UNIVERSIDAD DON BOSCO-DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ÁLGEBRA VECTORIAL Y MATRICES- CICLO 02-2020

Semana 3- Unidad 1: Los números complejos.

Sesión 2: Teorema de De Moivre y raíces de un número complejo.

Potencia de un número complejo.

Teorema de De Moivre.

Para calcular la enésima potencia de un número complejo expresado en forma trigonométrica utilizaremos la siguiente formula:

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)}$$

Esta fórmula fue desarrollada por el matemático francés **Abraham de Moivre** (1667 – 1754), por tal razón recibe el nombre de **Fórmula de Moivre**.

Ejemplo 1. Si $z = 5\,(\cos 30^0 + i \sin 30^0)$, Calcular z^4

Aplicando la fórmula de Moivre,

$$z^4 = (5)^4(\cos(4x30^0) + i \sin(4x30^0))$$
$$\boldsymbol{z^4 = 625(\cos 120^0 + i \sin 120^0)}$$

Ejemplo 2. Calcular z^6, si $z = 1 + 3i$

Para aplicar la fórmula de Moivre, debemos escribir el número complejo en su forma trigonométrica lo que nos resultaría así:

$$z = 1 + 3i = \sqrt{10}(\cos 71.57^0 + i \sin 71.57^0)$$

Entonces,

$$z^6 = (\sqrt{10})^6(\cos(6x71.57^0) + i \sin(6x71.57^0))$$
$$z^6 = 1000(\cos 429.42^0 + i \sin 429.42^0)$$

Al Corregir el ángulo nos resulta:

$$\boldsymbol{z^6 = 1000(\cos 69.42^0 + i \sin 69.42^0)}$$

Recuerde que el argumento debe ser positivo y estar entre $0^0\ y\ 360^0$

Ejemplo 3.

Suponga que le piden obtener $(1 + i)^5$ sin desarrollar la potencia. Para ello haga lo siguiente:

Paso 1. Escriba primero $1+i$ en la forma trigonométrica.

Si $1+i \ = a+bi$, entonces $a=1 \ y \ b=1$. Así $r=\sqrt{a^2+b^2} \ =\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$; y como, $tan\frac{b}{a}=\frac{1}{1}=1$, entonces $\theta=tan^{-1}(1)=45^{\circ}=\frac{\pi}{4}$

Como $r=\sqrt{2} \ y \ \theta=\frac{\pi}{4}$, escriba $1+i=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\ sen\frac{\pi}{4}\right)$

Aplicando el teorema de De Moivre se obtiene:

$$(1+i)^5=(\sqrt{2})^5\left(cos\left(5\frac{\pi}{4}\right)+i\ sen\left(5.\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=4\sqrt{2}\left[cos\frac{5\pi}{4}+i\ sen\frac{5\pi}{4}\right]$$

$$=4\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$=-4-4i$$

Potencia de un número complejo en forma polar.

Para elevar a una potencia un número complejo en forma polar elevamos el módulo el exponente y multiplicamos el argumento por el exponente.

Ejemplo 4.

La quinta potencia de $z=2_{30^0}$ es $z^5=(2_{30^0})^5={2^5}_{5(30^0)}=32_{150^0}$

Raíz n-ésima de un número complejo

Para hallar las raíces de un número complejo se aplica la fórmula de D'Moivre, llamado también el Teorema de D'Moivre, teniendo en cuenta que para ello debemos expresar los números complejo en su forma trigonométrica, usaremos la siguiente definición:

Sea $z=a+bi$ un numero complejo cualesquiera, entonces, la raíz n-ésima de "z", que se expresa por: $\sqrt[n]{z}$, es:

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{z}}=\sqrt[n]{\boldsymbol{a+bi}}=\sqrt[n]{\boldsymbol{r(cos\theta+isen\theta)}}=\sqrt[n]{\boldsymbol{r}}(\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\theta+360^o.k}}{\boldsymbol{n}}\right)+\boldsymbol{isen}\left(\frac{\boldsymbol{\theta+360^o.k}}{\boldsymbol{n}}\right))$$

Donde $\boldsymbol{k}$ es entero de va desde cero "**0**" hasta $\boldsymbol{n-1}$**,** este valor, al sustituirlo en la fórmula anterior, nos devuelve cada una de las raíces que tiene el número complejo, y el $\boldsymbol{n}$**,** es el índice de la raíz que se está calculando.

