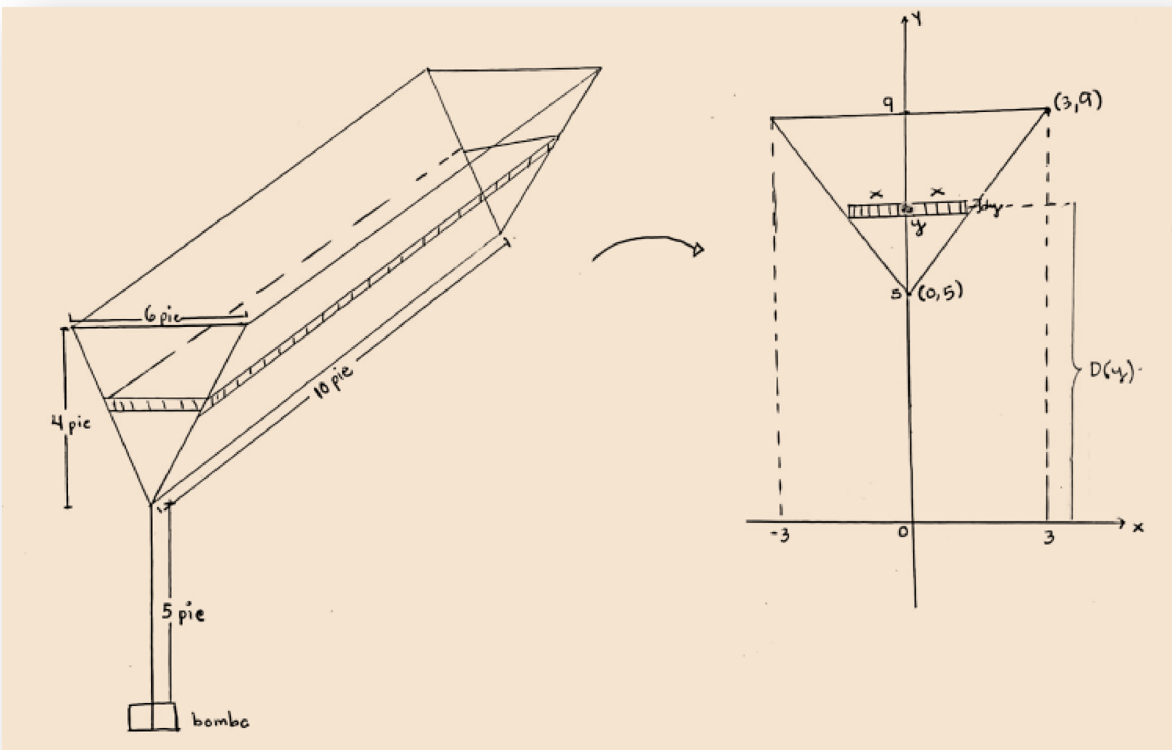
Ejemplo. Un depósito tiene secciones transversales en forma de triángulo isósceles con vértice hacia abajo. La parte superior del depósito tiene 6 pies de ancho, su altura es de 4 pies y su longitud es de 10 pies. Determine el trabajo realizado al llenar de agua el depósito a través de una bomba localizado a 5 pies por debajo del depósito medio de un orificio ubicado en el fondo del tanque.

Solución.

Paso 1. Dibujamos el depósito con los datos indicados y representamos los ejes coordenados.



La solución de este problema no es única, dependerá de donde se ubiquen los ejes coordenados.

Para el caso se presentará la solución donde los ejes se ubicaran como origen la posición de la bomba.

Paso 2. Identificar la distancia $D(y)$, para el caso como se observa el desplazamiento del líquido es a partir del orificio ubicado en el origen donde el diferencial representación del líquido hace un recorrido y; visto como distancia sería $y-0=y$ por lo que

$$D(y)=y$$

Paso 3. Luego por ser un depósito con secciones triangulares el corte del líquido toma la forma de una palca rectangular por lo que su volumen se define por

$$v=(largo)*(Ancho)*(Alto)=L*A*Al$$

Donde

$$L=\ 10\,pies$$
$$A=2x$$
$$Al=dy$$

De estos datos como se observa en la figura el acho es considerado como $2x$ de donde necesitamos encontrar la representación de x, esta se obtiene con la ecuación de la recta que pase por los puntos $(3,9)$ y $(0,5)$; es decir:

$$y-5=\frac{9-5}{3-0}(x-0)$$
$$y-5=\frac{4}{3}x$$

Despejando x

$$x=\frac{3y-15}{4}$$

Entonces

$$A=2\left(\frac{3y-5}{4}\right)=\frac{3y-5}{2}$$

Paso 4. Luego plantear sustituyendo en la integral y resolver

$$W = \int_5^9 \gamma(L)(A)D(y)dy$$

$$W = \int_5^9 \gamma(10)\left(\frac{3y-5}{2}\right)(y)\,dy$$

$$W = 5\gamma\int_5^9 y(3y-5)dy$$

$$W = 5\gamma\int_5^9 (3y^2-5y)dy$$

$$W = 5\gamma\left[y^3-\frac{5}{2}y^2\right]_5^9$$

$$W = 5\gamma\left[\left((9)^3-\frac{5}{2}(9)^2\right)-\left((5)^2-\frac{5}{2}(5)^2\right)\right]$$

$$W = 5\gamma\left[\left(729-\frac{405}{2}\right)-\left(25-\frac{125}{2}\right)\right]$$

$$W = 5\gamma\left[\frac{1053}{2}-\left(-\frac{75}{2}\right)\right]$$

$$W = 5\gamma(564)$$

Utilizando $\gamma = 62.4\ Lb/pie^3$

$$W = 2820(62.4\ Lb/pie^3)$$

$$\boxed{W = 175{,}968 Lb/pie^3}$$