Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2018-2**

[Cod: CM-431 Curso: Análisis Numérico II]
[Tema: Interpolación.]
[Prof: Luis Roca.]

Práctica Dirigida N^o 1

---

1. **Encuentre el interpolante de Lagrange $p_2(t) = \sum_{j=0}^{2} x_j L_j(t)$ para el conjunto de datos $\{(-1, \frac{1}{2}), (0, 1), (1, -1)\}$. Encuentre $p_{2,j}$ en $p_2(t) = \sum_{j=0}^{2} p_{2,j} t^j$**

2. **Encuentre el interpolante de Lagrange $p_3(t) = \sum_{j=0}^{3} x_j L_j(t)$ para el conjunto de datos $\{(0, 1), (\frac{1}{2}, 2), (1, \frac{3}{2}), (2, -1)\}$. Encuentre $p_{3,j}$ en $p_3(t) = \sum_{j=0}^{3} p_{3,j} t^j$**

3. **Buscamos interpolar $x(t)$ en t_1, t_2 y $x^{(1)}(t) = dx(t)/dt$ en $t = t_0$, t_3 usando $p_3(t) = \sum_{j=0}^{3} p_{3,j} t^j$. Sea $x_j = x(t_j)$ y $x_j^{(1)} = x^{(1)}(t_j)$. Encuentre el sistema lineal de ecuaciones que satisface $(p_{(3,j)})$.**

4. **Encuentre una expresión general para $L_j^{(1)}(t) = \dfrac{dL_j(t)}{dt}$.**

5. **Implemente el algoritmo rápido para resolver el sistema de Vandermonde $Ap = x$ dado por**

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^{n-1} & t_0^n \\ 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^{n-1} & t_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & \cdots & t_{n-1}^{n-1} & t_{n-1}^n \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} & t_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

y $p_n(t) = \sum_{j=0}^{n} p_j t^j$ interpola los puntos $\{(t_j, x_j) : k = 0, 1, \ldots, n\}$

```
for k:=0 to n-1 begin
  for i:=n downto k+1 do begin
    x[i] :=(x[i] - x[i-1]) /(t[i]-t[i-k+1])
  end
end
for k:=n-1 downto 0 do begin
  for i:=k to n-1 do begin
```

```
    x[i]:=x[i]-t[k]x[i+1]
  end
end
```

El algoritmo sobre escribe el vector $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]^T$ con el vector $p = [p_0, p_1, \ldots, p_n]^T$

a) Cuente el número de operaciones aritméticas necesarias. ¿Cual es la complejidad asintótica?, compárela con el método de eliminación Gaussiana.

b) Pruebe el algoritmo anterior con el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 26 \\ 58 \\ 112 \end{bmatrix}$$

c) El primer bloque iterativo del algoritmo propuesto produce la *forma Newton* de $p_n(t)$. Para el sistema en (b) confirme que

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} x_k \prod_{i=0}^{k-1} (t - t_i),$$

donde $\{x_k : k \in \mathbb{Z}_{n+1}\}$ son las salidas del primer bloque iterativo.

6. Pruebe que para A_n la matriz de Vandermonde se tiene

$$\det(A_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (t_i - t_j)$$

7. Sea $f(t) = 1/(1 + t^2)$ para $t \in [-5, 5]$, utilizando un polinomio interpole f en n puntos igualmente espaciados de $[-5, 5]$. Considere $n = 5, 8, 10$ y compare con f usando una gráfica.

8. Para cada función use diferencias divididas para construir el polinomio de Newton de grado n para los puntos especificados:

a) $f(t) = \sqrt{t}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Use $n = 2$

b) $f(t) = \cosh t$, $t_0 = -1$,$t_1 = -1/2$, $t_2 = 1/2$, $t_3 = 1$. Use $n = 3$

c) $f(t) = \ln t$, $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Use $n = 2$

d) $f(t) = 1/(1 + t)$, $t_0 = 0$,$t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$. Use $n = 3$

9. La siguiente matriz es importante para resolver problemas de interpolación spline

$$A_n = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

suponga $D_n = \det(A_n)$.

a) Calcule D_1, D_2, D_3 y D_4 directamente.

b) Demuestre que

$$D_{n+2} - 4D_{n+1} + D_n = 0$$

c) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, muestre que

$$D_n = \alpha\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \beta(2 - \sqrt{3})^n$$

para $n \in \mathbb{N}$. Encuentre α y β

d) Pruebe que $D_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

e) ¿Es $A_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$?