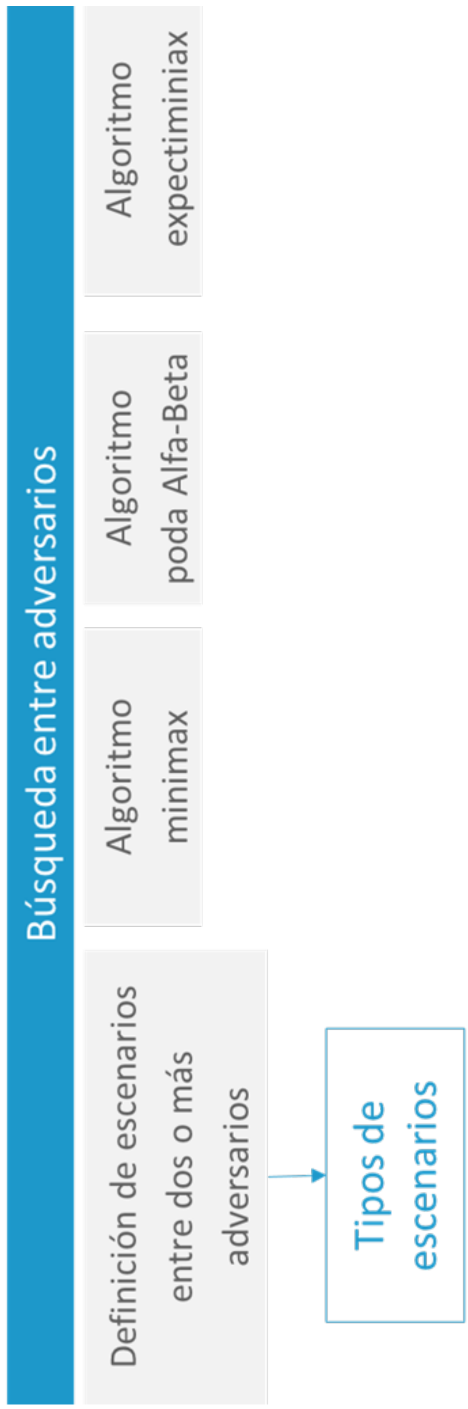
Razonamiento y Planificación Automática

Tema 6. Búsqueda entre adversarios

Índice


Búsqueda entre adversarios
Definición de escenarios entre dos o más adversarios
Tipos de escenarios
Algoritmo minimax
Algoritmo poda Alfa-Beta
Algoritmo expectiminiax

6.1. ¿Cómo estudiar este tema?

En este tema trataremos aquellos problemas en los que nos encontramos compitiendo con más de un agente sobre el mismo entorno. Son problemas propios de la Teoría de Juegos. En ellos deberemos tener en cuenta el objetivo de cada uno de los agentes y sus interrelaciones.

En esta clase de problemas, es obvio que los agentes no siempre tienen los mismos objetivos y, como buenos entes racionales, desean alcanzarlos del modo más eficiente posible. En la mayoría de los casos, estos problemas se definen para entornos en los que hay dos agentes enfrentados con metas contrapuestas, pero las técnicas que se emplean pueden ser las mismas en otros muchos escenarios que no son necesariamente bipersonales y/o competitivos.

Hablaremos principalmente del algoritmo minimax presentado por von Neumann, en 1928, en su demostración teórica sobre juegos bipersonales de «suma cero». .

6.2. Introducción

Los problemas entre adversarios son aquellos en los que más de un agente especializado actúa de modo concurrente en un mismo entorno. Los podemos considerar como problemas que suceden en entornos con múltiples agentes, donde cada agente es independiente e intenta conseguir sus propios objetivos. Cualquier acción ejecutada por un agente influye en el rendimiento de los demás agentes del entorno, que no pueden controlar las acciones que el resto va a realizar, aunque sí pueden intentar predecir el comportamiento de los otros agentes.

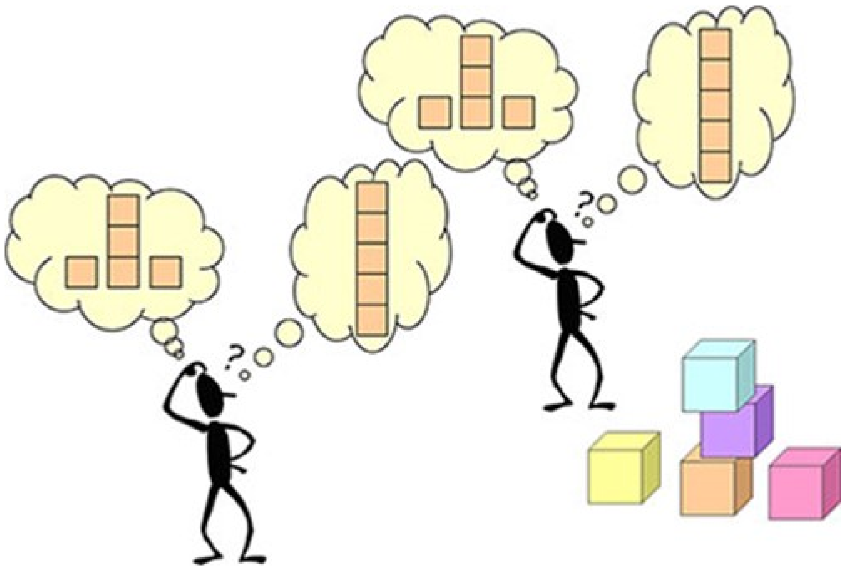


Figura 1. Varios agentes que tienen que interactuar sobre un mismo entorno pueden o no compartir objetivos.

