UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS.

ÁLGEBRA VECTRORIAL Y MATRICES- CICLO 02,2020.

Semana 5- Unidad 2: Matrices y determinantes.

Sesión 2.

Ecuaciones matriciales

Las ecuaciones matriciales son ecuaciones en las que las incógnitas son matrices.

Al resolver ecuaciones matriciales es importante recordar algunas propiedades en las que nos basaremos.

(P1) El producto de matrices no es conmutativo. $AB \neq BA$

(P2) L a operación de matrices $\frac{A}{B}$ no está definida.

(P3) La división de la matriz A entre el escalar α : $\frac{A}{\alpha}$ se entiende como el producto del escalar α por la matriz A.

Esto es,

$\frac{A}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}A.$

(P4) $A.A^{-1} = I = A^{-1}A$

(P5) $A.I = A = IA$

Resolución de ecuaciones matriciales sin conocer la matriz inversa

- Partimos de una ecuación matricial.
- Averiguamos el orden de la matriz incógnita.
- Asignamos incógnitas (a, b, c, d….) a los elementos de la matriz desconocida.
- Expresamos la ecuación matricial con matrices con sus correspondientes elementos.
- Resolvemos las operaciones con matrices a izquierda y derecha del signo igual hasta que nos quede una sola matriz a ambos lados del signo igual.
- Aplicamos la igualdad de matrices, igualando elemento a elemento de su misma posición.
- Resolvemos las ecuaciones resultantes (por lo general son ecuaciones individuales de primer grado a sistemas de ecuaciones lineales)

Ejemplo 1.

Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Resuelve la ecuación matricial $A.A^t.X = B$

Solución

(a) Como $A.A^t$ es de orden 2×2 , y B también es de orden 2×2, deducimos que la matriz X es de orden 2×2.

(b) Asignamos letras a los elementos de la matriz incógnita X.

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

(c) Expresamos la ecuación matricial $A.A^t.X = B$ en forma de matrices con sus elementos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Efectuamos las operaciones indicadas. A la izquierda del signo igual tenemos que hacer dos productos.
A la derecha no hacemos ninguna operación porque ya se tiene una sola operación.

$$A.A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A.A^t.X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & y+w \\ x+2z & y+2w \end{bmatrix}$$

(e) Se plantea la igualdad final

$$A * A^t * X \;=\; B$$

$$\begin{bmatrix} x+z & y+w \\ x+2z & y+2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) Igualamos elemento a elemento

$x + z = -1$ **(1)** $\quad y + w = 3$ **(2)** $\quad$ Restando **(3)-(1)** $\Rightarrow z = 3$

$x + 2z = 2$ **(3)** $\quad y + 2w = 1$ **(4)** $\quad$ Restando **(4)-(2)** $\Rightarrow w = -2$

(g) Resolviendo el sistema obtenemos:

$$x = -4 \qquad y = 5 \qquad z = 3 \qquad w = -2$$

Por tanto, la matriz X es:

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Usted puede comprobar que la igualdad $A.A^t.X = B$ se cumple para esta matriz X.

Ejemplo 2.

Resuelve la ecuación matricial $2X - 3A = A^t$ siendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Solución

Como tanto la matriz A como la matriz A^t son de orden 3, la matriz incógnita X debe ser de orden 3 para que la resta $2X - 3A$ se pueda efectuar.

Entonces

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Así, $\quad 2X - 3A = A^t$

$$\Rightarrow 2\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Operamos las matrices

$$\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Planteamos la igualdad final

$$\begin{bmatrix} 2a+3 & 2b & 2c-3 \\ 2d+6 & 2e-3 & 2f-6 \\ 2g & 2h-6 & 2i+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Igualamos elemento a elemento y resolvemos cada ecuación

$2a + 3 = -1 \rightarrow 2a = -4 \rightarrow \boldsymbol{a = -2}$

$2b = -2 \rightarrow \boldsymbol{b = -1}$

$2c - 3 = 0 \rightarrow 2c = 3 \rightarrow \boldsymbol{c = \frac{3}{2}}$

$2d + 6 = 0 \rightarrow 2d = -6 \rightarrow \boldsymbol{d = -3}$

$2e - 3 = 1 \rightarrow 2e = 4 \rightarrow \boldsymbol{e = 2}$

$2f - 6 = 2 \rightarrow 2f = 8 \rightarrow \boldsymbol{f = 4}$

$2g = 1 \rightarrow \boldsymbol{g = \frac{1}{2}}$

$2h - 6 = 2 \rightarrow 2h = 8 \rightarrow h = 4$

$2i + 3 = -1 \rightarrow 2i = -4 \rightarrow \boldsymbol{i = -2}$

La matriz X es

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -1 & \frac{3}{2} \\ -3 & 2 & 4 \\ \frac{1}{2} & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolución de ecuaciones matriciales haciendo uso de la matriz inversa

