INTEGRAL IMPROPIA

Límites de integración infinitos

Ejemplo

Determine si la integral impropia es convergente o divergente

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{2x-1}{4x^3+4x^2+2x+2}\,dx$$

Solución

Planteamos el límite correspondiente

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{2x-1}{4x^3+4x^2+2x+2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{2}^{t} \frac{2x-1}{4x^3+4x^2+2x+2}\,dx$$

Planteamiento de la integral indefinida

$$\int \frac{2x-1}{4x^3+4x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x+1)(2x^2+1)}\,dx$$

Factorizamos el denominador

$$\frac{2x-1}{(x+1)(2x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{2x^2+1}$$

Aplicamos el método de fracciones parciales

$$\frac{2x-1}{(x+1)(2x^2+1)} = \frac{A(2x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(2x^2+1)}$$

$$2x+1 = 2Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$2x+1 = x^2(2A+B) + x(B+C) + A + C$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{array}{ccccc} 2A+ & B & & = & 0 \\ & B & +C & = & 2 \\ A & & +C & = & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcr} A & = & -1 \\ B & = & 2 \\ C & = & 0 \end{array}$$

Reescribiendo el integrando como fracción parcial

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x+1)(2x^2+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \left[\frac{\overset{A}{\boxed{-1}}}{x+1} + \frac{\overset{B}{\boxed{2}}x + \overset{C}{\boxed{0}}}{2x^2+1}\right] dx$$

Aplicando propiedades de la integral

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2+1}\,dx$$

$u = x + 1$, entonces $du = dx$

$z = 2x^2 + 1$, entonces $dz = 4xdx$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du + \frac{1}{4}\int \frac{1}{z}\,dz = -\frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{4}\ln|z| + C = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|2x^2+1| + C$$

Aplicando leyes de los logaritmos para reescribir el resultado de la integral

$$\int \frac{2x-1}{4x^3+4x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{4}\left[-2\ln|x+1| + \ln|2x^2+1|\right] + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\right| + C$$

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{2x-1}{4x^3+4x^2+2x+2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\right|\right]\Bigg|_{2}^{t}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo «TFC»

$$\frac{1}{4}\lim_{t\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{2t^2+1}{(t+1)^2}\right| - \ln\left|\frac{9}{9}\right|\right]$$

$$\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\ln\left|\frac{2t^2+1}{(x+1)^2}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\boxed{\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2+1}{t^2+2t+1}}\right|$$

El límite tiene la indeterminación ∞/∞, entonces aplicamos la regla de $\boxed{\text{L'Hopital}}$

$$\frac{1}{4}\ln\left|\boxed{\lim_{t\to\infty}\frac{4t}{2t+2}}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\lim_{t\to\infty}\frac{4}{2}\right| = \frac{1}{4}\ln(2)$$

Aplicando la regla de $\boxed{\text{L'Hopital}}$

$\int_{2}^{+\infty}\frac{2x-1}{4x^3+4x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{4}\ln(2)$; converge la integral impropia