Projeto 1 da Disciplina

Data de Entrega

O projeto deverá ser entregue até às 23h55 do dia 18 de maio de 2023. Entregar no Moodle dois arquivos: um arquivo mlx com o MATLAB Live Script e um pdf (gerado a partir do Live Script), com o relatório, contendo os resultados e as discussões pedidas. Documentar os códigos.

Introdução

O projeto da disciplina estudará os esforços e deflexões numa viga. Vigas são um dos elementos estruturais mais importantes na engenharia, pois são os elementos utilizadas para suportar cargas e vencer vãos. Vigas são elementos estruturais delgados (elementos cuja dimensão longitudinal e expressivamente maior que as dimensões da seção transversal), sujeitos a carregamentos perpendiculares à direção longitudinal, e podem ser classificadas de acordo com o tipo de suporte: simplesmente apoiada, engastada, em balanço etc., conforme ilustrado na Figura 1.

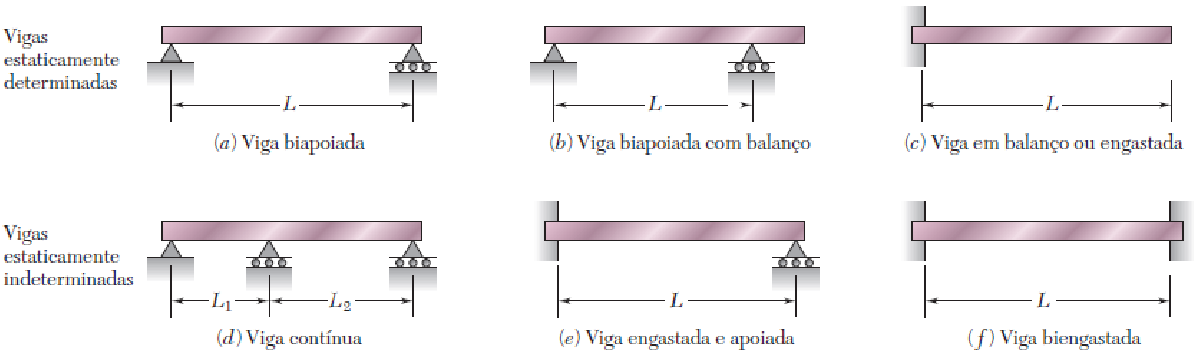

Figura 1 – Classificação de vigas baseada em sua vinculação e suportes

Dizemos que a viga é estaticamente determinada, como no caso das vigas a-c da Figura 1, quando se é possível determinar todas as reações dos apoios apenas com os métodos da estática. No caso das vigas d-f, há mais incógnitas que equações da estática disponíveis e dizemos, nesse caso, que a viga é estaticamente indeterminada.

O carregamento transversal de uma viga pode consistir de forças concentradas ou forças distribuídas, como ilustrado na Figura 2, ou pode estar sujeito a uma combinação dos dois tipos de carregamento.

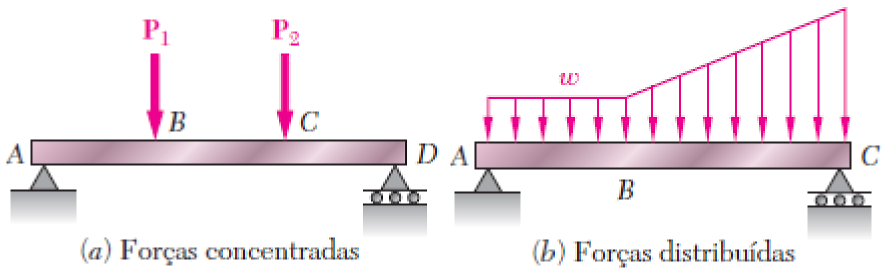

Figura 2 – Carregamentos concentrados e distribuídos numa viga

É de extrema importância em vigas conhecer os valores das tensões normais agindo ao longo da seção transversal da viga, pois estes valores são limitados pelas tensões admissíveis dos materiais usados em sua construção, bem como as deflexões máximas da viga, pois especificações de projeto muitas vezes incluem um valor máximo admissível para sua deflexão. Conhecer a deflexão é importante também em vigas estaticamente indeterminadas, pois somente é possível determinar as reações do sistema considerando-se as deformações do mesmo. A Figura 3 ilustra duas vigas sujeitas a carregamentos diferentes, e seu *diagrama de Momento Fletor* e um esboço da *deflexão da linha elástica* da viga.

