UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 1- Unidad 1: Los números complejos.

Sesión 1: Los Números Complejos, Definición, Suma y Producto de números Complejos, Igualdad de números complejos, Plano Complejo, Módulo, Conjugado y Opuesto de un número complejo.

1. Los números complejos. Introducción

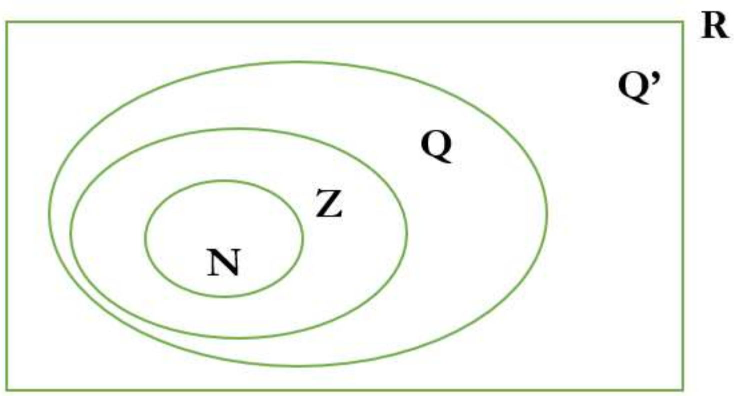
El ser humano, a lo largo de su desarrollo académico, se ve expuesto a los sistemas numéricos. Comenzando por los números con los que, de manera natural, comienza a contar, así: 1, 2, 3, 4, etc., ¡los números naturales! (**N**).

Al ir avanzando se tuvo la necesidad de representar cantidades que no estaban en el conjunto de los naturales, se necesitaba representar: la ausencia de cantidad, cantidades inferiores de cero, por ejemplo, eso concluyó en concebir el conjunto de los números enteros (**Z**).

Este conjunto, los enteros, tiene sus limitantes, pues en la naturaleza, en la vida real, no todo se presenta en cantidades enteras, de hecho, ¡casi todo viene en fracciones!!!, de ahí el nombre del siguiente conjunto: Los números fraccionarios o quebrados, también llamado los Números Racionales (**Q**). Los números racionales son un gran apoyo en los cálculos matemáticos, de una manera sencilla podemos decir que un número es racional si este se puede escribir como una fracción indicada de un número sobre otro, así: el número 1 lo puedo reescribir como 2/2, 50/50, etc. De igual manera el número 0.50 equivale a ½, 0.75 equivale a ¾, etc. por lo tanto, estos números son racionales. Aún más 0.3333333…. lo podemos reescribir como 1/3. Pero se presentó un problema, existen algunos números decimales que no se pueden reescribir como una fracción común, a estos números se les dio el nombre de Números Irracionales (**Q'**), ejemplos de estos números son: π, e, $\sqrt{2}$, etc.

De la unión de los conjuntos de los Números Racionales con los Números Irracionales obtenemos el conjunto de los Números Reales (**R**), que son todos los números que hemos utilizado hasta el día de hoy, todos los que hemos usado en nuestros estudios anteriores, han sido números reales.

Esta breve descripción de los conjuntos numéricos lo podemos representar en el siguiente diagrama:



Estos números fueron suficientes hasta que se tuvo que dar solución a problemas en los que se debe calcular la raíz cuadrada de una cantidad negativa, por ejemplo: $\sqrt{-4}$. De acá la necesidad de expandir el conjunto de números reales.

Es conocido como resolver ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo:

Ejemplo 1. Resolver $x^2 + 1 = 0$.

Esta ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales, ya que:

$x^2 + 1 = 0$ Despeja la variable

$x^2 = -1$ Extrae raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$

$x = ??????$ ¿Cuál es el resultado de sacar raíz cuadrada de -1?

Entonces; ¿cómo resolver este tipo de ecuaciones? Afortunadamente la solución es sencilla e ingeniosa.

La Unidad Imaginaria

En 1,777, el matemático suizo Leonhard entrodujo el símbolo i para representar la unidad imaginaria, denominó al valor $\sqrt{-1}$ como la **unidad imaginaria (i),** entonces, reescribimos la ecuación anterior y tenemos:

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-1}$$
$$\boldsymbol{x = \pm\, i}$$

A partir de ahora el valor **i =** $\sqrt{-1}$ se denominará la **Unidad Imaginaria**.
Otra forma de escribir la unidad imaginaria es: $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Ejemplo 2. Resolver $x^2 + 25 = 0$

$x^2 + 25 = 0$ — Despejando "***x***"

$x^2 = -25$ — Extraer raíz cuadrada a ambos términos de la ecuación

$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)(25)}$ — Aplicando propiedad de radicales: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$x = \pm\sqrt{-1} \pm \sqrt{25}$

$x = \pm(i * 5)$ — Sustituyendo $\sqrt{-1}$ por **i**, la unidad imaginaria.

