Cálculo integral

Momentos y centro de masa

Pre saberes: - Puntos de intersección entre graficas
- Regiones entre gráficas
- Métodos y técnicas de integración

Sistema unidimensional

- En general, si tenemos un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ colocadas en los puntos $x_1, x_{2,\ldots,}\, x_n$ respectivamente, del eje x .el centro de masa del sistema esta situado en
- $$\boxed{\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i x_i}}{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}}}$$

- Cada termino $m_i x_i$ se le llama momento de la masa m_i
- Y a $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ momento del sistema con respecto al origen.

Sistema bidimensional

- Considerando ahora n partículas con masas $m_1, m_2, \dots, m_n$
- Colocadas en los puntos de coordenadas
- $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ del plano xy.
- El momento del sistema con respecto al eje x se define como
- $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ y el momento del Sistema respecto al eje y
- $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ por lo tanto las coordenadas del centro de masa
- $(\bar{x}, \bar{y})$ se expresan en términos de los momentos de la
- siguiente forma : $\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{m}}$ y $\boxed{\bar{y} = \frac{M_x}{m}}$
- donde m $= \sum_{i=1}^{n} m_i$ representa la masa total

Centro de masa en una lamina plana

Fórmulas para encontrar la masa, Mx,My

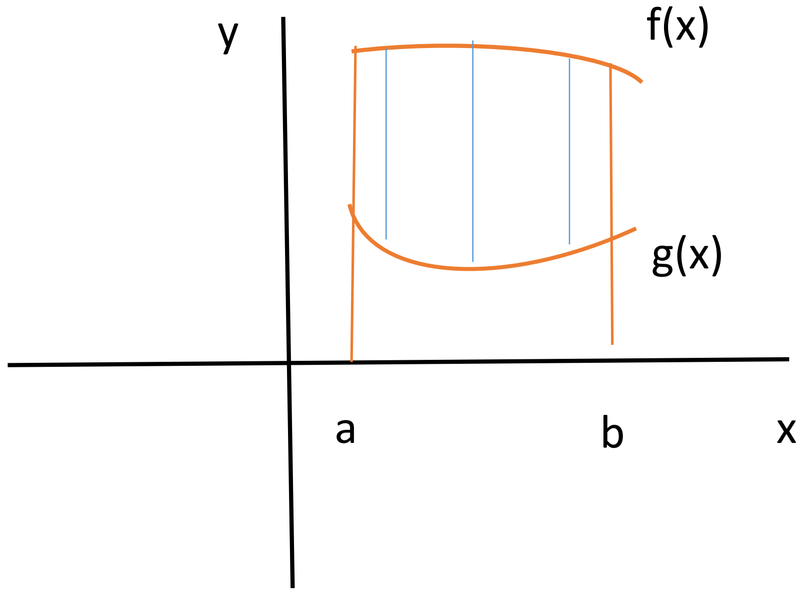
En términos de x

- Masa = densidad por Área
- m =ρ $\int_a^b [f(x) - g(x)]$dx

- Momento = masa por distancia

- Mx =ρ $\int_a^b \frac{[f(x)+g(x)]}{2}[f(x) - g(x)]$dx

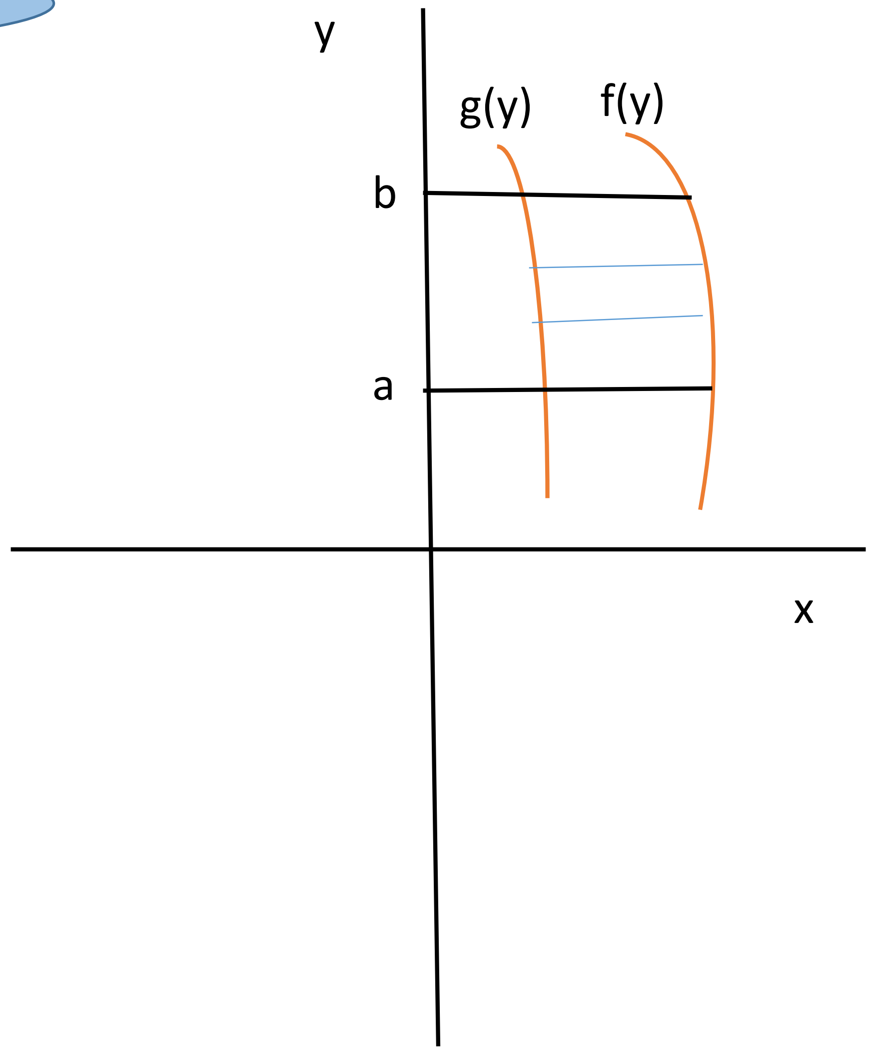
- My= ρ $\int_a^b x[f(x) - g(x)]$dx



Formulas para encontrar la masa, Mx,My

En términos de y

- Masa= densidad por Área
- m =ρ $\int_a^b [f(y) - g(y)]$dy
- Momento = masa por distancia
- Mx= ρ $\int_a^b y[f(y) - g(y)]$dy
- Mx =ρ $\int_a^b \frac{[f(y)+g(y)]}{2}[f(y) - g(y)]$dy



1) Dada la lamina de densidad constante ρ limitada por las graficas y=$\sqrt{x}$, $x = 0, y = 4$ $determinar\ el\ centro\ de\ masa.$

Si y=4

$4= \sqrt{x}$

16=x

(16 , 4)

si x=0

y=$\sqrt{0}$

y=0

(0,0)

