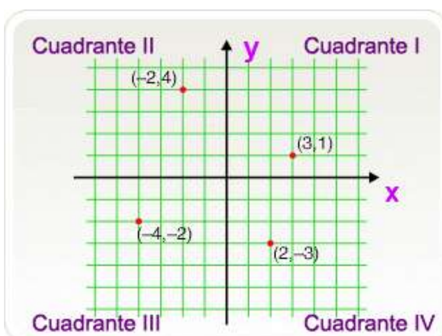


Figura 1

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO

Cuando dos puntos están situados en una recta numérica resulta muy simple calcular la distancia entre ellos.

En un sistema coordenado unidimensional, la distancia dirigida (distancia que puede ser positiva o negativa) entre dos puntos $P_1(x_1, 0)$ y $P_2(x_2, 0)$ se obtiene restando a la coordenada del punto final, la coordenada del punto inicial.

$$P_1P_2 = x_2 - x_1 \qquad \text{y} \quad P_2P_1 = x_1 - x_2$$

Ejemplo 2

En la recta numérica

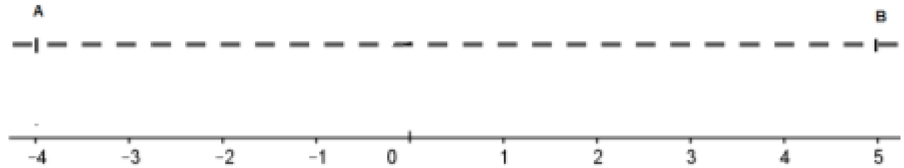


Figura 2

La distancia dirigida de A a B es $5-(-4)=5+4=9$

La distancia dirigida de B a A es $-4-5=-9$

Consideramos como (distancia no dirigida entre dos puntos) aquella magnitud que da a conocer la distancia en un sentido absoluto, donde el valor de longitud de la distancia es lo único (Importante).

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje **x** (de las abscisas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas $x_2 - x_1$.

Ejemplo 3

La distancia entre los puntos (–4, 0) y (5, 0) es 5 – (–4) = 5 +4 = 9 unidades.

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje **y** (de las ordenadas) o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas $y_2 - y_1$.

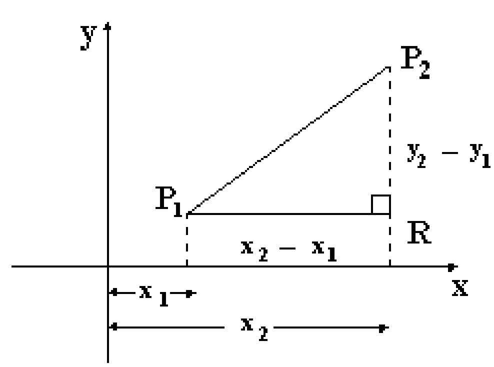
Ejemplo 4

La distancia entre los puntos (0, 6) y (0, -1) es 6-(-1) = 6+1 = 7 unidades.

Ahora, si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de coordenadas, la distancia queda determinada por la relación:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Para demostrar esta relación se deben ubicar los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el sistema de coordenadas, luego formar un triángulo rectángulo de hipotenusa P_1P_2 y emplear el <u>**Teorema de Pitágoras**</u> .



Demostración

Sean $P_1(x_1, x_2)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano.

La distancia entre los puntos P_1 y P_2 denotada por $d = |P_1P_2|$ esta dada por:

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

En la Figura 3 hemos localizado los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ así como también el segmento de recta $\overline{P_1P_2}$

Al trazar por el punto P_1 una paralela al eje x (abscisas) y por P_2 una paralela al eje y (ordenadas), éstas se interceptan en el punto R , determinado el triángulo rectángulo P_1RP_2 y en el cual podemos aplicar el **Teorema de Pitágoras** :

$$(\overline{P_1P_2})^2 = (\overline{P_1R})^2 + (\overline{RP_2})^2$$

Pero,

$$\overline{P_1R} = x_2 - x_1$$

y

$$\overline{RP_2} = y_2 - y_1$$

Luego,

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

En la fórmula (1) se observa que la distancia entre dos puntos es siempre un valor positivo.

El orden en el cual se restan las coordenadas de los puntos $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ no afecta el valor de la distancia.

Ejemplo 5

Calcule la distancia entre los puntos $P_1(5,7)$ y $P_2(1,4)$

$$d = \sqrt{(1-5)^2 + (4-7)^2}$$

$$d = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 9}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5\, u.l$$

Ejemplo 6

Dibuje en un plano cartesiano el triángulo cuyos vértices son:

A (-2,2); B (3, -3) y C (6,6). Luego calcule el perímetro del triángulo ABC

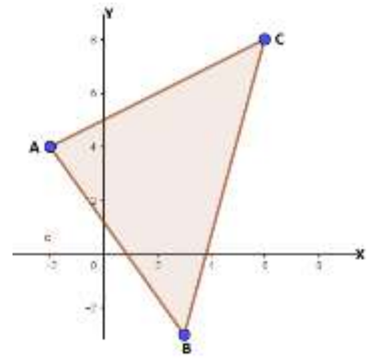


Figura 4

Solución

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(6-(-2))^2 + (6-2)^2} = \sqrt{8^2 + (4)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(6-3)^2 + (6+3)^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

Perímetro del triángulo ABC = $d_{AB} + d_{AC} + d_{BC} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{5} + 3\sqrt{10}$