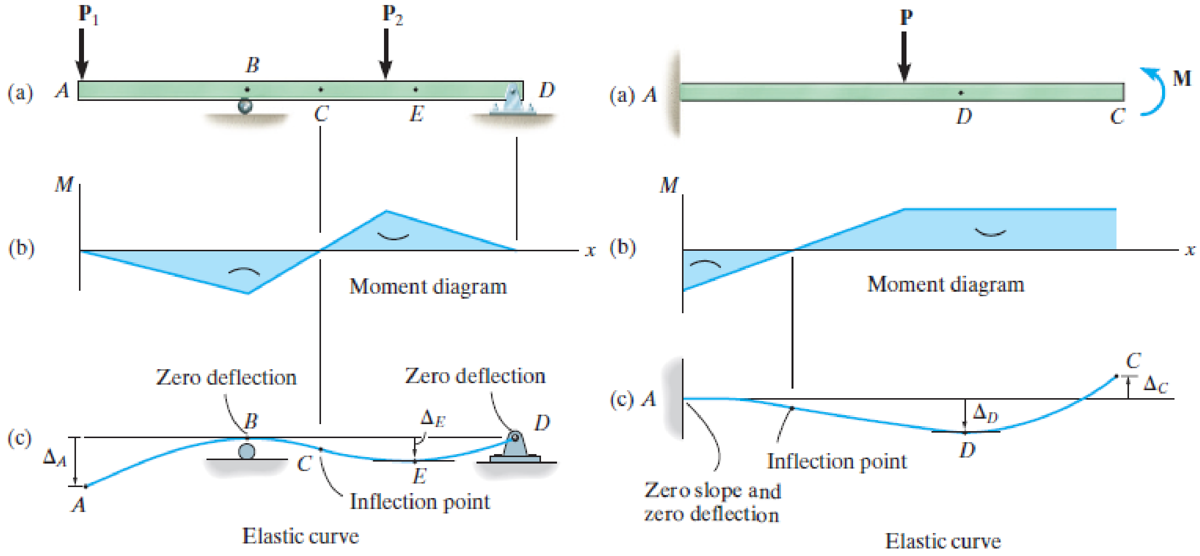

Figura 3 – Momento fletor e deflexão em vigas

O *diagrama de Momento Fletor* de uma viga apresenta de maneira gráfica como o momento fletor interno resultante varia ao longo do comprimento da viga. Seu valor é de especial importância, pois a deflexão da viga depende do momento fletor de acordo com a equação:

$$EI_{zz}\frac{d^2v_y(x)}{dx^2} = M_z(x)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material da viga, I_{zz} é o segundo momento de área em relação ao eixo horizontal (z) que passa pelo seu centroide, v_y é a deflexão da viga e M_z é o momento fletor resultante. Como o momento fletor pode variar ao longo do comprimento da viga, então $M_z = M_z(x)$ e, portanto, também a deflexão da viga varia,$v_y = v_y(x)$.

Como a viga está submetida à flexão, devido ao carregamento transversal, a distribuição de tensões normais numa seção transversal da viga depende do momento fletor e varia linearmente ao longo da altura da seção, conforme ilustrado na Figura 4, em que a distância vertical y é medida a partir da linha neutra da viga. A *fórmula da flexão* expressa a relação da tensão normal σ_{xx} na seção com o momento fletor M_z, a posição y acima ou abaixo da linha neutra e o segundo momento de área I_{zz} da seção:

$$\sigma_{xx}(x,y) = -\frac{M_z(x)y}{I_{zz}}$$

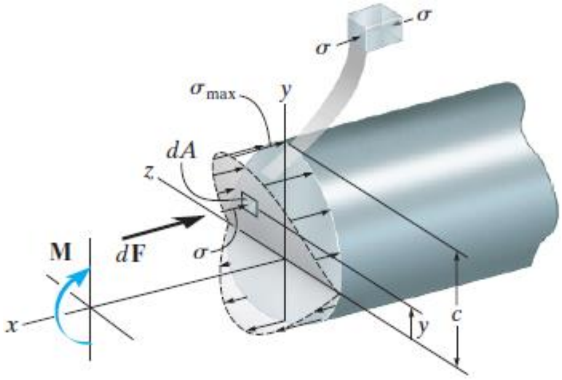

Figura 4 – Variação da tensão de flexão na seção da viga devido ao momento fletor M

