Aula 16

Integração por partes

Há essencialmente dois métodos empregados no cálculo de integrais indefinidas (primitivas) de funções elementares. Um deles é a integração por substituição, introduzida na aula 15, que retomaremos adiante, em novos casos. O outro método é chamado de *integração por partes*, que exploraremos nesta aula.

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são duas funções deriváveis em um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, para cada x em I, temos

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Assim sendo,

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, dx = u(x)v(x) + C$$

ou seja,

$$\int v(x)u'(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) + C$$

Podemos escrever ainda

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx \qquad (16.1)}$$

aqui considerando que a constante genérica C já está implícita na última integral.

Sendo $u = u(x)$ e $v = v(x)$, temos

$du = u'(x)\, dx$ e $dv = v'(x)\, dx$, e passamos a fórmula 16.1 à forma abreviada

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \qquad (16.2)}$$

As fórmulas 16.1 e 16.2 são chamadas fórmulas de integração por partes.

Como veremos através de exemplos, optamos por empregar a fórmula de integração por partes quando identificamos a integral a ser calculada como tendo a forma $\int u \cdot dv = \int u(x)\, v'(x)\, dx$ para certas funções deriváveis u e v.

A estratégia por trás do emprego da fórmula de integração por partes está no fato de que, muitas vezes, a integral $\int v \cdot du$, do segundo membro da equação 16.2, é mais fácil de ser calculada do que a integral $\int u \cdot dv$ do primeiro membro. Assim, empregando a fórmula de integração por partes "transferimos" para a integral do segundo membro o trabalho de calcular a integral mais difícil do primeiro membro.

Exemplo 16.1. *Calcular* $\int x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solução. Tomaremos $u = x$, e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$.

Teremos $du = 1\, dx = dx$, e $v = \int \operatorname{sen} x\, dx$.

Para os propósitos da integração por partes, basta tomar $v = -\cos x$, menosprezando a constante arbitrária da integral $v = \int \operatorname{sen} x\, dx$, pois uma tal escolha da função v é suficiente para validar a fórmula 16.2.

Temos então

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\, dx &= \int u \cdot dv \\ &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x\, dx \\ &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Exemplo 16.2. *Calcular* $\int x \ln x\, dx$.

Solução. Tomamos $u = \ln x$, e $dv = x\, dx$.

Teremos $du = \frac{1}{x}\, dx$, e $v = \int x\, dx$. Tomamos $v = \frac{x^2}{2}$.

Temos então

$$\begin{aligned}\int x \ln x\, dx &= \int u \cdot dv \\ &= u \cdot v - \int v \cdot du \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C\end{aligned}$$

Exemplo 16.3. *Calcular* $\int \operatorname{arctg} x \, dx$.

Solução. Faremos $u = \operatorname{arctg} x$, e $dv = dx$.

E então $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, $v = x$. Daí,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x \, dx &= \int u \, dv = uv - \int v \, du \\ &= x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

Para calcular a integral $J = \displaystyle\int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$, procedemos a uma mudança de variável:

Fazendo $w = 1 + x^2$, temos $dw = 2x\,dx$, e então $x\,dx = \frac{1}{2}dw$. Daí,

$J = \displaystyle\int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{w}\, dw = \frac{1}{2}\ln|w| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

Portanto, $\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

16.1 Um estratégia para escolhas adequadas de u e dv na integração por partes

Como já mencionamos, o propósito da integração por partes é transferir o cálculo de uma integral $\int u \cdot dv$ para o cálculo de uma integral $\int v \cdot du$ (a qual espera-se que saibamos calcular), pela fórmula de integração por partes, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Ao integrar por partes, uma integral da forma $\int f(x)g(x)\,dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)g(x)\,dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv.