En escenarios multi agentes, nos encontramos con distintos tipos de problemas, atendiendo al comportamiento de los agentes entre sí:

- Escenarios cooperativos: en los que los agentes tienen metas compartidas y, por tanto, las acciones de unos deberían facilitar los objetivos de todos los agentes.

- Escenarios parcialmente cooperativos: aquellos escenarios en los que algunas metas son compartidas por varios agentes, pero otras pueden ser opuestas.
- Escenarios antagónicos o competitivos: donde las metas de todos los agentes son opuestas. El ejemplo «clásico» de escenarios antagónicos es el juego de la suma nula, donde un (grupo de) jugador(es) solo puede ganar algo a coste de otro (grupo de) jugador(es).

Tal como lo mencionamos anteriormente, los algoritmos que explicaremos en este tema estarán relacionados con los escenarios antagónicos o de suma nula.

Se pueden distinguir diferentes tipos de juegos de suma nula en función de:

- Número de jugadores: juegos bipersonales (damas) frente a juegos de varios jugadores (Monopoly o Catán).
- Elementos de azar: juegos con elementos de azar (parchís) frente a juegos sin elementos de azar (ajedrez).
- Información: juegos con información perfecta (damas) frente a juegos con información incompleta (*black jack*).

Ejemplo del juego de tres en raya

Emplearemos este juego durante el tema para ejemplificar el funcionamiento de los distintos algoritmos.

En el juego de las tres en raya participan dos jugadores (que denominaremos **min.** y **máx.**). Min. y máx. colocan fichas en las casillas de un tablero 3x3. Por convenio, máx. usa las fichas X y min. usa las fichas O.

En cada casilla solo puede haber una ficha. El tablero comienza vacío y máx. empieza. Posteriormente, y de modo alternado, min pondrá otra pieza. Así, hasta que se alcance un resultado (vence máx., vence min o empatan). Al ser un juego de «suma cero», estos resultados siempre implican que o bien se empata, o bien todo lo que gana un jugador es lo que pierde el otro.

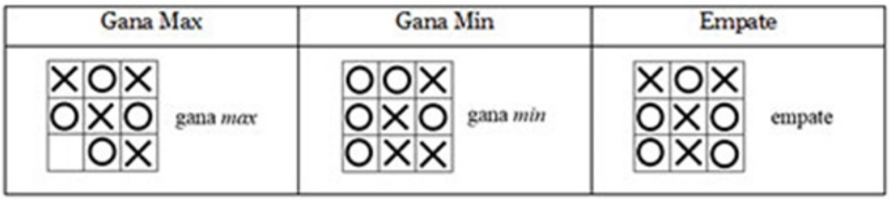


Figura 2. Posibilidades en el juego de las tres en raya. Fuente: (Billhardt, 2015).

Modelos de juegos bipersonales

Nos vamos a centrar en los juegos bipersonales porque permiten ver claramente cómo funcionan los distintos algoritmos que conforman el tema.

Los agentes máx. y min. tienen un conocimiento mínimo *a priori* que se puede ver como:

- s_0 — *posición inicial* (estado inicial)
- *expandir*: $s \mapsto \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}\}$ — cjto. finito de *posiciones sucesores*
- *terminal?*: $s \mapsto$ true | false — *prueba terminal*
- U: $s \mapsto k,\ k \in \Re$ — función parcial de *utilidad* del juego

Figura 3. Conocimiento a priori de un agente.

La función expandir crea los estados derivados de emplear cualquiera de las acciones permitidas en el estado *s*.

En este tipo de problemas, evaluaremos el desempeño de los agentes con base a una función de utilidad, que solo se define, inicialmente, en los estados meta. Por ejemplo, en los problemas de suma nula, máx. gana si y solo si min. pierde.

Por tanto, la función de utilidad de un estado s, *U(s),* es:

gana máx: $U(s) = +\infty$	empate: $U(s) = 0$	gana min: $U(s) = -\infty$

Tabla 1. Función de utilidad básica.

Al igual que en los algoritmos de búsqueda que vimos anteriormente, los algoritmos de resolución de escenarios bipersonales o entre adversarios emplean la construcción de árboles de búsqueda para gestionar el proceso de concesión de la meta u objetivo del agente.

En el caso de escenarios de juego como los descritos en el presente tema, el árbol que generamos se llama **árbol de juego G**. Y formalmente está formado por la tupla $G = N,E,L >$, donde:

- N , es un conjunto de nodos,
- *E   NxN es una función sobre N que asigna a cada nodo N sus hijos*
- $L = \{máx., min.\}$, es una función sobre N que etiqueta a cada nodo N a que jugador le toca el turno

En este árbol, G empieza siendo vacío y etiquetaremos la raíz como máx., indicando que el turno inicial es siempre de este. Todos los sucesores se irán entregando de modo ordenado.

Cada nivel del árbol representa media jugada (un *ply*). Por otro lado, todas las hojas de un árbol, si se expande completamente, representan nodos terminales del juego.

Ejemplo de árbol de juego para tres en raya:

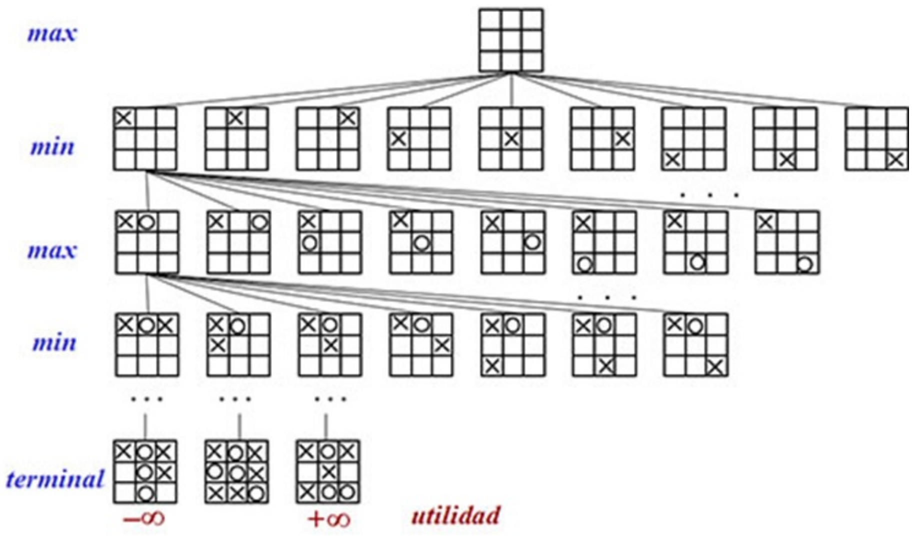


Figura 4. Árbol de juego para tres en raya.

La mejor jugada del agente máx

La estrategia se centra en un solo agente, máx. Y define las jugadas de máx en todos los estados alcanzables del juego. Es decir, da una respuesta a todas las jugadas posibles de máx y del contrincante min. Las jugadas de min serán un subárbol del árbol de juego.

Si aplicásemos únicamente algoritmos de búsqueda estándar, nos encontraríamos con que min nunca querrá realizar acciones que se encuentren en el camino principal de máx.

Estrategia óptima o racional

En los escenarios competitivos con agentes racionales siempre se asume que min realizará la mejor acción para sí mismo de aquellas que el agente máx le haya dejado en su momento. La estrategia óptima para máx es la **estrategia minimax: maximizar la utilidad mínima en cada jugada**.

6.3. Búsqueda minimax

Minimax es un método de decisión para minimizar la pérdida máxima esperada en juegos con adversario y con información perfecta. Es un cálculo que se emplea de forma recursiva. Su funcionamiento se resume en elegir el mejor movimiento para uno mismo partiendo de la suposición de que el contrincante escogerá el peor para el adversario. La figura 5, describe a modo resumen las características principales del algoritmo Mini-máx.

Figura 5. Método minimax.

En último lugar llegará el valor de utilidad desde un nodo terminal al nodo raíz. Y tendremos que la acción que lleva al camino del nodo meta con mayor valor es la jugada óptima. En la figura 6, se puede ver un ejemplo de selección de la mejor jugada de máx. Como función de utilidad tenemos valores de 0, - infinito e infinito.

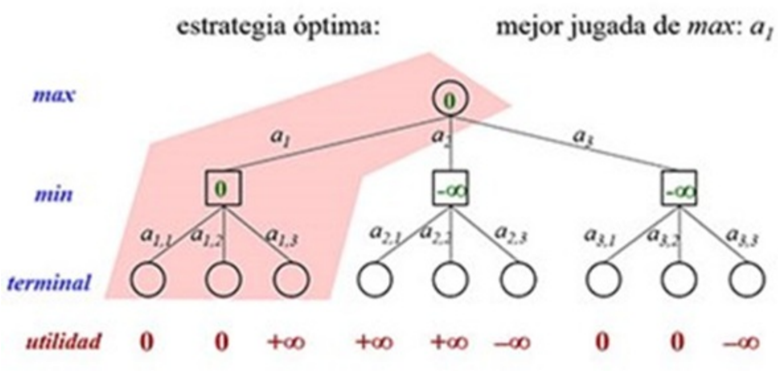


Figura 6. Estrategia óptima para una búsqueda minimax.

El algoritmo explorará los nodos del árbol y les asigna un valor numérico mediante una función de utilidad, empezando por nodos terminales y subiendo a la raíz. La función de utilidad definirá lo buena que es la posición de un jugador (min o máx) cuando la alcanza.

En la figura 7, se puede ver una versión muy preliminar del algoritmo Mini-Max.

Algoritmo:
- funciones mutuamente recursivas
- *estado* es el estado actual

- α: máximo de la utilidad de los sucesores de un nodo *max*
- β: mínimo de la utilidad de los sucesores de un nodo *min*

```
{MaxValor en el Minimax básico}
Función MaxValor(estado)
    Si terminal?(estado) entonces
        devolver(U(estado))
    sucesores ← expandir(max, estado)
    α ← −∞
    Para cada s∈sucesores hacer
        α ← max(α, MinValor(s))
    devolver(α)
    Fin {MaxValor}

{MinValor en el Minimax básico}
Función MinValor(estado)
    Si terminal?(estado) entonces
        devolver(U(estado))
    sucesores ← expandir (min, estado)
    β ← +∞
    Para cada s∈sucesores hacer
        β ← min(β,MaxValor(s))
    devolver(β)
    Fin {MinValor}
```

Figura 7. Algoritmo minimax (versión preliminar).

El principal problema de esta técnica es que, incluso en juegos muy simples, resulta imposible crear un árbol completo de juego. Esto es debido al crecimiento exponencial del árbol de juego.

Minimax con suspensión

Cuando el problema manifiesta unos problemas graves de expansión de los nodos, la solución se basa en heurísticas.

La idea es reemplazar la prueba terminal por una prueba de suspensión, es decir, en vez de tener que desarrollar todo el árbol de juego, realizamos una expansión hasta el nodo de profundidad *d.* Para ello deberemos emplear una **función de evaluación** ***e***, que estima la utilidad esperada del juego correspondiente a una posición *s* determinada (*e* debe coincidir con la función de utilidad *u* en los nodos terminales).

