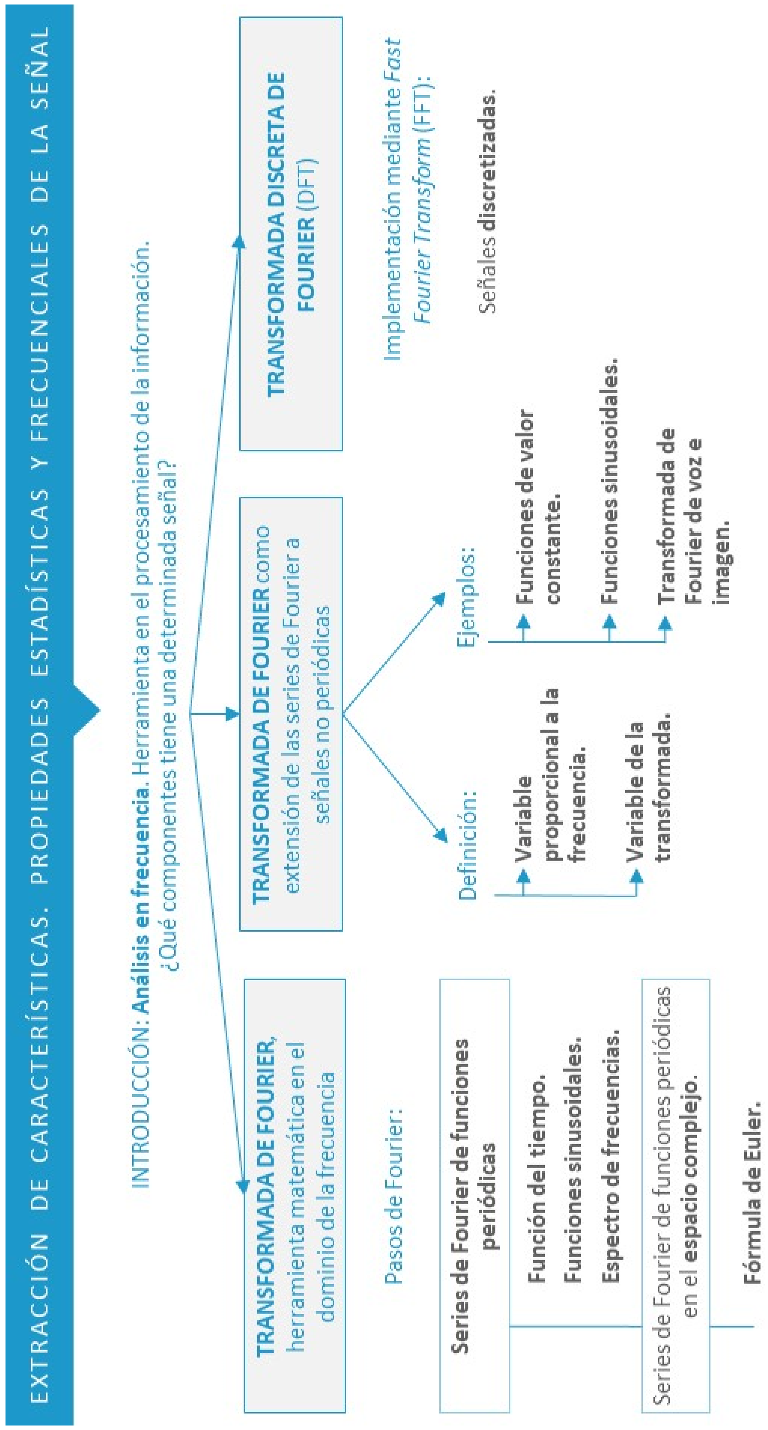
Visión Artificial

Tema 8. Procesamiento de señales. Filtrado y análisis en frecuencia

Índice

Esquema


EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS. PROPIEDADES ESTADÍSTICAS Y FRECUENCIALES DE LA SEÑAL
INTRODUCCIÓN: Análisis en frecuencia. Herramienta en el procesamiento de la información. ¿Qué componentes tiene una determinada señal?
TRANSFORMADA DE FOURIER, herramienta matemática en el dominio de la frecuencia
Pasos de Fourier:
Series de Fourier de funciones periódicas
Función del tiempo.
Funciones sinusoidales.
Espectro de frecuencias.
Series de Fourier de funciones periódicas en el espacio complejo.
Fórmula de Euler.
TRANSFORMADA DE FOURIER como extensión de las series de Fourier a señales no periódicas
Definición:
Variable proporcional a la frecuencia.
Variable de la transformada.
Ejemplos:
Funciones de valor constante.
Funciones sinusoidales.
Transformada de Fourier de voz e imagen.
TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)
Implementación mediante Fast Fourier Transform (FFT):
Señales discretizadas.

8.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema deberás leer con atención las ideas clave que se desarrollan a continuación.

8.2. Objetivos

Esta asignatura persigue presentar el concepto de análisis en frecuencia desde su origen (series de Fourier) hasta su implementación actual (FFT, *Fast Fourier Transform).* Para ello, se revisan los conceptos de análisis en frecuencia y transformada de Fourier, así como las ventajas y desventajas del uso de estas herramientas en el procesamiento computacional.

Se sentarán las bases del análisis en frecuencia, lo que te permitirá abordar otros algoritmos y herramientas como transformada del coseno (DCT), Wavelets o filtrados en frecuencia para imágenes.

Si el cable de red que va al router lo conectásemos a un osciloscopio o a cualquier otro dispositivo que nos permitiera medir voltajes e intensidades, veríamos algo parecido a esta imagen.

8.3. Introducción al análisis en frecuencia

El análisis en frecuencia es una de las herramientas más potentes e innovadoras que existen en el procesamiento de la información. En este apartado se va a describir, con un ejemplo muy cotidiano: la señal de fibra óptica y teléfono que llega a nuestros hogares, en qué consiste el análisis en frecuencia y por qué es tan importante.

Si el cable de red que va al router lo conectásemos a un osciloscopio o a cualquier otro dispositivo que nos permitiera medir voltajes e intensidades, veríamos algo parecido a esta imagen.