$\boldsymbol{x = \pm 5i}$

Ejemplo 3. Resolver $x^2 + 7x + 12 = 0$

Esta es una ecuación cuadrática que podemos resolver de dos maneras diferentes: Utilizando factorización o por la fórmula general.

En el primer caso debemos recordar cómo resolver trinomios de la forma: $ax^2 + bx + c$, cuando **a,** el termino que acompaña a la $\boldsymbol{x^2}$ sea 1 o diferente de 1.

En el segundo caso utilizaremos la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, esta es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Lo haremos por factorización, así:

$$x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$(x + 4)(x + 3) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \vdots \quad x + 3 = 0$$

$$x_1 = -4 \ \wedge \ x_2 = -3$$

¡¡Ambas raíces son reales!!

Ejemplo 4. Resolver $x^2 + 6x + 13 = 0$

$x^2 + 6x + 13 = 0$

$(x + ???)(x + ???) = 0$

Resultará imposible hallar dos números que multiplicados den 13 y sumados 6
¿Entonces?
¡¡¡¡Utilicemos la fórmula general!!!!

En la ecuación: $x^2 + 6x + 13 = 0;$ $\quad a = 1, \quad b = 6 \quad y \quad c = 13.$

Sustituyendo en la fórmula general

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2}$$

La última fracción toma dos caminos, uno siguiendo el signo "**+**" y el otro siguiendo el signo "**–** ", así:

$$x_1 = \frac{-6+4i}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-6-4i}{2}$$

Luego:

$$\boldsymbol{x_1 = -3 + 2i \quad \text{y} \quad x_2 = -3 - 2i}$$

Noten porque no fue posible hallar los números utilizando factorización.
¡Obtenemos números imaginarios!!!
al tener que sacar raíz cuadrada a: -16.

En las raíces anteriores, los números imaginarios son: **2i** y **-2i.**

Las combinaciones de estos números imaginarios con números reales dan como resultado los denominados: **Números Complejos**, de los cuales hablaremos en detalle a continuación.

Definición de Números Complejos

Si **a** y **b** son números reales cualesquiera, se define un número complejo **z**, siendo **z=a + bi**
Al valor "**a**" se le denomina **la parte real** y al valor "**b**" se le conoce como **la parte imaginaria**.
En lenguaje matemático, podemos definir el conjunto de los Números Complejos así:

$$\boldsymbol{C = \{\, a + bi \,/\, a \ y \ b \ \in R ; i = \sqrt{-1} \,\}}$$

Ejemplos de números complejos son:

- **3-2i** La parte real es 3 y la imaginaria es -2
- $-\frac{1}{2}$**+4i** La parte real es $-\frac{1}{2}$ y la imaginaria es 4
- **-3i** La parte real es 0 y la parte imaginaria es -3
- **7** La parte real es 7 y la imaginaria es 0

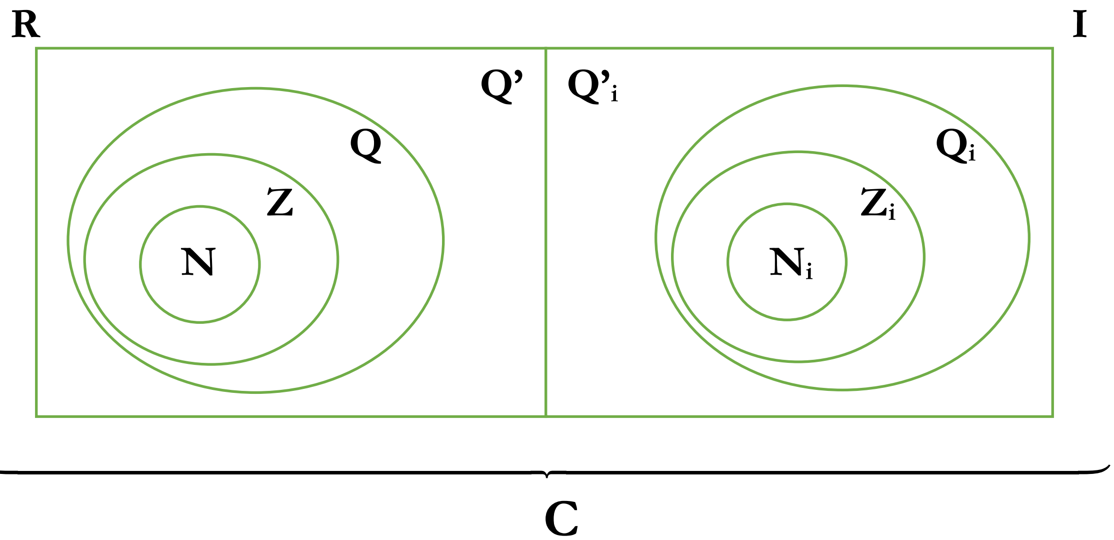
Note que la parte imaginaria es únicamente el número que acompaña a la "i"

