Elementos del lenguaje: hechos y reglas

- Un programa lógico está formado por **cláusulas** que pueden ser de dos tipos:
  - **Hechos:** $H \; :- \; true$.
    Representan conocimiento que es *verdad* en nuestro programa.
    (Notación: "$:- \; true$" se puede omitir, quedando: H.).
  - **Reglas:** $H \; :- \; B$.
    Se leen de la siguiente forma: *"H es cierto* **si** *se cumple B"*.
    H se denomina *cabeza* y B se denomina *cuerpo*.
  - Ejemplo de relaciones familiares:

```
progenitor(pedro,juan).
hombre(pedro).
padre(X,Y) :- progenitor(X,Y), hombre(X).
```

  - En el cuerpo de una regla pueden aparecer varios *literales* separados por comas. Las comas indican la *conjunción* de los literales del cuerpo de la regla.
- Se pueden incluir *variables lógicas*, que se identifican porque empiezan con una letra mayúscula o el símbolo de subrayado.

Elementos del lenguaje: predicados y objetivos

- En un programa lógico pueden existir varias cláusulas (hechos o reglas) para el mismo predicado:

```
hombre(pedro).      progenitor(pedro,juan).
hombre(juan).       progenitor(pedro,marta).
mujer(marta).
```

- Un **predicado** queda definido por el conjunto de sus hechos y reglas.
  - Prolog permite utilizar el mismo nombre para dos predicados que difieren en su *aridad* (número de argumentos).
  - En el ejemplo anterior, `progenitor/2`, `hombre/1` y `mujer/1`.
  - Semántica declarativa de un predicado: las cláusulas (hechos y reglas) de un predicado forman **distintas alternativas** para que ese predicado sea cierto.

- Un **programa lógico** es un conjunto de definiciones de predicados.

Elementos del lenguaje: objetivos

- Para poder ejecutar un programa lógico, debemos formular una *consulta* al programa, denominada **objetivo**:

  `?- G.`

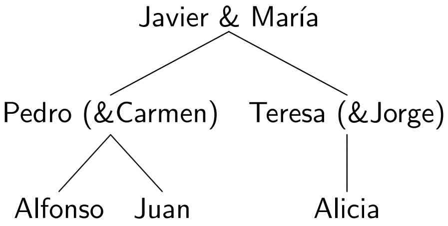
- La ejecución consiste en buscar la respuesta a ese objetivo.
- Ejemplos de objetivos:
  - `?- progenitor(pedro,arturo).`
    ¿Pedro es progenitor de Arturo?
  - Los objetivos pueden contener variables:
    `?- progenitor(pedro,X).`
    ¿De quién es Pedro progenitor?
    `?- padre(Y,marta).`
    ¿Quién es el padre de Marta?
  - Los objetivos pueden ser compuestos: son similares al cuerpo de una regla y se interpretan como la **conjunción** de sus literales.
    `?- padre(X,juan),padre(Y,X).`
    ¿Qué se pregunta en esta consulta?

Elementos del lenguaje: objetivos (cont.)

- La evaluación de un objetivo puede devolver dos resultados lógicos:
  - **Sí**: cuando el objetivo es consecuencia de las reglas del programa.
  - **No**: en caso contrario.
- Durante el **proceso de resolución** se encuentran además los valores de las variables que satisfacen el objetivo (que porporcionan una respuesta afirmativa al programa).

Ejemplo: Relaciones familiares

- Supongamos que tenemos las siguientes relaciones de parentesco



- ¿Cómo se representarían estas relaciones mediante hechos?

Ejemplo: Relaciones familiares

```
hombre(javier).       progenitor(javier,pedro).
hombre(pedro).        progenitor(javier,teresa).
hombre(jorge).        progenitor(maria,pedro).
hombre(alfonso).      progenitor(maria,teresa).
hombre(juan).         progenitor(pedro,alfonso).
mujer(maria).         progenitor(pedro,juan).
mujer(carmen).        progenitor(carmen,juan).
mujer(teresa).        progenitor(carmen,alfonso).
mujer(alicia).        progenitor(jorge,alicia).
                      progenitor(teresa,alicia).
```

- Algunos predicados:

```
padre(X,Y) :- progenitor(X,Y), hombre(X).
madre(X,Y) :- progenitor(X,Y), mujer(X).
```

- El ámbito de las variables de un programa lógico es la cláusula donde aparecen: la variable `X` de padre/2 es distinta de la variable `X` de madre/2.
- ¿Cómo se pueden representar las siguientes relaciones de parentesco: hijo(X,Y), abuelo(X,Y), hermano(X,Y), tio(X,Y), descendiente(X,Y)?

Ejemplo: Relaciones familiares

```
hijo(X,Y) :- progenitor(Y,X), hombre(X).
abuelo(X,Y) :- progenitor(Z,Y), padre(X,Z).
hermano(X,Y) :- progenitor(Z,X), progenitor(Z,Y).
tio(X,Y) :- progenitor(Z,Y), hermano(Z,X).

descendiente(X,Y) :- progenitor(Y,X).
descendiente(X,Y) :- progenitor(Y,Z), descendiente(X,Z).
```

- Podemos probar esto en SWI-Prolog:

```
$ swipl
% /home/jcorreas/.plrc compiled 0.01 sec, 11,372 bytes
Welcome to SWI-Prolog (Multi-threaded, 32 bits, Version 5.6.64)
...
For help, use ?- help(Topic). or ?- apropos(Word).

?- [ejemplo02].
% ejemplo02 compiled 0.00 sec, 3,916 bytes
true.
```

Ejemplo: Relaciones familiares (cont.)