Lo más habitual es emplear una función de tipo lineal ponderada:

$$e(s)\, w_1 f_1(s) + w_2 f_2(s) + \ldots + w_n f_n(s)$$

Por ejemplo, para el ajedrez nos podríamos encontrar con una función de la forma:

$$e(s) = \text{“}\mathit{suma\,de\,los\,valores\,materiales\,en\,s}\text{”}$$

Mientras que, en el juego de tres en raya, la función de evaluación puede ser de la forma:

$$e(s) = \text{“}\mathit{número\,de\,líneas\,abiertas\,para\,líneas\,máx\,en\,s}\text{”} - \text{“}\mathit{número\,de\,líneas\,abiertas\,para\,líneas\,min\,en\,s}\text{”}$$

Al emplear funciones heurísticas fuertes, dado que deseamos limitar la complejidad, no podremos garantizar que la estrategia minimax sea óptima. Pero claro, esto dependerá de la calidad de las heurísticas.

En el siguiente ejemplo se muestra minimax con suspensión:

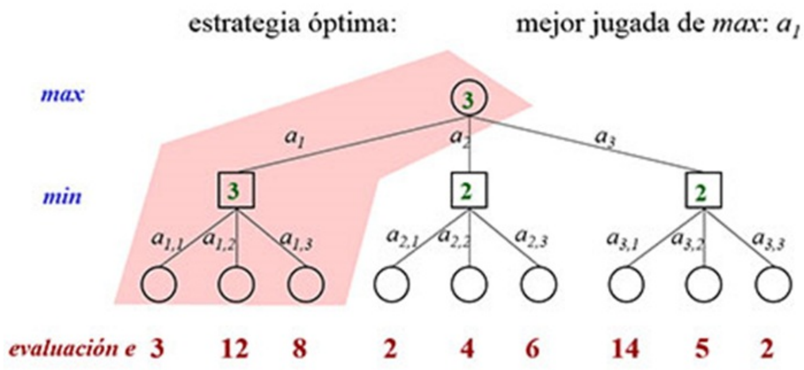


Figura 8. Minimax con suspensión.

El algoritmo lo podemos resumir de la siguiente manera:

Algoritmo:
- funciones mutuamente recursivas
- *estado* es el estado actual

- α: máximo de la evaluación de los sucesores de un nodo *max*
- β: mínimo de la evaluación de los sucesores de un nodo *min*

```
{MaxValor: Minimax con suspensión}
Función MaxValor(estado)
    Si suspensión?(estado) entonces
        devolver(e(estado))
    sucesores ← expandir(max, estado)
    α ← −∞
    Para cada s∈sucesores hacer
        α ← max(α, MinValor(s))
    devolver(α)
    Fin {MaxValor}
```

```
{MinValor: Minimax con suspensión}
Función MinValor(estado)
    Si suspensión?(estado) entonces
        devolver(e(estado))
    sucesores ← expandir (min, estado)
    β ← +∞
    Para cada s∈sucesores hacer
        β ← min(β,MaxValor(s))
    devolver(β)
    Fin {MinValor}
```

Figura 9. Algoritmo minimax con suspensión.

Ejemplo de las tres en raya:

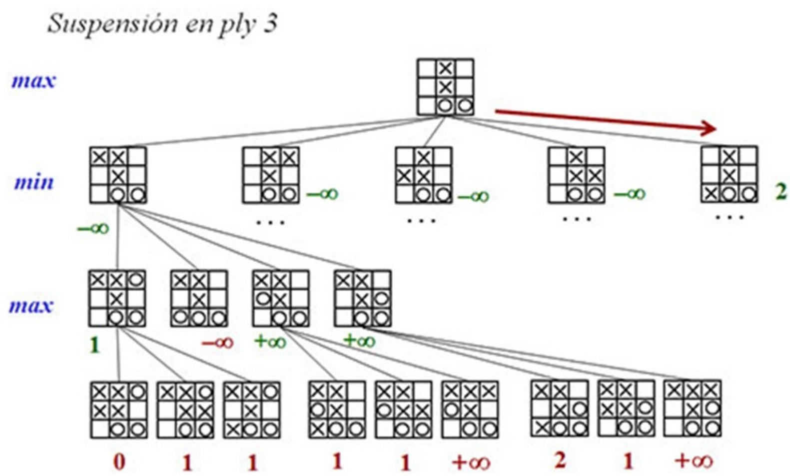


Figura 10. Ejemplo de algoritmo minimax con suspensión para el juego tres en raya.

El algoritmo minimax tiene un problema de complejidad importante en el caso general, $O(bd)$ (factor de ramificación *b*; número de *de profundidad del áborld*).

Minimax genera el árbol de juego completo, en profundidad primero, hasta los nodos (o el nivel) de suspensión.

Existen extensiones de la estrategia minimax, algunas las veremos en las secciones siguientes:

- Mejorar la complejidad (poda alfa-beta: descartar nodos irrelevantes).
- Juegos con elementos de azar (expectiminimax: hay un nuevo jugador «azar»).
- Juegos con información parcial (búsqueda en estados de creencias).
- Mejorar las heurísticas: aprender funciones de evaluación y suspensión (por ejemplo, por el «efecto horizonte»).

6.4. La poda alfa-beta

El crecimiento exponencial de los nodos que se deben explorar en la estrategia minimax hace de él un algoritmo que presenta una complejidad poco deseable. Si bien este exponente no se puede eliminar, por lo menos es posible dividir a la mitad su valor, con la mejora de rendimiento que eso conlleva.

Es decir, que existe la posibilidad de tomar una decisión minimax correcta sin tener que mirar todos los nodos en el árbol. La poda alfa-beta permite eliminar partes del árbol.

La idea inicial es que, en muchas ocasiones, no es necesario evaluar todos los sucesores de un nodo para obtener el valor exacto de dicho nodo.

