Monte Carlo Integration

Luís Paulo Santos – Dep. de Informática

Universidade do Minho

May, 2022

Exercício 1

Considere a função bi-dimensional apresentada na Tabela 1:

y \ x	0	1	2	3	4
0	1	2	3	2	1
1	2	3	4	3	2
2	1	2	3	2	1

Tabela 1 - Função (x,y)

a) Qual o valor exacto do integral $\int_0^2 \int_0^4 f(x,y)dx\,dy$?

b) Escolha e anote na Tabela 2 dois pares de números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1. Isto é $\left(\xi_0^x \in [0{,}1]\,, \xi_0^y \in [0{,}1]\right)$ e $\left(\xi_1^x \in [0{,}1]\,, \xi_1^y \in [0{,}1]\right)$.

c) Calcule os respectivos valores de x e y usando uma distribuição uniforme. Isto é:

$$y = \begin{cases} 0 \leftarrow \xi^y < 0.33 \\ 1 \leftarrow 0.33 \le \xi^y < 0.66 \\ 2 \leftarrow \xi^y \ge 0.66 \end{cases} \qquad x = \begin{cases} 0 \leftarrow \xi^x < 0.2 \\ 1 \leftarrow 0.2 \le \xi^x < 0.4 \\ 2 \leftarrow 0.4 \le \xi^x < 0.6 \\ 3 \leftarrow 0.6 \le \xi^x < 0.8 \\ 4 \leftarrow \xi^x \ge 0.8 \end{cases}$$

d) Sabendo que as distribuições de probabilidade são uniformes, e portanto, iguais ao inverso com comprimento do respectivo domínio, preencha as restantes células da tabela.

e) Qual o erro na sua estimativa do integral?

ξ^x	x	p(x)	ξ^y	y	p(y)	f(x,y)	p(x)*p(y)	f(x,y) / p(x)*p(y)
$\langle I \rangle = \frac{1}{2}\sum \frac{f(x,y)}{p(x) * p(y)}$								

Tabela 2 - Cálculo de <I> com distribuição uniforme

f) Copie os valores de ξ^x e ξ^y da Tabela 2 para a Tabela 3.

g) Use as expressões abaixo para calcular x, y, p(x) e p(y). Preencha os respectivos valores na Tabela 3.

$$y = \begin{cases} 0 \leftarrow \xi^y < 0.2\,; p(y=0) = 0.2 \\ 1 \leftarrow 0.2 \le \xi^y < 0.8\,\,; p(y=1) = 0.6 \\ 2 \leftarrow \xi^y \ge 0.8; p(y=2) = 0.2 \end{cases} \quad x = \begin{cases} 0 \leftarrow \xi^x < 0.1; p(x=0) = 0.1 \\ 1 \leftarrow 0.1 \le \xi^x < 0.3; p(x=1) = 0.2 \\ 2 \leftarrow 0.3 \le \xi^x < 0.7; p(x=2) = 0.4 \\ 3 \leftarrow 0.7 \le \xi^x < 0.9; p(x=3) = 0.2 \\ 4 \leftarrow \xi^x \ge 0.9; p(x=4) = 0.1 \end{cases}$$

h) Calcule o valor da estimativa do integral.

i) Qual a diferença relativamente à estimativa uniforme?

ξ^x	x	p(x)	ξ^y	y	p(y)	f(x,y)	p(x)*p(y)	f(x,y) / p(x)*p(y)
$\langle I \rangle = \frac{1}{2}\sum \frac{f(x,y)}{p(x) * p(y)}$								

Tabela 3- Cálculo de f(x,y) com amostragem por importância

Exercício 2

Considere a seguinte função uni-dimensional:

$$f(x) = x^2 - x$$

Pretende-se calcular estimativas do integral: $\int_1^3 f(x)dx$

Note que este integral pode ser calculado analiticamente:

$$\int_1^3 (x^2 - x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\bigg|_1^3 = \left(\frac{27}{3} - \frac{9}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{6} + \frac{1}{6} = \frac{14}{3} \approx 4.66$$

A Ilustração 1 apresenta a função e o domínio de integração.

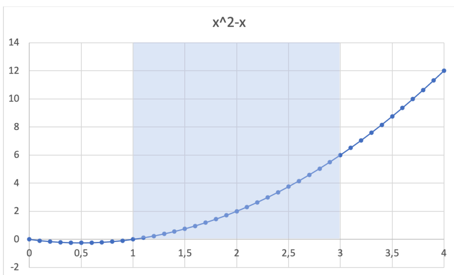

Ilustração 1-f(x)=x^2-x

a) Escolha e anote na Tabela 2 cinco números aleatórios uniformemente distribuídos entre 0 e 1.

b) Preencha as restantes colunas da tabela. Uma vez que o domínio de integração é $[1,3]$, calcule $x_i = 1 + 2 * \xi_i$. Como usamos distribuição uniforme a probabilidade é constante $p(x) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$

c) Qual o erro da sua estimativa? Preencha-o na respectiva célula da Tabela 7.

