# Aula 15

# Integrais indefinidas

## 15.1 Antiderivadas

Sendo $f(x)$ e $F(x)$ definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que

> $F(x)$ é uma *antiderivada* ou uma *primitiva* de $f(x)$, em $I$, se $F'(x) = f(x)$ para cada $x \in I$.

Ou seja, $F$ é antiderivada ou primitiva de $f$ se $F$ é uma função cuja derivada é $f$.

Como primeiros exemplos, temos

| $f(x)$ | primitiva de $f(x)$ |
|---|---|
| $3x^2$ | $x^3$ |
| $2$ | $2x$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\operatorname{sen} x$ | $-\cos x$ |

> **Observação 15.1.** *Se* $F$ *é antiderivada de* $f$ *em* $I$, *e* $c$ *é uma constante, então* $F + c$ *também é uma antiderivada de* $f$ *em* $I$.

De fato, se $F'(x) = f(x)$, para cada $x \in I$, então

$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$, e portanto $F(x) + c$ também é uma antiderivada de $f(x)$ em $I$.

Assim, por exemplo $x^3$, $x^3 + 5$ e $x^3 - \sqrt{2}$ são primitivas (ou antiderivadas) de $3x^2$.

Veremos agora que, em cada intervalo $I$, duas primitivas de uma mesma função diferem entre si por uma constante.

**Proposição 15.1.** *Se* $F_1$ *e* $F_2$ *são antiderivadas de* $f$, *em um intervalo* $I \subset \mathbb{R}$, *então existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $F_1(x) = F_2(x) + c$, *para cada* $x \in I$.

Para demonstrar a proposição 15.1, faremos uso do seguinte resultado.

**Lema 15.1.** *Sendo* $I$ *um intervalo de números reais, se* $f$ *é contínua no intervalo* $I$ *e* $f'(x) = 0$ *para cada* $x$ *no interior de* $I$, *então* $f$ *é constante em* $I$, *ou seja, existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = c$ *para todo* $x \in I$.

Poderíamos aceitar o lema 15.1 como evidente e seguir adiante. No entanto, este lema é consequência de um teorema importante sobre funções deriváveis, conhecido como *Teorema do valor médio*. Como tornaremos a fazer uso do teorema do valor médio mais adiante, julgamos oportuno citá-lo agora.

**Teorema 15.1** (Teorema do valor médio). *Suponhamos que* $f$ *é uma função contínua no intervalo* $[a, b]$ *e derivável no intervalo* $]a, b[$. *Então existe* $c \in ]a, b[$ *tal que*

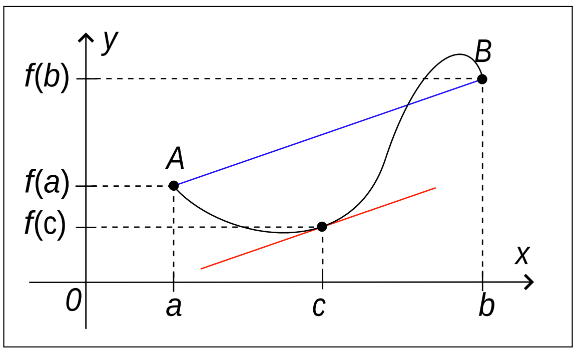
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Aceitaremos este teorema sem demonstração, e faremos uma interpretação geométrica de seu resultado.

O quociente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é a taxa de variação média, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, da função $f$, no intervalo $[a, b]$, sendo $\Delta x = b - a$ e $\Delta f = f(b) - f(a)$.

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é também a inclinação da reta passando por $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.

Figura 15.1. Interpretação geométrica do Teorema do valor médio: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.




O teorema do valor médio diz que essa taxa de variação média é também a taxa de variação instantânea de $f$, em relação a $x$, $\dfrac{df}{dx}(c)$, para algum ponto $c$ no intervalo $]a, b[$.

Em termos geométricos, isto quer dizer que a inclinação da reta $AB$ coincide com a inclinação de uma reta tangente ao gráfico de $f$ em um ponto $(c, f(c))$, para algum $c \in ]a, b[$ . A figura 15.1 ilustra geometricamente o teorema do valor médio.