Por ejemplo:

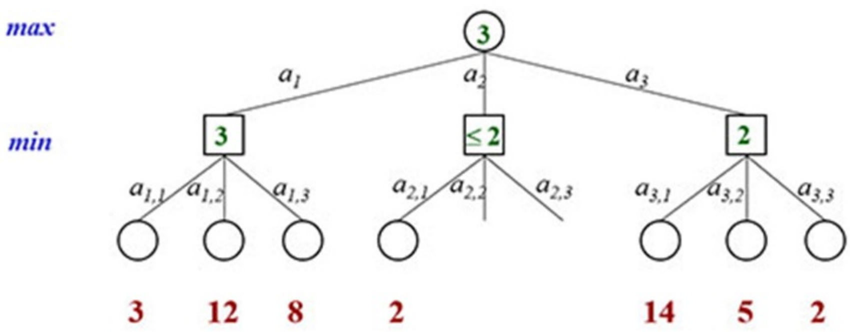


Figura 11. Ejemplo de poda alfa-beta

En la figura 11, se muestra un árbol en el que se aplica la poda alfa-beta. Se tienen dos tipos de poda.

Poda alfa, sucede cuando es el turno de máx, y se mantienen los siguientes parámetros actualizados.

- *Alfa* (α): evaluación más alta encontrada (de momento) en un nodo máx.
- Beta (β): evaluación más baja encontrada (de momento) en su sucesor directo min.

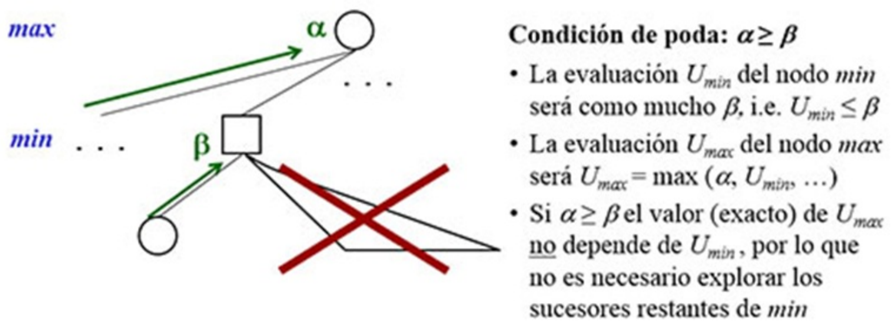


Figura 12. Poda alfa.

Poda beta, sucede cuando es el turno de min, y se mantienen los siguientes parámetros actualizados:

- Beta (β): evaluación más baja encontrada (de momento) en un nodo min.
- *Alfa* (α): evaluación más alta encontrada (de momento) en su sucesor directo máx.

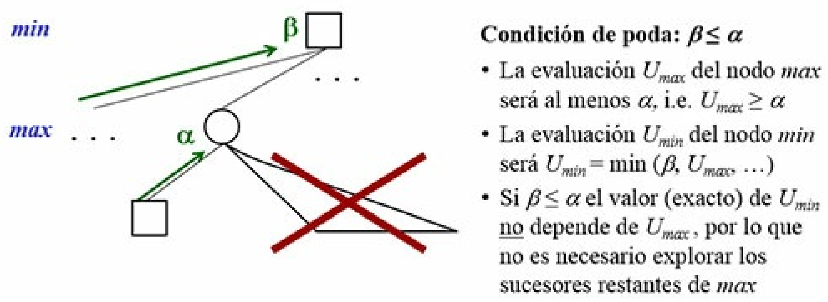


Figura 13. Poda beta.

Estas dos podas se pueden presentar de manera profunda de la siguiente manera.

Poda alfa profunda:

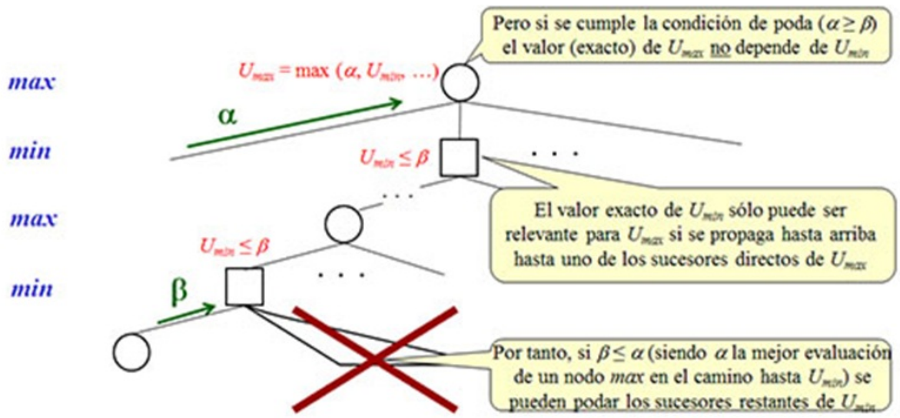


Figura 14. Poda alfa profunda.

La poda beta profunda funciona de forma dual. Emplearemos dos funciones mutuamente recursivas que irán creando las expansiones y podas de máx y min de modo alternado.

Minimax con poda alfa-beta:

Algoritmo:

- funciones mutuamente recursivas
- *estado* es el estado actual

- α es el mejor valor de evaluación para *max* en el camino hasta *estado*
- β es el mejor valor de evaluación para *min* en el camino hasta *estado*

```
{MaxValor: Minimax con poda α–β}

Función MaxValor(estado,α,β)
    Si suspensión?(estado) entonces
        devolver(e(estado))
    sucesores ← expandir(max, estado)
    Para cada s∈sucesores hacer
        α ← max(α, MinValor(s,α,β ))
        Si α ≥ β entonces devolver(α)
    devolver(α)
    Fin {MaxValor}
```

```
{MinValor: Minimax con poda α–β}

Función MinValor(estado,α,β)
    Si suspensión?(estado) entonces
        devolver(e(estado))
    sucesores ← expandir (min, estado)
    Para cada s∈sucesores hacer
        β ← min(β,MaxValor(s,α,β ))
        Si β ≤ α entonces devolver(β)
    devolver(β)
    Fin {MinValor}
```

Figura 15. Minimax con poda alfa-beta.