Para resolver una ecuación matricial por medio de la matriz inversa despejamos la matriz incógnita X como si se tratase de una ecuación de primer grado teniendo en cuenta que al no estar definida la operación de dividir matrices, hemos de multiplicar por la izquierda o por la derecha (es decir por el mismo sitio) por la inversa de la matriz.

Ejemplo 3.

Resuelve la ecuación matricial $AX + B = C$, siendo,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

De la ecuación $AX + B = C$ despajamos la matriz incógnita X:

$$AX + B = C$$

$$AX = C - B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}(C-B)$$
$$IX = A^{-1}(C-B)$$
$$X = A^{-1}(C-B)$$

Luego

$$C - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora halla A^{-1}.

Haciendo uso de $\mathrm{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$ $con\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Multiplicando $\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{C}-\mathrm{B})$ para obtener la matriz X

$$X = A^{-1}(C-B) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Comprueba la igualdad $AX + B = C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.

Solución

Calcule la matriz X en la siguiente ecuación matricial $B(2A+I) = AXA + B$ siendo las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Despejando la matriz X:

$$B(2A+I) = AXA + B$$
$$B(2A+I) - B = AXA$$
$$2BA + BI - B = AXA$$
$$2BA + B - B = AXA$$
$$2BA = AXA$$
$$2A^{-1}BA = A^{-1}AXA$$
$$2A^{-1}BA = XA$$
$$2A^{-1}BAA^{-1} = XAA^{-1}$$
$$2A^{-1}BI = XI$$
$$2A^{-1}B = X$$

Calculemos la matriz inversa de A por cofactores.

$$Cof(A)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 3 & 5 & -6\\ 4 & 7 & -9\end{bmatrix}$$

$$Adj(A)=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -6 & -9\end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3 & -3 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-9 & 0 & -4\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & -4\\ 2 & 1\end{bmatrix}=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}Adj(A)=-\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 7\\ -2 & -6 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -4\\ -2 & -5 & -7\\ 2 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

La matriz X que se busca es

$$X=2A^{-1}B=2\begin{bmatrix}-1 & -3 & -4\\ -2 & -5 & -7\\ 2 & 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -6 & -8\\ -4 & -10 & -14\\ 4 & 12 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 10 & -18\\ 6 & 18 & -32\\ -8 & -22 & 38\end{bmatrix}$$

Queda como ejercicio que usted verifique que $Cof(A), Adj(A), \det(A)$ y X son resultados correctos. Una vez hecha esta verificación compruebe la igualdad $B(2A+I)=AXA+B$.

Nota: observe que al momento de despejar la matriz incógnita X, si se multiplica por la inversa a la izquierda/derecha en un lado de la igualdad, por el otro lado también se debe multiplicar a la izquierda/derecha.

MATRICES ESCALONADAS

Definición:

Una matriz se llama escalonada por renglones o filas o simplemente escalonada si cumple con las siguientes propiedades:

P1. Todas las filas llenas de ceros (si las hay) están en la parte inferior de la matriz.

P2. En las filas que no sean ceros, el primer elemento de cada fila que no sea cero está localizado a la derecha del elemento delantero distinto de cero de la fila anterior.

Ejemplo 5.

La siguiente matriz está en forma escalonada. Las entradas principales ● pueden tener cualquier valor distinto de cero. Las entradas con asterisco $*$ pueden tener cualquier valor.

$$\begin{bmatrix}\bullet & * & * & *\\ 0 & \bullet & * & *\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ejemplo 6.

