Razonamiento y Planificación Automática

Tema 3. Lógica y pensamiento humano

Índice

Tipos de lógica

- Matemática
- Descriptiva ALC
- Orden Superior
- Multivaluada y difusa

3.1. ¿Cómo estudiar este tema?

La lógica es clave para tratar de representar el pensamiento humano. A través de la lógica podemos implementar sistemas que emulen el pensamiento. Es, por tanto, una herramienta para explicar todo el conocimiento basado en los **elementos de razonamiento**: categorías, definiciones, juicios y proposiciones.

A lo largo de la historia, desde Aristóteles hasta nuestros días, se han ido produciendo avances que han evolucionado la lógica y han permitido que se convierta en una herramienta potente a la hora de modelizar comportamiento dentro del campo de la inteligencia artificial.

En el siguiente tema veremos algunos **tipos de lógica** y detallaremos los que tienen más relevancia para inteligencia artificial.

3.2. Tipos de lógica

La definición que podemos encontrar en el *Diccionario de la lengua española* para la palabra lógica es la siguiente: «Ciencia que expone las leyes, modos y formas de las proposiciones en relación con su verdad o falsedad».

La **lógica** (su etimología está en la palabra *logĭca* del latín, que a su vez proviene del griego *logike:* «argumentativo, intelectual», y esta, a su vez, deriva de *logos:* «pensamiento, razón, palabra») **es una ciencia formal** basada en las leyes del conocimiento científico cuyo objetivo es estudiar los métodos y principios para identificar el razonamiento correcto.

Básicamente, la lógica permite realizar una representación formal de las relaciones existentes entre los objetos (y entre los objetos y sus propiedades).

El filósofo griego Aristóteles es considerado el padre de la lógica, ya que fue el primero en mostrar interés por el razonamiento lógico y emplear sistemas de validación de argumentos como indicadores de verdad, utilizando el silogismo (razonamiento que está formado por dos premisas y una conclusión que es el resultado lógico que se deduce de estas) como argumento válido y desarrollando un sistema lógico que ha llegado a nuestros días.

Se distinguen **varios tipos de lógica**, todas centradas en entender los razonamientos y diferenciar si son correctos o incorrectos. Para ello se basan en el estudio de los enunciados, abarcando más allá del lenguaje natural (el discurso verbal) y llegando a áreas muy variadas como las matemáticas y las ciencias de la computación, con estructuras muy diferentes.

Generalmente, dentro del término lógica se engloban varias formas:

- Lógica proposicional: se utilizan proposiciones que representan afirmaciones que pueden ser verdaderas o falsas. Las proposiciones se unen con (∧ [y], ∨ [o], ¬ [no]) y se construyen reglas con el operador de implicación lógica (→). Los mecanismos de inferencia permiten obtener nuevos datos a partir de los datos ya conocidos (por ejemplo, *modus ponens* y *modus tollens*…)
- Lógica de predicados: añade la posibilidad de utilizar cuantificadores:
  - ∀ (para todo).
  - ∃ (existe).

Emplean como mecanismos de inferencia los tradicionales: *modus ponens*, o *modus tollens*. La Figura 1 muestra un ejemplo de lenguaje de programación que emplea la modelización de lógica de predicados es PROLOG.

Para mostrar un ejemplo que contiene elementos de un lenguaje de primer orden vamos a trabajar sobre la siguiente base de conocimientos:

Hechos:

1. Atlanta se encuentra en Georgia.
2. Houston y Austin se encuentran en Texas.
3. Toronto se encuentra en Ontario.

Que, usando el predicado **located_in**, podemos representar con las siguientes clausulas:

```
located_in(atlanta,georgia).  % Clause 1
located_in(houston,texas).    % Clause 2
located_in(austin,texas).     % Clause 3
located_in(toronto,ontario).  % Clause 4
```

Reglas:

1. Lo que está en Georgia o Texas, también está en USA.
2. Lo que está en Ontario, también está en Canadá.
3. Lo que está en USA o Canadá, también está en Norte América.

Que podemos representar con las siguientes clausulas (**geo.pl**):

```
located_in(X,usa) :- located_in(X,georgia).              % Clause 5
located_in(X,usa) :- located_in(X,texas).                % Clause 6
located_in(X,canada) :- located_in(X,ontario).           % Clause 7
located_in(X,north_america) :- located_in(X,usa).        % Clause 8
located_in(X,north_america) :- located_in(X,canada).     % Clause 9
```

Observa que al estar trabajando con predicados que sí reciben argumentos ya no es necesario usar la directiva vista en el ejemplo anterior.