Ejemplo minimax con poda alfa-beta:

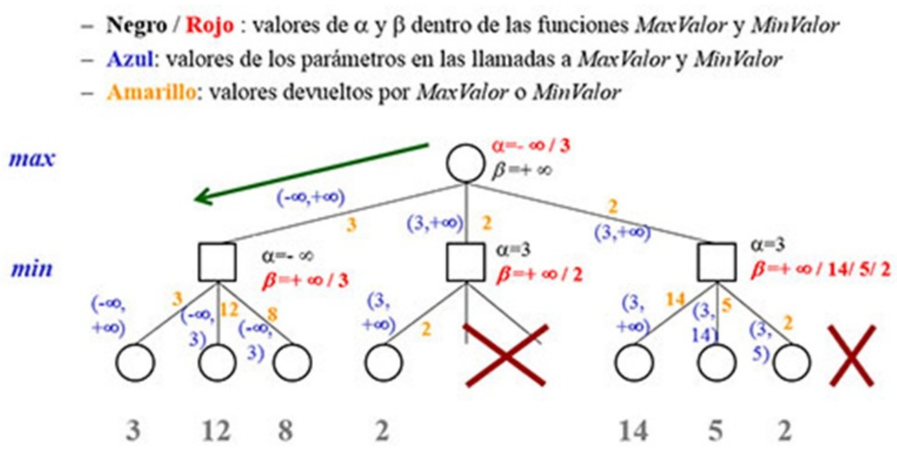


Figura 16. Ejemplo minimax con poda alfa-beta.

El algoritmo minimax con poda alfa-beta $(\alpha - \beta)$ siempre produce el mismo resultado que sin la poda. Pero existe una relación directa en la mejora del rendimiento de la poda asociada al orden de exploración de los nodos. La eficiencia de minimax con poda $\alpha - \beta$ depende del orden en el que se exploran los nodos.

La Tabla 2 compara el tiempo computacional de la búsqueda minimax y la poda alfa-beta.

Ejemplo de complejidad para factor de ramificación *b* y profundidad *d* del árbol		***B=10, d=4***
Minimax sin poda	$O(b^d)$	104= 10 000 nodos
Minimax con poda (mejor caso)	$O(b^{d/2})$	102= 100 nodos
Minimax con poda (caso medio)	$O(b^{3d/4})$	103= 1 000 nodos

Tabla 2. Análisis de complejidad del algoritmo minimax.

6.5. Búsqueda expectiminimax

Para los juegos bipersonales con elementos de azar se suele emplear el algoritmo expectiminimax . Cuando nos encontramos en un escenario donde aparecen elementos de azar, hay que evolucionar la idea del minimax. Para ello, añadimos un nuevo jugador «azar», que se incluye en el árbol siempre que haya un evento independiente de los jugadores y cuyo resultado es aleatorio.

Los nodos sucesores de estas jugadas de «azar» son los posibles valores resultantes de los elementos de azar. Por ejemplo, los distintos valores de una tirada de dado o el éxito o fracaso de una acción azarosa. Cada uno de los sucesores de un nodo «azar» tiene, por tanto, asociada una probabilidad de ocurrencia.

En un ejemplo como el del Backgammon simplificado en el que partimos de un estado inicial como este:

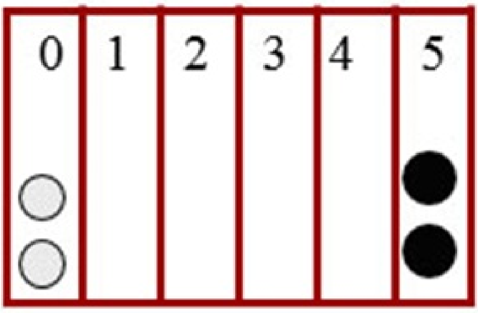


Figura 17. Backgammon. El backgammon es un juego de mesa para dos jugadores que une el azar con profundos conocimientos estratégicos. El objetivo es conseguir sacar fichas del tablero antes que el jugador rival.

Tenemos el objetivo de mover nuestras fichas (por ejemplo, blanca para máx hasta el campo cinco y min lo tendrá que hacer hasta el campo cero), contando con que empieza máx y que en cada jugada primero se tira una moneda (donde obtener cara tiene el valor uno y cruz el valor dos).

Después, se mueve una de las fichas uno o dos campos en la dirección deseada (dependiendo del resultado de la tirada de la moneda), no siendo posible mover fichas a un campo donde el adversario tenga ya una. Y, en el caso de que el jugador no pueda mover, pierde el turno.

Figura 18. Árbol del juego. Representación de estados: (x_1, x_2, y_1, y_2), donde x_1 y x_2 son posiciones de las fichas blancas y las y_1 e y_2 posiciones de las fichas negras.

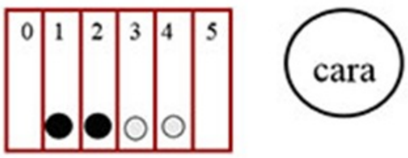
ExpectiMinimax tiene como objetivo, al igual que el minimax, elegir la mejor jugada para máx. Para ello debemos propagar los valores de utilidad/evaluación hacia los nodos padres.

