[Cod: CM-431 Curso: Análisis Numérico II]

[Tema: EDO de primero orden]

[Prof:Luis Roca G.]

Laboratorio Nº 4

---

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

1. **Programar los siguientes métodos**

   a) **Metodo de Euler:**

   $$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i)$$

   b) **Metodo de Heun:**

   $$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, t_i) + f(x_i + hf(x_i, t_i), t_{i+1})\right)$$

   c) **Metodo de Taylor de orden 2:**

   $$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i) + \frac{h^2}{2}\left(f_t(t_i, x_i) + f_x(t_i, x_i)f(t_i, x_i)\right)$$

2. **Considerar los PVI**

   a) $\begin{cases} x'(t) = 1 \quad , t \in [0, 3] \\ x(0) = 0 \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x'(t) = t \quad , t \in [0, 3] \\ x(0) = 1 \end{cases}$

   Calcular la solución exacta para cada uno de ellos y la solución numérica por el método de Euler.

3. **Considere el PVI** $\begin{cases} x'(t) = \frac{2}{\pi}\arctan(x) \quad t \in [0, 1] \\ x(0) = 1 \end{cases}$

   Encuentre cotas a priori para x, x' y x''. Dar una cota para el error de truncamiento con el método de Euler explicito, si $h = 10^{-3}$.

4. **Considere el PVI** $\begin{cases} x'(t) = t^2 + x^2 \quad t \in [0, 2] \\ x(0) = 1 \end{cases}$

   Dar una cota para el error de truncamiento con el método de Euler explicito, si $h = 10^{-2}$.

5. **Crecimiento logístico. La población de un país se asume que obedece la ecuación**

$$P' = aP - bP^2.$$

donde t denota el número de años transcurridos desde 1900. Considere el tamaño de paso $h = 10$. Los valores $a = 2 \times 10^{-2}$ y $b = 4 \times 10{-}5$ producen un modelo para la población. Calcule valores aproximado para la población durante todo el siglo XXI.

6. **Muestre que si el método de Euler es usada para resolver**

$$y' = f(t), \text{ sobre } [a, b] \text{ con } y(a) = y_0 = 0$$

entonces el resultado es una suma de Riemann que aproxima $\int_a^b f$

7. **Muestre que el método de Euler falla al aproximar la solución $y(t) = t^{3/2}$ del PVI**

$$y' = f(t, y) - 1.5y^{1/3}, \text{ con } y(0) = 0$$

8. **Considere la ecuación integro-diferencial de primer orden**

$$y' = 1.3y - 0.25y^2 - 0.0001y \int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s$$

   a) **Use el método de Euler con $h = 0.2$ e $y(0) = 250$ en el intervalos [0,20] (aproxime las integrales por la regla del trapecio).**

   b) **Repita a) con los valores iniciales $y(0) = 200$ e $y(0) = 300$.**

   c) **Grafique las soluciones en a) y b) sobre un mismo gráfico**

9. **Resuelva la ecuación diferencial usando el método de Heun y con el método de Runge-Kuta clásico (RK4), $y' = 2ty^2$, con $y(0) = 1$, $y(t) = 1/1 - t^2)$**

10. **Resolviendo un problema de valor inicial adecuado, haga una tabla de valores de la función de distribución normal $f(t)$ definida por la integral**

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2}/2\,\mathrm{d}t \text{ para } 0 \leq x \leq 3$$

Utilice el método RK4 con $h = 0.1$.

11. **En una reacción química, una molécula de una sustancia A se combina con una molécula de una sustancia B para formar una molécula de una sustancia C. Se sabe que la concentración $y(t)$ de la sustancia C en el instante t es la solución del problema de valor inicial**

$$y' = k(a - y)(b - y) \text{ con } y(0) = 0$$

donde k es una constante positiva y a y b son las concentraciones iniciales de A y B respectivamente. Suponga que $k = 0.01$, $a = 70$ milimoles/litro y $b = 50$ milimoles/litro. Use el método RK4 con $h = 0.5$ para hallar la solución en el intervalos $[0, 20]$. Compare gráficamente con la solución exacta $y(t) = 350(1 - e^{-0.2t})/(7 - 5e^{-0.2t})$

2. Métodos Multipaso

1. **Sea la ecuación diferencial $y' = y^2$, $y(0) = 1$ y los valores iniciales (exactos)$y_i = 1/(1 - x_i)$, $i = 0, \ldots, k-1$. Compare los resultados de aplicar las formulas de Adams-Bashforth y Adams-Moulton, estudie la expresión $y(x_k) - y_k$ para pasos pequeños.**

2. **Deduzca la formula Adams-Bashforth de cuarto orden**

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right)$$

3. **Deduzca la formula de Adams-Moulton de cuarto orden**

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}\left(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

3. Problemas de frontera

1. **Aplique el método del disparo al problema de valor de frontera**

$$\begin{cases} y'' = 4y \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

2. **Aplique el método del disparo al problema de valor de frontera**

$$\begin{cases} y_1' = (4 - 2y_2)/t^3 \\ y_2' = -e^{y_1} \\ y_1(1) = 0 \\ y_2(2) = 0 \end{cases}$$

Uni, 8 de noviembre de 2018*

*Hecho en LaTeX