

Lógica em Computação

.: Calculo Proposicional :.

Prof. Luís Rodrigo

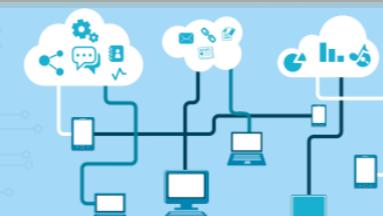
{luisrodrigoog@gmail.com}
[http://lrodrigo.ddns.net/]





Dedução

Lógica



Argumento

- Denomina-se argumento um conjunto de proposições P₁, P₂, ... P_n chamadas premissas, decorre uma proposição Q, chamada conclusão.
- Na Lógica, dois tipos de argumentos, dedutivos e indutivos
- Nesta parte do curso examinaremos os argumentos dedutivos.
- Eis um exemplo de argumento:
 - P₁: Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime.
 - P₂: Se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade.
 - P₃: O Sr. Krasov não estava na cidade.
 - Q: Portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu.



Argumento

- Uma conclusão sempre decorre das premissas;
 - Ou seja, a veracidade da conclusão está incluída na veracidade das premissas;
 - Se as premissas forem verdadeiras, a conclusão também o será.
- Quando a conclusão realmente decorre das premissas, dizemos que o argumento é válido; quando não, dizemos que o argumento é inválido.
- Os argumentos inválidos são também chamados sofismas.



Argumento



Vamos a dois exemplos de argumentos:

- Se eu tiver dinheiro, vou ao cinema **ou** ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema **ou** não vou ao teatro.
 - A conclusão apresentada **não decorre** das premissas.
 - Portanto o argumento é **inválido**.
- Se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo. Logo, se eu estudar, durmo.
 - ✓ Claramente, a conclusão **decorre** das premissas,
 - ✓ Logo o argumento é **válido**.



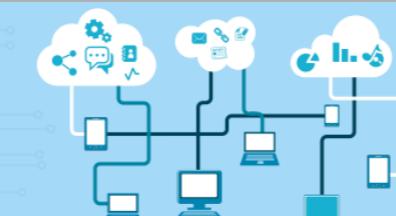
Argumento

- A estrutura que melhor representa um **argumento**, é a **operação de condicionamento**

- Um argumento é, portanto, uma condicional da forma

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q_o.$$

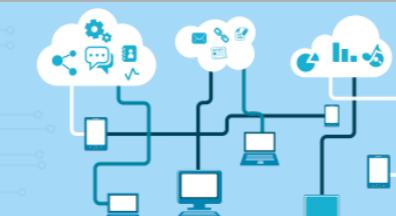
- A **validade do argumento depende exclusivamente do relacionamento lógico entre as premissas e a conclusão;**
- Se um **argumento é válido**, então a **condicional** que o representa é sempre **verdadeira**
- Ou seja, se um **argumento é válido**, a **condicional** que o representa é uma **tautologia**.



Argumento



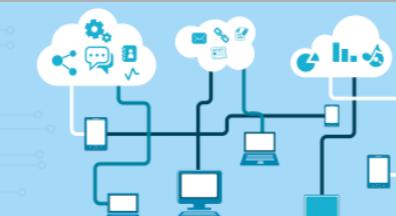
- A Tabela Verdade pode ser utilizada para determinar a validade ou invalidade de um argumento;
- Por exemplo, suponha o argumento:
“se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro”
- Que pode ser representado por:



Argumento

- A Tabela Verdade pode ser utilizada para determinar a validade ou invalidade de um argumento;
- Por exemplo, suponha o argumento:

“se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro; mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro”
- Que pode ser representado por:
$$(p \rightarrow q \vee r) \wedge (\neg p) \rightarrow (\neg q \vee \neg r)$$
- Onde:
 - p – eu tiver dinheiro
 - q – vou ao cinema
 - r – vou ao teatro



Argumento



p	q	r	q ∨ r	p → q ∨ r	¬p	¬q	¬r	¬q ∨ ¬r	(p → q ∨ r) ∧ (¬p)	(p → q ∨ r) ∧ (¬p) → (¬q ∨ ¬r)
V	V	V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V

A expressão não é uma tautologia, e, consequentemente, o argumento não é válido.



Argumento

- Vejamos outro exemplo de argumento:
**“se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo.
Logo, se eu estudar, durmo”**
- Representado por:
 - ??????



Argumento



- Vejamos outro exemplo de argumento:
**“se eu estudar, fico cansado; se eu ficar cansado, durmo.
Logo, se eu estudar, durmo”**

- Representado por:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

- Onde:
 - p – eu estudar
 - q – eu ficar cansado
 - r – eu dormir



Argumento



p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

- Como a **condicional** é uma **tautologia**, o argumento é válido.
- O argumento apresentado é na verdade a regra de inferência chamada **Silogismo Hipotético**.