- Consultas sobre el programa de relaciones familiares:

```
hijo(juan,pedro).
abuelo(javier,teresa).
hijo(javier,X).
hijo(X,pedro).
descendiente(X,javier).
hijo(pedro,X).
hermano(pedro,X).  % ¿Pedro es hermano de Pedro?
```

- Modificamos el predicado hermano/2:

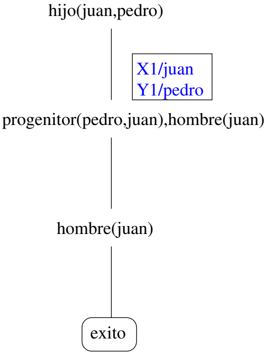
```
hermano(X,Y):-
      progenitor(Z,X),
      progenitor(Z,Y),
      distinto(X,Y).

distinto(X,Y):- X \= Y.  % \= está predefinido.
```

- Para obtener más de una solución: **;**
- Para salir de SWI: `halt.`

Árboles de resolución (cont.)

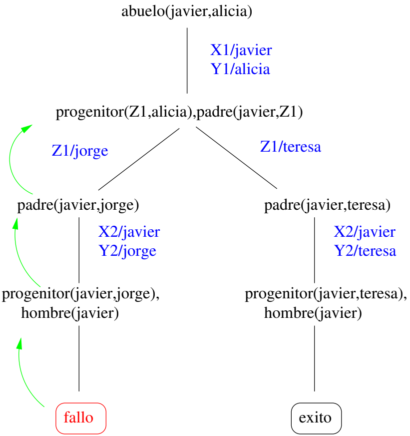
- Para resolver un objetivo sobre un programa lógico se utiliza el **mecanismo de resolución**.
- Aunque para definir correctamente el mecanismo de resolución es necesario tener en cuenta el concepto de unificación, vamos a ver cómo se aplica el mecanismo de resolución en los ejemplos anteriores.
- En el primer ejemplo:

1) Se aplica la regla `hijo(X,Y) :- progenitor(Y,X), hombre(X).`
2) Se generan nuevos objetivos. Se comprueba que existe el hecho `progenitor(pedro,juan).`
3) Por último, se resuelve el último objetivo pendiente: `hombre(juan).`

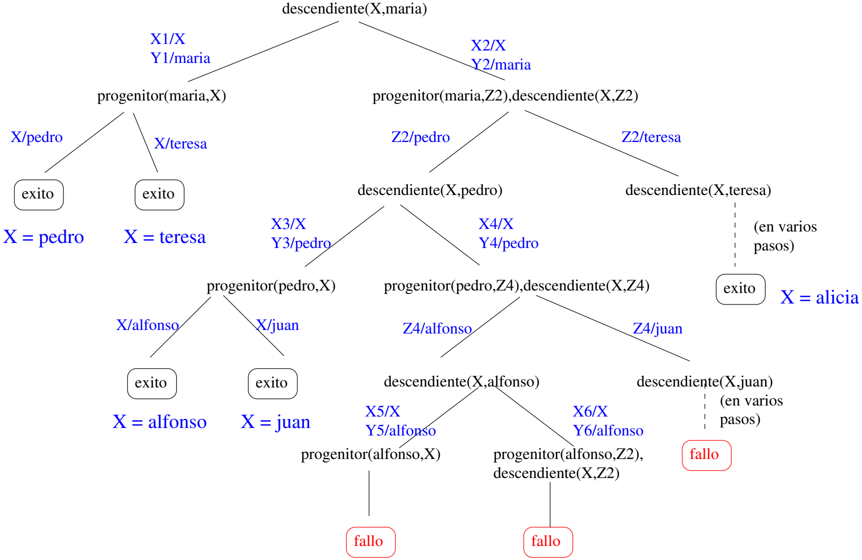


Árboles de resolución (cont.)