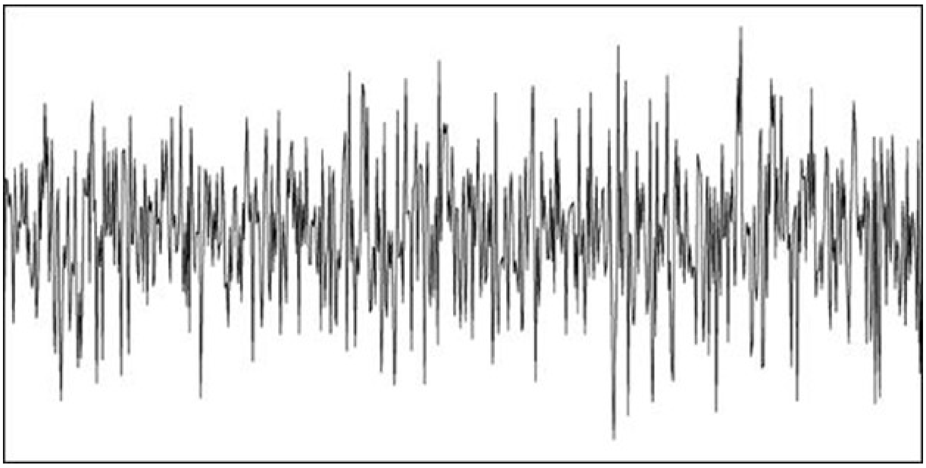


Figura 1. Ejemplo de señal compleja aperiódica.

Es el claro ejemplo de una señal compleja aperiódica o señal aleatoria, en algunos contextos se llama también caótica. En esta señal unidimensional podemos ver variaciones de intensidad y de voltaje correspondientes a la superposición de nuestra voz (llamadas telefónicas), Internet (datos que estamos recibiendo) y en algunos casos, incluso canales de televisión.

Todo ello sucede simultáneamente. Sin embargo, al esquematizar qué es lo que está pasando, nos encontramos con el siguiente ejemplo:

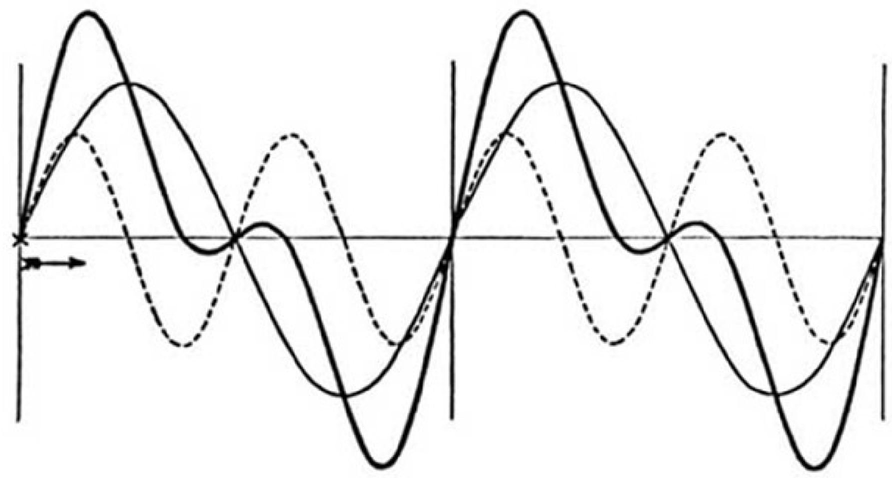


Figura 2. Ejemplo de señales superpuestas en el tiempo.

En este ejemplo, encontramos que existen tres tipos de señales que se superponen. De estas señales, podemos distinguir:

- La línea continua fina, correspondiente a un tipo de señal.
- La línea discontinua, correspondiente a un tipo de señal.
- La línea continua gruesa, suma de ambas señales.

Si nos centramos únicamente en la línea continua gruesa, no podemos saber a priori si es el resultado de la suma de dos señales, de un número determinado de señales o si es una única señal. De hecho, si se realizara un análisis de estas señales en el tiempo, podríamos obtener características como la media, el valor máximo, el valor mínimo, etc. Pero en cualquier caso, no podríamos saber el origen.

El **análisis en frecuencia** es la herramienta encargada de, dada la señal continua gruesa, analizar si esta proviene de la suma de dos o más señales y cómo de intensas (potencia) son dichas señales.

Volviendo al ejemplo de la fibra óptica y la voz en nuestras casas, el gráfico anterior sería una simplificación de la realidad. El análisis en frecuencia, en definitiva, es lo que permitiría separar la fibra de la voz y de la televisión. Permitiría realizar un filtrado, que a nuestros ojos, parece inviable.

¿Y qué hace exactamente el análisis en frecuencia? Principalmente, lo que hace es barrer el espectro de frecuencias y detectar, mediante un producto escalar, cuánta señal está sucediendo a esa determinada frecuencia. Posteriormente lo veremos más en detalle.

Tomemos el siguiente gráfico. Si miramos el dominio del tiempo, vemos dos señales superpuestas. Si analizamos las frecuencias, vemos que ambas señales tienen comportamientos en frecuencias diferentes, lo que nos permitiría separar las señales en frecuencia, aunque estén completamente solapadas en el tiempo.

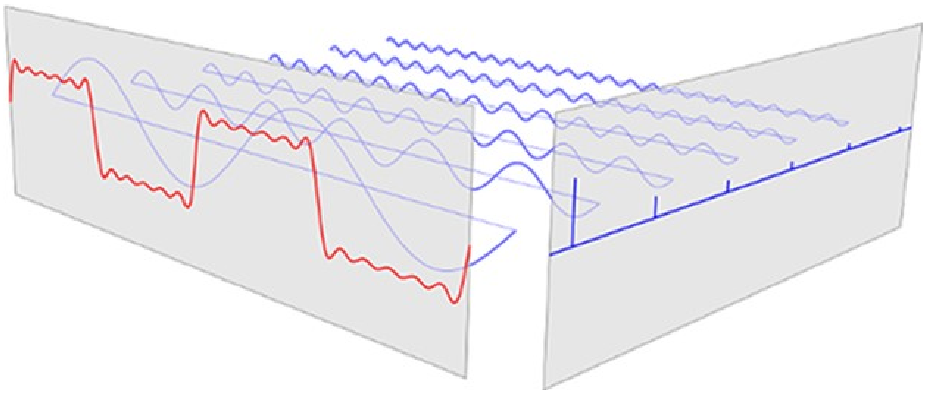


Figura 3. Ejemplo de cómo mediante el uso del dominio de la frecuencia podemos separar dos señales que en el tiempo son coincidentes. Fuente: https://tex.stackexchange.com/questions/127375/replicate-the-fourier-transform-time-frequency-domains-correspondence-illustrati

Un ejemplo más técnico es el de la siguiente figura. Podemos ver una señal en el tiempo claramente caótica. Es casi imposible entender qué está sucediendo en esa señal o a qué hace referencia. No obstante, el análisis en frecuencia ya nos indica que existen diferentes componentes, con lo cual, si se quisiera escuchar cada uno de forma clara, habría que realizar filtrados de frecuencia y no filtrados temporales.