Argumento

- As **condicionais tautológicas** com poucos antecedentes e cuja forma já é conhecida, são chamadas **regras de inferência**.
- Enquanto as **condicionais maiores**, que ainda **devemos mostrar** que são tautologias são chamadas **argumentos**.
- E os **argumentos** com duas premissas são chamados **silogismos**.
- Para **representar** os **Argumentos** utilizamos a seguinte notação
 - Cada **premissas** será representada **uma linha separada**
 - Utilizaremos o símbolo **|—** para indicar a **conclusão**.



Argumento

- Por exemplo:

"Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime; se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade. Mas o Sr. Krasov não estava na cidade; portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu."



Argumento

- Por exemplo:

"Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime; se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade. Mas o Sr. Krasov não estava na cidade; portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu."

- Fazendo:

- p – José pegou as jóias
- q – a Sra. Krasov mentiu
- r – ocorreu um crime
- s – o Sr. Krasov estava na cidade



Argumento



- Por exemplo:

"Se José pegou as jóias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime; se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade. Mas o Sr. Krasov não estava na cidade; portanto, ou José não pegou as jóias ou a Sra. Krasov não mentiu."

- Fazendo:

- p – José pegou as jóias
- q – a Sra. Krasov mentiu
- r – ocorreu um crime
- s – o Sr. Krasov estava na cidade

- Temos:

1. $p \vee q \rightarrow r$
2. $r \rightarrow s$
3. $\neg s$
4. $\vdash \neg p \vee \neg q$



Argumento

- Vamos a um outro exemplo:

**"Se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro;
mas eu não tenho dinheiro.**

Logo, ou não vou ao cinema ou não vou ao teatro."



Argumento

- Vamos a um outro exemplo:

**"Se eu tiver dinheiro, vou ao cinema ou ao teatro;
mas eu não tenho dinheiro. Logo, ou não vou ao
cinema ou não vou ao teatro."**

- Com a simbologia descrita, vem:

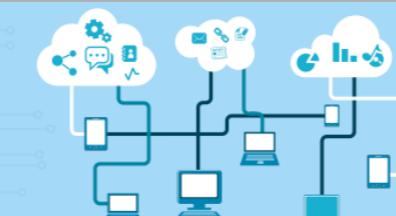
1. $p \rightarrow q \vee r$
2. $\neg p$
3. $\neg q \vee \neg r$



Argumento

Outro exemplo:

"Se eu estudar, fico cansado;
se eu ficar cansado, durmo.
Logo, se eu estudar, durmo."





Outro exemplo:

"Se eu estudar, fico cansado;
se eu ficar cansado, durmo.
Logo, se eu estudar, durmo."

- Utilizando a simbologia temos:

1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow r$
3. $\vdash p \rightarrow r$





Dedução



Dedução

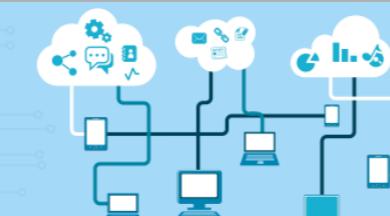


- Vimos que **tabelas verdade** podem ser utilizadas para **mostrar** que um **argumento é válido ou inválido**.
- No entanto, esse método apresenta **dois sérios inconvenientes**:
 - A quantidade de linhas cresce rapidamente, à medida que aumenta o número de proposições simples;
 - Com **10 proposições** a tabela necessita de **1024 linhas**, e com **11**, o numero de linhas vai a **2048**. Com mais umas poucas proposições, sua construção se torna impraticável.
 - No **Cálculo de Predicados**, muitas vezes não existe um procedimento que permita estabelecer o valor lógico de uma dada afirmação, o que torna impossível a construção da Tabela Verdade.
- Para contornarmos estes problemas utilizaremos **métodos dedutivos**, e sua aplicação chama-se **dedução**.





- O conceito de dedução pode ser apresentado da seguinte forma:
 - Dado um argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$
 - Chama-se demonstração ou dedução de Q a partir das premissas P_1, \dots, P_n , a sequencia finita de proposições X_1, X_2, \dots, X_k ;
 - Cada X_i ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da sequencia
 - X_i deve ser obtida através da atuação de equivalências ou inferências sobre uma proposição ou uma conjunção de proposições anteriores.
 - A última proposição X_k deve ser a conclusão Q do argumento dado.





O processo de dedução consiste basicamente dos seguintes passos:

- Dado um argumento $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$
- Fazemos:
 1. Definimos o conjunto das premissas $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$;
 2. sobre um ou mais elementos do conjunto fazemos atuar equivalências e inferências conhecidas, obtendo novas proposições, e incluindo-as no conjunto P;
 3. repetimos o passo acima até que a proposição incluída seja o conseqüente Q.