Ejemplo 7

Verifique que el triángulo que tiene por vértices los siguientes puntos es isósceles.
$A(1,-2), B(4,2)\ y\ \ C(-3,-5)$

Solución

El triángulo se muestra en la Figura 5

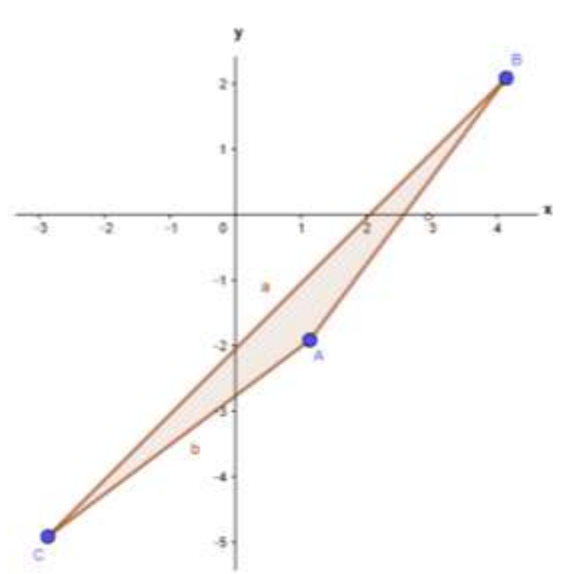


Figura 5

Calculemos las tres distancias:

$$d_1 = d(CA) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-(-5))^2} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d_2 = d(AB) = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Como hemos obtenido dos distancias iguales, entonces el triángulo es isósceles.

Ejemplo 8

Demuestre por medio de distancia entre dos puntos, que los siguientes puntos $A(-1,-4)$, $B(0,-1)$ y $C(2,5)$ están situados sobre una misma recta, es decir, son colineales.

Solución

Los puntos se muestran en la figura 6

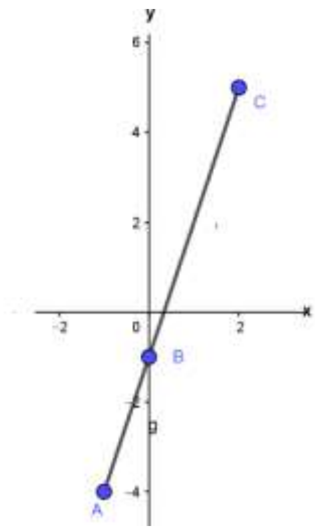


Figura 6

Llamemos
d_1 a la distancia entre los puntos A y B

d_2 a la distancia entre B y C

d_3 a la distancia entre A y C

Entonces,

$$d_1 = d(AB) = \sqrt{(0-(-1))^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

$$d_2 = d(BC) = \sqrt{(2-0)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$$

$$d_3 = d(AC) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (5-(-4))^2} = \sqrt{3^2+9^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90}$$

Ahora comprobemos que al sumar $d_1 + d_2$ obtenemos d_3.

$d_1 + d_2 = \sqrt{10} + \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 3\sqrt{10} = \sqrt{90} = d_3$

Esto demuestra que los puntos son colineales y no pueden formar un triángulo.

Ejemplo 9

Calcule las coordenadas del punto $P(x, y)$ que equidista de $A(9,3)$,
$B(3,7)\ y\ C(-2,6)$. (Figura 7)

Solución

Según las condiciones del problema se debe cumplir que $PA = PB = PC$, o sea
$\sqrt{(x_1-9)^2 + (y_1-3)^2} = \sqrt{(x_1-3)^2 + (y_1-7)^2} = \sqrt{(x_1+2)^2 + (y_1-6)^2}$

Elevando al cuadrado los dos primeros radicales y simplificando:

$$\left[\sqrt{(x_1-9)^2 + (y_1-3)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(x_1-3)^2 + (y_1-7)^2}\right]^2$$

$$(x_1-9)^2 + (y_1-3)^2 = (x_1-3)^2 + (y_1-7)^2$$

$$x_1^2 - 18x_1 + 81 + y_1^2 - 6y_1 + 9 = x_1^2 - 6x_1 + 9 + y_1^2 - 14y_1 + 49$$

$$3x_1 - 2y_1 = 8 \qquad (Ec.\ 1)$$

Elevando al cuadrado el primer radical y el tercero y simplificando:

$$\left[\sqrt{(x_1-9)^2 + (y_1-3)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(x_1+2)^2 + (y_1-6)^2}\right]^2$$