Las siguientes matrices son escalonadas. En cada fila diferente de cero la primera entrada (el primer elemento) diferente de cero está marcada con negrilla y este recibe el nombre de pivote. Éstos están a la derecha del elemento delantero de la fila anterior

$a)\begin{bmatrix} \mathbf{2} & -1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{-3} & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b)\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{2} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $c)\begin{bmatrix} \mathbf{3} & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $d)\begin{bmatrix} \mathbf{4} & 0 & -1 & 5 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$

$e)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $f)\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{3} & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $g)\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $h)\begin{bmatrix} \mathbf{4} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{-3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Observa que en todas las matrices cuyos elementos son iguales a cero aumentan de izquierda a derecha, fila a fila.

Ejemplo 7.

Las matrices siguientes no son escalonadas. ¿Por qué?

$a)\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Si la matriz A es escalonada, entonces el elemento delantero de cada fila diferente de cero se llama pivote. Éstos están a la derecha del elemento delantero de la fila anterior.

MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA

Definición. Una matriz se llama escalonada reducida por renglones o simplemente escalonada reducida si cumple con las propiedades P1 y P2 anteriores, y además con las siguientes propiedades: P3. Todos los pivotes son 1. P4. En las columnas donde hay un pivote el resto de términos son cero.

Ejemplo 9.

Las siguientes son matrices escalonadas reducidas por filas.

$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Las matrices a) y b) tienen tres pivotes; las restantes matrices tienen dos pivotes.

¿Cómo se diferencia una matriz escalonada por filas con una matriz escalonada reducida por filas?

En la forma escalonada por filas todos los números abajo del primer 1 en una fila son cero. En la forma escalonada reducida por filas todos los números abajo y arriba del primer 1 de una fila son cero.

Ejemplo 10.

Matriz escalonada por fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices escalonadas reducida por fila

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 11. Convierte la matriz siguiente en una matriz escalonada por filas. $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Solución. Trabajaremos columna por columna, de izquierda a derecha (primera columna, segunda columna,…) y de arriba hacia abajo.

La técnica es hacer una entrada principal (pivote) en una columna y luego utilizarla para hacer ceros por debajo de ella.

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & \frac{11}{15} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{15} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5} f_1 \to f_1^* \qquad -f_1 + f_3 \to f_3^* \qquad \frac{1}{6} f_2 \to f_2^* \qquad -\frac{2}{5} f_2 + f_3 \to f_3^* \qquad \frac{15}{11} f_3 \to f_3^*$$

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{15} & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ está en forma escalonada.

Ejemplo 12.

Reduce la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz escalonada reducida.

Solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-2 f_2 + f_1 \to f_1^* \qquad \frac{1}{2} f_3 \to f_3^* \qquad 5 f_3 + f_1 \to f_1^*$$

$$-4f_3+f_2 \to f_2^*$$

Con estas dos últimas operaciones elementales de fila, hemos reducido la matriz a la forma escalonada reducida.

Es de observar que:

- La forma escalonada por filas de una matriz no es única, (por ejemplo otra matriz escalonada de la matriz del ejemplo 12) es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- La entrada principal en cada fila se utiliza para crear los ceros debajo de ella.
- Una vez que se ha pivoteado e introducido los ceros debajo de la entrada principal de una columna, ésta no cambia. Es decir, la forma escalonada por filas va naciendo de izquierda a derecha, y de arriba hacia abajo.
- La matriz original, y las matrices que van apareciendo a medida que hacemos uso de las operaciones de fila y la matriz escalonada; son equivalentes.
- Siempre es posible pasar de una matriz cualquiera A a una matriz escalonada.

RANGO DE UNA MATRIZ

Combinación lineal de filas o columnas

Diremos que una fila (o columna) es combinación lineal de otras filas(o columnas) si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ tales que cualquier fila (o cualquier columna) de una matriz, es de la forma

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_k f_k \ , \quad (\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \cdots , \beta_k c_k)$$

Ejemplo 13.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, como la fila tres es igual a la segunda fila menos el doble de la primera ($f_3 = f_2 - 2f_1$), decimos que la tercera fila es combinación lineal de las otras dos.

Filas linealmente independientes

Dada la matriz $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} \end{bmatrix}$, las filas $(\mathrm{a}_{11} \quad \mathrm{a}_{12})$ y $(\mathrm{a}_{21} \quad \mathrm{a}_{22})$ son linealmente independientes cuando no son proporcionales, es decir, no existe algún número α que cumple

$$(a_{11} \quad a_{12}) = \alpha(a_{21} \quad a_{22})$$
$$f_1 \quad = \quad \alpha \, f_2$$

Ejemplo 14.

