Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2017-1

[Cod: CM-142 Curso: Cálculo Vectorial II]
[Tema: Espacio euclidiano n- dimensional. Subespacios. Combinación lineal.]
[Prof: L. Roca, R. Mas, M. Moreno, D. Caytuiro.]

Práctica Dirigida N^o 3

---

1. Pará qué valores de a y b el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & z & = & b \\ 5x & - & 8y & + & 9z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & az & = & -1 \end{array}$$

   tiene:
   a) Solución única. b) No tiene solución c) Infinitas soluciones.

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ no nula, de modo que $v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (0, 2, 1)$ y $v_3 = (3, 4, -1)$ sean soluciones del sistema homogéneo $Ax = 0$.

3. Demuestre que $\mathcal{L} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

4. Probar que $\mathbb{R}^2$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma $\oplus$ y el producto $\circledast$ definidos de la siguiente forma

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' - 2, y + y' - 1)$$

$$r \circledast (x, y) = r(x - 2, y - 1) + (2, 1)$$

   Este espacio se denotará $\mathbb{R}^2_{(2,1)}$ para distinguirlo de $\mathbb{R}^2$ con la suma y el producto usual. La notación se basa en que el $(2, 1)$ resulta el neutro de la suma $\oplus$.

5. Si la ecuación matricial

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

   tiene por solución

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   donde t es fijo y $t \in \mathbb{R}$, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones justificando su respuesta

   a) $\det(A) \neq 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que se intersectan en un punto.

   b) $\det(A) = 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que no se intersectan.

   c) $\det(A) = 0$ y el sistema corresponde a dos rectas que coinciden.

6. Probar que la matriz $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$ puede expresarse como combinación lineal de las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Dados $u = (1, 2, 3)$, $v = (3, 2, 0)$ y $w = (2, 0, 0)$, encuentre los números α, β y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $(1, 1, 1) = \alpha u + \beta v + \gamma w$.

8. Si $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ probar que uno de ellos es múltiplo del otro si y sólo si $x_i y_j = x_j y_i$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

9. Si $v_1, \dots, v_n \in V$ son vectores l.i. y si $w \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ probar que $w, v_1, \dots, v_n$ son l.i.

10. Sean V un espacio vectorial y $v_1, v_2, v_3 \in V$. Pruebe que:
si $v_1 + 3v_2 - v_3 = 0 = 2v_1 - v_2 - v_3$, entonces $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{span}\{v_3\}$.

11. Sea V un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sean v_1, v_2, ..., $v_n \in V$ entonces probar que el conjunto $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es linealmente independiente si y solo si

$$\text{span}\Big\{v_1, v_2, ..., v_n\Big\} \neq \text{span}\Big\{\{v_1, v_2, ..., v_n\} - v_i\Big\}$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$.

12. Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ vectores linealmente independientes en V donde n es impar. Pruebe que $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, \cdots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1\}$ son linealmente independientes. De un contraejemplo cuando n es par.

13. Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ un conjunto finito de vectores en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que:

a) Si $r > n$ entonces $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ es l.d.

b) Si $r < n$ entonces $\text{span}\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ no genera a $\mathbb{R}^n$.

14. En $\mathcal{P}_3$ pruebe que $\{1 - x^2, 1 + x^2, 1 + x + x^2\}$ son linealmente independientes.

15. Hallar una base del subespacio W de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1, 2, 2), (3, 2, 1), (11, 10, 7), (7, 6, 4)\}$ ¿cuál es la dimensión de W?

16. Sea $V = \{A \in \text{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid DA = A\}$ donde $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Probar que V es un espacio vectorial de dimensión 3.

17. Para los siguiente ejercicios, determinar si el conjunto W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

a) $W = \{(a, b, a + b - 1) \mid a, b \in, \mathbb{R}\}$

b) $W = \{(a, 0, a - b) \mid a, b \in, \mathbb{R}\}$

c) $W = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in, \mathbb{R}, 2a - b + c = 0\}$

18. Sea $n \geq 2$ y V el espacio vectorial de todas las matrices de orden n. ¿ Cuáles de los siguientes subconjunto de matrices de V son subespacios de ésta?

a) El conjunto de todas las matrices inversibles.

b) El conjunto de todas las matrices no inversibles.

c) El conjunto de todas las matrices que conmutan con una matriz B fija.

d) El conjunto de todas las matrices A tales que $A^2 = A$.

19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Halle unas bases para los espacios fila y columna de A.

20. Sea V el espacio nulo del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la dimensión de V?

21. Dados $u = (-1, -1, 1)$, $v = (2, 1, -2)$, $w = (0, 3, -1)$. Probar que $\mathbb{R}^3 = \{au + bv + cw \mid a, d, c \in \mathbb{R}\}$.

Uni, 25 de abril de 2017*

*Hecho en LaTeX