Exemplo: Provando o argumento (Modus Ponens)

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

Enumerando as proposições do conjunto P, temos:

1) $p \rightarrow q$

2) p

3) $\neg p \vee q$

$p \rightarrow q$ é equivalente a $\neg p \vee q$ (Lei da Condicional)

4) $p \wedge (\neg p \vee q)$

Conjunção das expressões (2) e (3)





$$4. (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$$

Utilizando a **Lei de Distributividade** em 4

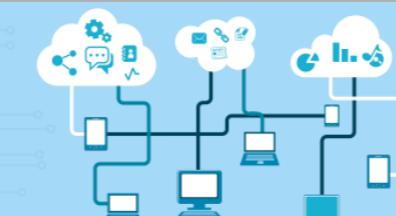
$$5. p \wedge q$$

$p \wedge \neg p$ é equivalente a **F**, uma contradição;

$F \vee (p \wedge q)$ é equivalente a $p \wedge q$;

$$6. q$$

Pela **Regra da Simplificação**, $p \wedge q \Rightarrow q$, o que nos permite incluir
em P a expressão
 o que completa a demonstração.





Forma de apresentação para as deduções.

- **1a Coluna** - **numero** dos passos dados na dedução;
 - a cada passo obtemos um **proposição**, é referenciada no restante da dedução por esse número;
 - os primeiros passos são as premissas;
- **2a Coluna** - a **proposição** obtida naquele passo;
 - a última deve ser a conclusão do argumento.
- **3a Coluna** - **indicação de como foi obtida** a proposição naquele passo;
 - obtidas atuando **equivalências**, **regras de inferência** ou outras propriedades sobre premissas dos passos anteriores;





Repetimos a dedução de Modus Ponens

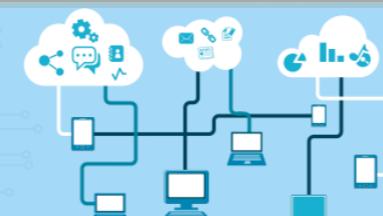
1. $p \rightarrow q$
 - Premissa
2. p
 - Premissa
3. $\neg p \vee q$
 - (Lei da Condicional sobre 1)
4. $p \wedge (\neg p \vee q)$
 - Conjunção de (2) e (3)
5. $(p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$ - Lei da Distributividade sobre (4)
 - Definição de contradição em (5)
6. $F \vee (p \wedge q)$
 - Definição de disjunção em (6)
7. $p \wedge q$
 - Definição de disjunção em (6)
8. q
 - Regra da Simplificação sobre (7)





Regras

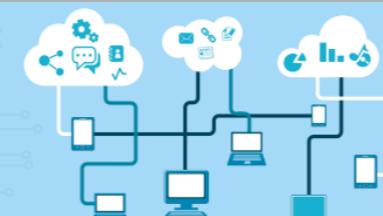
***Inferência
Equivalência***



Equivalências e Inferências

- Conjunto fundamental de equivalências que podem ser utilizadas na demonstração da validade dos argumentos

Idempotência [ID]	$p \Leftrightarrow p \wedge p$ $p \Leftrightarrow p \vee p$	Bicondicional [BICOND]	$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
Comutatividade [COM]	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	Contraposição [CP]	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
Associatividade [ASSOC]	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	Exportação – Importação [EI]	$p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
Distributividade [DIST]	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Equivalentes com tautologias [ET]	$p \vee \neg p \Leftrightarrow V$ $p \wedge V \Leftrightarrow p$
Dupla Negação [DN]	$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$	Equivalentes com contradições [EC]	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$ $p \vee F \Leftrightarrow p$
Leis de De Morgan [DM]	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	Conjunção [CPNJ]	$p, q \Leftrightarrow p \wedge q$
Condicional [COND]	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Auto-Referencia [AUTO]	$p \Leftrightarrow p \vee p$ $p \wedge p \Leftrightarrow p$



Equivalências e Inferências

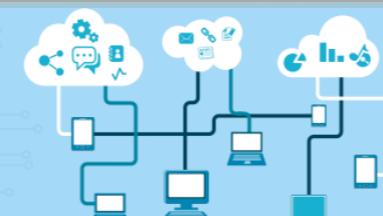
- Conjunto fundamental de regras de inferência, para mostrar a validade de argumentos mais complexos.