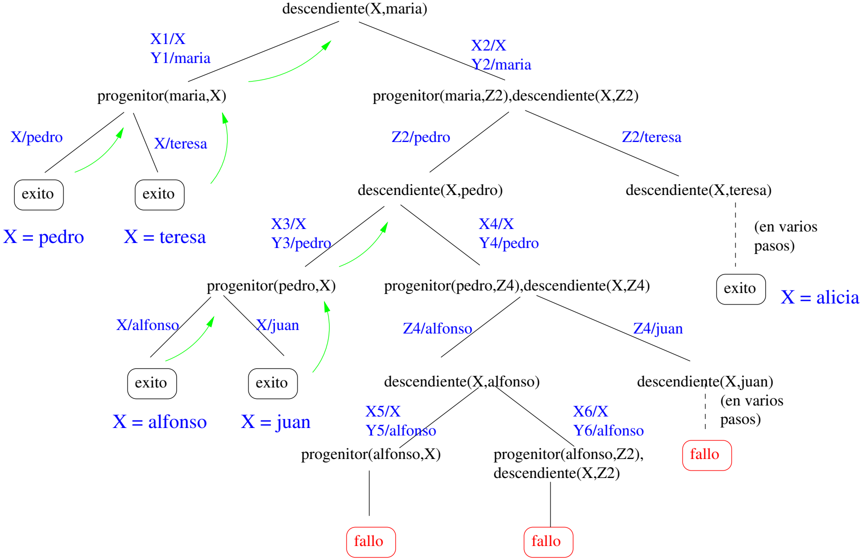
- Primero se aplica la regla `abuelo(X1,Y1) :- progenitor(Z,Y1), padre(X1,Z).`
- Se añaden los nuevos objetivos generados. Se pueden aplicar dos hechos diferentes para progenitor: `progenitor(jorge,alicia)` y `progenitor(teresa,alicia)` (*).
- Si se utiliza el primer hecho, se puede aplicar la regla `padre(X2,Y2) :- progenitor(X2,Y2), hombre(X2).` pero no es posible resolver uno de los nuevos objetivos generados (`progenitor(javier,jorge)`).
- Por ello, debe replantearse (*backtracking*) la decisión tomada en (*).



Árboles de resolución (cont.)



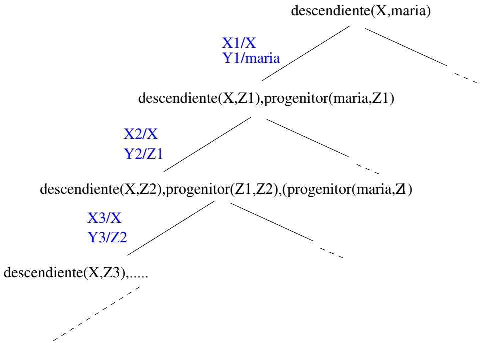
Árboles de resolución (cont.)



Árboles de resolución (cont.)

- Ahora veamos qué ocurriría si utilizáramos otra versión de descendiente/2:

```
descendiente(X,Y) :- descendiente(X,Z), progenitor(Y,Z).
descendiente(X,Y) :- progenitor(Y,X).
```



- Si siempre se utiliza la primera regla, y los objetivos siempre se evaluan de izquierda a derecha, se genera un árbol infinito.
- En Prolog debe tenerse esto en cuenta: puede existir solución en otra rama del árbol que no es alcanzable.
- En el espacio de búsqueda de un objetivo, Prolog realiza **búsqueda en profundidad y por la izquierda**, con *backtracking* en caso de fallo o de petición de más respuestas.

Términos: variables, constantes y estructuras

- **Variables:** Comienzan con una letra mayúscula (o "_") y pueden incluir "_" y dígitos:

  `X, Im4u, Var_2, _, _x, _22`

  (La variable _ se denomina variable anónima).

- **Constantes:** Comienzan con una letra minúscula y pueden incluir "_" y dígitos. También son constantes los números y algunos caracteres especiales. Entre comillas simples, cualquier cadena de caracteres:

  `a, alicia, prog_logica, 23, 'Hungry man', []`

- **Estructuras:** están formadas por un nombre de estructura (**functor**) seguido por un número fijo de argumentos entre paréntesis:

  `s(s(0))          fecha(lunes, Mes, 2010)`

  Los argumentos son a su vez términos:

  ```
  libro(titulo(don_quijote), autor(nombre(miguel),
       apellido(de_cervantes)), Fecha_edicion)
  ```

Términos: variables, constantes y estructuras (cont.)

- La **aridad** es el número de argumentos de una estructura. Una constante es una estructura con aridad cero.
- Ejemplos de términos:

Término	*Tipo*	*Functor principal*
pi	constante	pi/0
hora(min, sec)	estructura	hora/2
pair(Calvin, tiger(Hobbes))	estructura	pair/2
Tee(Alf, rob)	ilegal	—
A_good_time	variable	—

- Los functores pueden definirse como **operadores** con notación *prefija*, *postfija* o *infija*:

`'+'(a,b)`	con notación infija es:	`a + b`
`'-'(b)`	con notación prefija es:	`- b`
`'<'(a,b)`	con notación infija es:	`a < b`
`es_un(fluffy,gato)`	con notación infija es:	`fluffy es_un gato`

Unificación

- La **unificación** es el mecanismo que se utiliza en Prolog para **pasar valores** y **devolver resultados** en los objetivos (y en el cuerpo de las reglas).
- También se utiliza para acceder a componentes de estructuras y dar valores a variables.
- Dos términos (o *literales*) A y B se dicen **unificables** si se pueden hacer **sintácticamente idénticos** dando valores a sus variables mediante una **sustitución**. Ejemplos:

A	B	θ	$A\theta$ y $B\theta$
`dog`	`dog`	$\emptyset$	`dog`
`X`	`a`	{`X=a`}	`a`
`X`	`Y`	{`X=Y`}	`Y`
`f(X,g(t))`	`f(m(h),g(M))`	{`X=m(h), M=t`}	`f(m(h),g(t))`
`f(X,g(t))`	`f(m(h),t(M))`	Imposible (1)	
`f(X,X)`	`f(Y,l(Y))`	Imposible (2)	

A continuación precisamos algo más estas ideas.