Vamos a ver cuál es el árbol de deducción que sigue Prolog para resolver la siguiente clausula:

```
located_in(toronto,north_america).
```

Figura 1. Ejemplo de modelización en PROLOG. Fuente: (Caparrini, 2014)

- Lógica natural: directamente relacionada con el empirismo, aprender a base del acierto-error. La lógica natural es aquella que previene al ser humano de cometer el mismo error varias veces, es razón innata.

- Lógica científica: surge como la lógica natural de la experiencia, pero además se incluye en ella la razón, creando planteamientos de todo lo que existe. Se fundamenta en encontrar los motivos o justificaciones por los cuales sucede un hecho.

- Lógica material: se estudia desde la epistemología (una de las ramas modernas de la filosofía). Incluye la incertidumbre, ya que las conclusiones implican cierto grado de duda. El objetivo es probar la validez de un racionamiento basándose en la realidad. Un ejemplo: si está nublado, es posible que llueva, como es posible que no llueva, por lo que el razonamiento «es posible que caigan unas gotas» es correcto, pero no es válido porque no existe total seguridad de que esto vaya a suceder.

- Lógica formal**:** se llama a la lógica clásica (aristotélica) que estudia las proposiciones, los argumentos, desde el enfoque estructural. La motivación es determinar si un enfoque es correcto o incorrecto a través de un método para estructurar el pensamiento. El objeto de estudio no es empírico, sino que se centra en la estructura del argumento y no en la falsedad o veracidad del contenido de un argumento particular. En el ejemplo que usábamos para la lógica de materiales, bajo el mismo escenario (cielo nublado, puede llover o no), el pensamiento «es posible que caigan unas pocas gotas» sería válido. Incluidos en la lógica formal podemos encontrar dos tipos muy importantes: **lógica deductiva y lógica inductiva**.

  - Lógica deductiva: realizar inferencias a partir de teorías que ya existen. Por ejemplo: si los humanos tienen orejas y Manuel es un humano, entonces Manuel tiene orejas.

  - Lógica inductiva: consiste en crear conceptos generales a partir de argumentos específicos. Por ejemplo: si un humano tiene orejas, existe otro humano con orejas y otro más que también tiene orejas, entonces todos los humanos tienen orejas.

- Lógica de primer orden: es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes de primer orden; son lenguajes cuantificadores que alcanzan variables de individuos con predicados y funciones constantes o variables. En primer lugar, es importante entender el concepto **«enunciado declarativo»**, expresiones que son verdaderas o falsas enunciadas con el lenguaje natural (idioma en el que se habla), y la diferencia que existe con los **enunciados interrogativos e imperativos**. En la lógica de primer orden, se establecen una serie de objetos y relaciones entre los mismos. Son enunciados declarativos los siguientes ejemplos:

- Laura es madre y María es hija de Laura.

- Toda madre quiere a sus hijas.

El número 1 se refiere a los objetos sobre los que versa el discurso, describiendo las propiedades de estos (ser madre, ser hija), mientras que 2 define las relaciones entre los objetos. Esto sería el comienzo de la lógica computacional, en la que es necesario definir las situaciones en objetos y las relaciones que se establecen entre ellos.

Cuando sobre los enunciados (predicados) se aplican reglas de razonamiento, se obtienen conclusiones. De este modo, se resuelven problemas. Sobre los enunciados que exponemos más arriba (1 y 2) es posible inferir un tercer enunciado:

- Laura quiere a María.

También es posible utilizar funciones cuando queremos resolver un problema. Las funciones son relaciones en las que solo existe una correspondencia dado un valor. Por ejemplo, es posible definir la función madre de.

Otros conceptos para tener en cuenta, como en todo sistema formal, son la sintaxis (expresiones de lógica de primer orden) y la semántica (significado que hace que la expresión sea verdadera o falsa).

- Lógica simbólica o matemática: utiliza símbolos para construir un nuevo lenguaje en el cual se expresan los argumentos. La intención es traducir el pensamiento humano a lenguaje matemático, es decir, conseguir convertir el pensamiento abstracto en estructuras formales y emplear las leyes del cálculo (base de la exactitud), permitiendo que los argumentos sean más exactos. Este tipo de lógica, en matemáticas, se emplea para demostrar teoremas.

- Lógica de clases: la base de los principios de la lógica de clases se fundamenta en la teoría de conjuntos. Se analiza una proposición lógica sobre la pertenencia, o no pertenencia, de un elemento o individuo a una determinada clase (conjunto de elementos o individuos que tiene en común alguna característica o propiedad particular). Es la característica (propiedad) la que define la clase. Por ejemplo, no es lo mismo decir «Einstein era un hombre» que afirmar «Einstein pertenecía a la clase de los hombres».