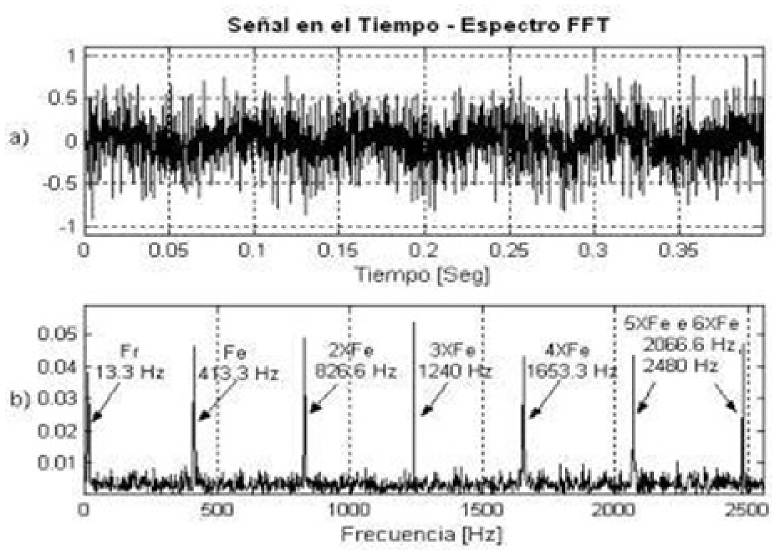


Figura 4. Comparación de representaciones Tiempo-Frecuencia. Fuente: https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07642004000500003

La herramienta principal de análisis en el dominio de la frecuencia es la **transformada de Fourier,** que permite:

- Entender qué componentes de frecuencia posee una determinada señal temporal y cuál es la intensidad de dichas componentes.
- Separar comportamientos temporales de comportamientos de frecuencia.
- Realizar filtrados en frecuencia y separar un determinado número de señales de forma sencilla y con razonamiento matemático, cuya labor en el análisis temporal habría sido imposible.

Por último, el uso de la transformada de Fourier está muy presente en nuestros días, tan presente que sin esta herramienta matemática hoy no podríamos hablar por el móvil, comunicarnos con los satélites, enviar sondas a Marte, navegar por Internet o incluso detectar si, cuando introducimos una moneda en una máquina de parking, es de 1 € o de 2 €.

La transformada de Fourier, junto con otras fórmulas matemáticas, está considerada por la comunidad científica como uno de los avances más considerables de la humanidad.

8.4. La transformada de Fourier

Antes de comenzar a definirla, es importante entender qué camino siguió Fourier para llegar a formularla.

- Entender el origen de la transformada de Fourier: series de Fourier de funciones periódicas.
- Cómo se extienden dichas funciones al campo complejo.
- Definición de la transformada de Fourier como una extensión de las series de Fourier a señales no periódicas.

Figura 5. Pasos seguidos por Fourier.

Series de Fourier de funciones periódicas

En primer lugar, Fourier entendía que **cualquier función del tiempo** $f(t)$:

- Real.
- Periódica de período T, si para todo t se cumple que $f(t) = f(t+T)$
- Frecuencia continua:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Puede ser expresada mediante una serie infinita de funciones sinusoidales (senos y cosenos) de frecuencias

ω_n , múltiplos de

ω_1 , es decir:

$$\omega_n = n \cdot \omega_1$$

Donde

$n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Por lo que en forma de ecuación tenemos que:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \cdot \omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sen(n \cdot \omega_1 t)$$

En resumen, la restricción inicial de que

$f(t)$ fuera una función periódica puede parecer realmente muy limitativa, pero lo cierto es que muchos fenómenos físicos poseen comportamientos periódicos, luego entender funciones periódicas complejas en términos de senos y cosenos era algo ciertamente avanzado, ya que las **funciones sinusoidales** tienen propiedades matemáticas muy positivas: continuidad, derivabilidad, perpendicularidad/ortogonalidad desde el punto de vista del producto escalar, etc.

Únicamente queda calcular los términos

A_0 ,

A_n con

$n = 1, 2, \ldots, \infty$ y

B_n con

$n = 1, 2, \ldots, \infty$. Dichos términos tienen las siguientes relaciones (que no vamos a demostrar en este apartado):

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \, dt = A_0$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n{\cdot}\omega_1 t)\,dt$$

La interpretación de estos tres términos es sencilla y, si has estudiado matemáticas, será más sencilla aún de entender:

- Fourier imaginó que toda función periódica se podría expresar como una combinación lineal (sumas, restas y coeficientes) de funciones sinusoidales.
- Dichas funciones sinusoidales son ortogonales entre sí, lo que quiere decir que las funciones están definidas de tal manera que no pueden expresarse como combinación lineales entre sí.
- Los coeficientes
  A_0 ,
  A_n y
  B_n son el producto escalar de la función
  $f(t)$ y la función sinusoidal correspondiente, en otras palabras, puede entenderse como la proyección de
  $f(t)$ sobre las funciones sinusoidales.
- En otras palabras, cuanto más se parezca
  $f(t)$ a una sinusoidal, mayor serán los coeficientes *A* y *B*.

Este último punto es de vital importancia. El producto escalar nos da una medida de cómo de parecidas son dos funciones, entre otras muchas propiedades. Con lo cual, aquellas componentes

A_0 ,

A_n y

B_n que sean más altos indicarán un mayor parecido con una sinusoidal.

Esto ya empieza a estar relacionado con lo que hemos hablado en la introducción, es decir, el poder encontrar una herramienta que nos diga qué componentes de frecuencia tiene una determinada señal, en este caso llamada
$f(t)$

Por último, y antes de continuar, únicamente decir que el gráfico de
A_n y
B_n en función de
n o de
ω_n se conoce como el **espectro de frecuencias** de la función periódica
$f(t)$.

Series de Fourier de funciones periódicas en el espacio complejo

Cuando hacemos referencia al espacio complejo, Fourier quiere incluir funciones
$f(t)$ que tengan valores en el campo complejo, es decir, con el término
$j = \sqrt{-1}$.

Evidentemente, no existe ninguna función que pueda medirse que dé un valor complejo, pero muchos fenómenos físicos se modelan con estos, principalmente los campos electromagnéticos, por lo que si se quiere extender las series de Fourier a esos fenómenos físicos, es necesario llevar las series de Fourier a este espacio.

Para entender dicha extensión, el alumno debe de estar familiarizado con la **fórmula de Euler:**

$$e^{j\theta} = \cos\theta + jsen\theta$$

Para ello escribimos la serie de la siguiente manera:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \cdot \omega_1 t + \phi_n)$$

Donde se cumplen las relaciones:

- $A_n = C_n \cos\varphi$
- $B_n = C_n \, sen\,\varphi$

Finalmente,

$f(t)$ puede expresarse como suma de exponenciales complejas al obtener

G_n a partir de

$f(t)$ usando la integral:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_n e^{jn \cdot \omega_1 t}$$

$$G_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-jn\cdot\omega_1 t}\, dt$$

En este tema no se va a justificar matemáticamente los pasos que conducen a esta demostración puesto que está fuera del enfoque de la asignatura. No obstante, recomendamos que intentes resolver esta demostración.