Em outras palavras, podemos fazer $u = f(x)$ e $dv = g(x)\,dx$, ou $u = g(x)$ e $dv = f(x)\,dx$ (ou ainda $u = f(x)g(x)$ e $dv = 1\,dx\,!$). Mas esta escolha não pode ser feita de modo aleatório. Temos que ser espertos em nossa escolha para que, ao passarmos da integral $\int u\,dv$ para a integral $\int v\,du$, passemos a uma integral tecnicamente mais simples de ser calculada.

Uma sugestão que funciona bem na grande maioria das vezes é escolher as funções u e v segundo o critério que descreveremos a seguir. Ele foi publicado como uma pequena nota em uma edição antiga da revista *American Mathematical Monthly*[1].

Considere o seguinte esquema de funções elementares:

[1]Herbert E. Kasube, *A Technique for Integration by Parts*. The American Mathematical Monthly, Mar., 1983, Vol. 90, No. 3, pp. 210-211.

L	I	A	T	E
Logarítmicas	**I**nversas de trigonométricas	**A**lgébricas	**T**rigonométricas	**E**xponenciais

No esquema acima, as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções, conforme indicado.

Uma estratégia que funciona bem é: ao realizar uma integração por partes, escolher, dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral,

- como função u: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- como formando a diferencial dv: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Sumarizando, u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de L, e dv pela letra mais próxima de E.

Esta estratégia já foi adotada nos exemplos desenvolvidos anteriormente!

1. Na integral $\int x \operatorname{sen} x \, dx$, exemplo 16.1, fizemos
   $u = x$ (Algébrica) e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ (Trigonométrica).
   No anagrama LIATE, A precede T.
2. Na integral $\int x \ln x \, dx$, exemplo 16.2, fizemos
   $u = \ln x$ (Logarítmica) e $dv = x \, dx$ (Algébrica).
   No anagrama LIATE, L precede precede A.
3. Na integral $\int \operatorname{arctg} x \, dx$, exemplo 16.3, fizemos
   $u = \operatorname{arctg} x$ (Inversa de trigonométrica), e $dv = 1 \, dx$ (Algébrica).
   No anagrama LIATE, I precede A.

Passaremos agora a um exemplo interessante e imprescindível.

Exemplo 16.4. *Calcular* $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução. Seguindo o emprego do anagrama LIATE, faremos

$u = \operatorname{sen} x$ (trigonométrica), $dv = e^x \, dx$ (exponencial). T vem antes de E no anagrama.

Temos então $du = (\operatorname{sen} x)'dx = \cos x\,dx$, e tomamos $v = e^x$. Daí,

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x\,dx &= \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx\end{aligned}$$

Parece que voltamos ao ponto de partida, não é mesmo? Passamos da integral $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ à integral $\int e^x \cos x\,dx$, equivalente à primeira em nível de dificuldade.

Continuaremos, no entanto, a seguir a receita do anagrama.

Na integral $J = \int e^x \cos x\,dx$ faremos

$u = \cos x$, $dv = e^x\,dx$. (Estas funções u e v são definidas em um novo contexto. Referem-se à esta segunda integral.)

Teremos $du = (\cos x)'dx = -\operatorname{sen} x\,dx$, e $v = e^x$, e então

$$\begin{aligned}J = \int e^x \cos x\,dx &= \int u\,dv = uv - \int v\,du \\ &= e^x \cos x - \int (-\operatorname{sen} x)e^x\,dx \\ &= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx\end{aligned}$$

O resultado final é interessante. Chamando $I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$,

$$\begin{aligned}I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx &= e^x \operatorname{sen} x - J \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx\right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I\end{aligned}$$

Portanto,

$$I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I$$

ou seja,

$$2I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + C$$

e então obtemos

$$I = \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{2}(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x) + C$$

Exemplo 16.5. *Calcular* $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad (a > 0)$.

Solução. Aqui podemos integrar por partes, mas o anagrama LIATE não nos é de serventia, já que a integral envolve apenas expressões algébricas.

Faremos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$.

