INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

Dominio Asintótico

Ejercicios 04

Integrantes:

Luis Fernando Reséndiz Chávez

Asignatura:

Análisis de Algoritmos

Profesor:

Edgardo Adrián Franco Martínez

Grupo:

3CM3

Fecha:

20/11/2020

Demuestre que las siguientes funciones de complejidad tienen asignada correctamente la cota O

Función 01

$$f(n) = 3n^2 + 9n + 12 \in 0(2n^2)$$

Análisis de la función

Utilizando la definición, podemos reescribir de la siguiente forma:

$$|3n^2 + 9n + 12| \leq c|2n^2|$$

Podemos observar que ambas funciones son positivas para todo $n \geq 1$ por lo tanto, resolvemos:

$$3n^2 + 9n + 12 \leq 2cn^2$$

$$9n + 12 \leq n^2(2c - 3)$$

$$\frac{9}{n} + \frac{12}{n^2} \leq 2c - 3$$

Si $n = 1$, podemos obtener c tal que $f(n) \leq g(n)$ para todo $c \geq 1$.

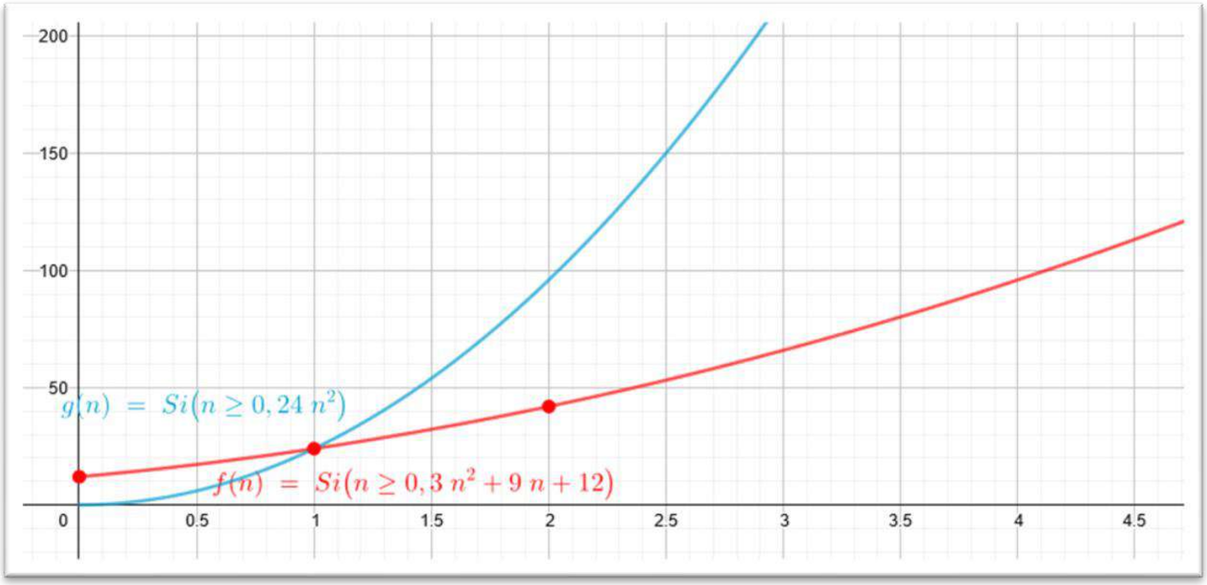
$$9 + 12 \leq 2c - 3$$

$$c \geq 12$$

Con $c = 12$:

$$3n^2 + 9n + 12 \leq 24n^2$$

Grafica comparativa de ambas funciones



Función 02

$$f(n) = 2n + 8 \in O(n)$$

Análisis de la función

Utilizando la definición, podemos reescribir de la siguiente forma:

$$|2n + 8| \leq c|n|$$

Podemos observar que ambas funciones son positivas para todo $n \geq 1$ por lo tanto, resolvemos:

$$2n + 8 \leq cn$$

$$8 \leq n(c - 2)$$

$$\frac{8}{n} \leq c - 2$$

Si $n = 1$, podemos obtener c tal que $f(n) \leq g(n)$ para todo $c \geq 1$.