Unificación (cont.)

- Una **sustitución** θ es una asignación de términos a variables (distintas) $X_1, \ldots, X_n$ que escribimos en la forma
  $\{X_1/t_1, \ldots, X_n/t_n\}$ o bien $\{X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n\}$
  - A cada X_i/t_i le llamamos *ligadura*. Escribimos $\theta(X_i) = t_i$ o $X_i\theta = t_i$
  - Para todas las variables que no sean $X_1, \ldots, X_n$, definimos $X\theta = X$
- La **aplicación de una sustitución** $\theta = \{X_1/t_1, \ldots, X_n/t_n\}$ a un término t, que escribimos como

  $$\theta(t) \quad \text{o bien} \quad t\theta \quad \text{o bien} \quad t[X_1/t_1, \ldots, X_n/t_n]$$

  es el resultado de reemplazar simultáneamente en t todas las apariciones de cada X_i por t_i. Las sustituciones se aplican también a literales, cláusulas, ...
- La **composición** de dos sustituciones θ, θ' (que notamos por $\theta\theta'$) queda definida por: $t(\theta\theta') = (t\theta)\theta'$. Escribimos $t\theta\theta'$ a secas.
- θ es **idempotente** si $\theta\theta = \theta$.
- θ es **más general** que θ' si $\theta\theta'' = \theta'$, para cierta θ''.

Unificación (cont.)

- Un **unificador** de dos términos t_1, t_2 es una sustitución θ tal que $t_1\theta = t_2\theta$. *Se aplica también a literales, secuencias de términos,. . . .*
- t_1, t_2 son **unificables** si tienen algún unificador.
- Dos términos pueden tener diferentes unificadores. Por ejemplo, si A es `f(X,g(T))` y B es `f(m(H),g(M))`, tenemos:

θ	$A\theta$ y $B\theta$
{`X=m(a), H=a, M=b, T=b`}	`f(m(a),g(b))`
{`X=m(H), M=f(A), T=f(A)`}	`f(m(H),g(f(A)))`
{`X=m(H), T=M`}	`f(m(H),g(M))`

- Si t_1, t_2 son unificables, existe un unificador θ que cumple:
  - es más general que cualquier otro
  - es idempotente
  - no involucra a variables que no estén en t_1, t_2

  Este θ es único salvo cambio de orden en ligaduras $X = Y$. Se denomina **unificador de máxima generalidad (umg)**.
- El *algoritmo de unificación* encuentra el umg.

Algoritmo de unificación (variante de Martelli-Montanari)

Plantea la unificación de A y B como un problema de resolución de ecuaciones.

- **Entrada:** Términos A y B.
- **Salida:** Conjunto S de ligaduras de variables que representa un umg de A y B, o *FALLO*

1. Inicialmente $S = \{A = B\}$
2. Mientras sea posible, aplicar alguna de las siguientes reglas:

Trivial **Si** $S = S' \cup \{X = X\}$, **entonces** $S \leftarrow S'$.

Descomp. **Si** $S = S' \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n)\}$, **entonces** $S \leftarrow S' \cup \{t_1 = s_1, \ldots, t_n = s_n\}$.

Conflicto **Si** $S = S' \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) = g(s_1, \ldots, s_m)\}$ y $(f \neq g$ o $n \neq m)$, **entonces** *FALLO*.

Ligadura **Si** $S = S' \cup \{X = t\}$ y $X \notin var(t)$ y $X \in var(S')$ y $X \neq t$, **entonces** $S \leftarrow S'[X/t] \cup \{X = t\}$,

OccurCheck **Si** $S = S' \cup \{X = t\}$ y $X \in var(t)$, **entonces** *FALLO*.

Reorden **Si** $S = S' \cup \{t = X\}$ y t no es una variable, **entonces** $S \leftarrow S' \cup \{X = t\}$.

Algoritmo de unificación – Ejemplos

- Proporciona el umg de: $A = \texttt{p(X,X)}$ y $B = \texttt{p(f(Z),f(W))}$

Algoritmo de unificación – Ejemplos

- Proporciona el umg de: $A =$ `p(X,X)` y $B =$ `p(f(Z),f(W))`

ecuación	S	regla
-	{ `p(X,X)=p(f(Z),f(W))` }	
`p(X,X)=p(f(Z),f(W))`	{ `X=f(Z), X=f(W)` }	descomposición
`X=f(Z)`	{ `f(Z)=f(W), X=f(Z)` }	ligadura
`f(Z)=f(W)`	{ `X=f(Z), Z=W` }	descomposición
`Z=W`	{ `X=f(W), Z=W` }	ligadura

Algoritmo de unificación – Ejemplos

- Proporciona el umg de: $A = \texttt{p(X,X)}$ y $B = \texttt{p(f(Z),f(W))}$

ecuación	S	regla
-	{ p(X,X)=p(f(Z),f(W)) }	
p(X,X)=p(f(Z),f(W))	{ X=f(Z), X=f(W) }	descomposición
X=f(Z)	{ f(Z)=f(W), X=f(Z) }	ligadura
f(Z)=f(W)	{ X=f(Z), Z=W }	descomposición
Z=W	{ X=f(W), Z=W }	ligadura