si x=0

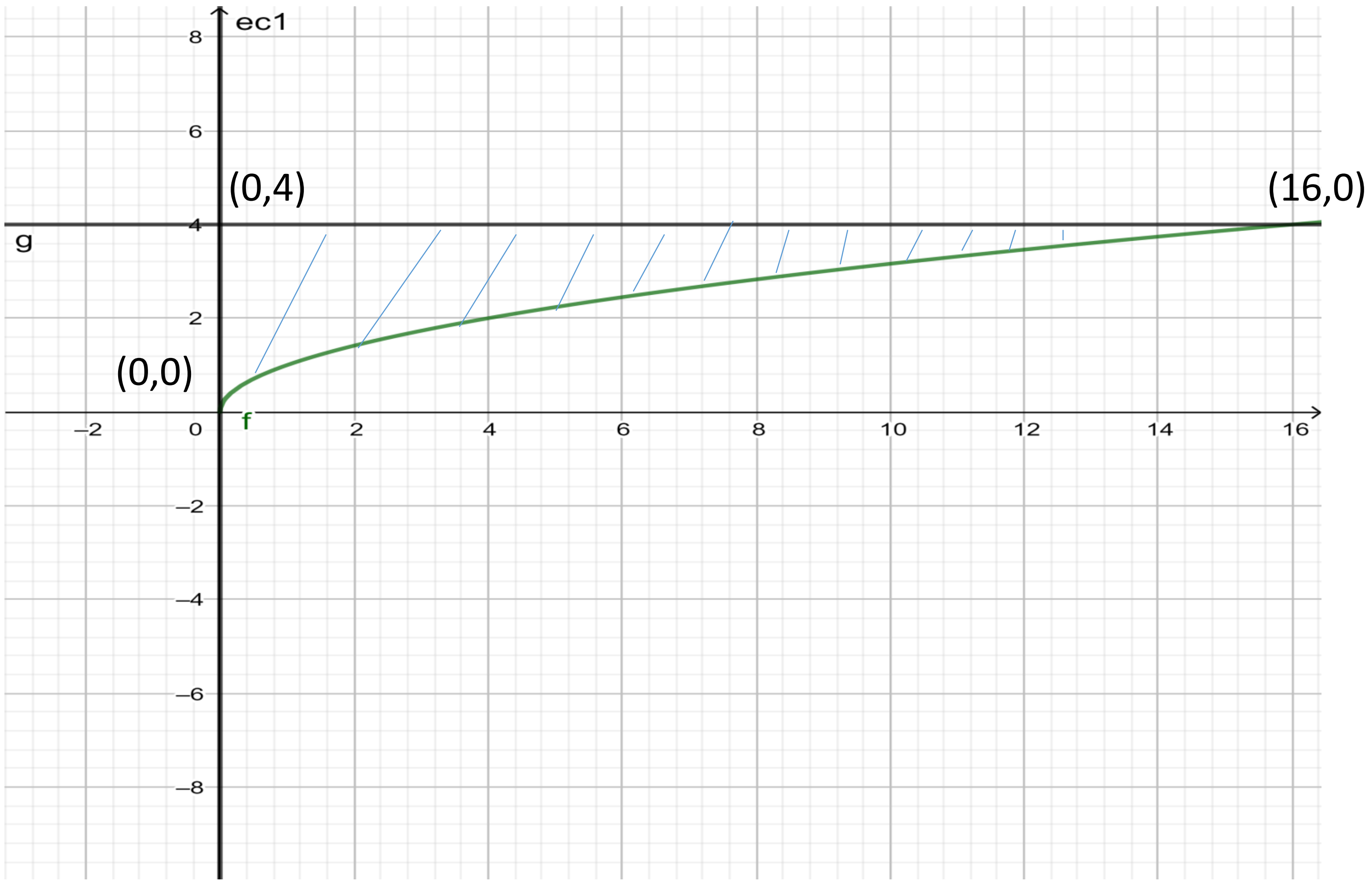
y=4

(0,4)

Primero encontrar los interceptos

Región

Luego de encontrar los interceptos es el momento de elaborar la región



PROCEDEMOS A APLICAR LA FORMULA DE MASA

- Masa = densidad por área
- m=$\rho\int_0^{16}\left[4-\sqrt{x}\right]dx$
- m= $\rho\left[4x \;-\; \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{16}$
- m= $\rho(\left[4(16)-\frac{2}{3}(16)^{\frac{3}{2}}\right]$- $\left[4(0)-\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}\right])$
- m= $\rho(\left[64-\frac{128}{3}\right]$
- m= $\frac{64}{3}\rho$

Evaluando la integral

Aplicamos el teorema fundamental del cálculo

Y obtenemos la masa

Momento en x = masa por distancia

- mx=$\rho\int_0^{16}\left[\frac{4+\sqrt{x}}{2}\right][4-\sqrt{x}]$dx
- mx=$\frac{\rho}{2}\int_0^{16}[4+\sqrt{x}][4-\sqrt{x}]$dx
- mx= $\frac{\rho}{2}\int_0^{16}[4^2-(\sqrt{x})^2]$dx
- mx= $\frac{\rho}{2}\int_0^{16}[16-x]$dx
- mx= $\frac{\rho}{2}\left[16x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{16}$
- mx=$\frac{\rho}{2}\left[\left(16(16)-\frac{16^2}{2}\right)-(16(0)-\frac{0^2}{2})\right]$
- mx=$\frac{\rho}{2}$(256-128)-0
- mx=64ρ

Aplicamos la fórmula

Aplicamos el teorema fundamental del cálculo

Evaluamos y obtenemos el momento en x

Momento en y = masa por distancia

- my=ρ$\int_0^{16} x\left[4-\sqrt{x}\right]$dx
- my=ρ$\int_0^{16}\left[4x-x^{\frac{3}{2}}\right]$dx
- my=ρ$\left[2x^2-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^{16}$
- my = ρ$\left[\left(2(16)^2-\frac{2}{5}(16)^{\frac{5}{2}}\right)-\left(2(0)^2-\frac{2}{5}(0)^{\frac{5}{2}}\right)\right]$
- my= ρ$\left[512\ -\frac{2048}{5}\right]$
- my=$\frac{512}{5}$ ρ

Encontrando las componentes del centro de masa

- $\bar{x} = \frac{my}{m} = \frac{\frac{512\rho}{5}}{\frac{64}{3}\rho} = \frac{24}{5} = 4.8$

- $\bar{y} = \frac{mx}{m} = \frac{64\rho}{\frac{64}{3}\rho} = 3$

- Las coordenadas del centro de masa son (4.8 , 3)