Essa primeira parte do projeto irá estudar tensões e deflexões numa viga biapoiada. Considere a viga engastada de comprimento L, mostrada na Figura 5, sujeita a um momento de binário M_0 aplicado no ponto médio da viga, e uma força pontual P aplicada em sua extremidade livre. A linha tracejada indica a deflexão aproximada da viga.

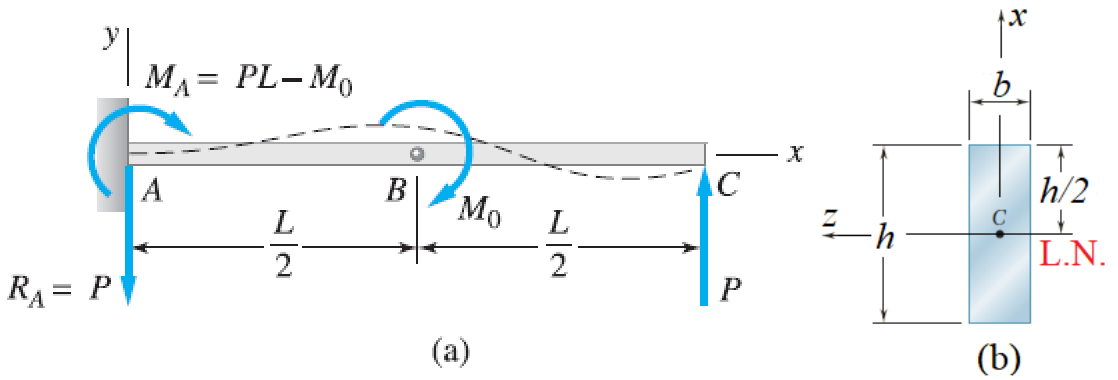

Figura 5 – (a) Viga engastada-livre, sujeita a um momento e uma força pontual, e (b) Seção transversal retangular da viga

Para facilitar a descrição do carregamento na viga e sua posterior integração para obtenção do momento fletor interno resultante e deflexão da viga, é vantajoso trabalhar com *funções de descontinuidade*, que permitem descrever funções descontínuas em uma única expressão. Define-se a função de singularidade como:

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

Note que a função de singularidade é similar ao polinômio $(x-a)^n$, mas trocando-se o parênteses pelos colchetes $\langle \quad \rangle$, chamado de colchetes de Macaulay. Sempre que a quantidade entre colchetes for positiva ou zero, o colchetes é substituído por parênteses comuns, e sempre que a quantidade for negativa, o próprio colchete será igual a zero.

Com essa definição de função de descontinuidade, o momento fletor interno resultante ao longo da viga pode ser escrito como:

$$M_z(x) = PL - M_0 - Px + M_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^0$$

Essa expressão equivale à expressão definida por partes:

$$M_z(x) = \begin{cases} P(L-x) - M_0, & x < \frac{L}{2}a \\ P(L-x), & x \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

A solução da equação da linha elástica, com as condições de contorno apropriada, fornece a expressão para a deflexão da viga como:

$$EI_{zz}v_y(x) = (PL - M_0)\frac{x^2}{2} - \frac{P}{6}x^3 + \frac{M_0}{2}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2$$

O segundo momento de área I_{zz}, para a seção retangular da viga de base b e altura h, conforme ilustrado na Figura 5, é dado por:

$$I_{zz} = \frac{bh^3}{12}$$

E a coordenada y, medida a partir da linha neutra (L.N.), estende-se de $-h/2$ a $h/2$, de forma que as máximas (ou mínimas) tensões normais estão no topo (ou na base) da viga, $y = \pm h/2$.