También se suele hablar de otros tipos y subtipos de lógica:

- Lógica informal: se centra en el lenguaje y en el significado de las construcciones semánticas y de los argumentos. Se diferencia de la lógica formal en que la lógica informal se centra en el contenido de las oraciones y no en la estructura. El objetivo es encontrar la manera de argumentar para conseguir el resultado que se desea obtener.

- Lógica moderna: nacida en el siglo XIX, se diferencia de la lógica clásica porque incluye elementos matemáticos y simbólicos, teoremas que reemplazan las carencias de la lógica formal. Se diferencian varios tipos de lógica moderna: lógica modal, lógica matemática, lógica trivalente…

- Lógica modal: este tipo de lógica emplea los argumentos y añade elementos (operadores modales) que hacen posible determinar si un enunciado es verdadero y falso. La intención es estar en consonancia con el pensamiento humano; por tanto, tiene en consideración expresiones como «siempre», «es muy probable», «a veces», «tal vez».

- Lógica computacional: deriva de la lógica simbólica (matemática o de primer orden) y se aplica al área de las ciencias de la computación. A través de la lógica, es posible trabajar con lenguajes de programación con el fin de ejecutar tareas específicas de verificación.

En este tema profundizaremos en las lógicas que están más relacionadas con la inteligencia artificial: **lógica matemática, lógica descriptiva o de descriptores ALC, lógica de orden superior, lógica multivaluada y lógica borrosa o difusa**.

3.3. Lógica matemática

L a **lógica matemática** consiste en el estudio matemático de la lógica y en la aplicación de este a otras áreas de las matemáticas. Está en estrecha relación con las ciencias de la computación y la lógica filosófica.

Estudia los sistemas formales en relación con el modo en el que codifican nociones intuitivas de objetos matemáticos como conjuntos, números, demostraciones y computación.

Se le aplica a las definiciones concretas y razonamientos rigurosos propios de la matemática. Cada expresión del lenguaje tiene un significado exacto y un simbolismo apropiado, sin ambigüedades.

El siguiente esquema muestra un resumen de la lógica matemática (https://cmapspublic.ihmc.us/rid=1LNTSCHKK-LLS690-2JGW/Tipos%20de%20Agentes%20Inteligentes.cmap):

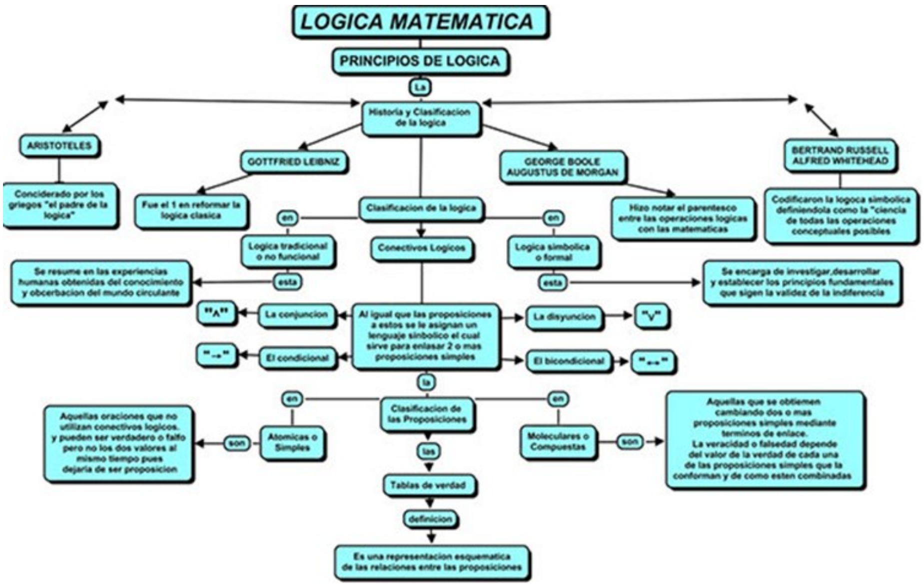

Figura 2. Resumen de la lógica matemática. Fuente: (Reina, 2016).

Una **proposición** es toda afirmación o expresión que tiene significado y de la que podemos decir si es «falsa» (F/0) o «verdadera» (V/1). Las proposiciones pueden enlazarse entre sí mediante conectivos lógicos para formar estructuras con un significado preciso.