- Proporciona el umg de: $A = \texttt{p(X,f(Y))}$ y $B = \texttt{p(Z,X)}$

Algoritmo de unificación – Ejemplos

- Proporciona el umg de: $A =$ `p(X,X)` y $B =$ `p(f(Z),f(W))`

ecuación	S	regla
-	{ `p(X,X)=p(f(Z),f(W))` }	
`p(X,X)=p(f(Z),f(W))`	{ `X=f(Z), X=f(W)` }	descomposición
`X=f(Z)`	{ `f(Z)=f(W), X=f(Z)` }	ligadura
`f(Z)=f(W)`	{ `X=f(Z), Z=W` }	descomposición
`Z=W`	{ `X=f(W), Z=W` }	ligadura

- Proporciona el umg de: $A =$ `p(X,f(Y))` y $B =$ `p(Z,X)`

ecuación	S	regla
-	{ `p(X,f(Y))=p(Z,X)` }	
`p(X,f(Y))=p(Z,X)`	{ `X=Z, f(Y)=X` }	descomposición
`X=Z`	{ `f(Y)=Z, X=Z` }	ligadura
`f(Y)=Z`	{ `X=Z, Z=f(Y)` }	reorden
`Z=f(Y)`	{ `X=f(Y), Z=f(Y)` }	ligadura

Algoritmo de unificación – Ejemplos (cont.)

- Proporciona el umg de: $A = \texttt{p(X,f(Y))}$ y $B = \texttt{p(a,g(b))}$

Algoritmo de unificación – Ejemplos (cont.)

- Proporciona el umg de: $A = $ `p(X,f(Y))` y $B = $ `p(a,g(b))`

ecuación	S	regla
-	{ `p(X,f(Y))=p(a,g(b))` }	
`p(X,f(Y))=p(a,g(b))`	{ `X=a, f(Y)=g(b))` }	descomposición
`f(Y)=g(b)`	**FALLO**	conflicto

Algoritmo de unificación – Ejemplos (cont.)

- Proporciona el umg de: $A =$ `p(X,f(Y))` y $B =$ `p(a,g(b))`

ecuación	S	regla
-	{ `p(X,f(Y))=p(a,g(b))` }	
`p(X,f(Y))=p(a,g(b))`	{ `X=a, f(Y)=g(b))` }	descomposición
`f(Y)=g(b)`	**FALLO**	conflicto

- Proporciona el umg de: $A =$ `p(X,f(X))` and $B =$ `p(Z,Z)`

Algoritmo de unificación – Ejemplos (cont.)

- Proporciona el umg de: $A = $ `p(X,f(Y))` y $B = $ `p(a,g(b))`

ecuación	S	regla
-	{ `p(X,f(Y))=p(a,g(b))` }	
`p(X,f(Y))=p(a,g(b))`	{ `X=a, f(Y)=g(b))` }	descomposición
`f(Y)=g(b)`	**FALLO**	conflicto

- Proporciona el umg de: $A = $ `p(X,f(X))` and $B = $ `p(Z,Z)`

ecuación	S	regla
-	{ `p(X,f(X))=p(Z,Z)` }	
`p(X,f(X))=p(Z,Z)`	{ `X=Z, f(X)=Z` }	descomposición
`X=Z`	{ `f(Z)=Z, X=Z` }	ligadura
`f(Z)=Z`	{ `X=Z, Z=f(Z)` }	reorden
`Z=f(Z)`	**FALLO**	Occur Check

- El predicado Prolog '='/2 permite unificar dos términos. Se define como el hecho `'='(X,X)` y puede utilizar con notación infija:

```
?- f(A,B) = f(g(B),f(A)).
A = g(f(**)),
B = f(g(**)).
```
(en SWI)

El mecanismo de resolución

- **Entrada:** Un programa lógico P y un objetivo Q
- **Salida:** sustitución respuesta θ, si $Q\theta$ deducible de P, *fallo* si no existe tal θ
- **(Seudo)-Algoritmo:**

$R \leftarrow Q$ // R es la secuencia de objetivos pendientes de evaluar.
$\theta \leftarrow \epsilon$ // θ es la sustitución respuesta acumulada, inicialmente la identidad.
mientras $R \neq \emptyset$ **hacer**
  Seleccionar A literal de R // Regla de cómputo 1
  Elegir una cláusula (renombrada) de P: `A' :- B`$_1$`,...,B`$_n$
    tal que A y A' unifican con unificador θ_1 // regla de búsqueda
  si no existe ninguna cláusula que unifique con A **entonces**
    // backtracking
    Fallo: replantear la elección de cláusula del literal **anterior**, *restaurando* θ
  si no
    Eliminar A de R
    Añadir $B_1, \ldots, B_n$ a R // Regla de cómputo 2
    Aplicar la sustitución θ a R
    $\theta \leftarrow \theta\theta_1$
  fin si
fin mientras
devolver θ

Regla de búsqueda y regla de cómputo

- En Prolog, la **regla de cómputo 1** selecciona los literales de izquierda a derecha, y la **regla de cómputo 2** añade los literales del cuerpo de una cláusula en el orden en el que aparecen en ésta, y al principio de la lista de objetivos pendientes.
- Por su parte, la **regla de búsqueda** se aplica en el orden en el que aparecen las cláusulas en el programa.
- El *backtracking* se realiza de forma implícita: si se produce un fallo, se vuelve al último punto en el que se ha aplicado la regla de búsqueda.
- Del mismo modo, cuando se ha tenido éxito y se necesitan más respuestas, se continúa el algoritmo como si se hubiera producido un fallo (se fuerza el *backtracking*).