Sea $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$.

Las filas $f_1 \ y \ f_2$ son linealmente independientes ya que no son proporcionales. Supongamos que

$$(3 \quad 5) = \alpha(9 \quad 6) = (9\alpha \quad 6\alpha)$$

Entonces $3 = 9\alpha \;\; y \quad 5 = 6\alpha \;\; \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \quad y \;\; \alpha = \frac{5}{6}$.

Dado que α da valores diferentes, se concluye que no existe dicho número α.

En la matriz

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, las filas $(a_{11} \quad a_{12})$ y $(a_{21} \quad a_{22})$ son linealmente dependientes cuando son proporcionales, es decir existe un número real α que verifica

$$(a_{11} \quad a_{12}) = \alpha(a_{21} \quad a_{22})$$

$$f_1 \quad = \quad \alpha\, f_2$$

Ejemplo 15.

En la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$ las filas $f_1 \;\; y \;\; f_2$ son linealmente dependientes puestos que son proporcionales

$$(3 \quad 5) = \frac{1}{3}(9 \quad 15)$$

Para una matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, las filas $(a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$, $(a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23})$ y $(a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33})$ son linealmente independientes cuando ninguna de ellas se puede escribir como combinación lineal de las restantes, es decir, no existen números reales α y β que verifiquen que por ejemplo

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}) = \alpha\,(a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}) + \beta\,(a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33})$$

Ejemplo 16.

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, las filas son linealmente independientes puesto que no existen escalares α y β que verifiquen por ejemplo

$$(1 \quad 2 \quad 3) = \alpha(3 \quad 5 \quad 7) + \beta(4 \quad 6 \quad 5)$$

Para la misma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ las filas son linealmente dependientes cuando alguna de ellas se puede escribir como combinación lineal de las restantes, es decir, existen escalares α y β que cumplen

$$f_{1=}\alpha f_2 + \beta f_3$$

Resumiendo

Un conjunto de filas (o columnas) de una matriz es linealmente independiente cuando ninguna de ellas se puede escribir como combinación lineal de las otras líneas restantes, y es linealmente dependiente cuando se da lo contrario, es decir, cuando alguna de ellas se puede escribir como combinación lineal de las demás.

Rango de una matriz

Se llama rango de una matriz A al número de filas (o columnas) linealmente independientes. Se representa por $rang(A)$ o $r(A)$.

Características.

- En cualquier matriz el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes.
- Se puede obtener el rango de cualquier matriz, sin necesidad de que sea cuadrada.
- El valor máximo que puede tomar el rango de una matriz es el menor de los números correspondientes al número de filas y columnas, es decir, si una matriz tiene orden 3×5 , el valor máximo que puede alcanzar el rango de dicha matriz es 3(pues $3 = mínimo\ (3\,,5)$).
- La única matriz que tiene rango 0 es la matriz nula. Cualquier otra matriz tendrá rango mayor o igual que 1.
- El rango de una matriz A es el rango de una matriz escalonada equivalente a la matriz A.
- El rango de la matriz A es igual al rango de su transpuesta. $rang(A) = rang(A^t)$

Ejemplo 17.

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ tiene rango 3 puesto que ninguna fila o columna se puede poner como combinación lineal de las restantes. Es decir las tres filas son linealmente independientes.

Ejemplo 18.

Consideremos las matrices:

a) $A = [3 \quad 2 \quad 1]$ .El rango de esta matriz es $r(A) = 1$

Como la fila o el vector $(3 \quad 2 \quad 1) \neq (0 \quad 0 \quad 0)$, entonces el vector A es linealmente independiente y como es un vector fila (una), el número de filas linealmente independientes es 1, luego el rango de A es 1.

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$. El rango de esta matriz es $r(B) = 1$

Si el rango de B es 2 se tendría que las dos filas serían linealmente independientes, pero como las dos filas son proporcionales, una de ellas es linealmente dependiente de la otra: $3f_1 = f_2$. Por tanto, solamente hay una fila linealmente independiente, entonces el rango de B es 1.

c) $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Como las dos filas son linealmente independientes entre sí, entonces el $\mathrm{r(C)} = 2$.

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. El rango de la matriz$C$ es $r(D) = 3$.