$$(x_1-9)^2 + (y_1-3)^2 = (x_1+2)^2 + (y_1-6)^2$$

$$11x_1 - 3y_1 = 25 \qquad (Ec.\ 2)$$

Formando y resolviendo el SEL

$$3x_1 - 2y_1 = 8 \qquad (Ec.\ 1)$$

$$11x_1 - 3y_1 = 25 \qquad (Ec.\ 2)$$

Obtenemos

$$x_1 = 2 \quad y \quad y_1 = -1$$

El punto buscado $P(x, y) = (2, -1)$

Compruebe que la distancia del punto P a los puntos $A, B\ y\ C$ es

$$d = \sqrt{65} \cong 8.06$$

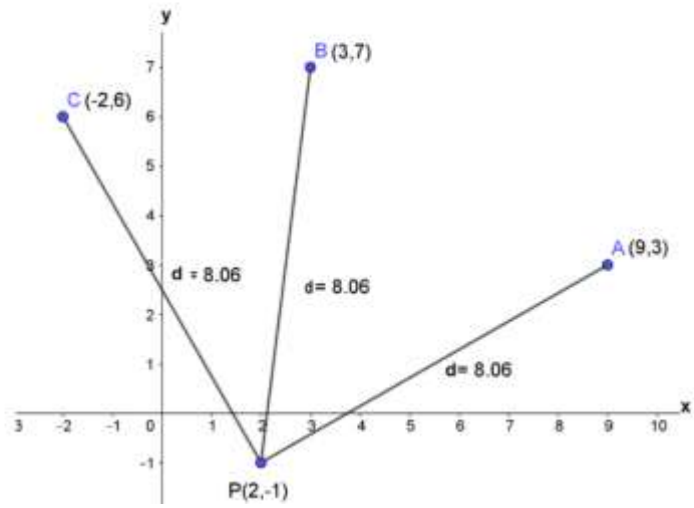


Figura 7

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Un punto P sobre un segmento $\overline{AB}$ divide a éste en dos partes. (Ver Figura 3.8)

a)

b)

Figura 8

Las longitudes se comparan mediante un cociente que expresa matemáticamente la idea intuitiva de "cuántas veces un segmento cabe en el otro". En a) vemos que la porción más pequeña $\overline{AP}$ es la mitad de la porción mayor $\overline{PB}$. Eso lo expresamos así: los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón de 1 a 2 $(1:2)$ o que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2}$.

En b), vemos que ambas partes son iguales, es decir, P es el punto medio de $\overline{AB}$.Expresamos esta situación diciendo que los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ están en la razón $1:1$, o bien, que $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{1} = 1$.

En un sistema coordenado lineal, si $P_1(x_1, y_1)\ y\ P_2(x_2, y_2)$ son los puntos extremos de un segmento dirigido, entonces, un punto $P(x, y)$ divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en la razón r, es decir,

$$r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$$

Para calcular r, expresamos

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$$

La coordenada x del punto P se obtiene mediante la expresión:

$$x = \frac{x_1 + x_2\, r}{1+r}\ , r \neq -1,$$

y la coordenada y del punto P mediante,

$$y = \frac{y_1 + y_2\, r}{1+r}, r \neq -1.$$

El punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ es colineal a ambos puntos, P_1 y P_2, y si r es positiva, el punto P se encuentra entre los puntos P_1 y P_2, y si r es negativa, el punto P se encuentra fuera del segmento P_1P_2. Nos enfocaremos al caso en que $r > 0$.

Caso particular del punto medio: siendo iguales las longitudes de los dos segmentos tenemos que $r = 1$, entonces

$$x = \frac{x_1 + x_2}{1+1} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{1+1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ejemplo 10

Calcule las coordenadas del punto P que divide al segmento con extremos $A(3,-1)$ y $B(7,15)$ en la razón $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{3}{5}$.

Solución

$$x = \frac{3 + 7\left(\frac{3}{5}\right)}{1 + \frac{3}{5}} = 4.5 \quad , \quad y = \frac{-1 + 15\left(\frac{3}{5}\right)}{1 + \frac{3}{5}} = 5$$

El punto P es $P(x, y) = (4.5,5)$

En consecuencia, (4.5,5) divide al segmento de $(3,-1)$ a $(7,15)$ en la razón de 3 a 5.

Ilustración gráfica.

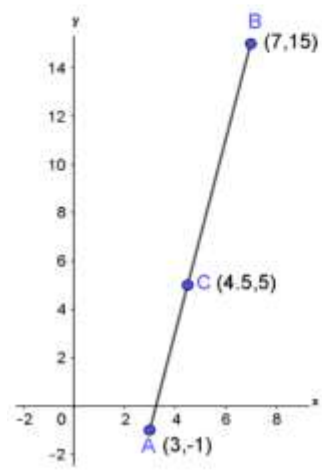


Figura 9

Ejemplo 11

Halle los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos $A(-2,3)\ y\ B(6,-3)$.

Solución

Trisección quiere decir que el segmento debe ser dividido en tres partes iguales, por lo que debe haber dos puntos entre los extremos. Cada uno de estos puntos debe encontrarse a partir de cada extremo, a una distancia igual a la tercera parte de la distancia total entre los puntos extremos, y, a su vez, entre ellos deben encontrarse a esa misma distancia.

Representamos por $C\ y\ D$ los puntos de trisección que, como se dijo, deben dividir el segmento en tres partes de la misma longitud, la cual denotaremos por d.

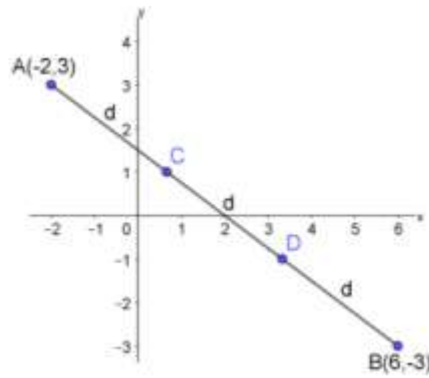


Figura 10

Calculamos la razón en que el segmento $\overline{AC}$ divide al segmento $\overline{AB}$

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Como la distancia entre $A\ y\ C$ es d , y la distancia entre $C\ y\ B$ es $2d$, sustituimos estos valores en la fórmula anterior y,

$$r_C = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$$

Ahora que ya sabemos que el punto C divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón de $\frac{1}{2}$, podemos calcular las coordenadas del punto C, mediante la fórmula

$$x_C = \frac{x_1 + x_2 r}{1+r} = \frac{-2+6\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$y_C = \frac{y_1 + y_2 r}{1+r} = \frac{3+(-3)\left(\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$$

Luego las coordenadas del punto de trisección C son: $C\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

Para el punto D sustituimos en las mismas fórmulas que C:

$$x_D = \frac{-2+2(6)}{1+2} = \frac{10}{3}$$

$$y_D = \frac{3-6}{3} = \frac{-3}{3} = -1,$$

Luego, las coordenadas del punto de trisección D, son: $D\left(\frac{10}{3}, -1\right)$.