No son proposiciones: las frases para dar órdenes (lee esto), las frases exclamativas e interrogativas (¿cómo te llamas?), e instrucciones (vuelve hacia atrás).

Las proposiciones **se suelen representar con una letra minúscula**. Por ejemplo, p, q, r.

Relacionando proposiciones es posible obtener otras proposiciones. Todo razonamiento lógico debe partir necesariamente de una adecuada vinculación de algunas proposiciones elementales.

La lógica matemática parte de proposiciones elementales como axiomas, postulados o hipótesis y emplea razonamientos lógicos para determinar si las conclusiones obtenidas son verdaderas o falsas.

Las proposiciones se pueden clasificar en:

- Tautologías: una proposición compuesta es una tautología si es verdadera para todas las asignaciones de valores de verdad, para sus proposiciones componentes. Es decir, su valor verdadero no depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman, sino de la manera en que se establecen relaciones sintácticas de unas proposiciones con las otras.
- Contradicciones: aquellas proposiciones que, en todos los casos posibles de su tabla de verdad, su valor es falso siempre. Su valor falso no depende de los valores de verdad de las proposiciones que la forman, sino de la manera en que se establecen relaciones sintácticas de unas proposiciones con las otras.
- Contingentes, falacias o inconsistencias: también denominadas verdad de hecho, es aquella proposición que puede ser verdadera o falsa, combinando tautología y contradicción, según los valores de las proposiciones que la integran.

Los elementos que relacionan proposiciones son los **conectivos lógicos** u **operaciones lógicas**.

Conectivos lógicos	Símbolo
y	^
o	v
sí…entonces	→
sí y solo si	↔
no	¬

Tabla 1. Conectivos lógicos.

Los conceptos para tener en cuenta en las relaciones entre proposiciones son:

- Implicación lógica: cualquier condicional que sea tautología.

- Equivalencia lógica: es toda bicondicional que sea tautología.

Las relaciones entre proposiciones se pueden reflejar en tablas de verdad, que son tablas que muestran el valor de verdad de una proposición compuesta. Las tablas de verdad fueron desarrolladas por C. S. Peirce hacia 1880, pero más tarde Ludwig Wittgenstein dio el formato que es más popular, en su *Tractatus logico-philosophicus* de 1921.

Las tablas de verdad son métodos sencillos con gran potencial, ya que sirven para demostrar propiedades lógicas y semánticas de proposiciones del lenguaje humano o de cálculo proposicional:

- Ver si son tautologías, contradictorias o contingentes.

- Ver las condiciones de verdad.
- Ver el rol inferencial, las conclusiones lógicas y qué proposiciones se consiguen a partir de otras, lógicamente hablando.

A continuación, veamos las tablas de los conectivos lógicos:

- Negación (también se representa con ~):

p	¬p
0	1
1	0

Figura 3. Negación.

- Conjunción:

p	q	p ∧ q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 4. Conjunción.

- Disyunción no exclusiva:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Figura 5. Disyunción no exclusiva.

- Disyunción exclusiva:

p	q	$p \Delta q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Figura 6. Disyunción exclusiva.

- Condicional:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Figura 7. Condicional.

- Bicondicional:

p	q	p↔q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Figura 8. Bicondicional.

A continuación, se muestra un ejemplo de tabla de verdad de una relación entre proposiciones:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$$

P	Q	¬p	P → q	¬p ^ q	(p → q) ↔ (¬p ^ q)
V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F

Tabla 2. Tabla de verdad.

La aplicación de la lógica proposicional más común es la que se realiza en juegos, de azar o estratégicos. También se ha aplicado en inteligencia artificial. La inteligencia artificial trata de explicar cómo funciona la mente humana, ya que utiliza algoritmos que controlan diferentes funciones. Tanto la robótica como los sistemas de agentes inteligentes son sistemas creados con la idea de tomar decisiones por sí mismos; por lo tanto, la conexión entre lógica matemática y lógica computacional que se utiliza en varios niveles es clara: circuitos informáticos, programación lógica, optimización.

3.4. Lógica de descripción ALC

Las lógicas descriptivas son más que los lenguajes para formalizar conceptos, son un conjunto de lenguajes de representación del conocimiento que se utilizan para representar el conocimiento terminológico de un dominio determinado de una manera estructurada y formal, de modo que esté bien entendido.

Deben usarse para representar la ontología (formalización de un dominio) y permitir el razonamiento al respecto. Aparecen nuevos elementos de lenguaje y semántica, necesarios para formalizar las propiedades de objetos o individuos que pertenecen al dominio y las relaciones entre conceptos y roles al establecer las bases del conocimiento.