Como la matriz D es de orden 3×3 y su determinante es distinto de cero, entonces las 3 filas son linealmente independientes, luego el rango de la matriz D es 3. Se puede comprobar esto intentando encontrar escalares en la combinación lineal y probar que no existen.

Más adelante reforzaremos estos resultados con otra teoría.

Cálculo del rango de una matriz empleando el método de Gauss

Dada una matriz A. El $rang(A)$ será el número de filas diferentes de cero en la matriz escalonada.

En primer lugar se pueden descartar una fila si:

- Si todos los elementos de una fila son ceros.
- Hay dos filas iguales.
- Una fila es proporcional a otra.
- Una fila es combinación lineal de otras.

Calcularemos el rango por filas.

Si la matriz tuviese más filas que columnas, podemos usar su transpuesta, ya que $rang(A) = rang(A)^t$.

Ejemplo 19. Calcule el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Solución

Se aplican operaciones elementales.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2f_1 - f_3 \rightarrow f_3^*$ $\qquad$ $f_2 - f_3 \rightarrow f_3^*$

$f_1 - f_2 \rightarrow f_2^*$

Así la matriz escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

El rango es el número de filas no nulas en la matriz escalonada, por tanto, $rang(A) = 2$.

Ejemplo 20. Calcule el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

Como la fila tres es proporcional a la fila uno ($f_3 = 2f_1$), la fila cuatro es nula y la fila cinco es combinación lineal de las filas dos y una ($f_5 = 2f_2 + f_1$); descartamos esas tres filas, quedando la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como las dos filas son linealmente independientes, entonces $rang(A) = 2$.

En general se trata de descartar el mayor número de filas posible, y el rango será el número de filas no nulas.

Ejemplo 21.

Calcule el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Solución

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \end{bmatrix}$$

$-3f_1 + f_2 \to f_2^*$ $\quad f_2 \leftrightarrow f_3$ $\quad -7f_2 + f_3 \to f_3^*$

$-2f_1 + f_3 \to f_3^*$

Por tanto, $rang(A) = 3$.

Cálculo del rango de una matriz empleando determinantes

Debemos elegir la submatriz de mayor orden posible y calcular su determinante.

El orden de la mayor submatriz cuadrada cuyo determinante sea distinto de cero, será el rango de la matriz.

Siempre tomemos en cuenta que podemos descartar una fila si:

- Si todos los elementos de una fila son ceros.
- Hay dos filas iguales.
- Una fila es proporcional a otra.
- Una fila es combinación lineal de otras.

Cálculo del rango de una matriz no cuadrada

Ejemplo 22.

Halle el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

Elegimos la mayor submatriz cuadrada que esté contenida en A para calcular su determinante que es de orden 3. Calculemos los determinantes de todas las posibles submatrices cuadradas de orden 3, hasta que encontremos una cuyo determinante sea distinto de 0. Basta con encontrar al menos una submatriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante no sea cero, para que el rango de la matriz A sea 3.

Elegimos la siguiente submatriz cuadrada:

$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ y calcula su determinante $|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -8$

Como el resultado de este determinante es distinto de cero y como el orden de esta submatriz es 3, entonces el rango de la matriz A es $rang(A) = 3$.

$$|A_1|_3 = -8 \neq 0 \ \rightarrow rang\ (A) = 3$$

Ejemplo 23.

Calcule el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \\ 5 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Solución

Se calcula el determinante de las submatrices de orden 3.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ |A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 7 \\ 5 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0,\ |A_4| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Como ya no quedan más oportunidades para seguir eligiendo submatrices cuadradas de orden 3 y todos los determinantes de las submatrices cuadradas de orden 3 que hemos elegido son cero, entonces el rango de la matriz A va a ser menor que 3.

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \ \rightarrow rang(A) < 3$$

Entonces se sigue con submatrices de orden 2.

$$|A_5| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13$$

Su resultado es distinto de cero, por tanto el rango de la matriz A es 2.

$$|A_5| = -13 \neq 0 \rightarrow rang(A) = 2,$$

que coincide con el orden de la mayor submatriz cuadrada que hemos encontrado cuyo determinante no es cero.