Los puntos A, C, D y B se muestran en la Figura 11 .

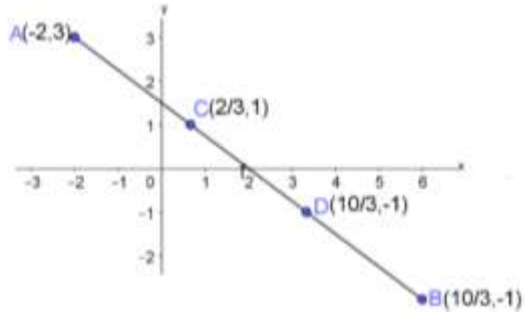


Figura 11

Punto medio

A veces es necesario encontrar el punto que se encuentra exactamente entre dos puntos. Este punto se llama el punto medio. Por definición, un punto medio de un segmento es el punto en que el segmento de línea divide el segmento en dos segmentos iguales.

Si los puntos extremos de un segmento de recta son (x_1, y_1) y (x_2, y_2), entonces el punto medio del segmento de recta se puede calcular conociendo las coordenadas de sus puntos extremos.

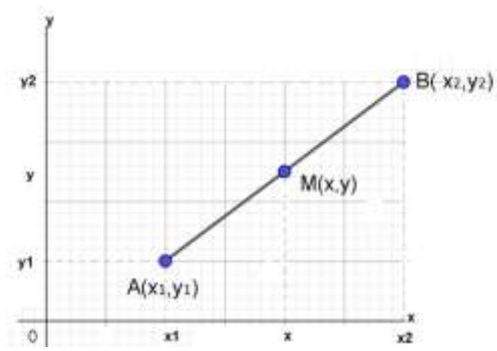


Figura 12

Sea el segmento determinado por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, además $M(x, y)$ su punto medio. Las coordenadas del punto medio M, quedan determinadas por

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Deducción de las coordenadas del punto medio.

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano, vamos a encontrar las

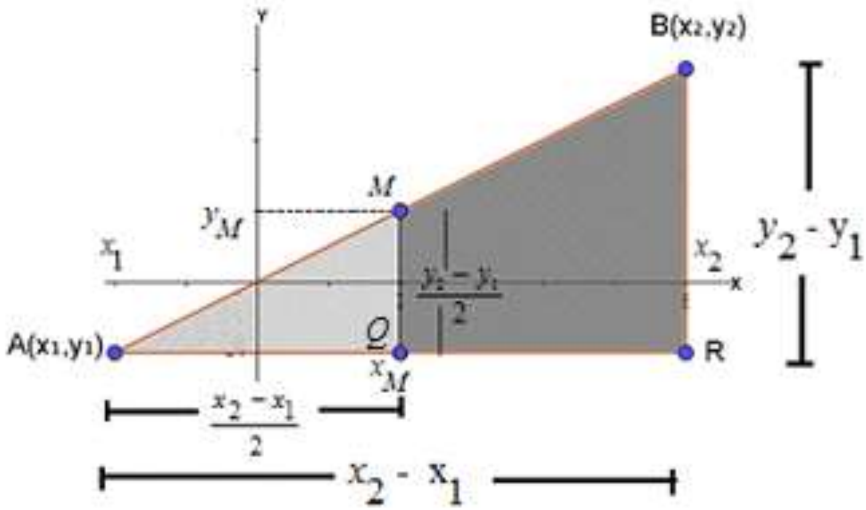


Figura 13

coordenadas del punto medio a partir de las coordenadas de los puntos A y B.

Primero encontramos la coordenada x del punto medio y para ello usaremos triángulos semejantes.

El triángulo rectángulo pequeño es semejante con el triángulo rectángulo grande

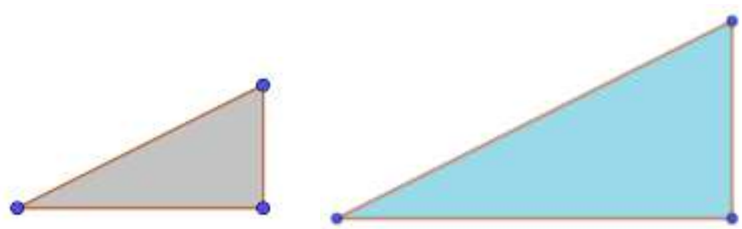


Figura 14

Por tener los mismos ángulos, por tanto las razones entre sus lados son proporcionales. Como la hipotenusa del triángulo pequeño es la mitad de la hipotenusa del triángulo grande, entonces el cateto $\overline{AQ}$ es la mitad del otro cateto $\overline{AR}$, entonces la longitud del cateto $\overline{AQ}$ es

$$\frac{x_2-x_1}{2}$$

Partiendo de x_1, cuánto le hace falta a x_1 para llegar a x_M

$$x_M = x_1 + \frac{x_2-x_1}{2} = \frac{2x_1+x_2-x_1}{2} = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Así,

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}$$

Ejemplo 12

Calcule las coordenadas del punto medio del segmento formado por los puntos $A(-2,3)$ y $B(1,5)$.

