Universidad Nacional de Ingenieria
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matematica **Ciclo 2018-2**

[Cod: CM-431 Curso: Análisis Numérico II]
[Tema:Integración]
[Prof:Luis Roca G.]

Práctica Dirigida Nº 3

---

1. **Escriba un programa que calcule $\int_0^x e^{-t^2}$, sumando una serie de Taylor apropiada hasta que los términos individuales esten por debajo de 10^{-8}. Grafique para $x = 0, 0.1, \ldots, 0.9, 1$**

2. **Deduzca la fórmula de Newton-Cotes para $\int_0^1 f(x)dx$, usando como nodos a 0, 1/2, 2/3, 1.**

3. **Demuestre sin utilizar el término del error, que la regla de Simpson calcula correctamente la integral de los polinomios cúbicos.**

4. **Compruebe que la siguiente regla es exacta para polinomios de grado $\leqslant 4$**
$$\int_0^1 f \approx \frac{1}{90}\left[7f(0) + 32f(\frac{1}{4}) + 12f(\frac{1}{2}) + 32f(\frac{3}{4}) + 7f(1)\right]$$

5. **Calcule un valor aproximado de $\ln 2$ aplicando la fórmula del problema 4 a:**
$$\int_0^1 \frac{dt}{t+1}$$

6. **Sean $t_0 \leqslant t_0 \leqslant \ldots \leqslant t_n$. Los spline cúbicos sobre $[t_0, t_n]$ tienen la forma**
$$S_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} + \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$$
donde $S_i''(t_i) = z_i$, $S_i(t_i) = y_i$. Si especificamos que $z_0 = 0 = z_n$ obtenemos el spline cúbico natural y los z_i satisfacen la ecuación
$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ h_1 & u_2 & h_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_2 & u_3 & h_3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}$$
para $h_i = t_{i+1} - t_i$, $u_i = 2(h_i + h_{i-1})$, $b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$, $v_i = b_i - b_{i-1}$. Implemente el siguiente algoritmo para resolver el sistema

for $i = 0, 1, \ldots, n-1$ do
  $h_i \leftarrow t_{i+1} - t_i$

$b_i \leftarrow 6(y_{i+1} - y_i)/h_i$

end

$u_1 \leftarrow 2(h_0 + h_1)$

$v_1 \leftarrow b_1 - b_0$

for $i = 2, \ldots, n-1$ do

$u_i \leftarrow 2(h_i + h_{i-1}) - h_{i-1}^2/u_{i-1}$

$v_i \leftarrow b_i - b_{i-1} - h_{i-1}v_{i-1}/u_{i-1}$

end

$z_n \leftarrow 0$

for $i = n-1, \ldots, 1$ do

$z_i \leftarrow (v_i - h_i z_{i+1})/h_i$

end

7. Escriba un programa que aproxime $\int_a^b f$ mediante $\int_a^b S$, donde S es el spline cubico natural que tiene nudos en $a + ih$, e interpola f en estos nudos. En este caso $0 \leqslant i \leqslant n$ y $h = \frac{b-a}{n}$. Usando el resultado del problema 6, obtenga primero una fórmula para

$$\int_{t_0}^{t_n} S$$

y utilice el programa para aproximar (con $n = 4, 8, 16$)

   a) $\frac{4}{\pi}\int_0^1 (1 + x^2)^{-1}dx$

   b) $\frac{1}{\ln 3}\int_1^3 x^{-1}dx$

8. Encuentre una formula
$$\int_0^1 f \approx A_0 f(0) + A_1 f(1)$$
que sea exacta para funciones del forma $f(x) = ae^x + b\cos(\pi x/2)$

9. Encuentre un expresión de la forma
$$\int_0^{2\pi} f \approx A_0 f(0) + A_2 f(\pi)$$
que sea exacta para funciones del forma $f(x) = a + b\cos x$. Demuestre que la formula es exacta para funciones de la forma
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} [a_k \cos(2k+1)x + b_h \operatorname{sen} kx]$$

10. Usando solamente $f(0)$, $f'(-1)$ $f''(1)$ calcule una aproximación de $\int_{-1}^1 f$ que sea exacta para todos lo polinomios cuadráticos. ¿Esta aproximación es exacta para los polinomios de grado 3?¿Porque?.

11. Determine los nodos y pesos para la siguiente fórmula gaussiana
$$\int_{-1}^1 x^4 f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_!)$$

Uni, 4 de octubre de 2018*

*Hecho en LaTeX