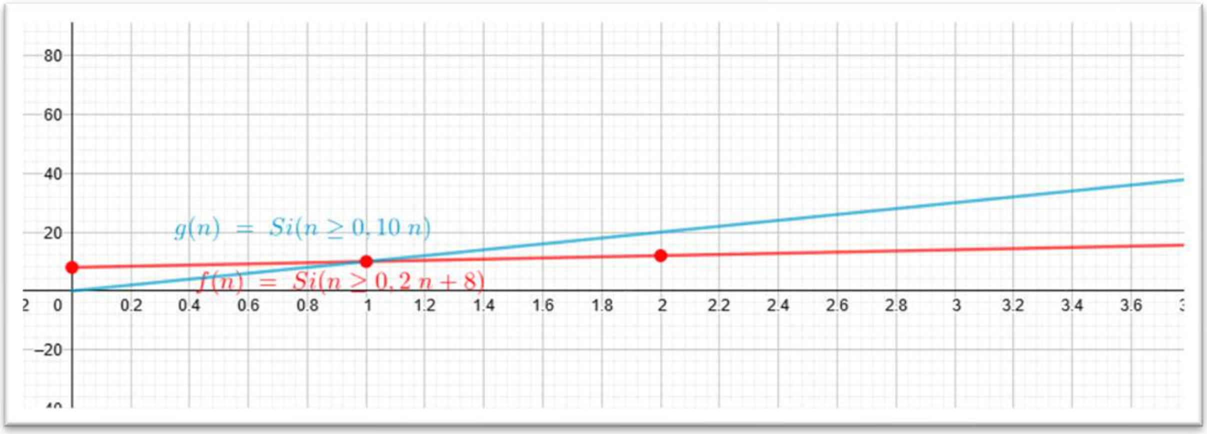
$$8 \leq c - 2$$

$$c \geq 10$$

Con $c = 10$

$$2n + 8 \leq 10n$$

Grafica comparativa de ambas funciones



Función 03

$$f(n) = 2n^3 - 3n^2 + 9n + 120 \in O(n^3)$$

Análisis de la función

Utilizando la definición, podemos reescribir de la siguiente forma:

$$|2n^3 - 3n^2 + 9n + 120| \leq c|n^3|$$

Podemos observar que ambas funciones son positivas para todo $n \geq 1$ por lo tanto, resolvemos:

$$2n^3 - 3n^2 + 9n + 120 \leq cn^3$$

$$-3n^2 + 9n + 120 \leq n^3(c - 2)$$

$$-\frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \frac{120}{n^3} \leq c - 2$$

Si $n = 1$, podemos obtener c tal que $f(n) \leq g(n)$ para todo $c \geq 1$.