O projeto

Dado que são necessários alguns parâmetros numéricos para o estudo das tensões e deflexões na viga, esses parâmetros serão obtidos a partir do seu número de RA. Se o seu RA é composto por seis dígitos $d_1d_2d_3d_4d_5d_6$, utilizaremos esses dígitos para atribuir valores automaticamente à viga.

Implementação

Os nomes e estruturas mostrados abaixo são sugestões para facilitar a implementação numérica do problema. Os alunos estão livres para escrever o script de maneira diferente, contanto que resolva todos os problemas propostos, a partir dos dados de entrada fornecidos.

Parte 0 – Dados de Entrada (1,0 pt)

Os parâmetros da viga utilizados nas simulações serão dados em função do RA do aluno. Assim, escreva uma função que receba uma string `str` que contém seis caracteres que representam seu RA e retorne um vetor `d` de seis elementos, com os dígitos do seu RA. O vetor `d` pode ser um vetor linha ou vetor coluna.

```
RA = '123456';
d = digitosRA(RA)


d =

     1     2     3     4     5     6


function [d] = digitosRA(RA)
    %
    % seu código aqui
    %
end
```

Dica: pode ser utilizada a função `str2num`, que converte uma string em número.

A partir dos valores do vetor `d`, os valores a serem utilizados no problema serão dados por:

Comprimento:

$$L = 10d_5 + d_6 \text{ m}$$

Se d_5 e d_6 forem ambos zero, considere $L = 5$ m (como checar essas condições no código?)

Seção transversal:

$$b = 10d_3 + 2d_4 \text{ cm}$$

$$h = 3b$$

(Lembre-se de converter esses valores para metros, para poder utilizar corretamente as equações apropriadas)

Carregamento:

$$M_0 = 10d_1 + d_2 \text{ kN·m}$$

(Lembre-se de converter os valores de M_0 para N·m)

Escreva um código que recebe um vetor `d` de seis elementos, obtido a partir da função `digitosRA`, e retorna o comprimento da viga L, o segundo momento de área I_{zz} e o momento fletor M_0:

```
function [L,Izz,M0] = dados_problema(d)
    %
    % seu código aqui
    %
end
```

Considere para todas as simulações pedidas que o eixo é feito de aço com módulo de elasticidade $E = 210$ GPa e densidade $\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$.

Parte 1 – Tensões e Deflexões em Vigas (2,0 pt)

A função de singularidade facilita a descrição do carregamento numa única expressão e pode ser implementada facilmente como:

```
function y = sing(x,n)
    % singularity function y = <x-a>^n
    if n>=0
        y = x.^n.*(x>=0);
    else
        y = 0*x;
    end
end
```

Momento Fletor:

Para $P = M_0/L$, plote o diagrama de momentos fletores, utilizando a função de singularidade e a expressão a partir da definição da função por partes, isto é, faça um gráfico de $M_z(x)$, para o intervalo definido $0 < x < L$. Verifique que ambos os métodos fornecem o mesmo resultado. Diferencie ambas as linhas no gráfico e inclua uma legenda apropriada. Em qual posição x o módulo do momento fletor é máximo?

Deflexão:

Faça o gráfico da deflexão da viga para diferentes valores da carga P, isto é, faça um gráfico de $v_y(x)$, para $0 < x < L$. Considere os casos:

$$P = 0, \quad P = \frac{1}{2}\frac{M_0}{L}, \quad P = \frac{M_0}{L}, \quad P = 2\frac{M_0}{L}$$

Plote todas as curvas num mesmo gráfico. Adicione um `grid` ao gráfico e legenda aos eixos. Coloque o nome das variáveis adequadas nos eixos das abscissas e das ordenadas e adicione uma legenda no gráfico identificando as respostas para cada uma das condições.

Tensão:

Para o caso $P = M_0/L$, faça um gráfico de superfície, mostrando como a tensão normal varia ao longo do comprimento e da altura da viga, isto é, faça um gráfico da tensão $\sigma_{xx}(x, y)$, para $0 < x < L$ e $-h/2 < y < h/2$. Adicione legenda aos eixos, com o nome das variáveis adequadas nos eixos das abscissas e das ordenadas. Lembre-se de indicar `view(2)` na figura, para visualizar o gráfico de superfície de cima (apenas a escala de cores nos interessa).