Adição [AD]	$p \Rightarrow p \vee q$
Simplificação [SIMP]	$p \wedge q \Rightarrow p$
Simplificação Disjuntiva [SIMPD]	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Rightarrow p$
Absorção [ABS]	$p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow p \wedge q$
Modus Ponens [MP]	$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$
Modus Tollens [MT]	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
Silogismo disjuntivo [SD]	$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$
Silogismo Hipotético [SH]	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$
Dilema Construtivo [DC]	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$
Dilema Destruutivo [DD]	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s) \Rightarrow \neg p \vee \neg r$
Conjunção [CONJ]	$p, q \Rightarrow p \wedge q$
Exportação [EXP]	$(p \wedge q) \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
Inconsistência [INC]	$p, \neg p \rightarrow q$





Simplificação da Conclusão



Simplificação da Conclusão

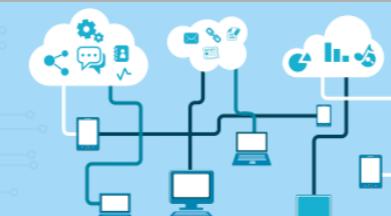
- Quando a conclusão é uma proposição composta, costuma-se simplificá-la, de forma a facilitar a dedução.

Conclusão da forma $p \wedge q$ - conjunção

- Devemos **obter**, as parcelas p e q ,
- e a seguir, **obter** $p \wedge q$, por CONJ.

Exemplo:

"Se a procura do produto aumentar, seu preço subirá; se o preço subir, o produto não será exportado; se não houver importação ou se o produto for exportado, o produto escasseará. A procura do produto aumentou e não haverá importação. Logo, o produto não será exportado e escasseará."



Simplificação da Conclusão

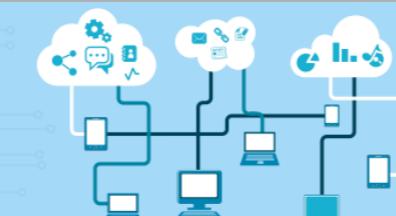


Fazendo:

- p – ????
- q – ????
- r – ????
- s – ????
- t – ????

Temos o argumento na forma simbólica e sua dedução:

I.????



Simplificação da Conclusão

Fazendo:

- p – a procura aumentar
- q – o preço subir
- r – o produto ser exportado
- s – haver importação
- t – o produto escassear

Temos o argumento na forma simbólica e sua dedução:

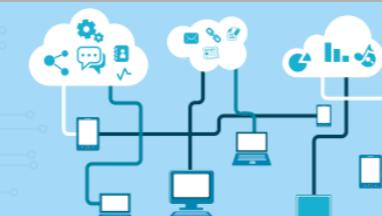
1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow \neg r$
3. $\neg s \vee r \rightarrow t$
4. $p \wedge \neg s$
5. $\vdash \neg r \wedge t$



Simplificação da Conclusão

Deduzindo temos:

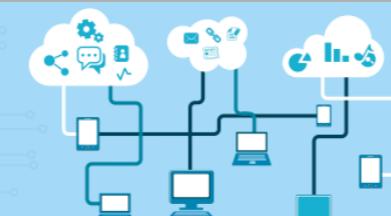
1. $p \rightarrow q$ (premissa)
2. $q \rightarrow \neg r$ (premissa)
3. $\neg s \vee r \rightarrow t$ (premissa)
4. $p \wedge \neg s$ (premissa)
5. ???
6. ???
7. ???
8. ???
9. ???
10. ???
11. ???



Simplificação da Conclusão

Deduzindo temos:

1. $p \rightarrow q$ (premissa)
2. $q \rightarrow \neg r$ (premissa)
3. $\neg s \vee r \rightarrow t$ (premissa)
4. $p \wedge \neg s$ (premissa)
5. p (4, SIMP)
6. $p \rightarrow \neg r$ (1, 2, SH)
7. $\neg r$ (5, 6, MP)
8. $\neg s$ (4, SIMP)
9. $\neg s \vee r$ (8, AD)
10. t (3, 9, MP)
11. $\neg r \wedge t$ (7, 10, CONJ)



Simplificação da Conclusão

Conclusão da forma $q \rightarrow r$

- Suponha que o argumento tenha a forma: $P \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Onde P é a **conjunção de premissas**. Ora, sabemos que, por **EI**,
 - $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- Logo, temos o argumento na forma
 - $P \wedge q \rightarrow r$
- Portanto, para deduzirmos um argumento cuja conclusão é da forma:
$$q \rightarrow r$$
 - Incluímos q no conjunto de **premissas**, e procuramos **deduzir** r .
 - Este artifício é conhecido como **Dedução da Condicional**



Simplificação da Conclusão

Exemplo:

“Se a casa ficar vazia ou eu conseguir o empréstimo então pago a dívida e me mudo. Se eu me mudar ou Pedro ficar em São Paulo então volto a estudar. Logo, se a casa ficar vazia, volto a estudar.”