La figura 19, muestra formalmente como se obtienen los valores de evaluación cuando el nodo es terminal (suspensión), máx, min o azar.

$$ExpectMinimax(n) = \begin{cases} e(n) & \text{si } n \text{ es nodo suspensión} \\ \max\limits_{s \in expandir(n)} (ExpectMinimax(s)) & \text{si } n \text{ es nodo } max \\ \min\limits_{s \in expandir(n)} (ExpectMinimax(s)) & \text{si } n \text{ es nodo } min \\ \sum\limits_{s \in expandir(n)} (p(s) \cdot ExpectMinimax(s)) & \text{si } n \text{ es nodo azar} \end{cases}$$

Figura 19. Valor propagado al padre en función del tipo de nodo.

Por ejemplo, partiendo de la situación de partida siguiente y tocándole a máx:



(3,4,1,2); *max* tiene que mover una ficha (blanca) una posición

Figura 20. Situación de una partida de Backgammon.

Si el nivel de suspensión cinco y la función de evaluación que empleamos es la siguiente:

$$e\ (a,b,c,d) = a + b + c + d$$

Dado que los valores de *a, b, c y d* son mejores para máx cuanto más cerca del cinco se encuentren, tendríamos una evaluación para el estado anterior de:

$$e\,(3,4,1,2) = 10$$

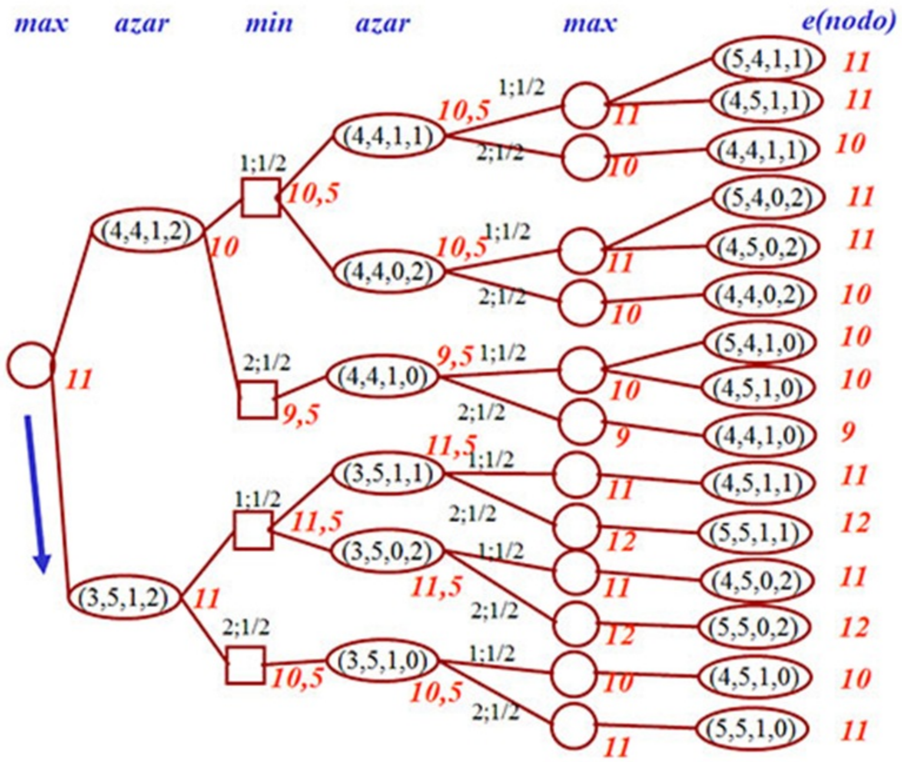


Figura 21. Expansión de nodos para un algoritmo expectiminimax para el backgammon.

Criterios para las funciones de evaluación/utilidad

Es importante tener en cuenta que la escala de los valores de dichas funciones sí importa (no como ocurría en el algoritmo minimax):

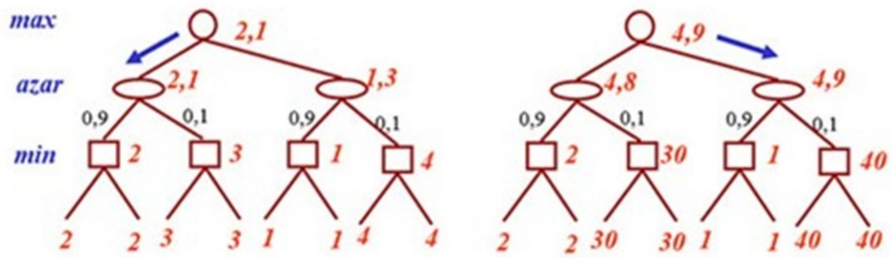


Figura 22. Dos ejemplos de árbol con distintos valores de escala generan distintos recorridos.

Por tanto, las funciones no deben devolver $+\infty$ *o* $-\infty$ porque reservaremos estos valores para los nodos de azar, por lo que es interesante escalar los valores a un intervalo finito (por ejemplo, entre 0 y 1).

La **función de evaluación *e*** debe estimar la probabilidad de ganar. En el caso ideal, *e* es una **transformación lineal positiva** de dicha probabilidad.

Figura 23. Estimación ideal de la probabilidad de victoria en función del valor e(nodo).

Habitualmente, no es sencillo establecer una función *e* que cumpla este criterio para todos los estados del juego (nodos). Por lo que, normalmente, una función *e* es más «exacta» cuanto más cerca está el estado actual del juego de un estado terminal. Es preferible aplicar la búsqueda *expectiminimax* en el máximo número de *plys* posibles y, solo al final, aplicar la función de evaluación *e*.

La complejidad expectiminimax es muy elevada y depende del nivel de profundidad *d (plys)*, el factor de ramificación *b* (jugadas posibles) y los elementos de azar con *n* posibilidades, pero si incluimos los nodos de azar, nos encontramos con una complejidad de $O\left(b^d \cdot n^d\right)$.