Al respecto, diremos que si queremos calcular las raíces de $z, siendo\ \boldsymbol{z = a + bi}$, entonces:

$\sqrt{\boldsymbol{z}}$, tendrá **2** raíces cuadradas, donde $\boldsymbol{k}$ toma los $\boldsymbol{k = 0\ y\ 1}$

$\sqrt[3]{\boldsymbol{z}}$, tendrá **3** raíces cúbicas, donde $\boldsymbol{k}$ toma los $\boldsymbol{k = 0, 1\ y\ 2}$

$\sqrt[4]{\boldsymbol{z}}$, tendrá **4** raíces cuartas, donde $\boldsymbol{k}$ toma los $\boldsymbol{k = 0, 1, 2\ y\ 3}$

$\sqrt[5]{\boldsymbol{z}}$, tendrá **5** raíces quintas, donde $\boldsymbol{k}$ toma los $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, 3\ y\ 4}$

$\sqrt[6]{\boldsymbol{z}}$, tendrá **6** raíces sextas, donde $\boldsymbol{k}$ toma los $\boldsymbol{k = 0, 1, 2, 3, 4\ y\ 5}$ **.** Y así sucesivamente.

Otro aspecto para tomar en cuenta es el argumento de la función coseno y seno del número complejo en forma trigonométrica.

La fórmula que ven arriba dice $\boldsymbol{360^o.k}$**,** esto es porque estamos usando el sistema de ángulos sexagesimal, es decir, usamos los ángulos en grados; si usáramos el sistema de ángulos en radianes, deberemos cambiar los $\boldsymbol{360^o.k}$ por $\boldsymbol{2\pi.k}$, entonces la fórmula se reescribiría así:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{r(cos\theta + isen\theta)} = \sqrt[n]{r}(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi.k}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2\pi.k}{n}\right))}$$

Finalmente quiero recordarles que el argumento del número complejo representado en forma trigonométrica debe ser positivo, medido desde el eje positivo de las “x” en forma antihoraria, y siempre deberá expresarse con un valor menor de 360^o.

Ejemplo 5.

Hallar las raíces quintas del número complejo $z = i$

Solución:

El módulo de z es $|z| = r = \sqrt{1} = 1$

El argumento de z es $\theta = \frac{\pi}{2}$

La forma trigonométrica de z es $1\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) = \left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right)$

Las raíces quintas de z son:

-Para $k = 0$: $cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0.2\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0.2\pi}{5}\right) = cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + isen\left(\frac{\pi}{10}\right) \cong 0.951 + 0.309i$

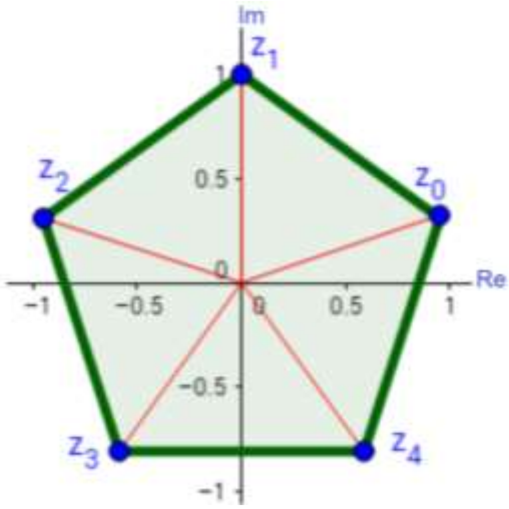
-Para $k = 1$: $cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{5}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

-Para $k = 2$: $cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{5}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{5}\right) = cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{10}\right) \cong -0.951 + 0.309i$

-Para $k=3$: $cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+6\pi}{5}\right)+isen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+6\pi}{5}\right)=cos\left(\frac{13\pi}{10}\right)+isen\left(\frac{13\pi}{10}\right)\cong -0.587+0.809i$

-Para $k=4$: $cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+8\pi}{5}\right)+isen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+8\pi}{5}\right)=cos\left(\frac{17\pi}{10}\right)+isen\left(\frac{17\pi}{10}\right)\cong 0.587-0.809i$

Las cinco raíces de $z=i$ las representamos en el siguiente pentágono regular:



Ejemplo 6.

Determina las cuatro raíces cuartas de $-8+8\sqrt{3}\,i$, primero escriba el complejo en forma trigonométrica. Si $-8+8\sqrt{3}\,i$,= $a+bi$ entonces $a=-8$ y $b=8\sqrt{3}$. Por lo que,

$$r=\sqrt{(-8)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{64+64(3)}$$

$$=8\sqrt{4}$$

$$=16$$

Como $tan\theta=\frac{8\sqrt{3}}{-8}=-\sqrt{3}$, entonces $\theta=tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=-60^{\circ}$.Ubicándose el complejo en el cuadrante 2, entonces $\theta=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$. De esta manera la forma trigonométrica del complejo $-8+8\sqrt{3}\,i$, es

$$-8+8\sqrt{3}\,i=16(\cos 120^{\circ}+i\,sen\,120^{\circ})$$.