Es interesante destacar que todo real es un complejo, ya que éste se puede escribir en la forma **a+bi.** Podemos decir: **R** ⊂ **C**, lo que se lee: "Los reales están incluidos en los complejos"

Por ejemplo, el número real, **7** se puede expresar como un número complejo en su forma binaria, así: **7 + 0i**.

También es necesario destacar que un número imaginario, llamado imaginario puro, **bi** puede reescribirse como un número complejo en su forma binomial, así, por ejemplo, el número **5i** se puede reescribir como: **0 + 5i**.

Podemos hacer uso del siguiente esquema para interpretar lo que acabamos de plantear.



De este esquema podemos intuir que cada número real tiene su "igual" imaginario. Podríamos considerar que los números imaginarios son la "imagen" de los números reales, y la unión de los elementos de ambos conjuntos constituyen el conjunto mas grande de números, los **Números Complejos** (**C**)

2. Operaciones con Números Complejos

En los números complejos, como sistema de numérico, sus elementos se pueden operar entre sí. Cabe mencionar que el conjunto de números complejos es un campo[3] de números cerrado, es decir que, al operar un par de elementos complejos, el resultado será también un complejo.
Como se puede intuir, los números complejos, al igual que los números reales se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a una potencia y extraerles raíces. Lo cual veremos a continuación.

Suma de Complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, Entonces $z_1 + z_2$ es:

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

En palabras comunes, "**la suma de dos números complejos se obtiene sumando la parte real de uno de los números con la parte real del otro, y la parte imaginaria de uno con la parte imaginaria del otro**".

Ejemplo 5. Dados: $z_1 = -1 + 2i \quad y \quad z_2 = 7 - 5i$, efectuar: $z_1 + z_2$

La parte real:

$$-1 + 7$$
$$6$$

La parte imaginaria:

$$2i + (-5i)$$
$$2i - 5i$$
$$-3i$$

Entonces: $\boldsymbol{z_1 + z_2 = 6 - 3i}$

Ejemplo 6. Efectuar: $\left(-\frac{3}{4} - 8i\right) + \left(\frac{1}{4} + 2i\right)$

Luego tenemos:

$$\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) + (-8 + 2)i$$
$$-\frac{1}{2} + (-6)i$$
$$\boldsymbol{-\frac{1}{2} - 6i}$$

Ejemplo 7. Efectuar: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$
$$\frac{3}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

Después de racionalizar obtenemos:

$$\boldsymbol{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

Resta de Complejos

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, Entonces $z_1 - z_2$ es:

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

En palabras comunes, "**la resta de dos números complejos se obtiene restando la parte real de uno de los números con la parte real del otro, y la parte imaginaria de uno con la parte imaginaria del otro**".

Ejemplo 8. Dados: $z_1 = \frac{2}{5} - i \quad y \quad z_2 = \frac{1}{2} - 4i$, efectuar: $z_2 - z_1$

$$z_2 - z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(-4 - (-1)\right)i$$

$$\boldsymbol{z_2 - z_1 = \frac{1}{10} - 3i}$$

Ejemplo 9. Efectuar: $(-2 + 3i) + (4 - 2i) - (5 - 9i)$

Sumamos los primeros dos números

$(-2 + 4) + (3 - 2)i$

$2 + i$

Ahora efectuamos la resta:

$(2 + i) - (5 - 9i)$
$(2 - 5) + \left(1 - (-9)\right)i$
$\boldsymbol{-3 + 10i}$

Es necesario hacer notar que los números complejos cumplen ciertas propiedades por tratarse de un sistema numérico.