Solución

$$P_m = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{8}{2}\right) = (-0.5,4)$$

PENDIENTE DE UNA RECTA

Ángulo de inclinación

Dada una recta *l* que no sea paralela al eje X y que toque a este en uno de sus puntos, es posible determinar un ángulo, que se obtiene al girar una semirrecta, que inicialmente se ubica sobre el eje X, en sentido contrario a las manecillas de reloj, hasta tocar a la recta *l*.

Al ángulo así obtenido se le llama ***ángulo de inclinación*** de la recta *l*.

La inclinación se representa por θ en las Figuras 15a y 15b

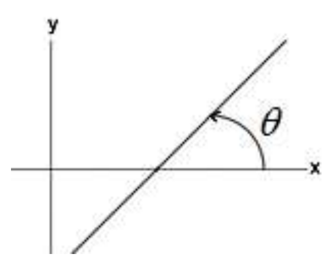


Figura 15a

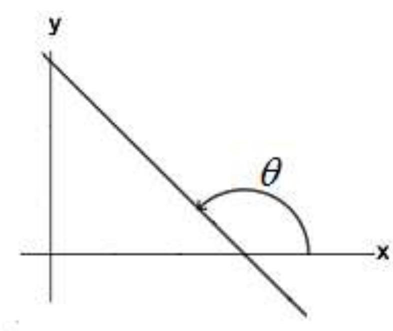


Figura 15b

El valor de ángulo de inclinación de una recta oscila entre 0^0 y 180^0.

La pendiente de una recta L es la tangente del ángulo de inclinación. La pendiente se denota frecuentemente por m; escribimos

$$m = \tan\theta$$

como un enunciado simbólico de la definición de pendiente.

Ejemplo 13

Si la inclinación de una recta es 45^0, como se muestra en la Figura16, la pendiente es $m = \tan 45^0 = 1$.

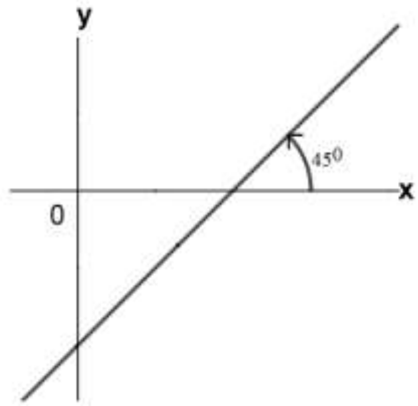
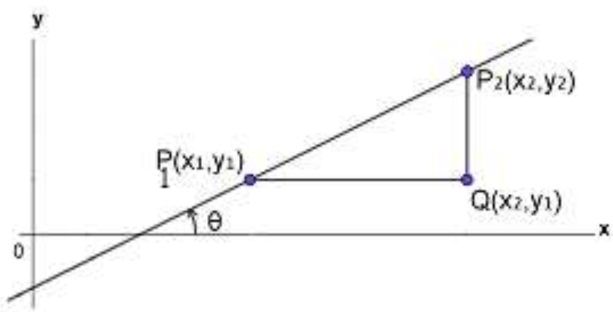


Figura 16

Como no existe ningún número para representar la tangente de 90^0, excluiremos rectas paralelas al eje $\boldsymbol{y}$ en todas las explicaciones en que tratemos la pendiente.

Si conocemos las coordenadas de dos puntos sobre una recta, podemos encontrar la pendiente en términos de las coordenadas de los puntos.

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, y Q la intersección de una recta horizontal por P_1 con una recta vertical por P_2, (



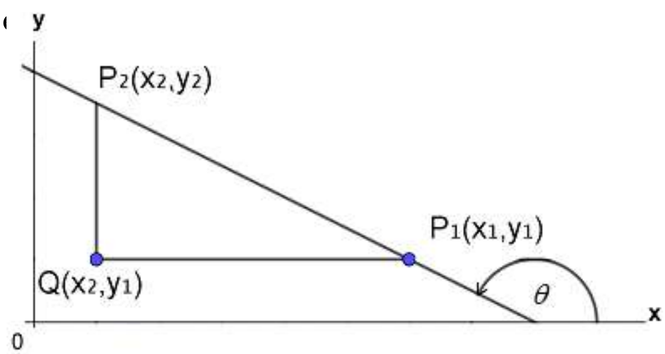


Figura 17a

Figura 17b

a) Recta con $m > 0$

b) Recta con $m < 0$

En la Figura 17a) el ángulo $\sphericalangle QP_1P_2$ es igual a θ, entonces

$$\tan\theta = \tan(\sphericalangle QP_1P_2) = \frac{QP_2}{P_1Q} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En la Figura 17b) la inclinación de la recta es el ángulo obtuso θ, y como θ y $\sphericalangle QP_1P_2$ son ángulos suplementarios se tiene que

$$\tan\theta = -\tan(\measuredangle QP_1P_2) = -\frac{QP_2}{QP_1} = -\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

En consecuencia, vemos que la pendiente de una recta L que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)\ y\ \ P_2(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ejemplo 14

a) La pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3,1)\ y\ \ B(5,6)$ es

$$m = \frac{6-1}{5-3} = \frac{5}{2}$$

b) La recta que pasa por los puntos $P(2,3)\ y\ Q(2,-5)$ no tiene pendiente ya que la división por cero no está definida.