Fazendo

- p – ????
- q – ????
- r – ????
- s – ????
- t – ????
- u – ????



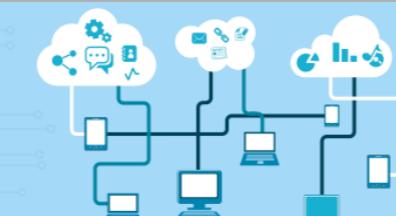
Simplificação da Conclusão

Exemplo:

“Se a casa ficar vazia ou eu conseguir o empréstimo então pago a dívida e me mudo. Se eu me mudar ou Pedro ficar em São Paulo então volto a estudar. Logo, se a casa ficar vazia, volto a estudar.”

Fazendo

- **p – a casa ficar vazia**
- **q – eu conseguir o empréstimo**
- **r – eu pagar a dívida**
- **s – me mudar**
- **t – Pedro ficar em São Paulo**
- **u – voltar a estudar**



Simplificação da Conclusão



Temos o argumento:

- ???



Simplificação da Conclusão

Temos o argumento:

- $p \vee q \rightarrow r \wedge s$
- $s \vee t \rightarrow u$
- $\vdash p \rightarrow u$



Simplificação da Conclusão

Temos o argumento:

- $p \vee q \rightarrow r \wedge s$
- $s \vee t \rightarrow u$
- $\vdash p \rightarrow u$

Utilizando Dedução da Condisional, incluo “p” nas premissas e a conclusão se reduz a “u”:

- ????



Simplificação da Conclusão

Temos o argumento:

- $p \vee q \rightarrow r \wedge s$
- $s \vee t \rightarrow u$
- $\vdash p \rightarrow u$

Utilizando Dedução da Condisional, incluo “p” nas premissas e a conclusão se reduz a “u”:

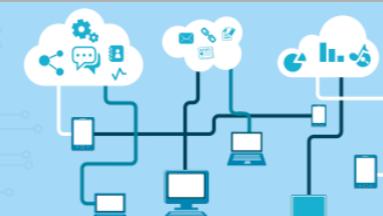
- $p \vee q \rightarrow r \wedge s$
- $s \vee t \rightarrow u$
- p
- $\vdash u$



Simplificação da Conclusão

Deduzindo:

1	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	premissa
2	$s \vee t \rightarrow u$	premissa
3	p	premissa
4		
5		
6		
7		
8		



Simplificação da Conclusão

Deduzindo:

1	$p \vee q \rightarrow r \wedge s$	premissa
2	$s \vee t \rightarrow u$	premissa
3	p	premissa
4	$p \vee q$	3, AD
5	$r \wedge s$	4, 1, MP
6	s	5, SIMP
7	$s \vee t$	6, AD
8	u	7, 2, MP



Simplificação da Conclusão

Conclusão da forma $p \vee q$

- Sabemos que, por COND, que

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$$

- Portanto, se a conclusão do **argumento** tem a forma $p \vee q$
- Podemos **substituí-la** por $\neg p \rightarrow q$,
- E utilizando **Dedução da Condicional**:
 1. **incluir $\neg p$** nas premissas
 2. e **deduzir q** .



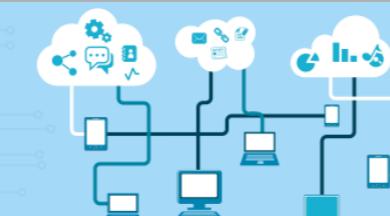
Simplificação da Conclusão

Exemplo:

"Ou pagamos a dívida ou o déficit aumenta; se as exportações crescerem, o déficit não aumenta Logo, ou pagamos a dívida ou as exportações não crescem"

Fazendo

- $p - ???$
- $q - ???$
- $r - ???$



Simplificação da Conclusão

Exemplo:

"Ou pagamos a dívida ou o déficit aumenta; se as exportações crescerem, o déficit não aumenta Logo, ou pagamos a dívida ou as exportações não crescem"

Fazendo

- **p – pagar a dívida**
- **q – o déficit aumentar**
- **r – as exportações crescerem**



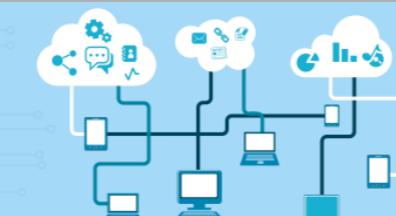
Simplificação da Conclusão

Temos o argumento

1. ???

2. ???

3. ???