Uma interpretação cinemática do teorema do valor médio é a seguinte: a velocidade média de um ponto móvel, em movimento retilíneo, no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, coincide com sua velocidade instantânea em algum instante $t_0 \in ]t_1, t_2[$, isto é,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(t_0) \quad \text{em um instante } t_0, \text{ com} \quad t_1 < t_0 < t_2$$

Por exemplo, se um carro, com velocidade variável, faz um percurso de 180 km em duas horas, sua velocidade média é $\frac{180\text{km}}{2\text{h}} = 90\,\text{km/h}$. Intuitivamente, sabemos que em algum instante do percurso, seu velocímetro acusará a velocidade instantânea de 90 km/h.

*Demonstração do lema 15.1.* Suponhamos que $f'(x) = 0$ para cada $x$ no interior do intervalo $I$.

Mostraremos que, quaisquer que sejam $x_1$ e $x_2$ em $I$, $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) = f(x_2)$.

Temos $f$ contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$, pois $]x_1, x_2[$ está contido no interior do intervalo $I$.

Pelo teorema do valor médio, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$ para algum $c \in ]x_1, x_2[$ .

Como $f'(c) = 0$, temos $f(x_1) = f(x_2)$, e como $x_1$ e $x_2$ são pontos quaisquer do intervalo $I$, temos $f$ constante em $I$. □

*Demonstração da proposição 15.1.* Suponhamos que, $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ para cada $x \in I$, $I$ um intervalo de $\mathbb{R}$.

Consideremos a função $\varphi = F_1 - F_2$.

Então, $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, para cada $x \in I$.

Pelo lema 15.1, $\varphi$ é constante no intervalo $I$.

Assim, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) - F_2(x) = c$ para cada $x \in I$.

Portanto $F_1(x) = F_2(x) + c$, para cada $x \in I$. □

**Definição 15.1** (Integral indefinida). *Sendo* $F$ *uma primitiva de* $f$ *no intervalo* $I$, *chama-se* integral indefinida de $f$, *no intervalo* $I$, *à primitiva genérica de* $f$ *em* $I$, $F(x)+C$, *sendo* $C$ *uma constante real genérica. Denotamos tal fato por*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

*Em equações que exprimem integrais definidas, geralmente omite-se o intervalo* $I$.

## 15.2 Integrais imediatas

Coletaremos agora algumas integrais indefinidas cujo cálculo é imediato.

**Proposição 15.2.**

1. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, *se* $\alpha \neq -1$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.
3. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$.
5. $\int e^x\,dx = e^x + C$.
6. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$.
7. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$.
9. $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$.
10. $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$.
11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$.
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$.

*Demonstração.* Para a dedução das integrais acima, basta verificar que a derivada do segundo membro, em cada igualdade, é a função que se encontra sob o sinal de integração.

Como exemplos,

se $\alpha \neq -1$, $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1)\cdot\dfrac{x^{\alpha+1-1}}{\alpha+1} = x^{\alpha}$.

$(\ln|x|)' = 1/x$:
se $x > 0$, $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$;
se $x < 0$, $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = 1/x$.

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, logo $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = \dfrac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x$. □

## 15.3 Manipulações elementares de integrais

Suponhamos $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$, e $\int g(x)\,dx = G(x) + C_2$. Então

1. $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, logo
   $\int (f(x) + g(x))\,dx = F(x) + G(x) + C = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \quad (C = C_1 + C_2)$.
2. Sendo $k$ uma constante real, $[k\cdot F(x)]' = k\cdot F'(x) = k\cdot f(x)$, logo
   $\int kf(x)\,dx = kF(x) + C = k\int f(x)\,dx \quad (kC_1 = C)$

Reunimos os fatos acima, com outros também úteis, na seguinte proposição.

**Proposição 15.3.** *Se* $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ *e* $\int g(x)\,dx = G(x)+C$, *então, sendo* $a, b, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C$
2. $\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot F(x) + C$
3. $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C$
4. $\int f(x-b)\,dx = F(x-b) + C$
5. $\int f(b-x)\,dx = -F(b-x) + C$
6. $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
7. $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

*Demonstração.* As duas primeiras propriedades já foram deduzidas anteriormente. Das cinco propriedades restantes, as quatro primeiras são consequências imediatas da última, a única que deduziremos.

Por hipótese, $F'(x) = f(x)$.