Ya mencionamos que los números complejos cumplen la **ley de cierre o cerradura**, es decir que, al operar, en nuestro caso sumar o restar, números complejos, se obtiene otro complejo, como lo podemos verificar en cada una de las respuestas obtenidas en los ejemplos anteriores.

También se debe destacar que la suma de complejos es **Conmutativa**, esto quiere decir que el orden de los sumandos no altera el total o la suma, es decir:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

No así la resta, la resta o sustracción de números complejos **NO** es **Conmutativa**, es decir:

$$z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$$

Una propiedad de los números complejos que es importante, y no queremos dejar de lado es la llamada **Propiedad del elemento neutro**, esta propiedad es aquella que establece que dentro del conjunto de números existe un elemento que tiene la característica de que, al operarlo con otro número, el resultado sigue siendo el mismo número. Para la suma de complejos, el elemento neutro es $\boldsymbol{0 + 0i}$.

Por ejemplo, Al efectuar: $(9 - 3i) + (0 + 0i)$, Obtenemos: $9 - 3i$, ya que:

$$= (9 + 0) + (-3 + 0)i = 9 - 3i,$$ que resulta ser el mismo número!!!

La última propiedad que quiero resaltar es la denominada **Propiedad del elemento inverso o recíproco**, esta propiedad establece que para cada elemento del conjunto existe un elemento inverso tal que al operarlo con el número original nos da como resultado el elemento neutro de dicha operación. A ver, en nuestro caso estamos hablado de la operación suma de complejos, entonces si $z = a + bi$, entonces, ¿existe otro número, denominado $z_r = x + yi$, tal que: $z + z_r = 0 + 0i$?

$$z + z_r = (a + bi) + (x + yi) = 0 + 0i$$
$$= (a + x) + (b + y)i = 0 + 0i$$ De acá obtenemos:

$a + x = 0 \quad y \quad b + y = 0$ Por igualdad de números complejos

Entonces:

$x = -a \quad y \quad y = -b$ Por lo tanto, el número $\boldsymbol{z_r}$ es:

$z_r = -a - bi,$ Este número es el inverso aditivo de $\boldsymbol{z}$

Por ejemplo, el inverso aditivo de: a) $3 + 4i\ es - 3 - 4i$

b) De $-2 + \frac{1}{2}i\ \ es\ \ 2 - \frac{1}{2}i$

c) De $1 + i\ es - 1 - i$

y así sucesivamente, ya que, al sumar cada pareja entre sí, obtendremos, sin excepción $0 + 0i$.

En el caso de la suma de complejos, al inverso aditivo se le conoce simplemente como el **Opuesto** de dicho número. Existen tantos números opuestos como números complejos, un opuesto para cada número, por lo tanto, hay infinitos números inversos.

El producto o Multiplicación de Complejos

La multiplicación de dos números complejos debe realizarse como si se tratase del producto de dos polinomios, así:

Sean: $z_1 = a + bi \quad y \quad z_2 = c + di$, entonces $z_1.z_2 = (a + bi)(c + di)$

Utilizando el algoritmo de solución para encontrar el producto de polinomios, tenemos:

$z_1.z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$

$z_1.z_2 = ac + adi + bci + bd(-1)$ Sustituyendo $i^2\ por - 1$.

$z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ Agrupando términos semejantes, Reales con Reales e imaginarios con imaginarios.

Ejemplo 10. Efectuar: $(11 + 4i)(1 - i)$

$$
\begin{aligned}
&= 11 - 11i + 4i - 4i^2 \\
&= 11 - 11i + 4i - 4(-1) \\
&= 11 - 11i + 4i + 4 \\
&= (11 + 4) + (-11 + 4)i \\
&= \boldsymbol{15 - 7i}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 11. Dados $z_1 = 6 - 2i,\ \ z_2 = 9 + 7i\ \ y\ \ z_3 = -1 + 5i$

Calcular: $(z_2 + z_1)(z_3 - z_2)$

$$z_2 + z_1 = (9 + 6) + \big(7 + (-2)\big)i = 15 + 5i$$
$$z_3 - z_2 = (-1 - 9) + (5 - 7)i = -10 + (-2)i = -10 - 2i$$
$$\begin{aligned}(z_2 + z_1)(z_3 - z_2) &= (15 + 5i)(-10 - 2i)\\ &= -150 - 30i - 50i - 10i^2\\ &= -150 - 30i - 50i + 10\\ &= \boldsymbol{-140 - 80i}\end{aligned}$$

Tenemos que hacer notar que la operación producto en el conjunto de los números complejos es **Conmutativa**, es decir:

$$z_1 . z_2 = z_2 . z_1$$

La operación producto de complejos posee **Elemento neutro**, llamado también **Elemento identidad** y es: $\boldsymbol{1 + 0i}$, ya que la multiplicar un número complejo cualesquiera por $\boldsymbol{1 + 0i}$, nos da de resultado el mismo número.

