UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 14- Unidad 4: *Rectas y planos en el espacio.*

SESIÓN 1: CORTO 2 SOBRE PRODUCTO ESCALAR, PRODUCTO VECTORIAL Y TRIPLE PRODUCTO ESCALAR. 1ejercicio de producto escalar, 1 ejercicio de producto vectorial y 2 ejercicios de triple producto escalar. 25% cada uno.

SESIÓN 2. Planos en el espacio: ecuación vectorial, ecuación general, ecuación punto-normal, planos paralelos y perpendiculares.

PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Un plano en el espacio está determinado por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano y un sector normal $\vec{n}$ que es ortogonal al plano. Este vector ortogonal $\vec{n}$ se llama vector normal. Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera en el plano, y sea $\overrightarrow{r_0}$ y $\vec{r}$ los vectores posición de P_0 y P. Entonces el vector $\vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ se representa por $\overrightarrow{P_0P}$.

El vector normal $\vec{n}$ es ortogonal a cualquier vector en el plano dado. Particularmente $\vec{n}$ es ortogonal al vector $\vec{r} - \overrightarrow{r_0}$ por lo que se cumple

$$\vec{n}.(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) = 0$$

Esta ecuación se llama **ecuación vectorial del plano.**

La figura 1 muestra una parte del plano que pasa por P_0 y la representación del vector normal $\vec{n}$ cuyo punto inicial es P_0

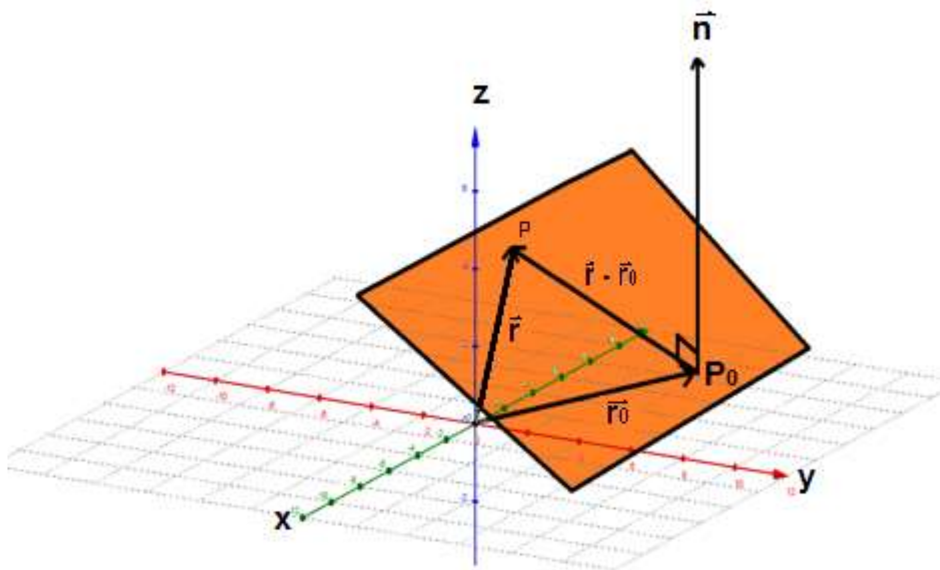


Figura 1

Una ecuación escalar del plano se obtiene conociendo un punto del plano y la dirección de un vector normal.

Sea $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$, $\vec{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$.

Entonces la ecuación vectorial $\vec{n}.(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) = 0$ se convierte en

$$\langle a, b, c \rangle = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

0

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Esta ecuación se le da el nombre de **punto-normal** de la ecuación de un plano que pasa a través de $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con vector normal $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$.

Ejemplo 1

Obtén la ecuación del plano que contiene al punto $(3, -1{,}7)$ y tiene al vector $\vec{n} = \langle 4{,}2, -5 \rangle$ como un vector normal. Determine las intersecciones con los ejes y dibuje el plano.

Solución

Haciendo $a = 3, b = 4, c = 2, x_0 = 0, y_0 = 2 \;\; y \;\; z_0 = 2$ en la ecuación punto – normal vemos que una ecuación del plano es

$$3(x - 0) + 4(y + 2) + 2(z - 2) = 0$$

o,

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0$$

Para hallar la intersección con el eje x, hacemos $y = z = 0$ en esta ecuación y obtenemos $x = 4$. De manera parecida, la intersección con el eje y es 3 y la intersección con el eje z es 6.