Simplificação da Conclusão

Temos o argumento

1. $p \vee q$
2. $r \rightarrow \neg q$
3. $\vdash p \vee \neg r$



Simplificação da Conclusão

Temos o argumento

1. $p \vee q$
2. $r \rightarrow \neg q$
3. $\vdash p \vee \neg r$

- Como a conclusão $p \vee \neg r$ é equivalente a $\neg p \rightarrow r$;
- Então, pela Dedução da Condicional, o argumento assume a forma abaixo:

1. ???
2. ???
3. ???
4. ???



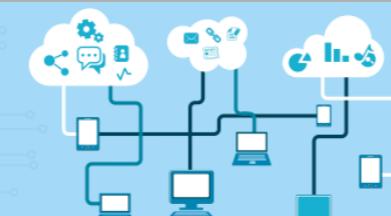
Simplificação da Conclusão

Temos o argumento

1. $p \vee q$
2. $r \rightarrow \neg q$
3. $\vdash p \vee \neg r$

- Como a conclusão $p \vee \neg r$ é equivalente a $\neg p \rightarrow r$;
- Então, pela Dedução da Condicional, o argumento assume a forma abaixo:

1. $p \vee q$
2. $r \rightarrow \neg q$
3. $\neg p$
4. $\vdash \neg r$



Simplificação da Conclusão

Deduzindo:

	$\vdash \neg r$	
1	$P \vee q$	premissa
2	$r \rightarrow \neg q$	premissa
3	$\neg P$	premissa
4		
5		



Simplificação da Conclusão

Deduzindo:

	$\vdash \neg r$	
1	$P \vee q$	premissa
2	$r \rightarrow \neg q$	premissa
3	$\neg P$	premissa
4	q	1, 3, SD
5	$\neg r$	2, 4, MT



Simplificação da Conclusão

Uma outra forma de deduzir uma disjunção, é obter um dos disjuntos, e, por adição, incluir o outro.

- Exemplo, considere o argumento:

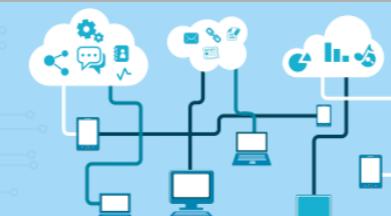
$$1. (\neg p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)$$

$$2. \neg q$$

$$3. \vdash \neg p \vee s$$

- Como a **conclusão** é $\neg p \vee s$:

- podemos **deduzir** $\neg p$
 - e, por **adição**, $\neg p \vee s$
- ou **deduzir** s ,
 - e, por **adição**, $\neg p \vee s$



Simplificação da Conclusão

Deduzindo:

	$\vdash \neg p \vee s$	
1	$(\neg p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)$	premissa
2	$\neg q$	premissa
3		
4		
5		



Simplificação da Conclusão

Deduzindo:

	$\vdash \neg p \vee s$	
1	$(\neg p \vee q) \wedge (r \rightarrow s)$	premissa
2	$\neg q$	premissa
3	$\neg p \vee q$	1, SIMP
4	$\neg p$	2, 3, SD
5	$\neg p \vee s$	4, AD



Simplificação da Conclusão

Conclusão da forma $p \leftrightarrow q$

- Sabemos, por BICOND, que:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

- Então, se a conclusão tem a forma $p \leftrightarrow q$,
 - podemos substituí-la por $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$,
 - logo temos que deduzir, independentemente, $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$.
- Utilizando Dedução da Condisional,
 - na dedução de $p \rightarrow q$, incluir $\neg p$ nas premissas e deduzir q
 - na dedução de $q \rightarrow p$, incluir $\neg q$ nas premissas e deduzir p .



Simplificação da Conclusão

- Considere o argumento

$$1. p \wedge q \rightarrow r$$

$$2. r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$$

$$3. s \rightarrow q$$

$$4. p$$

$$5. \vdash r \leftrightarrow s$$

- Devemos realizar duas deduções:

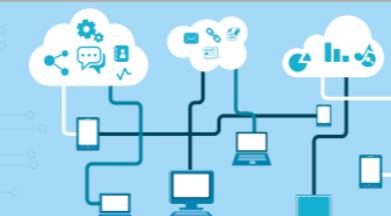
- uma para $r \rightarrow s$, para a qual incluímos r nas premissas e deduzimos s ;
- Outra para $s \rightarrow r$, na qual incluímos s nas premissas e deduzimos r .
- As deduções devem ser realizadas em separado, pois os resultados intermediários de uma não podem ser utilizados na outra.