$$m = \frac{-5-3}{2-2} = \frac{-8}{0}$$

Ejemplo 15

a) Halle la pendiente de la recta con ángulo de inclinación $\theta = 150^0$

b) Halle el ángulo de inclinación de la recta con pendiente $m = -1$

c) Encuentre la pendiente de la siguiente recta. (Figura 3.18)

.Solución

a) $m = \tan(150^0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\theta = \arctan(-1) = -45^0$

c) Encontraremos la pendiente de la recta por medio de un cambio vertical llamado **elevación**, y el cambio horizontal llamado **avance**, entre los puntos $(-2,1)\ y\ \ (4,5)$, por ejemplo. La pendiente será igual entre el cociente de la elevación entre el avance.

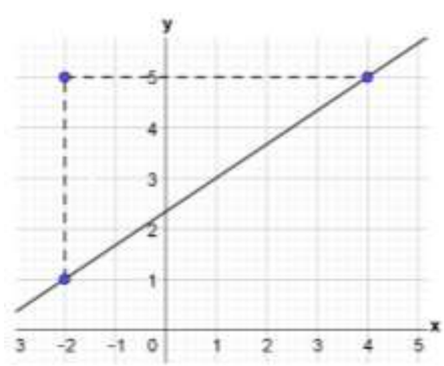


Figura18

$$m = \frac{elevación}{avance}$$

Elevación = 4

Empezamos en un punto de la recta, en este caso hemos tomado $(-2,1)$, y nos movemos en forma vertical hacia arriba hasta alinearnos con otro punto en la recta como (4,5). La elevación obtenida es 4. Es positiva ya que el movimiento se ha hecho hacia arriba.

Avance = 6

A continuación, nos movemos horizontalmente al punto (4,5).Contamos el número de unidades. El avance es de 6 unidades. Es positivo puesto que nos hemos movido hacia la derecha.

Así, la pendiente

$$m = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Usted puede tomar cualquier pareja de puntos en la recta, para hacer el cálculo de la pendiente.

Dada una recta, gráficamente su pendiente nos da su grado de inclinación.

Pendiente positiva

Cuando la recta es creciente(al aumentar los valores de $\boldsymbol{x}$, aumentan los de $\boldsymbol{y}$), su pendiente es positiva. ($m > 0$).

(Figura 19a)

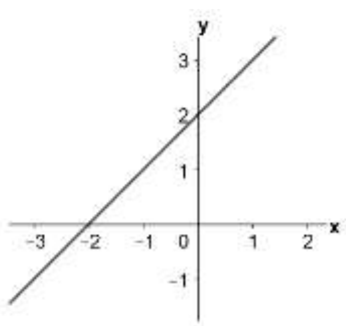


Figura 19a

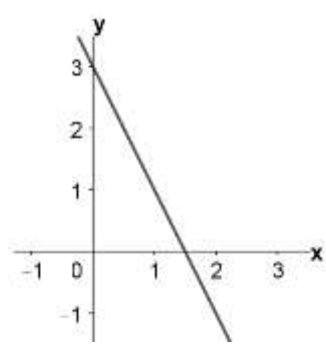


Figura 19b

Pendiente negativa

Cuando la recta es decreciente(al aumentar los valores de x disminuyen los de y), su pendiente es negativa. ($m < 0$). (Figura 19b)

Pendiente cero

Cuando la recta es horizontal decimos que su pendiente es nula.$(m = 0)$

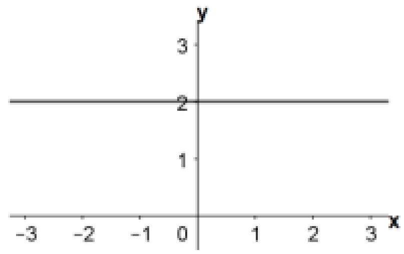


Figura 20

Pendiente indefinida

Si la recta es vertical, su pendiente no está definida.$(m\ no\ existe)$.

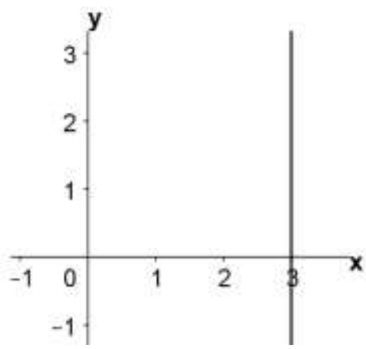


Figura 21

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Consideremos dos rectas $L_1\ y\ \ L_2$, ninguna de las cuales es paralela al eje $\boldsymbol{y}$. Si las dos rectas son paralelas como se muestra en la Figura 22a, sus ángulos de inclinación $\theta_1\ y\ \theta_2$ son iguales, consecuentemente $tan\theta_1 = tan\theta_2$. Recíprocamente, si las pendientes de las rectas son iguales, entonces $\theta_1 = \theta_2$, y las rectas son paralelas.

Así, vemos que dos rectas $L_1\ y\ \ L_2$ no verticales son paralelas, sí y sólo sí, sus pendientes son iguales $m_1 = m_2$.

.