La interpretación de

$f(t)$ en función de las exponenciales complejas es de nuevo similar a las series de Fourier que vimos inicialmente: es la proyección de

$f(t)$ sobre dichas exponenciales complejas.

Definición de la transformada de Fourier

Llegados a este punto, podemos preguntarnos para qué sirve la transformada de Fourier si ya tenemos los coeficientes

A_n y

B_n , que ya nos indican las componentes espectrales de

$f(t)$. Muy sencillo.

La transformada de Fourier sirve para extender la serie de Fourier a funciones no periódicas (periódicas con período infinito).

En realidad es un proceso límite si juzgamos que la función no periódica la aproximamos a una que se repite a una distancia (tiempo) muy lejana de nosotros.

En definitiva, las expresiones son las siguientes:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, dt$$

Donde:

- $F(\omega)$ representa la transformada de Fourier.
- $f(t)$ se representa como la inversa de la transformada de Fourier.

La reflexión que aplica ahora es: ¿por qué
$F(\omega)$ es función de
ω ? ¿Qué es
ω ? Desde ahora en adelante (y en toda la literatura que existe sobre este tema), se utiliza
ω como **variable proporcional a la frecuencia:**

$$\omega = 2\pi f$$

Donde
f es la frecuencia.

El uso de
ω queda justificado debido a la nomenclatura y no confundir la F de Fourier con la *f* de frecuencia. En otras palabras,
ω es la variable de la transformada, que ya no tiene información sobre el tiempo
(t) . Nótese que la única variable *t* es la variable de integración que desaparece cuando la integral se resuelve.

Y además, de todo esto se deduce que no se pierde ningún tipo de información cuando se hace la transformada.

Una de las preguntas más comunes cuando se estudia la transformada de Fourier es si existe algún dispositivo que permita verla. La respuesta rápida es no. Debes recordar que la transformada de Fourier,
$F(\omega)$, está en el espacio complejo y es solo una entelequia matemática. Lo único que puede hacerse es una aproximación del módulo de la transformada,
$|F(\omega)|$, mediante computación (se verán algunos ejemplos).

De hecho, gracias a la computación podemos obtener representaciones de la transformada de Fourier muy interesantes, como esta que vemos a continuación. En ella puede apreciarse cómo las **componentes temporales se transforman en componentes frecuenciales.**

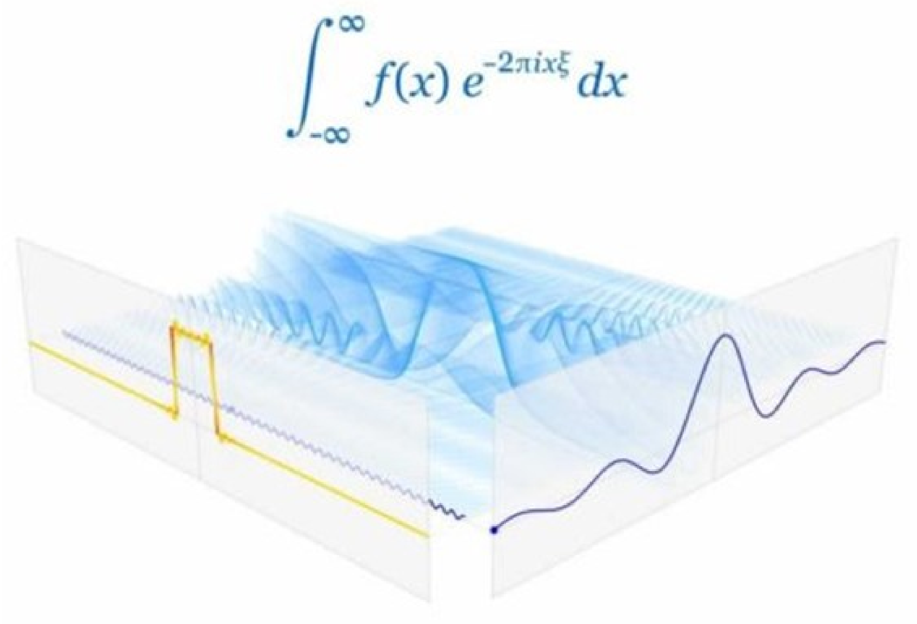
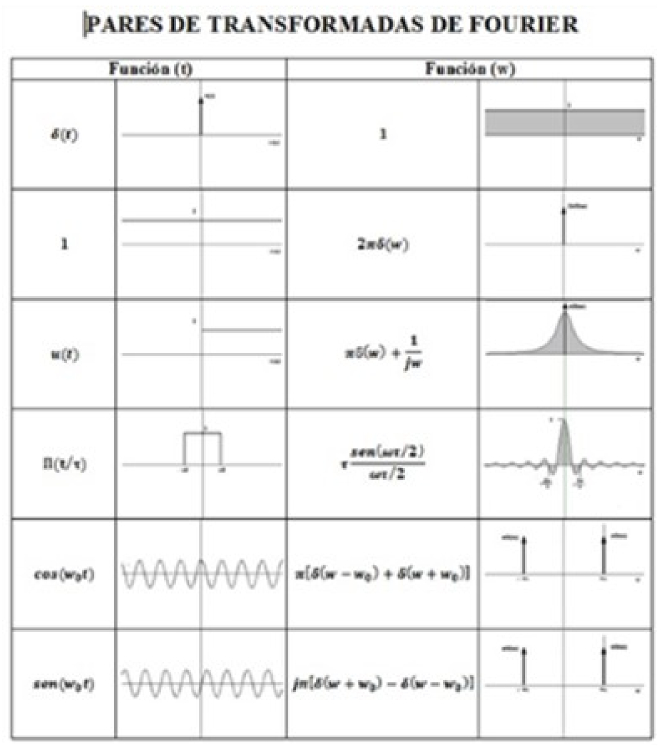


Figura 6. Vista simultánea de la función pulso (en amarillo) y su transformada de Fourier (azul). Fuente: http://puyaa.ir/fourier-analysis-nutshell/

Ejemplos de transformada de Fourier

A continuación exponemos algunos ejemplos de transformada de Fourier:



PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

Función (t)		Función (w)	
$\delta(t)$		1	
1		$2\pi\delta(w)$	
$u(t)$		$\pi\delta(w) + \frac{1}{jw}$	
$\Pi(t/\tau)$		$\tau \frac{sen(w\tau/2)}{w\tau/2}$	
$cos(w_0 t)$		$\pi[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$	
$sen(w_0 t)$		$j\pi[\delta(w + w_0) - \delta(w - w_0)]$	

Figura 7. Tabla con los pares de transformadas más comunes. Fuente:
http://chismesycircuitos.blogspot.com.es/2011/09/tabla-transformadas-de-fourier-ut-1-del.html

De esta tabla, solo vamos a reflexionar sobre dos funciones: la función constante y las señales sinusoidales.