Simplificação da Conclusão

Deduzindo "s":

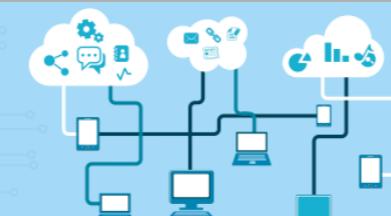
	$\vdash s$	
1	$p \wedge q \rightarrow r$	premissa
2	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$	premissa
3	$s \rightarrow q$	premissa
4	p	premissa
5	r	premissa
6		
7		
8		



Simplificação da Conclusão

Deduzindo "s":

	$\vdash s$	
1	$p \wedge q \rightarrow r$	premissa
2	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$	premissa
3	$s \rightarrow q$	premissa
4	p	premissa
5	r	premissa
6	$r \vee q$	5, AD
7	$\neg p \vee s$	2, 5, MP
8	s	4, 7, SD



Simplificação da Conclusão

Deduzindo "r":

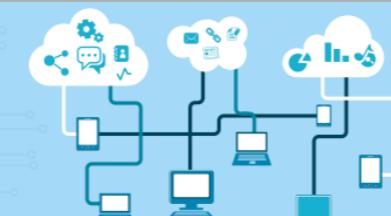
	$\vdash r$	
1	$p \wedge q \rightarrow r$	premissa
2	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$	premissa
3	$s \rightarrow q$	premissa
4	p	premissa
5	s	premissa
6		
7		
8		



Simplificação da Conclusão

Deduzindo "r":

	$\vdash r$	
1	$p \wedge q \rightarrow r$	premissa
2	$r \vee q \rightarrow \neg p \vee s$	premissa
3	$s \rightarrow q$	premissa
4	p	premissa
5	s	premissa
6	q	3, 5, MP
7	$p \wedge q$	4, 6, CONJ
8	r	1, 7, MP



Simplificação da Conclusão

- Alternativamente, poderíamos, utilizar a outra equivalência BICOND,
$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

- Nesse caso, bastaria:

- deduzir $p \wedge q$,
 - ou deduzir $\neg p \wedge \neg q$,
 - e incluir o outro disjunto por Adição.

- Exemplo

1. $p \wedge q$
2. $p \rightarrow [q \rightarrow (s \wedge t)]$
3. $\vdash s \leftrightarrow t$



Simplificação da Conclusão

Deduzindo " $s \leftrightarrow t$:

	$\vdash s \leftrightarrow t$	
1	$p \wedge q$	premissa
2	$p \rightarrow [q \rightarrow (s \wedge t)]$	premissa
3		
4		
5		
6		