ξ_i	x_i	$p(x_i) = 1/2$	$f(x_i) = {x_i}^2 - x_i$	$f(x_i)/p(x_i)$
$\langle I \rangle = \frac{1}{5}\sum \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$				

Tabela 4- Cálculo de <I> com distribuição uniforme

Consideremos agora a estratificação do domínio de integração. Dividimos o domínio em 5 sub-intervalos. Uma vez que o domínio de integração é $[1,3]$ cada sub-domínio terá de comprimento $2/5 = 0.4$. O primeiro subdomínio, por exemplo, é [1, 1.4[

d) Copie para a primeira coluna da Tabela 5 os valores aleatórios da Tabela 4.

e) Calcule para cada sub-intervalo o valor de x_i. Note que este é dado por $x_i = \alpha_i + \xi_i(\beta_i - \alpha_i) = \alpha_i + 0.4 * \xi_i$.

f) Preencha as restantes colunas da Tabela 5. Note que usamos distribuição uniforme dentro de cada sub-domínio (ou *stratum*), logo $p(x_i) = 1/0.4 = 2.5$. Trata-se de uma função de densidade de probabilidade, portanto o seu valor em cada ponto pode ser maior do que 1.

g) Calcule a estimativa do integral. Note que aqui não dividimos pelo número de amostras. O que acontece é que calculamos 5 integrais, 1 por sub-domínio, usando apenas uma amostra para cada integral. Agora estamos a somar as estimativas desses 5 integrais, uma vez que o nosso domínio de integração é a união dos 5 sub-domínios.

h) Qual o erro da sua estimativa? Preencha-o na respectiva célula da Tabela 7.

ξ_i	$[\alpha_i, \beta_i[$	x_i	$p(x_i) = 2.5$	$f(x_i) = {x_i}^2 - x_i$	$f(x_i)/p(x_i)$
$\langle I \rangle = \sum \frac{f(x)}{p(x)}$					

Tabela 5- Cálculo de <I> com estratificação

Consideremos agora amostragem por importância. Temos que escolher uma forma para a nossa função de densidade de probabilidade $p(x)$ que seja semelhante à forma de $f(x)$ e que seja facilmente invertível. Olhando para a Ilustração 1 constatamos que, dentro do domínio de integração, $f(x)$ cresce com x. Vamos então escolher $p(x)$ proporcional a x: $p(x) = cx$.

Vamos integrar $p(x) = cx$ no domínio de integração para calcular o valor de c que faz com que este integral seja igual a 1:

$$\int_1^3 cx = 1 \Leftrightarrow \left.\frac{cx^2}{2}\right|_1^3 = 1 \Leftrightarrow c\frac{9-1}{2} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{4} \Rightarrow p(x) = \frac{x}{4}$$

ξ_i	x_i	$p(x_i) = x_i/4$	$f(x_i) = {x_i}^2 - x_i$	$f(x_i)/p(x_i)$
$\langle I \rangle = \frac{1}{5}\sum \frac{f(x)}{p(x)}$				

Tabela 6- Cálculo de <I> com amostragem por importância

$\int_1^3 (x^2 - x)dx \approx 4.66$	
Técnica	Erro
Uniforme	
Estratificada	
Importância	

Tabela 7- Erros das diferentes estimativas

Exercício 3

Considere a seguinte função bi-dimensional definida sobre a semi-esfera:

$$f(\theta, \phi) = \sin\theta \cos\frac{\phi}{4}$$

Pretende-se calcular estimativas do integral: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta, \phi) d\theta\, d\phi$

Note que este integral pode ser calculado analiticamente:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\frac{\phi}{4} d\theta\, d\phi = \int_0^{2\pi} (-\cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\phi}{4} d\phi = \int_0^{2\pi} \cos\frac{\phi}{4} d\phi = 4\sin\left.\frac{\phi}{4}\right|_0^{2\pi} = 4$$

Note que o ângulo sólido definido por uma semi-esfera é de 2π estéreo radianos, logo ao gerarmos amostras com uma distribuição uniforme a probabilidade de cada amostra é $p(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi}$. Note também que dado um par de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas em [0,1[, (ξ_1, ξ_2) para obter uma direcção uniformemente distribuída na semi esfera deve usar a expressão $(\theta, \phi) = (\cos^{-1}\xi_1, 2\pi\xi_2)$

a) Usando 5 amostras preencha a Tabela 8 e calcule uma estimativa deste integral

(ξ_1, ξ_2)	$(\theta, \phi) =$ $(\cos^{-1}\xi_1, 2\pi\xi_2)$	$p(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi}$	$f(\theta, \phi) = \sin\theta\cos\frac{\phi}{4}$	$\frac{f(\theta, \phi)}{p(\theta, \phi)}$

$\langle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\frac{\phi}{4}\,d\theta\,d\phi\rangle = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}\frac{f(\theta,\phi)}{p(\theta,\phi)} = \frac{2\pi}{5}\sum_{i=1}^{5}f(\theta,\phi)$				

Tabela 8- <I> para distribuição uniforme sobre a semi esfera

Vamos agora usar amostragem baseada na importância com $p(\theta,\phi) = c\sin\theta$. Normalizando:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\sin\theta\,d\theta\,d\phi = 1 \Leftrightarrow c\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi = c\int_0^{2\pi}d\phi = c\phi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2\pi}$$

Logo $p(\theta,\phi) = \frac{\sin\theta}{2\pi}$