Logo $[F(ax+b)]' = F'(ax+b)\cdot(ax+b)' = af(ax+b)$, de onde

$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\cdot af(ax+b) = f(ax+b)$.

Portanto $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$. □

## 15.4 Exemplos elementares

1. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$. Logo, pela proposição 15.3,
   (a) $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$
   (b) $\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + C$
2. $\int e^x\,dx = e^x + C$. Logo, pela proposição 15.3,
   (a) $\int e^{x-5}\,dx = e^{x-5} + C$
   (b) $\int e^{2-x}\,dx = -e^{2-x} + C$
   (c) $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$
3. Calcular $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

   Temos $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$.

   Temos ainda $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, logo $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

   Logo, pela proposição 15.3,

   $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \sec^2 x - \int 1\,dx = \operatorname{tg} x - x + C$
4. Calcular $\int(5\cos x + \cos 5x)\,dx$.

$$\begin{aligned}\int(5\cos x + \cos 5x)\,dx &= 5\int \cos x\,dx + \int \cos 5x\,dx\\ &= 5\operatorname{sen} x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + C\end{aligned}$$

5. Calcular $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx$.

   Temos $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$, logo $\operatorname{sen} x\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Daí

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x) + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

6. Calcular $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}\,dx &= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \int x^{-1/2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln|x| + C = 2\sqrt{x} + \ln|x| + C\end{aligned}$$

## 15.5 Integração por mudança de variável ou integração por substituição

Suponhamos que

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{15.1}$$

Suponhamos que $x = \varphi(t)$ é uma função derivável de $t$, para $t$ em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Na aula 14 definimos a *diferencial de* $x$, como sendo

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \varphi'(t)\,dt$$

No contexto daquela aula, a diferencial $dx$ foi definida como uma boa aproximação de $\Delta x$, quando $dt = \Delta t$ é suficientemente pequeno.

Neste capítulo, a diferencial terá um sentido simbólico, sendo empregada quando realizamos troca de variáveis no cálculo de integrais.

Suponhamos definida no intervalo $I$ a função composta $f(\varphi(t))$.

Como veremos agora, podemos substituir $x = \varphi(t)$ na expressão 15.1, fazendo $dx = \varphi'(t)\,dt$, ou seja, de 15.1 obtemos

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C \tag{15.2}$$

De fato, aplicando derivação em cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[F(\varphi(t))] &= \frac{d}{dx}[F(x)] \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= F'(x) \cdot \varphi'(t) \\ &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\end{aligned}$$

logo, $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$.

Portanto

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \implies \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

pela mudança de variável $x = \varphi(t)$, tomando-se $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Na prática, quando identificamos que uma integral é da forma $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, podemos às vezes fazer uma substituição $x = \varphi(t)$, e levando em conta as considerações anteriores passamos por uma sequência de igualdades tal como a seguir,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C$$

Algumas vezes, no entanto, queremos calcular $\int f(x)\,dx$, e fazemos uma mudança de variável $x = \varphi(t)$ passando então por uma sequência de igualdades em ordem diferente tal como a seguir,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C$$

fazendo uso da integral "mais complicada" $\int f(\varphi(t)\varphi'(t)\,dt$ (da qual sabemos como calcular uma primitiva) para finalmente obter $\int f(x)\,dx$. Isto é o que ocorre em substituições trigonométricas, assunto que será estudado adiante.

Neste caso, estamos assumindo implicitamente que

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C \implies \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

o que é justificado desde que possamos também expressar também $t = \psi(x)$, como função inversa e derivável de $x = \varphi(t)$, para que possamos, ao final dos cálculos, obter a integral indefinida como função de $x$, a partir de sua expressão em função de $t$.

Mas a melhor maneira de nos familiarizarmos com técnicas de integração por substituição é através de exemplos. Vamos aos primeiros exemplos.

**Exemplo 15.1.** *Calcular* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}\,dx$.

*Solução.* Começamos fazendo a substituição $u = 3 - 2x$.

Então $du = u'(x) \cdot dx = (3 - 2x)'\,dx = -2dx$.

Portanto $dx = -\frac{1}{2}du$.

Assim, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= -u^{1/2} + C = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{3-2x} + C$$

**Exemplo 15.2.** *Calcular* $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

*Solução.* $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx.$

Como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, tomamos $u = \cos x$, e teremos

$du = (\cos x)' dx = -\operatorname{sen} x\, dx.$

Assim,

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{1}{\cos x} \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1}{u}(-du) = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

**Exemplo 15.3.** *Calcular* $\int \sec x\, dx$.

*Solução.* Calcularemos esta integral por uma substituição que requer um truque "esperto".