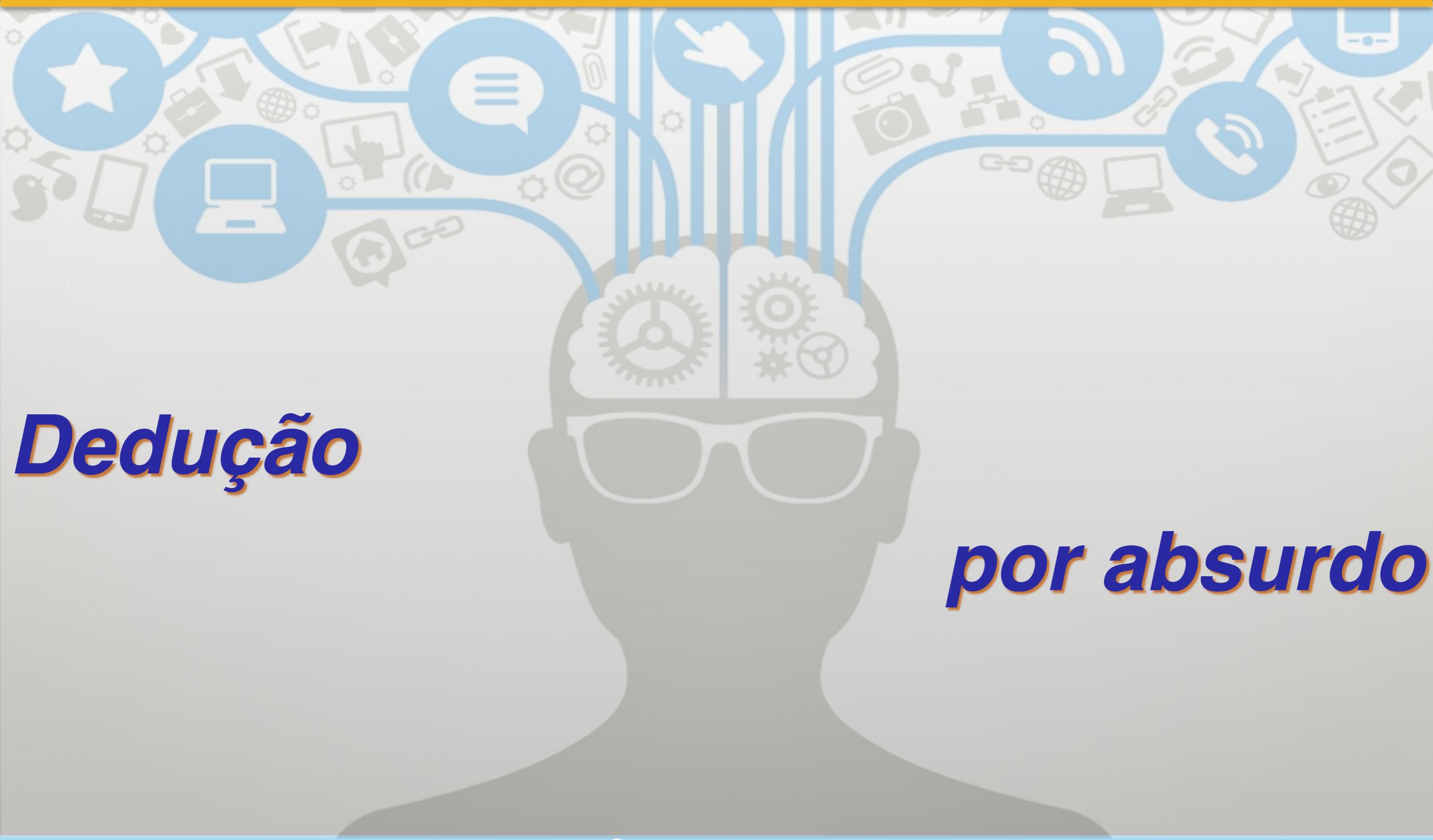


Simplificação da Conclusão

Deduzindo " $s \leftrightarrow t$:

	$\vdash s \leftrightarrow t$	
1	$P \wedge Q$	premissa
2	$P \rightarrow [Q \rightarrow (P \wedge Q)]$	premissa
3	$P \wedge Q \rightarrow P \wedge Q$	2, EI
4	$P \wedge Q$	1, 3. MP
5	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	4, AD
6	$P \leftrightarrow Q$	5, BICOND





Dedução

por absurdo



Dedução por Absurdo

- Considere o argumento $P \rightarrow Q$, onde P é a conjunção de premissas, e Q é a conclusão.
- Então, se o argumento for válido $\neg P \vee Q$ também o será;
- Consequentemente, sua negação, $\neg(\neg P \vee Q)$, que, por De Morgan, é equivalente a $P \wedge \neg Q$, será uma contradição.
- Então, para mostrarmos que o argumento $P \rightarrow Q$ é válido, é suficiente mostrar que $P \wedge \neg Q$ é uma contradição.
- Ou seja, para mostrarmos que um argumento é válido, podemos:
 - negar a conclusão, incluí-la nas premissas
 - e deduzir F, que representa uma contradição.



Dedução por Absurdo



Considere o argumento

$$l.p \rightarrow q \vee r$$

$$2.q \rightarrow \neg p$$

3.s → ↗ r

4. $\vdash \neg(p \wedge s)$



Dedução por Absurdo

Considere o argumento

$$1. p \rightarrow q \vee r$$

$$2. q \rightarrow \neg p$$

$$3. s \rightarrow \neg r$$

$$4. \vdash \neg(p \wedge s)$$

- Utilizando demonstração por absurdo, incluímos $p \wedge s$ nas premissas e deduzimos uma contradição:

$$1. p \rightarrow q \vee r$$

$$2. q \rightarrow \neg p$$

$$3. s \rightarrow \neg r$$

$$4. p \wedge s$$

$$5. \vdash F$$



Simplificação da Conclusão

- Deduzindo "F":

	$\vdash F$	
1	$p \rightarrow q \vee r$	premissa
2	$q \rightarrow \neg p$	premissa
3	$s \rightarrow \neg r$	premissa
4	$p \wedge s$	premissa
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		



Simplificação da Conclusão

- Deduzindo "F":

	$\vdash F$	
1	$p \rightarrow q \vee r$	premissa
2	$q \rightarrow \neg p$	premissa
3	$s \rightarrow \neg r$	premissa
4	$p \wedge s$	premissa
5	p	4, SIMP
6	s	4, SIMP
7	$q \vee r$	5, 1, MP
8	$\neg r$	6, 3, MP
9		
10		
11		
12		



Simplificação da Conclusão

- Deduzindo "F":

	$\vdash F$	
1	$p \rightarrow q \vee r$	premissa
2	$q \rightarrow \neg p$	premissa
3	$s \rightarrow \neg r$	premissa
4	$p \wedge s$	premissa
5	p	4, SIMP
6	s	4, SIMP
7	$q \vee r$	5, 1, MP
8	$\neg r$	6, 3, MP
9	q	7, 8, SD
10	$\neg p$	9, 2, MP
11	$p \wedge \neg p$	10, 5 CONJ
12	F	11, EC