Funciones de valor constante. Desde el punto de vista de percepción computacional, un valor constante puede ser ruido o la componente continua de una señal unidimensional. Con respecto a estas funciones de valor constante, se aprecia como la energía se concentra en el dominio de la frecuencia entorno a la frecuencia cero.

- Hasta cierto punto parece lógico, ya que una señal continua no posee frecuencia alguna.
- Esto quiere decir que, en el dominio de la frecuencia, las componentes constantes en el tiempo están muy cercanas a cero y, por lo tanto, serán fácilmente eliminables por filtros.

Funciones sinusoidales. Tonos puros de sonido, como puede ser el tono producido por una nota en un instrumento musical. En estas se observa que se transforman en otras dos funciones denominadas **delta de Dirac,** las cuales indican que la función solo está en un determinado punto.

- Lógico si pensamos que la transformada de Fourier mide las componentes frecuenciales de una señal y, si esta es un tono puro, solo podrá tener un determinado valor en frecuencia.
- En la tabla se aprecian dos deltas a ambos lados de los ejes horizontales. Por ahora, no debes plantearte a qué se debe este fenómeno, pero es el reflejo de que se está trabajando en el dominio complejo de la frecuencia y, aunque físicamente no existen frecuencias negativas, matemáticamente sí son posibles.

Veamos ahora dos ejemplos con datos reales, uno para voz y otro para imagen.

La transformada de Fourier de voz suele ocupar unos 4 KHz (ancho de banda de la voz). Es decir, cuando se hace la transformada de Fourier de cualquier fichero de sonido donde hable una persona, nunca (o muy difícilmente) se superarán los 4 KHz.

Esto puede verse en el siguiente ejemplo donde en rojo vemos la señal de voz (un segundo de duración) y en azul, la transformada de Fourier calculada con uno de los algoritmos más importantes *(Fast Fourier Transform,* FFT). La transformada de Fourier puede variar si, en vez de tomar un segundo de duración de voz, usamos una hora, pero en ningún caso variará significativamente y casi nunca superará esos 4 KHz de ancho de banda.

De hecho (se verá mejor en la parte de filtrado basado en Fourier), si quisiésemos eliminar ruidos que no fueran voz, tendríamos que eliminar las componentes superiores a 4 KHz y oiríamos la voz nítidamente. Esto es lo que hacen nuestros dispositivos móviles cuando hablamos: filtran todas las componentes por encima de un valor y solo transmiten frecuencias menores que 4KHz.

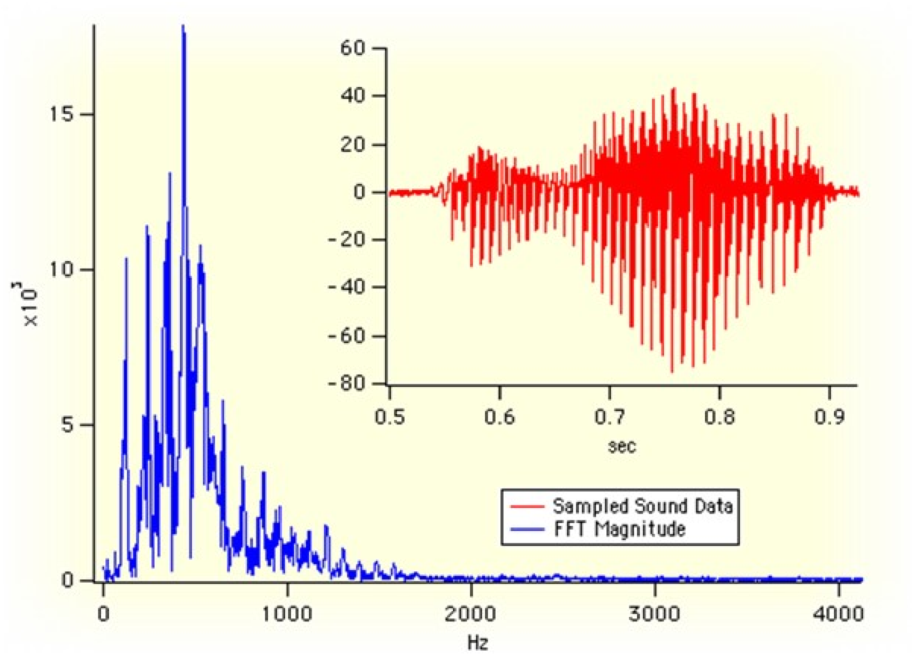


Figura 8. Ejemplo de transformación de Fourier. Fuente: http://www.wavemetrics.com/index.html

La transformada de Fourier de imagen. Con respecto a las imágenes, la transformación es más difícil de interpretar, pero aún sigue siendo válida.

Primero, se presentan ejemplos con frecuencias puras para que se aprecie cómo se aplicaría Fourier:

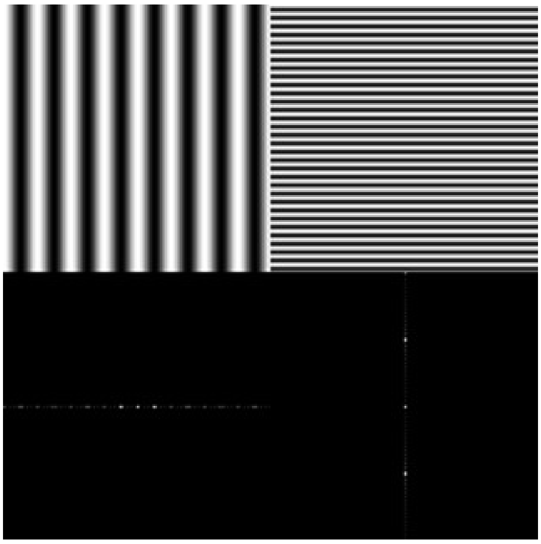


Figura 9. Transformada de Fourier de patrones de imágenes puros (rayas verticales y horizontales).

Fuente: https://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

En sí misma, la transformada de Fourier puede ofrecer también la posibilidad de proporcionar características que identifiquen de forma unívoca qué está visualizándose en la imagen. Un ejemplo claro es el de los caracteres escritos a mano. En la siguiente figura, las componentes en frecuencia varían en función de los trazos. Las más circulares, como la «B» y la «Q», ofrecen componentes en frecuencia completamente diferentes de otras letras como la «T» o la «K».