Por la fórmula (1), las cuatro raíces cuartas de $-8+8\sqrt{3}\,i$ están dadas por

$$16^{\frac{1}{4}}\left[cos\left(\frac{120^{\circ}+k.360^{\circ}}{4}\right)+i\ sen\left(\frac{120^{\circ}+k.360^{\circ}}{4}\right)\right]$$

Podemos simplificar la expresión anterior obteniendo:

$$2[cos(30^{\circ}+k.90^{\circ})+i\ sen(30^{\circ}+k.90^{\circ})]\ ,$$

donde k va a tomar los valores de $0,1,2\ y\ 3$

Al sustituir k sucesivamente por $0,1,2\ y\ 3$, se obtiene:

a) Para $k=0: 2(\cos 30^{\circ}+i\ sen30^{\circ})=\sqrt{3}+i$
b) Para $k=1: 2(\cos 120^{\circ}+i\ sen120^{\circ})=-1+\sqrt{3}\,i$
c) Para $k=2: 2(\cos 210^{\circ}+i\ sen210^{\circ})=-\sqrt{3}-i$
d) Para $k=3: 2(\cos 300^{\circ}+i\ sen300^{\circ})=1-\sqrt{3}i$

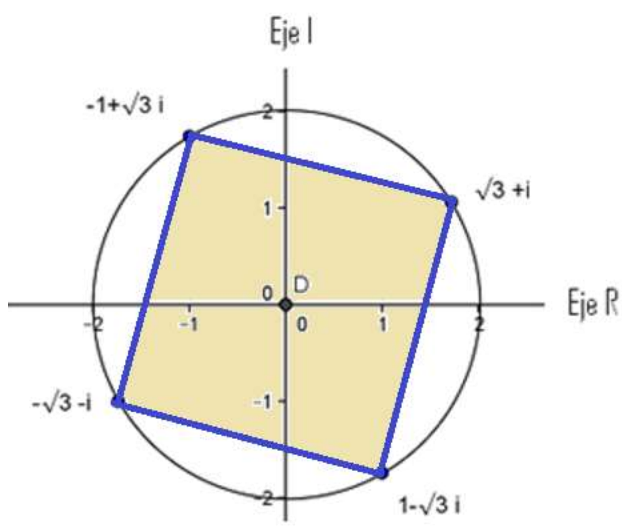
Las cuatro raíces cuartas de $-8+8\sqrt{3}\,i$ son:

$$r_1=\sqrt{3}+i,\ r_2=-1+\sqrt{3}\,i,\ r_3=-\sqrt{3}-i\ \text{ y }\ r_4=\ 1-\sqrt{3}i$$

Le toca a usted verificar los resultados obtenidos.

La representación geométrica de estas cuatro raíces se muestra en la Figura 1.12.

Las cuatro raíces están en la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio 2 y están igualmente espaciadas alrededor de la circunferencia, formando un cuadrado.



A estas gráficas, las que resultan de unir con segmentos de rectas las raíces del número complejo, se les conoce como **diagramas de Argand.** En este caso, los puntos, que representan a las raíces, que acabamos de calcular, pueden unirse perfectamente en una circunferencia de radio 2. Ahora bien, no siempre dará una circunferencia, en realidad puede dibujarse cualquier tipo de polígono, para el caso en el ejemplo 5 se formó un pentágono regular.

EJERCICIOS PARA PRACTICAR

1. Emplear el teorema de De Moivre para determinar las potencias indicada, primero en forma trigonométrica, luego en forma polar, y por último escriba la respuesta en forma binómica.

$$a)[2(cos30^{\circ} + isen30^{\circ})]^2, \text{ b)}\left[cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right]^4, \text{c)}(1+i)^3, \text{d) } \frac{\left(3+\sqrt{3}\,i\right)^2}{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}$$

2. Determina las raíces indicadas y escríbalas en la forma $a + bi$, y muestra su representación geométrica.

a) las dos raíces cuadradas de $-4i$

b) las tres raíces cúbicas de i

c) las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}\,i$

d) las cuatro raíces cuartas de 1

e) las tres raíces cúbicas de 27.

f) Resuelva la ecuación $x^3 - 27 = 0$ por factorización