Número de *plys d* anticipados	Número de nodos en el árbol
1	20*21=420
2	176.400
3	74.088.000

Tabla 3. Ejemplo Backgammon: n=21 (2 dados) y b»20

Para más detalles sobre la aplicación de la poda $\alpha - \beta$ al algoritmo expectiminimax, puedes ver la sección 5.5.1. de (Russell, 2004).

6.6. Referencias bibliográficas

Billhardt, H. G. (2015). *Inteligencia artificial: Ejercicios resueltos.* Editorial Universitaria Ramon Areces.

Hazewinkel, M. (2013). Minimax Principle. En Hazewinkel, M. (Ed.), *Encyclopaedia of Mathematics,* (Vol. Volume 6). Dordrecht: Springer.

Russell, S. y. (2004). *Inteligencia Artificial: Un Enfoque Moderno.* Madrid: Pearson Educación.

Computer Chess

Bujalski, A. (2013). *Computer Chess* [Película].

Una comedia existencial de los hombres brillantes que enseñaban a jugar al ajedrez a las máquinas antes, cuando las máquinas parecían torpes y nosotros inteligentes.

Juegos de guerra

Badham, J. (1983). *War games* [Película].

Es una película que narra las aventuras de un muchacho fan de la informática que por error entra en contacto con un «superordenador» del ejército americano. Presenta una escena en la que se pone a jugar el superordenador contra sí mismo a las tres en raya, claro ejemplo de búsqueda minimax.

Algoritmos de juegos

Aguilar, P. (2008). *IA - Algoritmos de juegos*. Cataluña: Facultad de Informática de Barcelona, Universidad Politécnica de Cataluña. Recuperado de: http://www.lsi.upc.edu/~bejar/ia/material/trabajos/Algoritmos_Juegos.pdf

Este documento proporciona una visión divulgativa sobre el área de los algoritmos de juegos de la inteligencia artificial. Proporciona un buen punto de partida para profundizar en los algoritmos de búsqueda con adversarios. Presenta los algoritmos avanzados que se basan en minimax, como Negamax u otros algoritmos como SSS* o Scout.

Algoritmo minimax

Adrigm. (2010). Algoritmo minimax, un jugador incansable [Mensaje en un blog]. Razón artificial. Recuperado de: http://razonartificial.com/2010/08/algoritmo-minimax-un-jugador-incansable/

Características y funcionamiento del algoritmo minimax en la teoría de juegos.

Asociación Española para la Inteligencia Artificial

Accede a la página web a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web: http://www.aepia.org/aepia/index.php/materiales

Página web de la AEPIA, Asociación Española para la Inteligencia Artificial, donde podrás estar al día de todo lo relacionado con esta área.

Bibliografía adicional

Trigozo-Galoc, G., Julca-Huancas, U. y Gómez-Díaz, M. (1994). *Inteligencia Artificial y Algorimo: Minimax*. Perú: Facultad de Ingeniería y Arquitectura, EAP Ingeniería de Sistemas, Universidad Peruana Unión.

1. Se llama estrategia óptima la que:
   A. Implica el mejor resultado garantizado para máx.
   B. Implica el mejor resultado garantizado para min.
   C. Implica que tanto máx como min obtengan el mejor resultado garantizado.

2. Los tipos de problemas multi agente contemplan:
   A. Escenarios parcialmente cooperativos y escenarios con metas opuestas.
   B. Escenarios con metas compartidas y escenarios con metas opuestas.
   C. Escenarios con metas compartidas, escenarios parcialmente cooperativos y escenarios con metas opuestas.

3. Los juegos se pueden clasificar en función de:
   A. Número de jugadores, elementos de azar e información.
   B. Información y número de jugadores.
   C. Elementos de azar y número de jugadores.

4. En un juego en el que máx puede asumir que min hará lo mejor para sí mismo, lo que implica que es lo peor para máx, la estrategia óptima para máx es:
   A. Minimizar la utilidad mínima en cada jugada, minimax.
   B. Maximizar la utilidad mínima en cada jugada, minimax.
   C. No existe una estrategia óptima para estos casos.

5. Minimax genera:
   A. El árbol de juego incompleto, primero en profundidad, pero no llega a cubrir todos los nodos.
   B. El árbol de juego completo, primero en profundidad, hasta los nodos suspensión. C. No genera ningún árbol.
   C. No genera ningún árbol.

6. El algoritmo minimax con poda alfa-beta:

   A. Produce el mismo resultado que sin poda.

   B. Nunca produce el mismo resultado que sin poda.

   C. El resultado depende de la exploración de los nodos, por lo que no se tiene el mismo resultado nunca.

7. El algoritmo expectiminimax utiliza el algoritmo minimax y:

   A. Añade un árbol complejo teniendo en cuenta el azar para que en cada uno de los nodos ocurra siempre el mismo resultado.

   B. Añade el azar como si fuera un jugador y lo incluye en el árbol siempre.

   C. Añade el azar como si fuera un jugador, siempre que haya un evento con independencia de los jugadores cuyo resultado sea aleatorio.

8. El caso ideal de la función de evaluación *e* en expectiminimax es:

   A. Una transformación lineal positiva de dicha probabilidad.

   B. Una regresión lineal positiva de dicha probabilidad.

   C. Una transformación lineal negativa de dicha probabilidad.

9. La complejidad de expectiminimax es:

   A. Inversamente proporcional al número de nodos del árbol.

   B. Proporcional al número de nodos en el árbol.

   C. No tiene relación con el número de nodos en el árbol.

10. La eficiencia de minimax con poda alfa-beta:

    A. Es independiente del orden en el que se exploran los nodos.

    B. El orden en el que se exploran los nodos no influye.

    C. Depende del orden en el que se exploran los nodos.