Figura 10. Transformada de Fourier de caracteres escritos a mano. Fuente:

https://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

Como hemos explicado, se aprecia cómo las componentes en frecuencia son diferentes y permitirían una extracción de características diferente para poder distinguir las letras.

Por último, un uso de la transformada de Fourier es eliminar o detectar el ruido que existe en la imagen. La transformada de Fourier se ve afectada al desenfocarse la imagen: las componentes espectrales varían, ya que se pierde nitidez, y el ruido aparece muy marcado en una de las componentes verticales, donde aparece una raya más blanca que pasa por el origen.

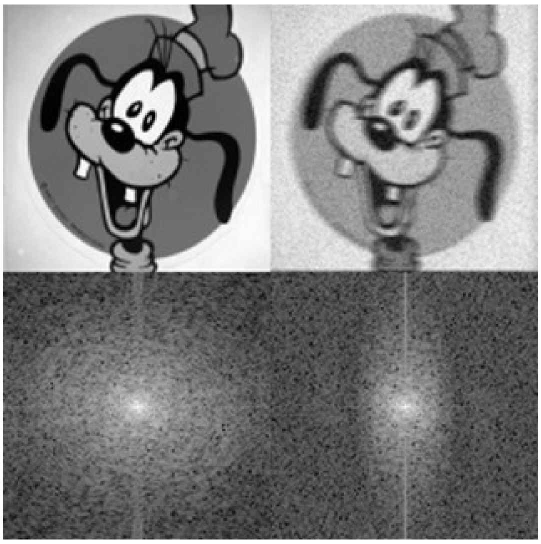


Figura 11. Efecto en la transformada de Fourier de desenfocar la imagen y aplicar ruido en ella. Fuente: https://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

8.5. Transformada discreta de Fourier (DFT) y su implementación mediante Fast Fourier Transform (FFT)

Tal como hemos visto antes, la transformada de Fourier de $f(t)$ está pensada para señales continuas, es decir, para las que no han sido discretizadas o no han sufrido un proceso de conversión analógico-discreto.

Sin embargo, si se quiere aplicar la transformada de Fourier a señales discretizadas (digitales), hay que realizar algunas modificaciones en la definición y es por eso que haremos especial hincapié.

Además, la transformada discreta de Fourier (DFT, *Discrete Fourier Transform*) ha recibido gran atención por parte de matemáticos e ingenieros para realizar su implementación; la FFT *(Fast Fourier Transform)* es la mejor aproximación que existe actualmente, desde luego la más eficiente y que mejores resultados tiene. Cabe decir que la mayoría de lenguajes de programación poseen una implementación de la FFT.

En este apartado no vamos a abordar una comprensión matemática de la DFT, ya que conlleva un conocimiento de complejos y teoría matemática más avanzada que con la transformada continua de Fourier.

En este caso, para que tengas una visión global de la DFT únicamente diremos que:

- Ya no se habla de $f(t)$, sino de **secuencias.**
- Se representa mediante las variables x, y o z.

- Las variables
  n o
  m (si se quiere hacer distinción entre ambas) entre **corchetes,** no paréntesis.

- Por lo que dada una secuencia discreta
  $x[n]$ de longitud N, su **transformada discreta de Fourier** viene dada por la siguiente expresión:

$$X_K = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-2\pi jk\frac{n}{N}}$$

Intuitivamente, se parece a la transformada de Fourier, pero posee algunas distinciones:

- El sumatorio está acotado entre 0 y N-1.

- La secuencia
  $x[n]$ puede no ser periódica, pero será de longitud N.

- No existe el concepto de frecuencia, sino que existe la variable *k.* Dicha variable provoca que la DFT sea también discreta y tenga los mismos puntos que la secuencia original N.

Aquí vemos dos ejemplos que facilitan la comprensión de la teoría. En primer lugar, se ve una esquematización de la DFT y su inversa. Hay que tener en cuenta que, en algunos libros, el factor
$\frac{1}{N}$ se incluye en la propia DFT. Nosotros preferimos dejar ese factor para la **transformada inversa,** de ahí que no haya salido en la formulación anterior de la

DFT.

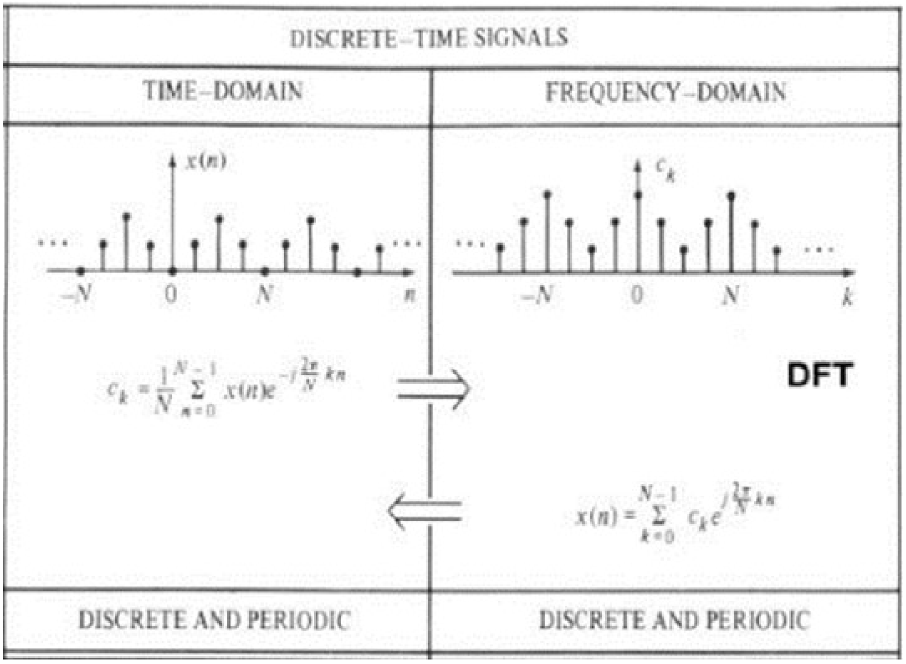


Figura 12. Comparación de la transformada discreta de Fourier entre la secuencia original y su propia transformada. En este caso se trata de una señal periódica. Fuente: http://kcchao.wikidot.com/dft

En segundo lugar, un ejemplo de resolución de la DFT. Es evidente que el número de muestras de una secuencia, así como el número de muestras elegido para dar resolución a la DFT, afecta a la calidad de la transformada. En este caso, vemos un ejemplo con la función

$\cos\frac{\pi n}{2}$, representando el módulo de la DFT. Se puede apreciar cómo la variación de los números de puntos empleados influye en la resolución de la transformada. De hecho, existe un número óptimo para evitar que aparezca ruido en la transformada.