Cálculo del rango de una matriz cuadrada

Sea A una matriz de orden n. El proceso para calcular el rango es el siguiente:

1. Calcula el determinante de A.
- Si $\det(A) \neq 0$ entonces $rang(A) = n$.
- Si $\det(A) = 0$ entonces $rang(A) < n$ y se sigue al paso 2.
2. Elija cada submatriz A_i cuadrada de orden $n-1$ y haga el mismo procedimiento del paso 1.
- Si hay alguna submatriz tal que $\det(A_i) \neq 0$ entonces $rang(A) = n-1$.
- Si todas las submatrices cumplen que $\det(A_i) = 0$ entonces vuelva a repetir el paso 2.

Ejemplo 24.

Encuentre el rango de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Solución

La mayor submatriz que podemos elegir es la propia matriz, por lo que comenzamos calculando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 49$$, que es distinto de cero, por lo que el rango de la matriz A es 4, que es el orden de la matriz A.

$$|A| = 40 \neq 0 \ \rightarrow rang(A) = 4.$$

Ejemplo 25.

Calcule el rango de la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Su determinante es igual a cero. Como no podemos elegir más submatrices de orden 4, el rango de A deberá ser menor que 4.

$$|A| = 0 \rightarrow rang(A) < 4$$

Entonces busquemos una submatriz cuadrada de orden 3 que esté contenida en A cuyo determinante sea diferente de cero. Solamente con que encontremos una, el rango de A ya será igual a 3.

Escogemos la submatriz cuadrada de orden 3 formada por las filas 1,2 y 3; y por las columnas 1,2 y 3.

Calculamos su determinante.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como su determinante no es igual a cero, ya no tenemos que seguir buscando y el rango de A es 3.

$$[A_1] = 1 \neq 0 \ \rightarrow rang(A) = 3$$

2.14 Sistemas de ecuaciones lineales-SEL

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas y coeficientes, definido en el conjunto de los números reales, es

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde a_{ij} y b_i son números reales. A los elementos a_{ij} se les denomina coeficientes del sistema, y a los b_i, términos constantes o independientes.

Este sistema puede ser expresado matricialmente como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A\,X \quad = \quad B$$

Llamamos a la matriz A como la matriz de los coeficientes del sistema, a la matriz X, matriz incógnita y a la matriz B, matriz de los términos independientes.

Matriz ampliada de un SEL

Definimos la matriz ampliada A^*del sistema como la matriz que se compone de la matriz A a la izquierda y la matriz B a la derecha.

Es decir,

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Ejemplo 26.

La matriz ampliada de cada sistema:

$a)\ \begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$ $\quad ; b)\ \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$ es respectivamente:

a) $\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$

b)

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Diremos que dos ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones, o geométricamente representan la misma recta o el mismo plano.

En lo sucesivo emplearemos las siglas **SEL** para referirnos a un sistema de ecuaciones lineales.

Tipos de SEL

Los SEL se clasifican de acuerdo a:

- ✓ Su dimensión en:
  - ❖ Cuadrado: si $m = n$, esto es, si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

Ejemplo 27.

El siguiente SEL es cuadrado.

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

  - ❖ Rectangular: si $m \neq n$, es decir, cuando el número de ecuaciones no coincide con la cantidad de incógnitas.

Ejemplo 28.

El siguiente SEL es rectangular.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

- ✓ Su matriz de términos independientes en:
  - ❖ Sistema no homogéneo: los términos de la matriz columna B de los términos independientes no son todos ceros.

Ejemplo 29.

El siguiente SEL

$$\begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ x - y + 3z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

no es homogéneo, ya que la matriz columna B de los términos independientes del SEL no es cero.

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  - ❖ Sistema homogéneo: la matriz B de los términos independientes del SEL es la matriz columna de ceros.

Ejemplo 30. El siguiente SEL es homogéneo

$$\begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Soluciones de un SEL

Dado un SEL: $AX = B$, llamamos solución del SEL a cualquier vector columna

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

que al ser sustituido en el SEL, lo satisface. Es decir, los valores de las incógnitas verifican la igualdad de todas las ecuaciones lineales que forman el SEL.

Ejemplo 31.

La solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{es } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

puesto que al sustituir los valores de $x = 1, y = 1 \;\; y \;\; z = 1$ en cada ecuación lineal cumplen la igualdad.

Nota importante

Si la matriz de incógnitas X es solución del SEL

$$AX = B$$

también es solución del SEL que se obtiene al realizar operaciones elementales de fila a la matriz aumentada del SEL inicial.