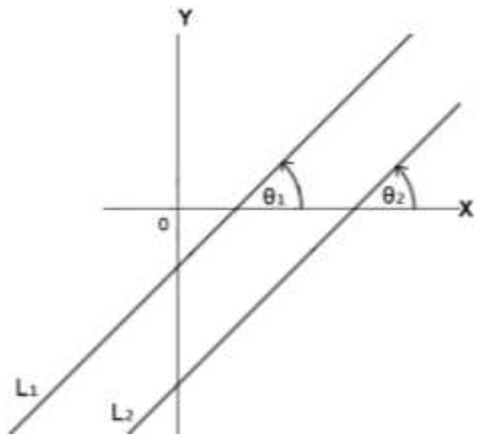


Figura 22a

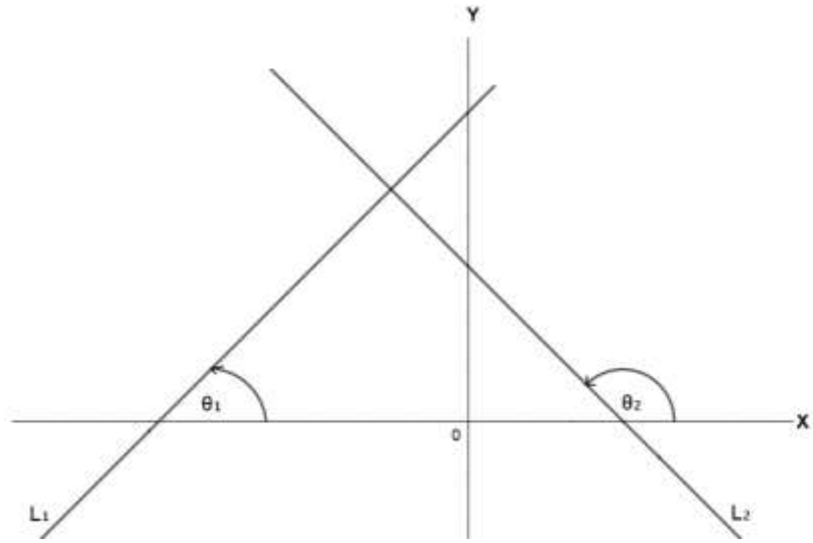


Figura 22b

Si las rectas $L_1\ y\ \ L_2$ son perpendiculares, entonces los ángulos de inclinación $\theta_1\ \ y\ \ \theta_2$ difieren en 90^0. En la Figura 22b, $\theta_2 = \theta_1 + 90^0$, por lo que,

$$tan\theta_2 = tan(\theta_1 + 90^0)$$

$$= \frac{sen(\theta_1 + 90^0)}{cos(\theta_1 + 90^0)}$$

$$= \frac{sen\theta_1 cos90^0 + cos\theta_1 sen90^0}{cos\theta_1 cos90^0 - sen\theta_1 sen90^0}$$

$$= \frac{cos\theta_1}{-sen\theta_1}$$

$$= -\frac{cos\theta_1}{sen\theta_1}$$

$$= -cot\theta_1$$

$$= -\frac{1}{tan\theta_1}$$

Como $tan\theta_2 = m_2\ \ y\ \ \ tan\theta_1 = m_1$, tenemos que

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad o \quad m_1.m_2 = -1$$

Así, se ha demostrado que dos rectas L_1 y L_2 , no siendo ninguna vertical, son perpendiculares si sus pendientes son inversas y de signo contrario.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad o \quad m_1.m_2 = -1$$

Ejemplo 16

Demuestre que la recta que pasa por $(-1,-2)$ y $(1,4)$ es paralela a la que pasa por $(0,-2)$ y $(1,1)$.

Solución la pendiente de la primera recta es

$$\mathrm{m}_1 = \frac{\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1}{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1} = \frac{4-(-2)}{1-(-1)} = \frac{6}{2} = 3$$

La pendiente de la segunda recta es

$$m_2 = \frac{1-(-2)}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$$

Por tanto, las pendientes son iguales y las rectas son paralelas.

Ejemplo 17

Demuestre que la recta L_1 que pasa por $(1,6)$ y $(-2,3)$ es perpendicular a la recta L_2 que pasa por $(-1,3)$ y $(3,-1)$.

Solución la pendiente de la primera resta es

$$m_1 = \frac{3-6}{-2-1} = \frac{-3}{-3} = 1$$

La pendiente de la segunda recta es

$$m_2 = \frac{-1-3}{3-(-1)} = \frac{-4}{4} = -1$$

Como el producto $m_1.m_2 = (1)(-1) = -1$, las rectas son perpendiculares.

Ejemplo 18

Demuestre que los puntos $A(-4,5), B(3,3), C(-1,-2)$ y $D(6,-4)$ son vértices de un paralelogramo.

Solución la Figura 3.23 muestra que los lados del paralelogramo son $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$

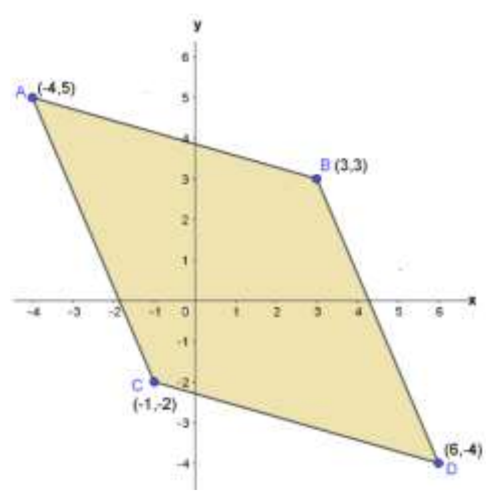


Figura 23

Probemos que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y que $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$: $m_{\overline{AB}} = \frac{3-5}{3-(-4)} = \frac{-2}{7}$, $m_{\overline{CD}} = \frac{-4-(-2)}{6-(-1)} = \frac{-2}{7}$.