Discuta:

- Como os gráficos foram criados?
- Qual o incremento utilizado na discretização das variáveis?
- Como você escolheu esses incrementos?
- Quais as unidades dos resultados? Qual a diferença em se utilizar diferentes unidades de entrada e saída no programa?

Parte 2 – Deflexão em função da carga P (2,0 pt)

Observe dos gráficos gerados para a deflexão que a flecha (deflexão vertical de um ponto da viga) na extremidade livre da viga pode ser positiva ou negativa. Para quais valores essa deflexão é positiva e negativa? Faça um gráfico da deflexão da extremidade da viga em função da carga P. Qual o valor da carga P para que a deflexão na extremidade da viga seja nula?

Para responder a essa pergunta, observe para qual valor de P no gráfico a curva cruza o zero. Observe que isso é um problema de busca de raízes, conforme visto em aula. Defina a função cuja raiz deseja-se encontrar e utilize algum algoritmo de busca de raízes para encontrar esse valor de P. Marque no seu gráfico esse valor de P.

Discuta:

- Como foi definida a função para a busca de raízes?
- Quais os valores utilizados para iniciar a busca de raízes? Como você escolheu esses valores?
- Os resultados obtidos coincidem com os valores mostrados no gráfico?

Parte 3 – Deflexão máxima (2,0 pt)

Para o caso em que $P = M_0/L$, a flecha da viga não é nula em sua extremidade livre. No entanto, é possível observar do gráfico que há um ponto onde a deflexão é máxima e outro onde a deflexão é mínima. Quais são esses pontos? Determine o valor de x e a deflexão correspondente $v_y(x)$. Para encontrar esses pontos, lembre-se que o máximo de uma função $f(x)$ pode ser encontrado buscando-se o mínimo de $-f(x)$. Plote o gráfico da deflexão em função do comprimento da viga e marque nos gráficos os pontos de mínimo e máximo. Marque também os pontos onde a deflexão é nula (quais são esses pontos e como encontra-los?).

Discuta:

- Qual função de otimização foi utilizada? Por que você escolheu essa função?
- O valor obtido coincide com o valor mostrado no gráfico?

Parte 4 – Forças de Reação (2,0 pt)

Para se determinar a deflexão da viga, conforme discutido no início do texto, o método da dupla integração exige resolver a equação diferencial de segunda ordem $EI_{zz}v''(x) = M_z(x)$. Para escrever essa equação, é necessário obter uma expressão para o momento fletor $M_z(x)$, que aparece no lado direito da equação. Para sistemas isostáticos, como é o caso da viga do problema, essa determinação é simples, pois o momento fletor depende das reações no engaste A e essas reações podem ser diretamente determinadas a partir dos métodos da estática, para fornecer $R_A = P$ e $M_A = PL - M_0$, nos sentidos indicados na Figura 5. Considere, no entanto, o sistema modificado mostrado na Figura 6, que contém a viga ABC, mostrada na Figura 5, conectada por um pino interno (rótula) à viga CD, simplesmente apoiada em D.

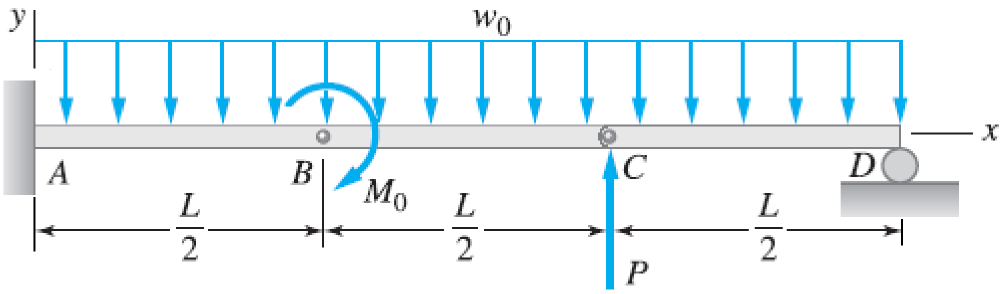

Figura 6 – Viga composta conectada por um pino interno

A expressão para o momento fletor ainda pode ser determinada pelos métodos da estática, pois o momento fletor interno resultante na rótula é nulo, já que esse pino permite a rotação relativa das vigas em torno do pino em C. Na Figura 6, representamos também o peso distribuído da viga, $w_0 = \rho A g = \rho b h g$, com ρ sendo a densidade do aço, bh é a área da seção transversal da viga retangular, e $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ é a gravidade (note que nos itens anteriores, o efeito do peso da viga foi desprezado).