Por, ejemplo $(2 + 4i)(1 + 0i) = 2 + 4i$, ya que: $= (2)(1) + (2)(0i) + (4i)(1) + (4i)(0i)$
$= 2 + 0 + 4i + 0 = 2 + 4i$

3. Igualdad de números complejos

¿Cuándo dos números complejos son iguales?

La respuesta a esta pregunta es sencilla, "Cuando la parte real de uno es igual a la parte real del otro, y la parte imaginaria de uno es igual a la parte imaginaria del otro".

En lenguaje matemático:

Sean $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, Entonces se dice que $z_1 = z_2$ sí y solo si:

$$a = c \qquad y \qquad b = d$$

Nótese que estamos utilizando la **forma binomial** de un número complejo para expresarlos

Ejemplo 12 Dados $z_1 = \sqrt{4} - 3i$ y $z_2 = 2 - \left(\frac{6}{2}\right)i$, Determine si $z_1 = z_2$

Para que $z_1 = z_2$ se debe cumplir que:

$\sqrt{4} = 2 \qquad y \qquad -3 = -\frac{6}{2}$ Ambas igualdades son ciertas, por lo tanto

Podemos concluir que:

$$\boldsymbol{z_1 = z_2}$$

Ejemplo 13. Encuentre el valor de "**x**" y "**y**" en la siguiente igualdad:

$$x + 2i = -5 + yi$$

En este caso tenemos: $x = -5 \quad y \quad 2 = y$, por lo tanto, la respuesta sería:

$$\boldsymbol{x = -5 \quad y \quad y = 2}$$

Ejemplo 14. Halle los valores de m y n para que la igualdad se cumpla

$$(2m - n) + (m + 2n)i = i$$

Procedemos a igualar arte real con real e imaginaria con imaginaria, así:

$2m - n = 0 \quad y \quad m + 2n = 1$ Observe que el número complejo de la derecha es un imaginario puro cuya parte real es cero.

Despejamos m de la primera ecuación, así.

$$2m - n = 0$$
$$2m = n$$
$$m = \frac{n}{2}$$

Ahora sustituimos m en la otra ecuación, así:

$$m + 2n = 1$$
$$\frac{n}{2} + 2n = 1$$
$$\frac{5}{2}n = 1$$
$$n = \frac{1}{\frac{5}{2}}$$
$$n = \frac{2}{5}$$

Ahora que sabemos cuánto vale n encontramos m, sustituyendo en la primera ecuación,

$$m = \frac{n}{2}$$
$$m = \frac{\frac{2}{5}}{2}$$
$$m = \frac{1}{5}$$

Por lo tanto, tenemos que:

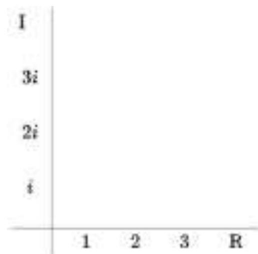
$$\boldsymbol{m = \frac{1}{5} \quad y \quad n = \frac{2}{5}}$$

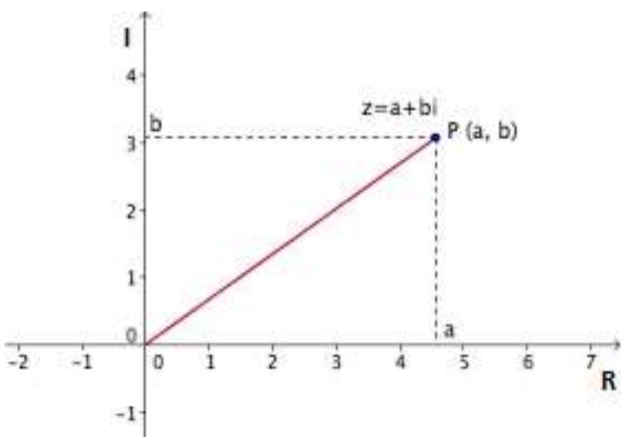
4. Plano Complejo o Plano de Argand

Al ir evolucionando el estudio de los números complejos, fue necesario hacer una presentación geométrica de dichos números. Para ello se ideó el **plano complejo** o **plano de Argand**, en honor al matemático Jean Robert Argand (1806), el cual, básicamente es el plano cartesiano o plano XY, que está formado por dos ejes que representan a las rectas de números reales, en el caso del plano complejo, se sustituye el eje de las ordenadas o eje "**Y**", por el eje de números imaginarios, así:

Al igual que los números reales representan puntos en las rectas reales, así los números complejos pueden ser ubicados en correspondencia biunívoca con los puntos del plano, del plano complejo, la parte real se representa en el eje de las abscisas o eje "**X**" y la parte imaginaria en el eje "**Y**", de aquí se sobreentiende que un número complejo en la forma $\boldsymbol{a+bi}$, puede representarse como un par ordenado que se ubica en el plano complejo, así:

$$z = a + bi = (a, b)$$





Al representar un número complejo como un par ordenado $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, se le da el nombre de **forma rectangular** de un número complejo.

Nota que al escribir el número complejo en forma rectangular únicamente se escriben los números que forman el número complejo, la parte real en "**x**" y la parte imaginaria en "**y**", es decir, solo el valor $\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{b}$.

Antes de continuar con la división de números complejos debemos ser capaces de encontrar el conjugado de un número complejo, ya que este contenido es necesario dominarlo para poder realizar la división de complejos.

5. Módulo, Conjugado y Opuesto de un número complejo.

<u>Definición</u>

Sea $\boldsymbol{z = a + bi}$ un número complejo, se dice que $\boldsymbol{\bar{z}}$ es su conjugado, si y solo si $\boldsymbol{\bar{z} = a - bi}$.

Si nos fijamos atentamente lo único que cambia de un numero

Complejo y su respectivo conjugado es el signo de la Parte imaginaria. Solo cambia su parte imaginaria.

Ejemplo 15. Determine el conjugado de los siguientes números complejos:

Número Complejo dado	Conjugado del número complejo
$a)\ 43 - 52i$	$a)\ 43 + 52i$
$b) - 74 + 73i$	$b) - 74 - 73i$
$c)\ \sqrt{5} - \sqrt[3]{2}i$	$c)\ \sqrt{5} + \sqrt[3]{2}i$
$d)\ 3i$	$d) - 3i$
$e) - 7$	$e) - 7$

Propiedad de los números complejos conjugados.

Estudiaremos algunas propiedades de los conjugados de los números complejos.

P1 El conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número complejo

$$\bar{\bar{\boldsymbol{z}}} = \boldsymbol{z}$$

P2 El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados

$$\overline{\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}} = \overline{\boldsymbol{z_1}} + \overline{\boldsymbol{z_2}}$$

P3 El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados

$$\overline{\boldsymbol{z_1} \,.\, \boldsymbol{z_2}} = \overline{\boldsymbol{z_1}}.\overline{\boldsymbol{z_2}}$$

P4 La suma de un número complejo con su respectivo conjugado es igual al doble de la parte real

$\boldsymbol{z} + \bar{\boldsymbol{z}}$ **= Doble de la parte real**

<u>Demostración</u>:

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$,

Donde **a** es la parte real y **b** es la parte imaginaria del número complejo, entonces:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi)$$
$$= (a + a) + (b - b)i$$
$$= \boldsymbol{2a}$$ <u>**lqqd** (Lo que quería demostrar)</u>

P5 La resta de un número complejo con su respectivo conjugado es igual al doble de la parte Imaginaria.

$\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}}$ **= Doble de la parte imaginaria**

<u>Demostración</u>:

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$,

Donde **a** es la parte real y **b** es la parte imaginaria del número complejo, entonces:

$$\begin{aligned} z-\bar{z} &= (a+bi)-(a-bi) \\ &= (a-a)+\big(b-(-b)\big)i \\ &= 0+(b+b)i \\ &= \boldsymbol{2b} \quad \underline{\textbf{lqqd}\text{ (Lo que quería demostrar)}} \end{aligned}$$

P6 El producto de un número complejo con su respectivo conjugado es igual a la suma del Cuadrado de la parte real con el cuadrado de la parte imaginaria.