Ejemplo 32.

Por ejemplo dado el SEL del ejemplo 31.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Si a la matriz aumentada del SEL

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Le aplicamos las siguientes operaciones elementales de fila

$$-2f_1 + f_2 \to f_2^* \quad \text{y} \quad f_1 + f_3 \to f_3^* \,,$$

obtenemos la matriz aumentada equivalente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right), \text{ y el SEL queda entonces}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -3y-z=-4 \\ \quad 3z=3 \end{cases}$$ el cual es satisfecho nuevamente por las soluciones $x = 1, y = 1\,, z = 1$.

El estudio o discusión de los sistemas de ecuaciones se efectúa aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius. Éste dice que con un sistema de ecuaciones lineales pueden ocurrir dos cosas:

1. Que el sistema de ecuaciones sea un sistema compatible, esto es, que tenga solución.

2. Que el sistema de ecuaciones sea un sistema incompatible o que no tenga solución.
El primer caso puede dividirse en dos:
a) que sea un sistema compatible y determinado, esto es, que tenga una única solución;

b) que el sistema sea compatible e indeterminado, es decir, que tenga infinitas soluciones.

Teorema de Rouché-Fröbenius

Consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,

Sean A la matriz de coeficientes del sistema y $A^* = (A|B)$ la matriz aumentada del sistema (con los términos independientes)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

En el SEL $AX = B$ de n incógnitas se cumple:

- $rang(A) = rang((A|B)) = n$, entonces el SEL es compatible determinado. (el SEL tiene solución única).
- $rang(A) = rang\big((A|B)\big) < n$, entonces el SEL es compatible indeterminado. (el SEL tiene infinitas soluciones).
- $rang(A) < rang((A|B))$, el SEL es incompatible. (el SEL no tiene solución).

Ejercicios.

1. Resuelva para X en las ecuaciones matriciales dadas, suponiendo que las matrices son invertibles.

   $a)$ $AX - B = BX + C$

   $b)XA + C = X + B^t + A$

   $c)2X - A + C = B - AX$

   $d)$ $A + X = AX + XA$

2. Dadas las matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & -3\end{bmatrix}$$

Resuelva:

$a)\ 2B+XA-3I=(C-A^t)^2$

$b)\ AX+C=B-2X$

$c)\ AX-B=X$.

3. Resuelva la ecuación matricial $AX-B-C^T=0$

Dónde:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -1\\ 1 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

4. Sea $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, encuentre la matriz X que satisface la ecuación. $BX+B=B^2+I$ donde I es la matriz identidad de orden 2.

5. Clasifique las siguientes matrices en escalonadas o escalonadas reducidas.

$$a)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad b)\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & -6\\ 0 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix},\quad c)\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix},\quad d)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$e)\begin{bmatrix}2 & 3 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad f)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad g)\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

6. Simplifique la siguiente matriz aumentada llevándola a una matriz escalonada.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}4 & -2 & 3 & 8\\ 5 & 3 & -4 & 4\\ 6 & -4 & -5 & 12\end{array}\right)$$

7. Halle el rango de las siguientes matrices usando el determinante.

$$a)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, b)\begin{bmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}, c)\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 8\end{bmatrix}, d)\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}, e)\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 9 & 4\end{bmatrix}, f)\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{bmatrix},$$

$$g)\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 4 & -3 & 2\end{bmatrix}$$

8. Halle el rango de las siguientes matrices usando el método de Gauss.

$$a)\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}, b)\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3\\ 3 & -1 & -1 & 3 & 6\\ 5 & -2 & -1 & 4 & 9\end{bmatrix}, c)\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1 & 2\\ 3 & 1 & -5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 6 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

9. Discuta los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el teorema de Rouché-Frobenius.

$$a)\ \begin{cases} 5x - 2y + 6z = -7 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}, \quad b)\ \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 4 \\ x + 7y + 6z = -7 \\ 7x - 2y - 9z = 6 \end{cases}, \quad c)\ \begin{cases} x + y = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ 2y + z = 3 \end{cases},$$

$$d)\ \begin{cases} 2w + 3x - 4y - z = 3 \\ 5w + x + y + 2z = 1 \\ w - 2x + 3y - z = 0 \\ w - 2x - y - 9z = 5 \end{cases}$$