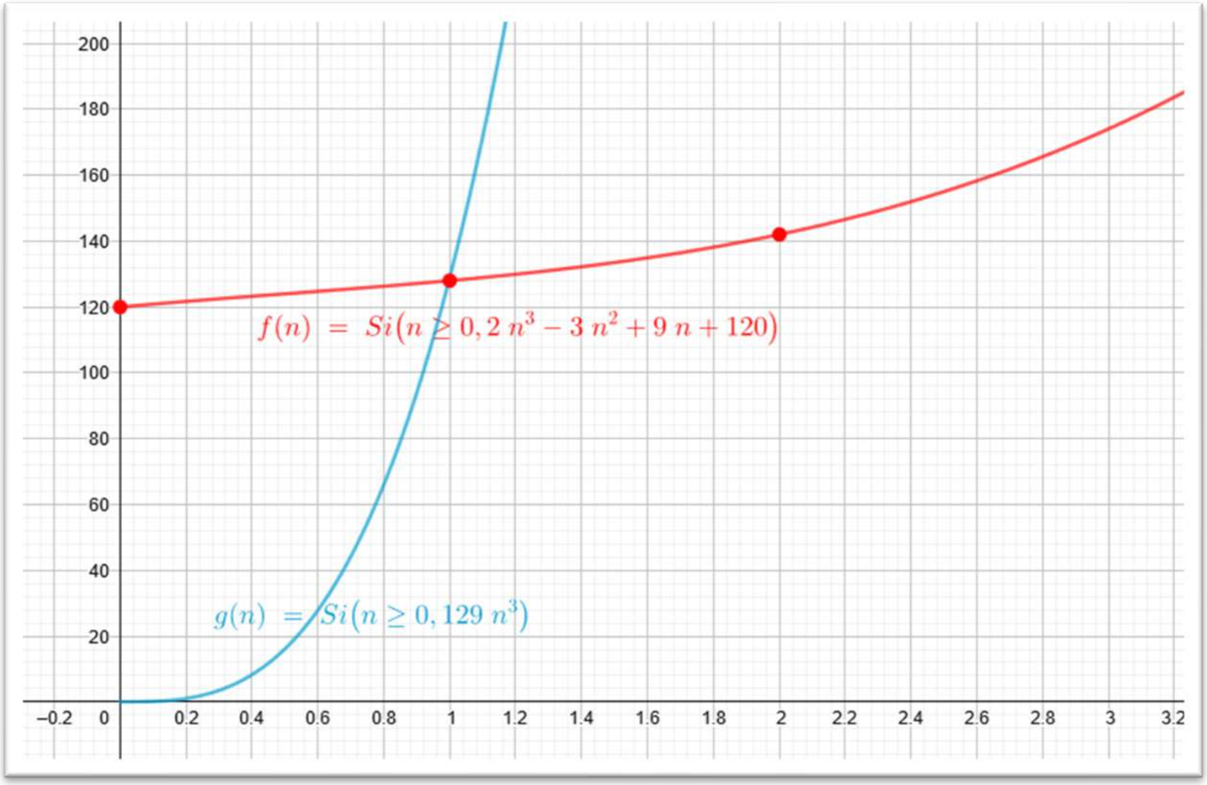
$$-3 + 9 + 120 \leq c - 2$$

$$c \geq 128$$

Con $c = 128$:

$$2n^3 - 3n^2 + 9n + 120 \leq 129n^3$$

Grafica comparativa de ambas funciones



Demuestra que las siguientes funciones de complejidad tienen asignada correctamente la cota Θ

Función 01

$$f(n) = 2n^3 + 3n^2 + 9n + 120 \ \in O(n^3 + n^2)$$

Análisis de la función

La cota θ establece lo siguiente:

$$f(x) = \theta\big(g(x)\big) \leftrightarrow f(x) = O\big(g(x)\big)\ y\ f(x) = \omega(g(x))$$

Por definición de la cota O, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$|2n^3 + 3n^2 + 9n + 120| \leq c|n^3 + n^2|$$

Podemos observar que ambas funciones son positivas para todo $n \geq 1$ por lo tanto, resolvemos:

$$2n^3 + 3n^2 + 9n + 120 \leq c(n^3 + n^2)$$

$$c \geq \frac{2n^3 + 3n^2 + 9n + 120}{n^3 + n^2}$$

Si $n = 1$, podemos obtener c tal que $f(n) \leq g(n)$ para todo $c \geq 1$.

$$c \geq \frac{2 + 3 + 9 + 120}{2}$$

$$c \geq 67$$

Con $c = 67$:

$$2n^3 + \ 3n^2 + \ 9n + \ 120 \leq 67(n^3 + n^2)$$

Con esto ya podemos resolver para la cota θ:

$$|2n^3 + \ 3n^2 + \ 9n + \ 120| \geq c|n^3 + n^2|$$

c

$$2n^3 + \ 3n^2 + \ 9n + \ 120 \geq c(n^3 + n^2)$$

$$c \leq \frac{2n^3 + 3n^2 + 9n + 120}{n^3 + n^2}$$

Encontrando el límite de $\frac{f(n)}{g(n)}$ cuando $n \to \infty$ podemos encontrar el valor de c, sin embargo, la función se indetermina, por lo tanto, haremos uso de la regla de L' Hopital:

$$c \geq \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + 9n + 120}{n^3 + n^2}$$

$$c \geq \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 + 6n + 9}{3n^3 + 2n^2}$$