$\boldsymbol{z\,.\,\bar{z}}$ **= El cuadrado de la parte real más el cuadrado de la parte imaginaria**

Demostración:

Sean $z=a+bi$ y $\bar{z}=a-bi$, entonces:

$$\begin{aligned} z\,.\,\bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= (a)(a)+(a)(-bi)+(bi)(a)-(bi)(-bi) \\ &= a^2-abi+abi-b^2i^2 \\ &= \boldsymbol{a^2+b^2} \quad \underline{\textbf{lqqd}} \end{aligned}$$

Aunque hay otras propiedades más relativas al conjugado de un número complejo, es la última propiedad la que utilizaremos con el fin de agilizar el proceso de dividir números complejos.

Opuesto de un número complejo

Definición

Sea $\boldsymbol{z=a+bi}$ un número complejo, se dice que **-z** es su OPUESTO, si y solo si **-z**$= \boldsymbol{-a-bi}$.

Ejemplo 16. Determine el opuesto de los siguientes números complejos:

a) El Opuesto de $4-2i$ es $-4+2i$
b) El opuesto de $-74+73i$ es $74-73i$
c) El opuesto de -5 es 5
d) El opuesto de $3i$ es $-3i$

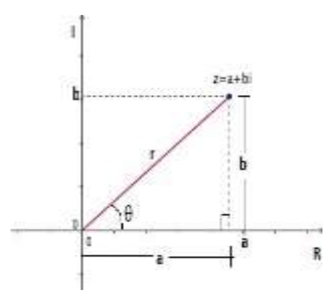
Módulo de un Número Complejo

El módulo de un número complejo, también llamado Valor Absoluto de z, se obtiene así:

Hallando el **módulo** de $z=a+bi$

Para ello consideremos el plano de Argand, y podremos observar que al representar el número complejo se forma un triángulo rectángulo.

En este triángulo rectángulo, la distancia $\boldsymbol{r}$, es la hipotenusa de dicho triángulo y los catetos son los valores $\boldsymbol{a}$ (La parte real) y $\boldsymbol{b}$ (La parte imaginaria) del número representado, luego aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos en valor de $\boldsymbol{r}$, que es:



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ Este valor recibe el nombre **de módulo o valor absoluto**

Ejemplo 17. Si $\boldsymbol{z = 2 - 3i}$ Hallar su módulo (r)

En este caso a=2 y b= -3, por lo tanto la operación nos resulta:

$$r = \sqrt{2^2 + (-3)^2}$$
$$r = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

<u>EJERCICIOS PARA PRACTICAR</u>

1. Completa la siguiente table a partir de los datos proporcionados en ella

Número Complejo	Parte Real	Parte Imaginaria	Conjugado	Opuesto	Módulo	¿Real o imaginario Puro?
$2 - 3i$						
$-\sqrt{3} + 4i$						
$-2i$						
7						
			$-5 - 6i$			
	8					
				$9 - 7i$		
		$-5i$				
					$\sqrt{2}$	
	-1	i				

2. Dados los números complejos:

$$z_1 = -4 + 3i$$
$$z_2 = 2 - 5i$$
$$z_3 = \frac{1}{2}$$
$$z_4 = -i$$

Calcular: a) $(z_3 - z_1)(z_1 z_2 + z_4)$

b) $\overline{z_4 z_1 - z_3}$

c) $|(z_1 + z_2)/z_4\overline{z_2}|$

3. Calcule el valor de $"x"e\ "y"$ para que se cumplan las siguientes igualdades:
   a) $(3 + xi) + (y + 3i) = 5 + 2i$
   b) $(2 + i)(2 - i)(+yi) = 1 - 4i$

4. Halla el valor de $"c"$ para que el producto $(3 - 6i)(4 + ci)$ sea un número:
   a) Real
   b) Imaginario puro

5. Halle el valor de $"z"$ si: $\boldsymbol{\frac{1+i}{z} - (2i + 1) = i}$

Propiedades de los números conjugados

Estudiaremos algunas propiedades de los conjugados de los números complejos.

P1 El conjugado del conjugado de un número complejo es el mismo número complejo

$$\bar{\bar{z}} = z$$

P2 El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

P3 El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados

$$\overline{z_1 \, . \, z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

P4 La suma de un número complejo con su respectivo conjugado es igual al doble de la parte real

$$z + \bar{z} = \textbf{Doble de la parte real}$$

<u>Demostración</u>:

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$,

Donde **a** es la parte real y **b** es la parte imaginaria del número complejo, entonces:

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi)$$
$$= (a + a) + (b - b)i$$
$$= \boldsymbol{2a}$$ **lqqd** <u>(Lo que quería demostrar)</u>

P5 La resta de un número complejo con su respectivo conjugado es igual al doble de la parte Imaginaria.

$$z - \bar{z} = \textbf{Doble de la parte imaginaria}$$

<u>Demostración</u>:

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$,

Donde **a** es la parte real y **b** es la parte imaginaria del número complejo, entonces:

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi)$$
$$= (a - a) + \big(b - (-b)\big)i$$
$$= 0 + (b + b)i$$
$$= \boldsymbol{2b}$$ **lqqd** <u>(Lo que quería demostrar)</u>

P6 El producto de un número complejo con su respectivo conjugado es igual a la suma del

Cuadrado de la parte real con el cuadrado de la parte imaginaria.