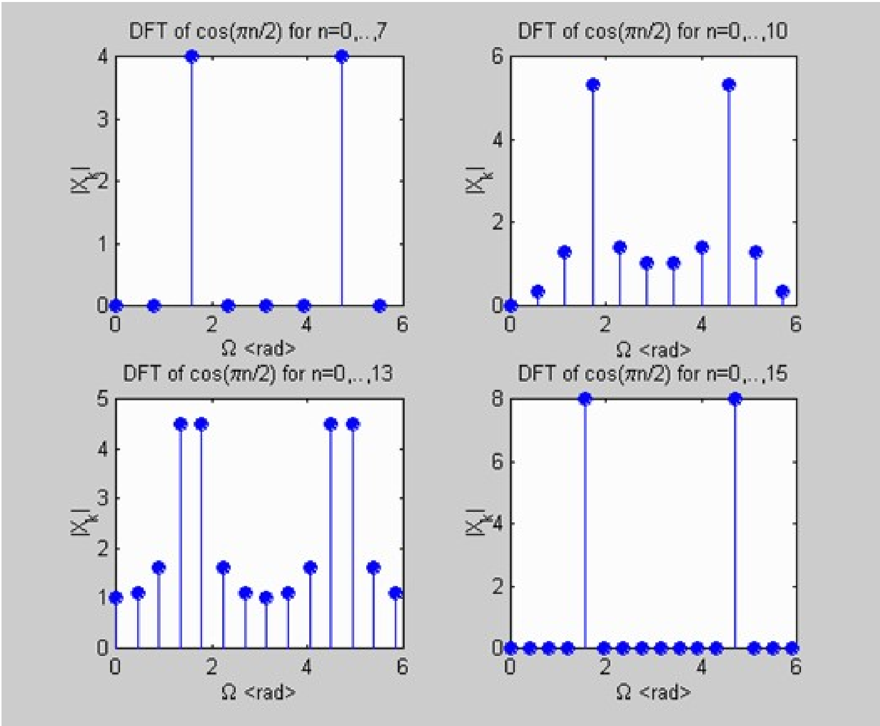


Figura 13. Comparación de la transformada discreta de Fourier entre la secuencia original y su propia transformada. En este caso se trata de una señal periódica. Fuente: http://www.ee.nmt.edu/~wedeward/EE342/SP99/example16.html

Finalmente, no queríamos dejar de hablar sobre el esquema general de la transformada FFT. No deja de ser una aproximación que impone ciertas limitaciones, entre ellas que las duraciones de las secuencias deben de ser múltiplos de 2 para facilitar el cálculo. Sin embargo, la **FFT reduce la complejidad** de $O\left(n^2\right)$ a $O\left(n \log n\right)$, lo cual es un avance notable.

No existe una implementación única de la FFT. La original, creada por Cooley y Tukey de IBM en 1960 y revisada por C. S. Burrus de la Universidad Rice University, permitió procesar voz en tarjetas inteligentes para dispositivos con capacidades muy limitadas, pero actualmente existe una gran cantidad de implementaciones, todas ellas en función del problema que se pretenda resolver: más rapidez, más precisión, menos consumo, etc.

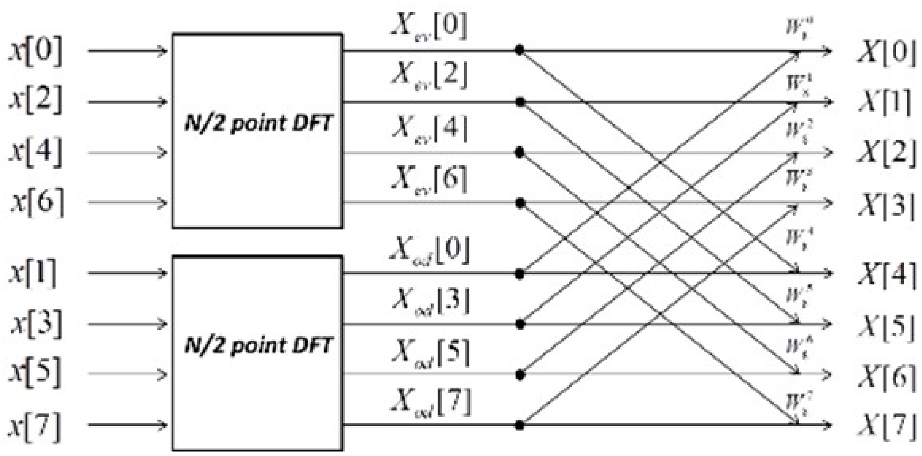
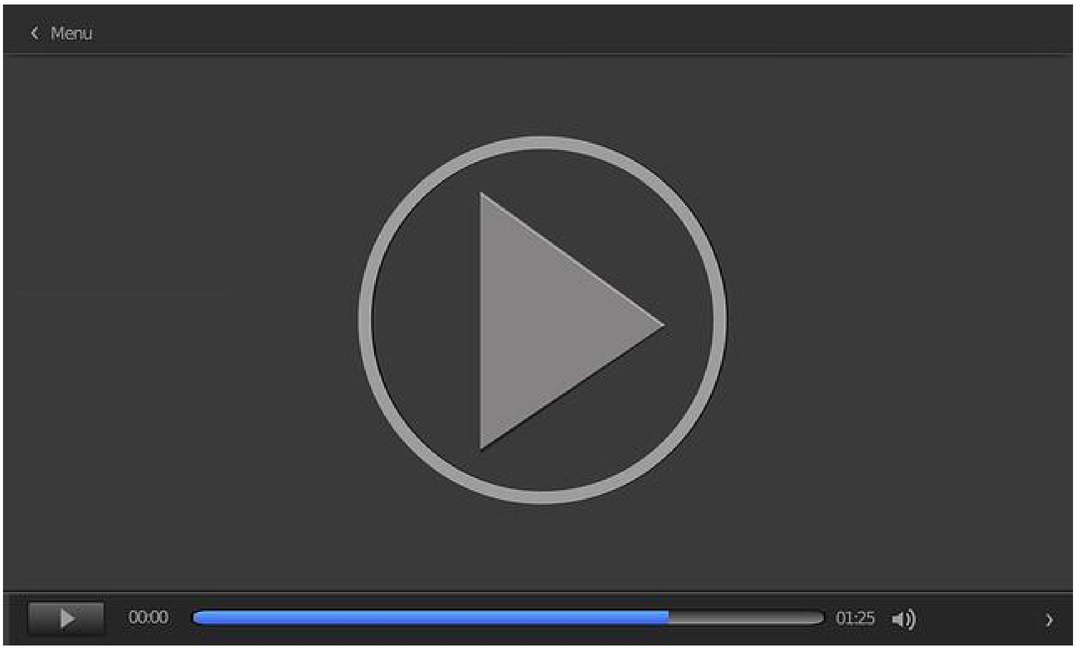


Figura 14. Funcionamiento de la FFT y ahorro de costes al calcular de forma paralela diferentes coeficientes, siempre y cuando las señales tengan una duración potencia de 2. Fuente: http://www.vocal.com/noise-reduction/fft-algorithms/

Transformada de Fourirer

Physics Videos by Eugene Khutoryansky. (2015, septiembre 6). *Transformada de Fourier, series de Fourier y el espectro de frecuencia* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM

Animación muy visual de la transformada de Fourier.