El procedimiento de búsqueda de Prolog se suele recordar como . . .

Búsqueda en profundidad y por la izquierda, con backtracking cronológico en caso de fallo.

Tipos de datos y estructuras de datos

- Hemos visto anteriormente los tipos de términos que se pueden utilizar en un programa lógico.
- Prolog no es un lenguaje tipado, pero en cualquier caso las variables lógicas pueden ligarse a términos de un tipo dado.
- Existen algunos tipos de datos predefinidos en Prolog (átomos, números, estructuras) y otros para los que se define una notación especial (listas, functores con notación infija).
- Veremos algunos tipos de datos utilizados frecuentemente: listas y árboles, y cómo pueden utilizarse.

Listas

- Una lista es una sucesión ordenada y finita de objetos:

$$[X_1, X_2, \ldots, X_n]$$

- En Prolog las listas se definen mediante una estructura con dos argumentos:
  - El primer argumento corresponde al primer elemento de la lista (cabeza).
  - El segundo argumento es el resto de la lista.
- La lista vacía se representa mediante la constante `[]`.
- Tradicionalmente, el functor de las listas en Prolog es el punto.
- Por ejemplo, la lista formada por las constantes uno, dos y tres se representa mediante el término `.(uno,.(dos,.(tres,[])))`.

Listas (cont.)

- **Notación alternativa:** Las listas también se pueden representar con otra notación:

  `.(A,B)` se representa mediante `[A|B]`.

- Esta notación permite representar más de un elemento que aparece al principio de una lista: `[A,B|C]` representa `.(A,.(B,C))` (C es el resto de la lista excepto los dos primeros elementos).

- Ejemplos:

```
.(a,[])                 [a|[]]              [a]
.(a,.(b,[]))            [a|[b|[]]]          [a,b]
.(a,.(b,.(c,[])))       [a|[b|[c|[]]]]      [a,b,c]
.(a,X)                  [a|X]               [a|X]
.(a,.(b,X))             [a|[b|X]]           [a,b|X]
```

  - `[a,b]` y `[a|X]` unifican con $\{X = [b]\}$.
  - `[a]` y `[a|X]` unifican con $\{X = []\}$.
  - `[a]` y `[a,b|X]` no unifican.
  - `[]` y `[X]` no unifican.

Listas (cont.)

- Más ejemplos:

```
[a,b] = [a,b|[]] = [a|[b]] = .(a,.(b,[]))
[a,X,b] = [a,X|[b]] = [a|[X,b]] = [a|[X|[b]]] = [a,X,b|[]]
        = .(a,[X,b]) =.(a,.(X,.(b,[])))
[a,X,b|Y] = [a,X|[b|Y]] = [a|[X,b|Y]] = .(a,.(X,.(b,Y)))
[a,X,b,Y] = .(a,.(X,.(b,.(Y,[]))))
```

- Ejercicios: Determina el resultado de la unificación de los siguientes pares de términos:

```
[a,b,c]   = [X|[Y|Z]]        [1,2]   = [X,[Y|Z]]
[a,b|C]   = [X,Y]            [1,2,Z] = [X,Y]
[a,X,Y|U] = [X,Y|V]          [1,2]   = [X|[Y|Z]]
[1,2|[3]] = [X|[Y|Z]]        [[1,X]] = [Y|Z]
[1,X,Y|Z] = [X,Y|K]          [1,2]   = [1|2]
```

Predicados sobre listas

- Comprobación del tipo lista:

```
% list(X) <-> X es una lista.
```

Predicados sobre listas

- Comprobación del tipo lista:

```
% list(X) <-> X es una lista.
list([]).
list([_|Y]) :- list(Y).
```

- Para saber si un elemento está en una lista (member/2):

```
% member(X,L) <-> X es un elemento de L.
```

Predicados sobre listas

- Comprobación del tipo lista:

```
% list(X) <-> X es una lista.
list([]).
list([_|Y]) :- list(Y).
```

- Para saber si un elemento está en una lista (member/2):

```
% member(X,L) <-> X es un elemento de L.
member(X,[X|_]).
member(X,[_|Xs]) :- member(X,Xs).
```

  `member/2` se puede utilizar de varias formas:

  - para saber si un elemento está en una lista:
    `?- member(a,[b,c,a]).`
  - para enumerar los elementos de una lista:
    `?- member(X,[b,c,a]).`
  - para encontrar una lista en la que aparece un elemento:
    `?- member(a, L).`

- Ejercicios: define `prefijo/2`, `sufijo/2`, `sublista/2`.