$\boldsymbol{z\,.\,\bar{z}} =$ **El cuadrado de la parte real más el cuadrado de la parte imaginaria**

Demostración:

Sean $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$, entonces:

$$z\,.\,\bar{z} = (a + bi)(a - bi)$$
$$= (a)(a) + (a)(-bi) + (bi)(a) - (bi)(-bi)$$
$$= a^2 - abi + abi - b^2i^2$$
$$= \boldsymbol{a^2 + b^2} \quad \textbf{lqqd}$$

Aunque hay otras propiedades más relativas al conjugado de un número complejo, es la última propiedad la que utilizaremos con el fin de agilizar el proceso de dividir números complejos.

Opuesto de un número complejo

Definición

Sea $\boldsymbol{z = a + bi}$ un número complejo, se dice que **-z** es su OPUESTO, si y solo si **-z**$= \boldsymbol{-a - bi}$.

Ejemplo 16. Determine el opuesto de los siguientes números complejos:

e) El Opuesto de $4 - 2i$ es $-4 + 2i$
f) El opuesto de $-74 + 73i$ es $74 - 73i$
g) El opuesto de -5 es 5
h) El opuesto de $3i$ es $-3i$

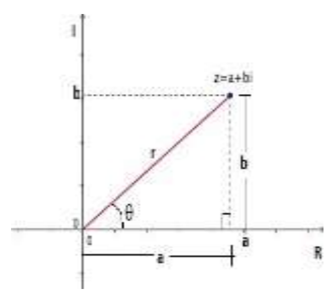
Módulo de un Número Complejo

El módulo de un número complejo, también llamado Valor Absoluto de z, se obtiene así:

Hallando el **módulo** de $z = a + bi$

Para ello consideremos el plano de Argand, y podremos observar que al representar el número complejo se forma un triángulo rectángulo.

En este triángulo rectángulo, la distancia $\boldsymbol{r}$, es la hipotenusa de dicho triángulo y los catetos son los valores $\boldsymbol{a}$ (La parte real) y $\boldsymbol{b}$ (La parte imaginaria) del número representado, luego aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos en valor de $\boldsymbol{r}$, que es:



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ Este valor recibe el nombre **de módulo o valor absoluto**

Ejemplo 17. Si $\boldsymbol{z = 2 - 3i}$ Hallar su módulo (r)

En este caso a=2 y b= -3, por lo tanto la operación nos resulta:

$$r = \sqrt{2^2 + (-3)^2}$$
$$r = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

5. Completa la siguiente table a partir de los datos proporcionados en ella

Número Complejo	Parte Real	Parte Imaginaria	Conjugado	Opuesto	Módulo	¿Real o imaginario Puro?
$2-3i$						
$-\sqrt{3}+4i$						
$-2i$						
7						
			$-5-6i$			
	8					
				$9-7i$		
		$-5i$				
					$\sqrt{2}$	
	-1	i				

6. Dados los números complejos:

$$z_1 = -4+3i$$
$$z_2 = 2-5i$$
$$z_3 = \frac{1}{2}$$
$$z_4 = -i$$

Calcular: a) $(z_3 - z_1)(z_1 z_2 + z_4)$

b) $\overline{z_4 z_1 - z_3}$

c)$|(z_1 + z_2)/z_4\overline{z_2}|$

7. Calcule el valor de "x"e "y" para que se cumplan las siguientes igualdades:
   c) $(3+xi)+(y+3i) = 5+2i$
   d) $(2+i)(2-i)(+yi) = 1-4i$

8. Halla el valor de "c" para que el producto $(3-6i)(4+ci)$ sea un número:
   a) Real
   b) Imaginario puro

5. Halle el valor de "z" si: $\frac{\mathbf{1+i}}{\boldsymbol{z}} - (\mathbf{2}\boldsymbol{i}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{i}$