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x \cdot (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx$$

Aplicamos a mudança de variável

$$u = \sec x + \operatorname{tg} x$$

e teremos $du = (\sec x + \operatorname{tg} x)' dx = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x) dx$.

Logo, $\displaystyle\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$

**Exemplo 15.4.** *Calcular* $\int \operatorname{cosec} x\, dx$.

*Solução.* Imitando o truque usado no exemplo anterior, o leitor poderá mostrar que

$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| + C.$

**Exemplo 15.5.** *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$.

*Solução.* Note que $(x^2+5)' = 2x$. Isto sugere fazermos

$u = x^2 + 5$, do que segue $du = 2x\, dx$, ou seja, $x\, dx = \dfrac{1}{2} du$.

Temos então

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\int u^{-1/2} du = u^{1/2} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

## 15.6 Ampliando nossa tabela de integrais imediatas

Com a finalidade de dinamizar o cálculo de integrais indefinidas, ampliaremos a lista de integrais imediatas da seção 15.2, adotando como integrais "imediatas" as quatro seguintes, que deduziremos em seguida.

**Proposição 15.4.** *Sendo* $a > 0$, *e* $\lambda \neq 0$,

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + \lambda}| + C$

*Demonstração.* $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2} \, dx$

Fazendo $\frac{x}{a} = y$, temos $dx = a\,dy$, e então

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a}{1 + y^2} \, dy = \frac{1}{a} \int \frac{1}{y^2 + 1} \, dy \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} y + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C\end{aligned}$$

Para deduzir a segunda integral, lançamos mão da decomposição

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{\frac{1}{2a}}{a + x} + \frac{\frac{1}{2a}}{a - x}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2a} \int \frac{1}{a + x} \, dx + \frac{1}{2a} \int \frac{1}{a - x} \, dx \\ &= \frac{1}{2a} \ln |a + x| - \frac{1}{2a} \ln |a - x| + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \frac{|a + x|}{|a - x|} + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C\end{aligned}$$

Para deduzir a terceira integral, fazemos uso da integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C$$

e procedemos a uma mudança de variável, tal como no cálculo da primeira integral acima. O leitor poderá completar os detalhes.

Para deduzir a quarta integral, apelaremos para um recurso direto, uma derivação. Mostraremos que

$$(\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}}$$

De fato, sendo $u = x + \sqrt{x^2+\lambda}$, e sendo $(\sqrt{w})' = \frac{1}{2\sqrt{w}} \cdot w'$, temos

$$\begin{aligned}(\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|)' = (\ln|u|)' &= \frac{1}{u}\cdot u' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}}\cdot(x+\sqrt{x^2+\lambda})' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}}\cdot\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+\lambda}}\cdot\cancel{2}x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+\lambda}+x}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}} \qquad \square\end{aligned}$$

### 15.6.1 Nossa tabela de integrais imediatas

Adotaremos como integrais imediatas as integrais da tabela 15.1 da página 164. Esta tabela inclui as integrais imediatas da proposição 15.2, e também as integrais calculadas nos exemplos 15.2, 15.3 e 15.4, e as integrais da proposição 15.4.

## 15.7 Problemas

Calcule as seguintes integrais indefinidas, utilizando, quando necessário, mudança de variáveis. Sempre que julgar conveniente, faça uso da tabela 15.1 de integrais indefinidas da página 164.

1. $\int (x+\sqrt{x})\,dx$. *Resposta.* $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.
2. $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4}\right) dx$. *Resposta.* $\left(6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x}\right) + C$.
3. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x}}$. *Resposta.* $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$.
4. $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. *Resposta.* $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.
5. $\int \operatorname{sen} ax\,dx$. *Resposta.* $-\frac{\cos ax}{a} + C$.