La gráfica se muestra en la Figura 2

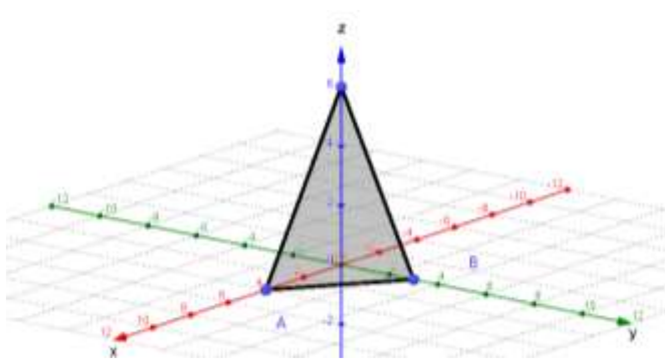


Figura 2

Al simplificar los términos de la ecuación punto normal como se hizo en el ejemplo 8, se puede reescribir la ecuación del plano como

$$ax + by + cz = d$$

donde $\quad d = ax_0 + by_0 + cz_0$

Esta ecuación se llama **ecuación general o ecuación lineal** en x, y y z.

También podemos decir que si a, b y c no son cero, entonces la ecuación general $ax + by + cz = d$ representa un plano con vector normal $\langle a, b, c\rangle$.

Ejemplo 2

Encuentre la ecuación general del plano que contiene a la recta dada y al punto $P(5,6,7)$.

$$L: \frac{x-3}{-2} = y + 2 = \frac{z-5}{-2}$$

Solución

Un punto de la recta es $Q(3,-2,5)$

El vector $\overrightarrow{PQ} = \langle -2, -8, -2\rangle$

El vector direccional de la recta es $\vec{v} = \langle -2,1,2\rangle$

El vector normal $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \langle -14,8,-18\rangle$

La ecuación punto-normal es

$$-14(x-5) + 8(y-6) - 18(z-7) = 0$$

Y la ecuación general es

$$7x - 4y + 9z - 74 = 0$$

Ejemplo 3

Encuentre la ecuación general del plano que contiene los siguientes puntos $A(3,2,-1), B(0,-2,5) y\ C8-2,0,1)$ de dos formas: a) por medio del producto vectorial y b) sin hacer uso del producto vectorial.

Solución

a) Esquema gráfico

Esquema gráfico.

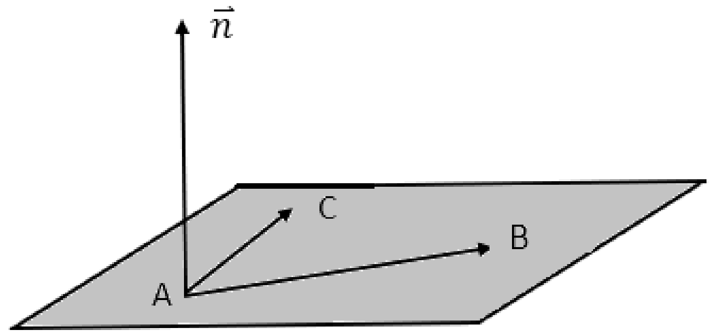


Figura 3

Encontramos primero los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \langle -3,-4,6\rangle$ y $\overrightarrow{AC} = \langle -5,-2,2\rangle$

El vector normal al plano es $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & -4 & 6 \\ -5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \langle 4,-24,-14\rangle$

Tomando un punto de los tres, digamos $A(3,2,-1)$, y con el vector normal

$\vec{n} = \langle 4,-24,-14\rangle$ se obtiene la ecuación punto – normal del plano

$4(x-3) - 24(y-2) - 14(z+1) = 0$, que desarrollando y simplificando nos lleva a la ecuación general:

$$2x - 12y - 7z + 11 = 0$$

b) Como el vector normal $\vec{n} = \langle a,b,c\rangle$ es ortogonal a los vectores

$\overrightarrow{AB} = \langle -3,-4,6\rangle$ y $\overrightarrow{AC} = \langle -5,-2,2\rangle$ se cumple que $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ y $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

Hacemos $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$

$\langle a,b,c\rangle.\langle -3,-4,6\rangle = -3a - 4b + 6c = 0$ Ec1

$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\langle a,b,c\rangle.\langle -5,-2,2\rangle = -5a - 2b + 2c = 0$ Ec2

Simultaneando las dos ecuaciones

$-3a - 4b + 6c = 0$ Ec1

$-5a - 2b + 2c = 0$ Ec2

Obtenemos $a = \frac{-2c}{7}$ y $b = \frac{12c}{7}$ y $c = c$

De tal manera que las componentes del vector normal son:

$\vec{n} = \langle a,b,c\rangle = \langle \frac{-2c}{7}, \frac{12c}{7}, c\rangle = \langle -2,12,7\rangle$ (Por $c = 7$)

Con el vector normal $\vec{n} = \langle -2,12,7\rangle$ y un punto del plano $C(-2,0,1)$ por ejemplo; tenemos

$$-2(x+2) + 12(y) + 7(z-1) = 0$$

$$-2x - 4 + 12y + 7z - 7 = 0$$

$$-2x + 12y + 7z - 11 = 0 \leftrightarrow 2x - 12y - 7z + 11 = 0$$

Ejemplo 4

Determine la ecuación general del plano que contiene al punto $(4,3,2)$ y es perpendicular a los dos planos $\mathscr{P}_1 : 2x - y + z = 10$ y $\mathscr{P}_2 : 3x + 2y - 5z = 60$

Solución

Esquema gráfico.

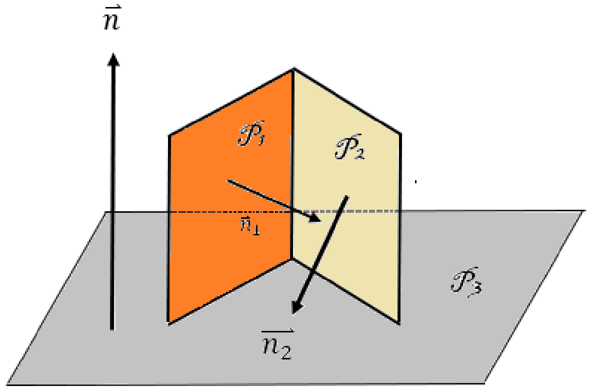


Figura 4

Sean $\mathscr{P}_1 : 2x - y + z = 10$ y $\mathscr{P}_2 : 3x + 2y - 5z = 60$ las ecuaciones de los dos planos perpendiculares al plano que se busca $\mathscr{P}_3 : ax + by + cz = d$

Los respectivos vectores normales son $\overrightarrow{n_1} = \langle 2, -1, 1 \rangle$ y $\overrightarrow{n_2} = \langle 3, 2, -5 \rangle$, y

$\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ el vector normal al plano 3.

Como el plano $\mathscr{P}_3$ es perpendicular a los dos planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$, entonces el vector $\vec{n}$ es perpendicular a cada uno de los vectores normales a los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$.

De esta manera el vector normal $\vec{n}$ será el producto cruz de los otros dos vectores normales.

$$\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \langle 3, 13, 7 \rangle$$

Tomando el punto $(4,3,2)$ y el vector normal $\vec{n} = \langle 3, 13, 7 \rangle$, encontramos la ecuación punto_ normal del plano:

$$3(x - 4) + 13(y - 3) + 7(z - 2) = 0$$

Distribuyendo y simplificando llegamos a determinar la ecuación general;

$$3x + 13y + 7z - 65 = 0$$

Ejemplo 5

Encuentre la ecuación punto – normal del plano que contiene a las rectas

$$L_1: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{-2} \ ; \ L_2: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{6}$$

Esquema gráfico.

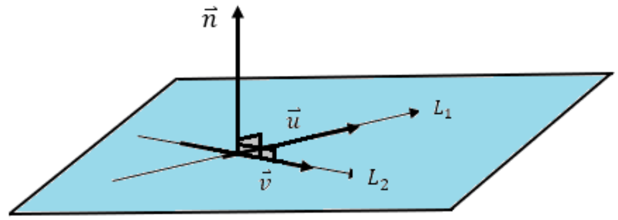


Figura 5

Solución

El vector normal al plano es el producto cruz de los vectores direccionales de cada recta.

Un punto de L_1 es $(1,2,4)$ y su vector direccional es $\vec{u} = \langle -4,3,-2 \rangle$

El vector direccional de L_2 es $\vec{v} = \langle -1,1,6 \rangle$.