Para determinar as reações no sistema, um método adequado para o sistema unidimensional mostrado acima é o Método das Equações Diferenciais de Equilíbrio, que escreve uma relação de equilíbrio para um elemento diferencial da viga da forma:

$$\frac{d^2 M_z(x)}{dx^2} = q(x) = -w_0 + M_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-2} + P\langle x - L\rangle^{-1}$$

O uso das funções de singularidade é enfatizado aqui, pois facilita a solução do problema. A integração da equação acima fornece:

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = V_y(x) = -w_0 x + M_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{-1} + P\langle x - L\rangle^{0} + R_A$$

$$M_z(x) = -w_0 \frac{x^2}{2} + M_0 \left\langle x - \frac{L}{2} \right\rangle^{0} + P\langle x - L\rangle^{1} + R_A x + M_A$$

As condições de contorno apropriadas para determinar as reações (incógnitas) são (i) o momento fletor resultante no pino interno ($x = L$) é nulo e (ii) o momento na extremidade D da viga ($x = 3L/2$, no apoio deslizante) também é nulo. A substituição dessas condições de contorno permite determinar R_A e M_A e também a reação R_D no apoio D, resolvendo-se o sistema linear:

$$M(x = L) = 0 \rightarrow -w_0 \frac{L^2}{2} + M_0 + R_A L + M_A = 0$$

$$M\left(x=\frac{3L}{2}\right)=0 \rightarrow -w_0\frac{(3L/2)^2}{2}+M_0+P\left(\frac{3L}{2}-L\right)+R_A\left(\frac{3L}{2}\right)+M_A=0$$

$$V_y\left(x=\frac{3L}{2}\right)=-R_D \rightarrow -R_D=-w_0\left(\frac{3L}{2}\right)+P+R_A$$

Reescreva esse sistema de equações na forma matricial. As incógnitas são R_A, M_A e R_B. Como é possível determinar todas as incógnitas somente com a solução da equação de equilíbrio, este sistema, de fato, é isostático (estaticamente determinado).

Resolva o sistema linear acima e compare diferentes casos de carregamentos. Considere $P = M_0/L$ e verifique a variação nas reações do sistema considerando ou não ($w_0 = 0$) o peso da estrutura. Compare também as reações do sistema para os casos em que somente a força P é aplicada e somente o momento M_0 é aplicado. Note que a avaliação de cada um dos casos de carregamento envolve resolver sempre o mesmo sistema linear $[A]\{x\} = \{b\}$, para diferentes condições do vetor $\{b\}$, que depende somente do carregamento externo (isto é, de M_0, P e w_0).

Dica: os diferentes resultados podem ser armazenados numa tabela, para facilitar sua apresentação posterior. O MATLAB conta com um tipo de variável do tipo tabela, que pode facilitar a organização dos resultados dos diferentes casos pedidos.

Discuta:

- Como fica o sistema linear de equações que deve ser resolvido?
- Qual função utilizou para resolver o sistema linear? Por que escolher essa função?
- Como armazenou os diferentes resultados e apresentou?
- Como os resultados dos diferentes casos foram armazenados, acessados e seus resultados apresentados?

Relatório (1,0 pt)

O relatório deve contar todos os resultados obtidos e uma discussão dos resultados, conforme solicitado em cada parte do projeto. Adicione ainda ao relatório uma discussão explicando brevemente cada algoritmo implementado e como escolheu as funções e os parâmetros utilizados. Gere o pdf do relatório a partir do seu Live Script. O feedback do professor será dado em cima do relatório entregue no Moodle. Lembre-se de documentar todas as funções. Entregue também o script .mlx.