Tabela 15.1. Tabela ampliada de integrais imediatas (nas últimas linhas, $a > 0$ e $\lambda \neq 0$).

| | |
|---|---|
| $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$ | $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + C$ |
| $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$ | $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ |
| $\int e^x\,dx = e^x + C$ | $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}\ (a > 0, a \neq 1)$ |
| $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$ | $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$ |
| $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x\,dx = \sec x + C$ | $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cosec} x + C$ |
| $\int \sec x\,dx = \ln\|\sec x + \operatorname{tg} x\| + C$ | $\int \operatorname{cosec} x\,dx = -\ln\|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x\| + C$ |
| $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\|\cos x\| + C$ | $\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln\|\operatorname{sen} x\| + C$ |
| $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C$ | $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen} x + C$ |
| $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$ | $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\|\dfrac{a+x}{a-x}\right\| + C.$ |
| $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a} + C$ | $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln\|x + \sqrt{x^2+\lambda}\| + C$ |

6. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}dx$. *Resposta.* $\frac{\ln^2 x}{2} + C$.

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 3x}dx$. *Resposta.* $-\frac{\operatorname{cotg} 3x}{3} + C$.

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x-7}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C$.

9. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$.

10. $\int \operatorname{cotg}(5x-7)dx$. *Resposta.* $\frac{1}{5}\ln|\operatorname{sen}(5x-7)| + C$.

11. $\displaystyle\int \operatorname{cotg}\frac{x}{3}\,dx$. *Resposta.* $3\ln|\operatorname{sen}\frac{x}{3}| + C$.

12. $\int \operatorname{tg}\varphi \sec^2\varphi\,d\varphi$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + C$. *Sugestão.* Faça $u = \operatorname{tg}\varphi$.

13. $\int e^x \operatorname{cotg} e^x\,dx$. *Resposta.* $\ln|\operatorname{sen} e^x| + C$. *Sugestão.* Faça $u = e^x$.

14. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$. *Sugestão.* Faça $u = \operatorname{sen} x$.

15. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$. *Resposta.* $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

16. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$. *Sugestão.* Faça $u = 2x^2 + 3$.

17. $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+1}}$. *Resposta.* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$.

18. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^3 x}$. *Resposta.* $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$.

19. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$. *Resposta.* $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} + C$.

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$. *Resposta.* $2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$.

21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resposta.* $2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} + C$. *Sugestão.* Faça $u = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.

22. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{arcsen}^2 x}{2} + C$.

23. $\displaystyle\int \frac{\arccos^2 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resposta.* $-\frac{\arccos^3 x}{3} + C$.

24. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

25. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + C$.

26. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\operatorname{sen} x + 3} dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\ln(2\operatorname{sen} x + 3) + C$.

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$. *Resposta.* $\ln|\ln x| + C$. *Sugestão.* Faça $u = \ln x$.

28. $\int 2x(x^2+1)^4\, dx$. *Resposta.* $\frac{(x^2+1)^5}{5} + C$.

29. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$.

    *Sugestão.* Primeiro mostre que $\operatorname{tg}^4 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x + 1$.

30. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x + 1)}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x + 1| + C$.

31. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$.

32. $\int e^{2x} dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}e^{2x} + C$.

33. $\int x a^{x^2} dx$. *Resposta.* $\frac{a^{x^2}}{2\ln a} + C$.

34. $\displaystyle\int \frac{e^x}{3+4e^x}\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$.

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2x^2}$. *Resposta.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)+C$.

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Resposta.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsen}(\sqrt{3}x)+C$.

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\frac{3x}{4}+C$.

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+4}$. *Resposta.* $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}+C$.

39. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2}$. *Resposta.* $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$.

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. *Resposta.* $\ln(x+\sqrt{x^2+9})+C$.

41. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{5-x^6}$. *Resposta.* $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$. *Sugestão.* $x^6=(x^3)^2$, e então $u=x^3$.

42. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x^2+C$. *Sugestão.* Faça $u=x^2$.

43. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$. *Resposta.* $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a^2}+C$.

44. $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$. *Resposta.* $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{a}\right)+C$.

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. *Resposta.* $\operatorname{arcsen}(\ln x)+C$.

46. $\displaystyle\int \frac{\arccos x\,-\,x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C$.

47. $\displaystyle\int \frac{x-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C$.

48. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$. *Resposta.* $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$.

49. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x}+C$.
*Sugestão.* Faça $\int\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx=\int\frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx=\int\frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$, e então $u=\operatorname{sen}x$.

50. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+5}\,dx$. *Resposta.* $x-\ln|2x+5|+C$.