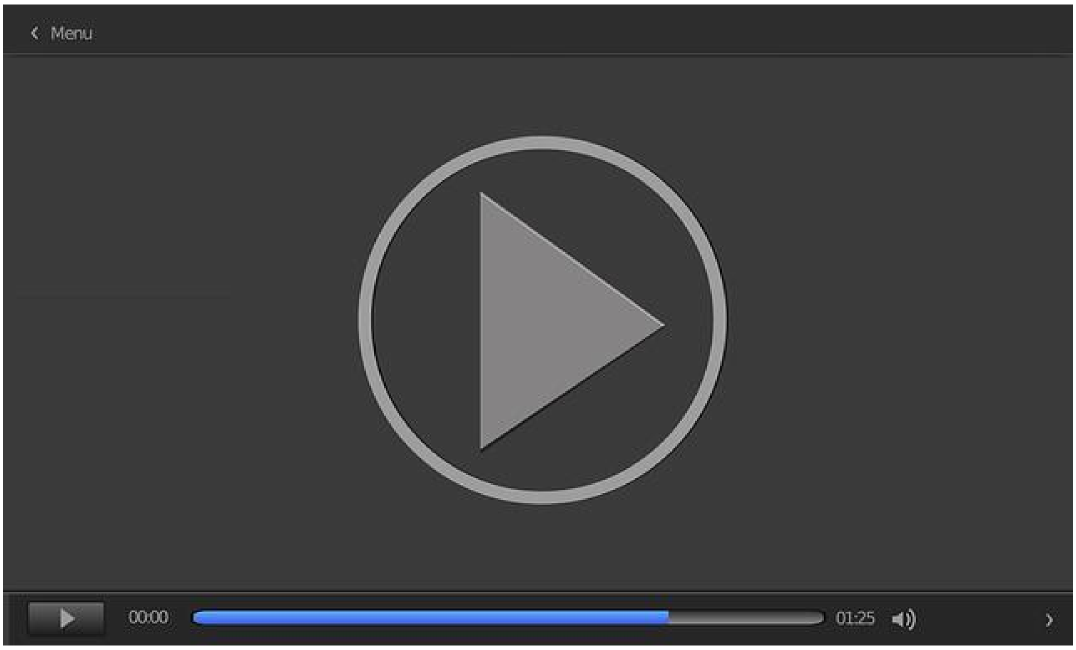
Accede al vídeo:

https://www.youtube.com/embed/r18Gi8lSkfM

El algoritmo de FFT

Simon Xu. (2015, agosto 10). *The FFT Algorithm - Simple Step by Step* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=htCj9exbGo0

Explicación sencilla de la FFT y de cómo se puede paralelizar su ejecución.



Accede al vídeo:

https://www.youtube.com/embed/htCj9exbGo0

1. Las series de Fourier permiten:

A. Expresar una función *f(t)* como suma infinita de funciones ortogonales entre sí.

B. Reducir la complejidad de una función *f(t)* en funciones más sencillas de entender, continuas y derivables.

C. Dar una primera idea de las componentes espectrales (en frecuencia) de una función *f(t).*

D. Todas las anteriores.

2. Las series de Fourier pueden hacer uso de cualquier función que no sea sinusoidal:

A. Verdadero.

B. Falso.

3. La transformada de Fourier:

A. Permite entender qué componentes en frecuencia describen una función f(t).

B. Puede calcularse directamente con un ordenador de forma precisa.

C. Puede visualizarse con productos y dispositivos comerciales.

4. Si se graba una conversación en la que dos personas hablan a la vez, ¿se puede usar la transformada de Fourier para separar las voces?

A. No, la voz tiene un ancho de banda de 4 KHz independientemente de la voz que sea y, por lo tanto, estarán solapadas en frecuencia ambas voces.

B. Sí, si una es más aguda que otra.

C. La voz no tiene transformada de Fourier.

5. Decides aplicar la transformada de Fourier discreta a un disco de música clásica, ¿qué resultado teórico esperarías?

A. Un espectro de frecuencias constante, ya que en un concierto seguro que casi todas las notas se tocan.

B. Un espectro de frecuencias con picos asociados a los tonos de las notas, ya que no todos los sonidos posibles suenan en música.

C. Las notas que más se repiten tendrán picos más altos en frecuencia, ya que aparecen con mayor frecuencia.

6. Tenemos una señal temporal que es el número de personas que entran en un supermercado durante un año. Puesto que es una secuencia temporal, podemos aplicar la transformada de Fourier. ¿Qué veríamos teóricamente?

A. Nada, aunque se pueda aplicar Fourier, no tiene sentido hacerlo en este caso.

B. Seguramente se apreciarían varios picos en frecuencia correspondiente a las horas centrales del día y fines de semana.

C. Saldría un espectro constante, ya que no existe ningún patrón en cómo acude la gente a comprar en un supermercado.

7. ¿Puede aplicarse la transformada de Fourier directamente sin hacer uso de la DFT?

A. No. La transformada de Fourier es el concepto teórico y la DFT su implementación software.

B. Sí, para filtros analógicos.

C. Ni la transformada de Fourier ni la DFT pueden aplicarse directamente. Únicamente la FFT es la transformada que puede usarse.

8. ¿Existe alguna función *f(t)* que no tenga transformada de Fourier?

A. Toda función *f(t)* tiene transformada de Fourier por definición.

B. Solo las funciones periódicas y continuas.

C. Siempre y cuando *f(t)* sea continua, derivable y con valores acotados (sin asíntotas) tendrá transformada de Fourier.

9. La transformada inversa de Fourier:

A. Devuelve la función *f(t)* original, pero multiplicada por un factor.

B. Devuelve la función *f(t)* original sin ningún tipo de modificación.

C. No existe transformada inversa de Fourier.

10. La transformada de Fourier se puede aplicar a funciones sinusoidales:

A. Falso, ya que un coseno no puede expresarse linealmente como combinación lineal de senos.

B. Verdadero, ya que las funciones sinusoidales son periódicas y continuas.