Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática   Ciclo 2018-2

[Cod: CM-431 Curso: Análisis Numérico II]
[Tema: Problemas de contorno para EDOs]
[Prof: Luis Roca.]

Laboratorio N° 6

---

1. Método del Disparo

1. Aplique el método del disparo al problema de valor de frontera

$$\begin{cases} y'' = 4y \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

2. Aplique el método del disparo al problema de valor de frontera

$$\begin{cases} y_1' = (4 - 2y_2)/t^3 \\ y_2' = -e^{y_1} \\ y_1(1) = 0 \\ y_2(2) = 0 \end{cases}$$

2. Diferencias finitas

1. Resuelva el problema de valores en la frontera en dos puntos

$$\begin{cases} x'' + x' + 10t = 0 \\ x(0) = 1, \quad x(1) = 2 \end{cases}$$

para $x(1/2)$ usando el método de diferencias finitas para $h = 1/24$.

2. Obtenga para diversos valores de α, la solución aproximada del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x^2 y'' = 6y \\ y(1) = 1 \quad , y'(1) = \alpha \end{cases}$$

3. Para cada problema calcule y_h, la solución aproximada, luego encuentre la solución exacta $\hat{y}$ y determine $\|y_h - \hat{y}\|_\infty$.

$a)$ $$\begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(0) = 1 \quad , y(1) = 2 \end{cases}$$

$b)$ $$\begin{cases} x'' = -x \\ x(0) = 3 \quad , x(\pi/2) = 7 \end{cases}$$

$c)$ $$\begin{cases} x'' = 2e^t - x \\ x(0) = 2 \quad , x(1) = e + \cos(1) \end{cases}$$

4. Determine el sistema lineal ha resolver si se usa el método de diferencia finitas para aproximar la solución del problema

$$\begin{cases} x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t) \\ c_{11}x(a) + c_{12}x'(a) + c_{13} = \\ c_{12}x(b) + c_{22}x'(b) + c_{23} \end{cases}$$

3. Elementos finitos

Encuentre una solución aproximada por medio del método de elementos finitos

1.

$$\begin{cases} y'' = y' + \frac{2}{3}e^t \\ y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{e}{3} \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y'' = (2 + 4t^2)y' \\ y(0) = 1, \quad y(1) = e \end{cases}$$

Grafique las soluciones aproximadas junto con las soluciones exactas $a)$ $y(t) = 3\sin(\pi t/3) - \cos(\pi t/3)$ y $b)$ $y(t) = e^{3-3t}$. Asimismo, muestre los errores como una función de t en una gráfica semilogaritmica.

4. Ecuación del calor

Considere el modelo de conducción de calor en una barra

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t & t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(x,0) = g(x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(0,t) = a(t) & t \geqslant 0 \\ u(1,t) = b(t) & t \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Implemente el siguiente algoritmo de diferencias finitas
$$v_{i,j+1} = \frac{k}{h^2}\left(v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}\right) \tag{2}$$
2. Realice un experimento con $nx = 10$, $M = 1$, $nt = 100$. Compare la solución con $u(x,t) = \exp(-\pi^2 t)\,\mathrm{sen}(\pi x)$. Repita el experimento con $nt = 300$
3. Demuestre que para n fijo, la condición de estabilidad en el algoritmo explicito 2 es:
$$s < \left(1 + \cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{-1}$$
Para $n = 10$, ¿que valores de k resultan satisfactorios?
4. Implemente el siguiente algoritmo de diferencias finitas ($s = \frac{k}{h^2}$)
$$v_{i,j-1} = (-sv_{i+1,j} + (1+2s)v_{i,j} - sv_{i-1,j}) \tag{3}$$
5. Use el algoritmo implícito 3 para resolver 1 con las condiciones $a(t) = b(t) = 0$, $g(x) = (x - x^2)e^x$, use $nx = 20$, $M = 2.5$, $nt = 50$
6. Implemente el siguiente algoritmo de diferencias finitas (Cranck-Nicolson)
$$\begin{gathered} -sv_{i-1,j} + (2+2s)v_{i,j} - sv_{i+1,j} = \\ sv_{i-1,j-1} + (2-2s)v_{i,j-1} + sv_{i+1,j-1} \end{gathered} \tag{4}$$
7. Compare los métodos explicito, implícito y de Cranck-Nicolson al resolver 1 con las condiciones $a(t) = b(t) = 0$, $\mathrm{sen}(\pi x)$

5. Problema de Dirichlet

Considere el siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{xx} = f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) = g(x,y) & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

1. Implemente el siguiente algoritmo de diferencias finitas
$$4v_{i,j} - v_{i-1,j} - v_{i+1,j} - v_{i,j+1} = -f_{i,j} \tag{6}$$
considere $(x_i, y_j) = (ih, jh)$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$, $h = 1/n$.
2. Resuelva la ecuación 5 con $f(x,y) = 1$, $g(x,y) = 4xy(x-y)(x+1)$
3. Resuelva el esquema 6 en usando el método de Gauss-Seidel.
4. Resuelva el esquema 6 en usando el método SOR.

Uni, 29 de noviembre de 2018*

*Hecho en LaTeX