Primera conclusión: los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos.

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$: $m_{\overline{AC}} = \frac{5-(-2)}{-4-(-1)} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$, $m_{\overline{CD}} = \frac{3-(-4)}{3-6} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$.

Segunda conclusión: los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelos.

Como el cuadrilátero ABCD tiene dos pares de lados paralelos, entonces, los vértices dados corresponden a un paralelogramo.

Ejemplo 19

Demuestre que el triángulo de vértices $A(7,5), B(2,3)$ y $C(6,-7)$ es rectángulo

Solución en la Figura 24 se muestra el triángulo rectángulo.

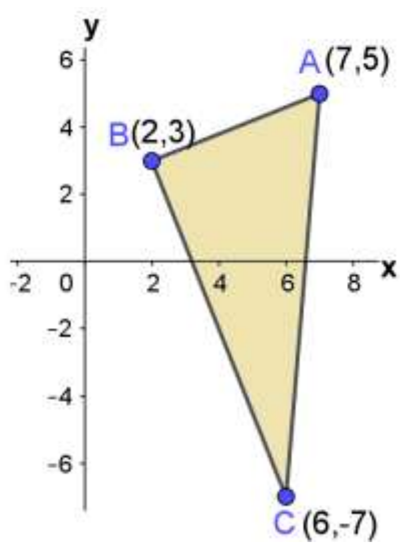


Figura 24

Para demostrar que el triángulo ABC es rectángulo haremos uso del concepto de pendiente de una recta.

Al observar la Figura 24, el ángulo que está en el vértice B parece ser de 90^0.Para comprobar que $\angle B$ es un ángulo recto vamos a obtener la pendiente del lado BA y la del lado BC. Si multiplicamos esas dos pendientes y obtenemos -1, estamos comprobando que esos dos lados son perpendiculares, y si son perpendiculares entre ellos, entonces el ángulo que forman es de 90^0. Luego el triángulo ABC es rectángulo.

$$m_{AB} = \frac{3-5}{2-7} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}\ ,\quad m_{BC} = \frac{-7-3}{6-2} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

Multipliquemos las pendientes:

$$m_{AB}.m_{BC} = -1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right).\left(\frac{-5}{2}\right) = -1$$

$$\frac{-10}{10} = -1$$

Como $m_{AB}.m_{BC} = -1$, entonces el lado AB es perpendicular al lado BC, y escribimos $AB \perp BC$. De esta forma podemos afirmar que los vértices A, B y C corresponden a un triángulo rectángulo.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1) Encuentre la distancia entre los puntos
   a. $A = (-1,7)\ y\ B = (-4,6)$
   b. $A = (-4,-7)\ y\ \ B = (7,5)$
2) Si A es el punto $(-2,3)$ y B es el punto $(x,3)$ encuentre x tal que $\overline{AB} = 8$
3) En los siguientes ejercicios: localice los puntos A y B, dibujando el segmento de recta entre ellos; encuentre la distancia no dirigida entre A y B; y halle el punto medio del segmento de recta que va de A a B
   a. $A(1,3)\ y\ B(-2,7)$
   b. $A(8,5)\ y\ B(3,-7)$
   c. $A(6,-5)\ y\ B(2,-2)$
4) Los extremos del segmento dirigido P_1P_2 son $P_1(7,5)\ y\ P_2(-4,-4)$. Halle las coordenadas del punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en la razón $\frac{P_1P}{pp_2} = \frac{1}{3}$. Haga la gráfica
5) Encuentre la longitud de las medianas del triángulo cuyos vértices son $A(2,3), B(3,-3)\ y\ C(-1,-1)$
6) Aplicando distancia entre dos puntos compruebe si los vértices pertenecen a un triángulo equilátero, isósceles o escaleno
   a. $A(3,0),\ B(-1,0)\ y\ C\left(1, 2\sqrt{3}\right)$
   b. $A(-7,2),\ B(3,-4)\ y\ C(1,4)$
   c. $A(-1,-4), B(3,1)\ \ y\ C(-2,5)$
7) Dibuje la recta que pasa por los puntos A y B y determine la pendiente de la recta

a. $A(2,-3)\ y\ B(-4,3)$
b. $A(1,4)\ y\ B(6,5)$
c. $A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\ y\ B\left(-\frac{5}{6},\frac{2}{3}\right)$

8) Compruebe por medio de pendiente que los tres puntos son los vértices de un triángulo rectángulo $A(3,1), B(6,0)\ y\ C(4,4)$
9) Compruebe mediante pendiente que los puntos $A(-2,-1), B(2,1)\ y\ C(4,2)$ están alineados (coloniales)
10) Dados dos puntos de la recta encuentra si las rectas son paralelas o perpendiculares
    a. $l_1: A(2,14), B(4,20)\ \ y\ l_2: C(5,9), D(-1,-9)$
    b. $l_1: A(-2,-12), B(4,3)\ \ y\ \ l_2: C(3,-7), D(6,-8)$
    c. $l_1: A(0,1), B(-1,-1)\ \ y\ \ l_2: C(0,4)\ y\ D(-2,5)$