Então $du = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$, e tomamos $v = x$. Daí,

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \end{aligned}$$

Agora fazemos

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx &= \int \frac{-(a^2 - x^2) + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \\ &= -\int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \\ &= -\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \\ &= -I + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx \\ &= -I + a^2 \cdot \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + a^2 \cdot \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$$

de onde então

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + C$$

Um modo mais apropriado de abordar integrais com expressões da forma $x^2 \pm a^2$, ou $a^2 - x^2$, será retomado adiante, quando fizermos um estudo de *substituições trigonométricas*.

16.2 Problemas

1. Repetindo procedimento análogo ao usado no exemplo 16.5, mostre que

$$\int \sqrt{x^2 + \lambda}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + \lambda} + \frac{\lambda}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right| + C$$

2. Calcule as seguintes integrais.

(a) $\int xe^x\,dx$. *Resposta.* $e^x(x-1)+C$.

(b) $\int \ln x\,dx$. *Resposta.* $x(\ln x-1)+C$.

(c) $\int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq -1)$. *Resposta.* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)+C$.

(d) $\int \ln(1+x^2)\,dx$. *Resposta.* $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg} x+C$.

(e) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arctg} x - x]+C$.

(f) $\int \operatorname{arcsen} x\,dx$. *Resposta.* $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}+C$.

(g) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$.

Sugestão. Imite os procedimentos usados no exemplo 16.5.

(h) $\int x \operatorname{arcsen} x\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}]+C$.

(i) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$. *Resposta.* $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.

(j) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$. *Resposta.* $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

Sugestão. Ao deparar-se com $\int \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx$, faça $z=\sqrt{x}$.

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Resposta.* $2\sqrt{x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

(l) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. *Resposta.* $x\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

Sugestão. Não se deixe intimidar. Comece fazendo $u=\operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $dv = dx$.

(m) $\int x\cos^2 x\,dx$. *Resposta.* $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

Sugestão. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

(n) $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\,dx$.

Resposta. $(x^2+7x-5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}+(2x+7)\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4}+C$.

(o) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx)+C$.

(p) $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)+C$.

(q) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resposta.* $x-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x + C$.

(r) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2}\,dx$.

Resposta. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|-\frac{1}{x}\operatorname{arcsen} x + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{1}{x}\operatorname{arcsen} x + C$.

Sugestão. Faça $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, quando necessário, e então $z = \sqrt{1-x^2}$.

(s) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$. *Resposta.* $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

(t) $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$.

3. Ao calcular a integral $\int \frac{1}{x}dx$, Joãozinho procedeu da seguinte maneira.

   Fazendo $u = \frac{1}{x}$, *e* $dv = dx$, *podemos tomar* $v = x$, *e teremos* $du = -\frac{1}{x^2}dx$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$
$$= \frac{1}{x}\cdot x - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$$

   Sendo $J = \int \frac{1}{x}dx$, *temos então* $J = 1 + J$, *logo* $0 = 1$.

   Onde está o erro no argumento de Joãozinho ?

4. Mostre que $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+\lambda)^2}dx = \frac{-x}{2(x^2+\lambda)} + \int \frac{dx}{x^2+\lambda}$.

   Sugestão. Faça $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+\lambda)^2}dx = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x}{(x^2+\lambda)^2}dx}_{dv}$.

5. Usando o resultado do problema 4, calcule (considere $a > 0$)

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$. (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^2}dx$.

   Respostas. (a) $\frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$. (b) $\frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

6. Mostre que

$$\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \frac{x}{2\lambda(x^2+\lambda)} + \frac{1}{2\lambda}\int \frac{dx}{x^2+\lambda}$$

   Sugestão. $\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \int \frac{(x^2+\lambda)-x^2}{(x^2+\lambda)^2}dx$.

7. Usando a redução mostrada no problema 6, calcule as integrais (considere $a > 0$).

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$. (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2}$.

   Respostas. (a) $\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$. (b) $\frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

8. Calcule $\displaystyle\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{(x^2+1)^2}dx$. *Resposta.* $\frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2} + C$.