$$c \geq \lim_{n\to\infty} \frac{12n + 6}{6n + 2}$$

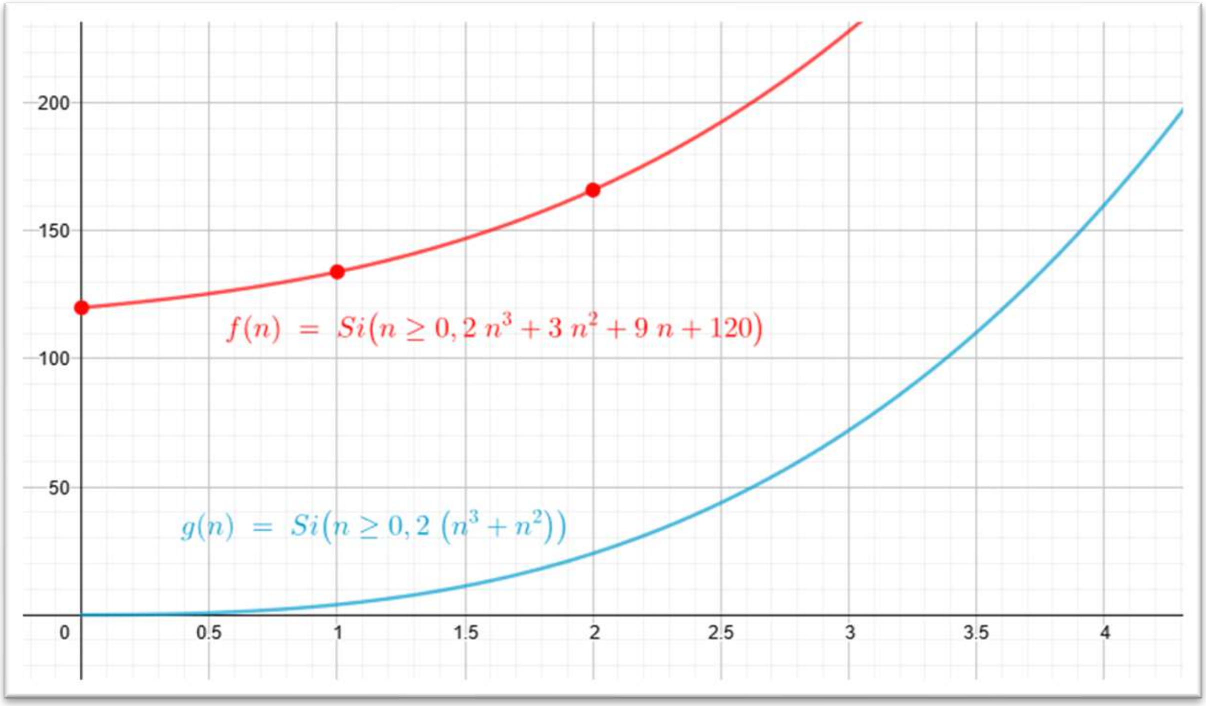
$$c \geq \lim_{n\to\infty} \frac{12}{6}$$

$$c \geq 2$$

Con $c = 2$:

$$2n^3 + 3n^2 + 9n + 120 \geq 2(n^3 + n^2)$$

Grafica comparativa de ambas funciones



Función 02

$$f(n) = 2n^2 + 9n \in O(n^2)$$

Análisis de la función

Por definición de la cota O, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$|2n' + 9n| \leq c|n^2|$$

Podemos observar que ambas funciones son positivas para todo $n \geq 1$ por lo tanto, resolvemos:

$$2n^2 + 8 \leq cn^2$$

$$c \geq 2 + \frac{9}{n}$$

Si $n = 1$, podemos obtener c tal que $f(n) \leq g(n)$ para todo $c \geq 1$.

$$c \geq 2 + 9$$

$$c \geq 11$$

Con $c = 11$:

$$2n^2 + 8 \leq 11n^2$$

Para encontrar la cota θ, podemos reescribir la función de la siguiente manera:

$$|2n^2 + 9n| \geq c|n^2|$$

Podemos observar que ambas funciones son positivas para todo $n \geq 1$ por lo tanto, resolvemos:

$$2n^2 + 8 \geq cn^2$$

$$c \leq \frac{2n^2 + 9n}{n^2}$$

Encontrando el límite de $\frac{f(n)}{g(n)}$ cuando $n \to \infty$ podemos encontrar el valor de c, sin embargo, la función se indetermina, por lo tanto, haremos uso de la regla de L' Hopital:

$$c \geq \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 9n}{n^2}$$

$$c \geq \lim_{n\to\infty} \frac{4n + 9}{n^2}$$

$$c \geq \lim_{n\to\infty} \frac{4}{2}$$

$$c \geq 2$$

Con $c = 2$:

$$2n^2 + 8 \geq 2n^2$$

Grafica comparativa de ambas funciones