Predicados sobre listas (cont.)

- Concatenación de listas: En muchos casos se necesita un predicado que concatene dos listas:

```
% concatenar(X,Y,Z) <-> Z es la concatenación de X e Y
```

- Por ejemplo: `?- concatenar([a,b,c],[d,e],Z).`

```
Z = [a, b, c, d, e].
```

- ¿Cuál sería el caso base para definir este predicado?

Predicados sobre listas (cont.)

- Concatenación de listas: En muchos casos se necesita un predicado que concatene dos listas:

  `% concatenar(X,Y,Z) <-> Z es la concatenación de X e Y`

- Por ejemplo: `?- concatenar([a,b,c],[d,e],Z).`

  `Z = [a, b, c, d, e].`

- ¿Cuál sería el caso base para definir este predicado?
- Podemos definir un caso trivial: `concatenar([],X,X).`

Predicados sobre listas (cont.)

- Concatenación de listas: En muchos casos se necesita un predicado que concatene dos listas:

  `% concatenar(X,Y,Z) <-> Z es la concatenación de X e Y`

- Por ejemplo: `?- concatenar([a,b,c],[d,e],Z).`

  `Z = [a, b, c, d, e].`

- ¿Cuál sería el caso base para definir este predicado?
- Podemos definir un caso trivial: `concatenar([],X,X).`
- Si la primera lista tiene un solo elemento: `concatenar([a],X,[a|X]).`

Predicados sobre listas (cont.)

- Concatenación de listas: En muchos casos se necesita un predicado que concatene dos listas:

  ```
  % concatenar(X,Y,Z) <-> Z es la concatenación de X e Y
  ```

- Por ejemplo: `?- concatenar([a,b,c],[d,e],Z).`

  `Z = [a, b, c, d, e].`

- ¿Cuál sería el caso base para definir este predicado?
- Podemos definir un caso trivial: `concatenar([],X,X).`
- Si la primera lista tiene un solo elemento: `concatenar([a],X,[a|X]).`
- Si la primera lista tiene dos elementos:

  `concatenar([a,b],X,[a,b|X]).`

- ¿Cómo se puede generalizar?

Predicados sobre listas (cont.)

- Definición de concatenar/3:

```
concatenar([],X,X).
concatenar([X|Xs],Ys,[X|Zs]):-concatenar(Xs,Ys,Zs).
```

- En las librerías de Prolog, este predicado se denomina `append/3`.
- Posibles usos de concatenar/3:
  - Para concatenar dos listas:

    ```
    ?- concatenar([a,b],[c,d],X).
    ```

  - Para obtener la diferencia de dos listas:

    ```
    ?- concatenar(X,[c,d],[a,b,c,d]).
    ```

  - Para dividir una lista en dos:

    ```
    ?- concatenar(X,Y,[a,b,c,d]).
    ```

Predicados sobre listas (cont.)

- Invertir una lista:

  `% invertir(X,Y) <-> Y es la lista inversa de X`

- Por ejemplo: `?- invertir([a,b,c],Z).`

  `Z = [c, b, a].`

- ¿Cómo se podría definir este predicado?

Predicados sobre listas (cont.)

- Invertir una lista:

  ```
  % invertir(X,Y) <-> Y es la lista inversa de X
  ```

- Por ejemplo: `?- invertir([a,b,c],Z).`

  ```
  Z = [c, b, a].
  ```

- ¿Cómo se podría definir este predicado?

  ```
  invertir([],[]).
  invertir([X|Xs],Ys):-invertir(Xs,Zs),concatenar(Zs,[X],Ys).
  ```

- ¿Qué complejidad tiene este predicado? ¿Podría ser más eficiente?

Predicados sobre listas (cont.)

- Invertir una lista:

  `% invertir(X,Y) <-> Y es la lista inversa de X`

- Por ejemplo: `?- invertir([a,b,c],Z).`

  `Z = [c, b, a].`

- ¿Cómo se podría definir este predicado?

```
invertir([],[]).
invertir([X|Xs],Ys):-invertir(Xs,Zs),concatenar(Zs,[X],Ys).
```

- ¿Qué complejidad tiene este predicado? ¿Podría ser más eficiente?

```
invertir2([],Xs,Xs).
invertir2([X|Xs],Ys,Zs):-invertir2(Xs,[X|Ys],Zs).
```

- Ejercicio: define predicados para eliminar un elemento de una lista (la primera o todas las apariciones):

  `eliminar_uno(Xs,Elem,Zs)`, `eliminar_todos(Xs,Elem,Zs)`

  (`Zs` es la lista `Xs` sin una/todas las apariciones del elemento `Elem`).

Arboles binarios

- No existe una sintaxis específica para árboles en Prolog: se pueden utilizar estructuras. Por ejemplo:

```
arbol(Elemento,Izquierdo,Derecho)
```

- Un árbol vacío se puede representar con una constante, por ejemplo: `void`.
- ¿Cómo se puede verificar si un término es un árbol binario?