El vector normal $\vec{n}$ al plano es el producto cruz de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \langle 20,26,-1 \rangle$$

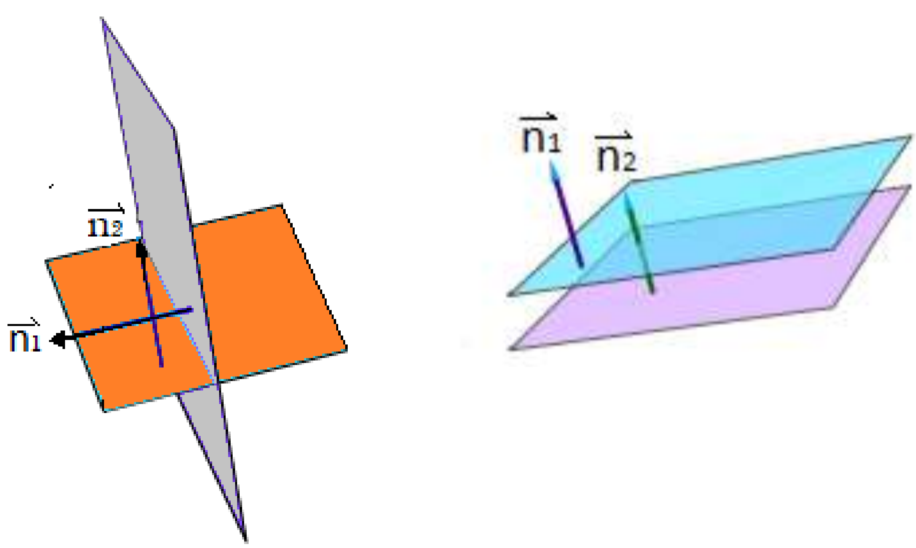
Tomando el punto $(1,2,4)$ de L_1 y sustituyendo en la ecuación punto - normal, tenemos la ecuación pedida:

$$20(x-1) + 26(y-2) - (z-4) = 0$$

Planos perpendiculares y paralelos

La Figura 12 ilustra la definición respecto a los planos perpendiculares y paralelos.

Figura 6



a) Planos perpendiculares

b) planos paralelos

Dos planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ con vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$,respectivamente ,son

$i)$ perpendiculares si $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0$ y

$ii)$ paralelos si $\overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}$, para algún escalar $k \neq 0$.

Ejemplo 6

¿Son paralelos o perpendiculares los siguientes planos?

a) $\mathscr{P}_1$: $5x - 3y + z = 4$, $\mathscr{P}_2$: $x + 4y + 7z = 1$

b) $\mathscr{P}_1$: $3x + y - 4z = 3$, $\mathscr{P}_2$: $-9x - 3y + 12z = 4$

Solución

a) Los respectivos vectores normales a los dos planos son

$$\overrightarrow{n_1} = \langle 5, -3, 1\rangle \quad y \quad \overrightarrow{n_2} = \langle 1,4,7\rangle$$

Como $\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{4} \neq \frac{1}{7}$, los dos vectores no son proporcionales, luego los planos no son paralelos.

Veamos si los planos son perpendiculares

Como $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = \langle 5, -3, 1\rangle.\ \langle 1,4,7\rangle = (5)(1) + (-3)(4) + (1)\ (7)$

$$= 5 - 12 + 7 = 0.$$

Entonces los vectores normales son perpendiculares y, por tanto, los planos son perpendiculares.

b) Los vectores normales de estos dos planos son

$$\overrightarrow{n_1} = \langle 3,1,-4\rangle \quad y \quad \overrightarrow{n_2} = \langle -9, -3, 12\rangle$$

Los vectores normales son paralelos ya que

$$\overrightarrow{n_1} = -\tfrac{1}{3}\overrightarrow{n_2}$$

$$\langle 3,1,-4\rangle = \tfrac{-1}{3}\langle -9, -3, 12\rangle$$

Y los planos son paralelos.

<u>EJERCICIOS PARA PRACTICAR.</u>

1. Encuentre el plano que pasa por $(2,1,-1)$ y perpendicular a la recta de intersección de los planos

$2x + y - z = 3$

$x + 2y + z = 2$

2. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares y cuáles son paralelos.

a) $2x - y + 3z = 1$

b)$x + y - 1.5z = 2$

c) $-5x + 2y + 4z = 0$

d) $x + 2y + 2z = 9$

e) $-8x - 8y + 12z = 1$

f) $-2x + y - 3z = 5$

3. Determina cuáles de los siguientes planos son perpendiculares a la recta:

$x = 4 - 6t; y = 1 + 9t, z = 2 + 3t$

a) $4x + y + 2z = 1$

b) $2x - 3y + z = 4$

4. Encuentre el punto de intersección de las rectas

$x = 1 + 2t, y = 2 + 3t, z = 3 + 4t$, y $x = 2 + s, y = 4 + 2s, z = -1 - 4s$; y luego encuentre el plano determinado que pasa por esas rectas.