Arboles binarios

- No existe una sintaxis específica para árboles en Prolog: se pueden utilizar estructuras. Por ejemplo:

```
arbol(Elemento,Izquierdo,Derecho)
```

- Un árbol vacío se puede representar con una constante, por ejemplo: `void`.
- ¿Cómo se puede verificar si un término es un árbol binario?

```
arbol_binario(void).
arbol_binario(arbol(_,I,D)):-
     arbol_binario(I),
     arbol_binario(D).
```

Arboles binarios (cont.)

- ¿Como podemos saber si un elemento está en un arbol?

Arboles binarios (cont.)

- ¿Como podemos saber si un elemento está en un arbol?

```
member_arbol(X,arbol(X,_,_)).
member_arbol(X,arbol(_,I,_)):- member_arbol(X,I).
member_arbol(X,arbol(_,_,D)):- member_arbol(X,D).
```

- ¿Cómo se puede proporcionar el recorrido en preorden de un árbol binario?

Arboles binarios (cont.)

- ¿Como podemos saber si un elemento está en un arbol?

```
member_arbol(X,arbol(X,_,_)).
member_arbol(X,arbol(_,I,_)):- member_arbol(X,I).
member_arbol(X,arbol(_,_,D)):- member_arbol(X,D).
```

- ¿Cómo se puede proporcionar el recorrido en preorden de un árbol binario?

```
pre_orden(void,[]).
pre_orden(arbol(X,I,D),Orden):-
     pre_orden(I,OrdenI),
     pre_orden(D,OrdenD),
     append([X|OrdenI],OrdenD,Orden).
```

- Ejercicio: define los predicados para recorrer un árbol binario en inorden y en postorden.
- Ejercicio: define un predicado que calcule el número de nodos de un árbol binario (con aritmética de Peano).

Estructuras recursivas: expresiones simbólicas

- Una expresión aritmética como `2*x+3*x^2` también es para Prolog un término, donde los operadores se corresponden con functores en notación infija. Por ejemplo:

  ```
  ?- display(2*x+3*x^2).
  +(*(2, x), *(3, ^(x, 2)))
  true.
  ```

  `display/1` muestra por pantalla en notación prefija el argumento que recibe.
- La evaluación de expresiones aritméticas se realiza mediante predicados específicos (`is/2`, `</2`, `>/2`) que veremos más adelante.
- Se puede hacer un (mini) derivador simbólico: `deriv(Exp,Var,Deriv)`

Estructuras recursivas: expresiones simbólicas (cont.)

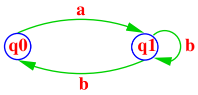
```
deriv(X,X,s(0)).
deriv(C,X,0) :- nat(C).
deriv(U+V,X,DU+DV) :- deriv(U,X,DU), deriv(V,X,DV).
deriv(U-V,X,DU-DV) :- deriv(U,X,DU), deriv(V,X,DV).
deriv(U*V,X,DU*V+U*DV) :- deriv(U,X,DU), deriv(V,X,DV).
deriv(U/V,X,(DU*V-U*DV)/V^s(s(0))) :- deriv(U,X,DU),
deriv(V,X,DV).
deriv(U^s(N),X,s(N)*U^N*DU) :- deriv(U,X,DU), nat(N).
deriv(log(U),X,DU/U) :- deriv(U,X,DU).
...
```

- La expresión resultante se podría simplificar.
- Consultas:

  ```
  deriv(s(s(s(0)))*x+s(s(0)),x,Y).
  deriv(s(s(s(0)))*x+s(s(0)),x,0*x+s(s(s(0)))*s(0)+0).
  deriv(E,x,0*x+s(s(s(0)))*s(0)+0).
  ```

Programación recursiva: autómatas

- Reconocimiento de la secuencia de caracteres aceptada por un *autómata finito no determinista* (**q0** es estado *inicial* y *final*):



- Podemos representar cada transición con un hecho:

```
delta(q0,a,q1).
delta(q1,b,q0).
delta(q1,b,q1).
```

- Los estados iniciales y finales también los representamos con hechos:

```
inicial(q0).
final(q0).
```

- El programa que determina si una secuencia es aceptada es:

```
aceptar(S):- inicial(Q), aceptar_desde(S,Q).
aceptar_desde([],Q):- final(Q).
aceptar_desde([X|Xs],Q):-
     delta(Q,X,NQ), aceptar_desde(Xs,NQ).
```

Programación recursiva: autómatas (cont.)

- ¿Se podría definir de modo similar un autómata con pila?

Programación recursiva: autómatas (cont.)

- ¿Se podría definir de modo similar un autómata con pila?

```
aceptarP(S) :- inicialP(Q), aceptarP_desde(S,Q,[]).

aceptarP_desde([],Q,[]):- finalP(Q).
aceptarP_desde([X|Xs],Q,S):-
     delta(Q,X,S,NQ,NS), aceptarP_desde(Xs,NQ,NS).

inicialP(q0).
finalP(q1)

delta(q0,X,Xs,q0,[X|Xs]).
delta(q0,X,Xs,q1,[X|Xs]).
delta(q0,X,Xs,q1,Xs).
delta(q1,X,[X|Xs],q1,Xs).
```

- ¿Qué secuencia reconoce este autómata?
- Ejercicio: define un programa que reconozca el lenguaje $L = \{a^k b^k | k \geq 0\}$.