Usa lenguajes formales para definir vocabulario de dominio, compartir significado y deducir nuevo conocimiento.

Las lógicas descriptivas **son apropiadas para la web semántica** porque son útiles para agregar razonamiento a la red de redes. Tienen una sintaxis formal que permite describir los conceptos de nociones importantes de un universo o dominio, las relaciones que surgen o existen entre ellos y los constructores de nuevos conceptos. Como toda lógica formal, hace posible razonar sobre la base de conocimiento que se haya definido como tal. Son variantes de la lógica de primer orden (Huertas, 2006).

Características formales de la lógica descriptiva o lógica de descriptores:

- Como comentamos al principio, modelan ontologías, proporcionan descripciones a los dominios y formalizan los elementos de una terminología o descripciones de una ontología. La sintaxis y la semántica no tienen ambigüedad, ya que son formales.
- Formalismo descriptivo: roles, constructores y conceptos. Ejemplo de formalización del concepto: «animal cuyos padres son humanos».

$$Animal \sqcap \forall \, tiene \, . \, Hijo \, . \, Humano \, .$$

Donde los diferentes elementos que aparecen son:

- Un concepto primitivo: $Animal$
- Un rol o relación: $\forall \, tiene \, . \, Hijo \, . \, Humano$ («todo hijo es humano»)
- Un constructor de nuevos conceptos: $\sqcap$ (conjunción de conceptos).
- Formalismo terminológico: emplea axiomas que introducen propiedades de la terminología descriptiva y descripciones complejas. Por ejemplo:

$Mujer \sqsubseteq Persona$ («una mujer es una persona»)

$Hombre \equiv Persona \sqcap \neg \, Mujer$ («un hombre es una persona no mujer»)

- Formalismo asertivo que incluye propiedades de individuos. Por ejemplo:

$mar\acute{\imath}a : Mujer$ («el individuo María es una mujer»)

$(jes\acute{u}s, mar\acute{\imath}a) : tieneHijo$ («el individuo María tiene el hijo individuo Jesús»)

- Es posible inferir un nuevo conocimiento a partir del dado. Se emplean cálculos o algoritmos de conocimiento que deciden. Permiten implementar procesos automatizados.

En resumen, la lógica descriptiva se compone de: conceptos (padre, madre, humano); relaciones entre los conceptos, denominadas propiedades o roles (tieneHijo, esHijoDe), y elementos del dominio, denominados individuos (María, Jesús).

La base de conocimiento tiene dos niveles:

- TBox (términos): la descripción de los conceptos. Conjunto de axiomas terminológicos.
- ABox (aserciones): la descripción de los individuos. Conjunto de axiomas asertivos.

	Sintaxis	*Semántica* (I es una interpretación de los símbolos de la sintaxis)
Nombres de individuos	$o, p, \ldots$	*Objetos* $I(o), I(p), \ldots$ son *elementos* de Δ (dominio de interpretación)
TBox	$C \sqsubseteq D$ $R \sqsubseteq S$	*Inclusiones de conceptos o roles* $I(C) \subseteq I(D)$ $I(R) \subseteq I(S)$
	$C \equiv D$ $R \equiv S$	*Igualdades de conceptos o roles* $I(C) = I(D)$ $I(S) = I(S)$
ABox	$o : C$	*Instanciación de concepto: a es del concepto C* $I(o) \in I(C)$
	$(o,p) : R$	*Instanciación de rol: b está relacionado con a por R* $(I(o), I(p)) \in I(R)$

Figura 9. TBox y ABox. Fuente: (Huertas, 2006).

Las proposiciones en lógica descriptiva pueden representarse en lógica de primer orden:

$$\text{Padre} \equiv \text{Persona} \cap \exists\ \text{tieneHijo Persona}$$

$$\forall x(\text{Padre}(x) \leftrightarrow (\text{Persona}(x) \wedge \exists y(\text{tieneHijo}(x,y) \wedge \text{Persona}(y))))$$

$$\text{Orgulloso} \equiv \text{Persona} \cap \exists\ \text{tieneHijo ReciénNacido}$$

$$\forall x(\text{Orgulloso}(x) \leftrightarrow (\text{Persona}(x) \wedge \exists y(\text{tieneHijo}(x,y) \wedge \text{RecienNacido}(y))))$$

$$\text{ReciénNacido} \subseteq \text{Persona}$$

$$\forall x(\text{RecienNacido}(x) \rightarrow \text{Persona}(x))$$

Figura 10: Lógica de primer orden.

Definición de conceptos
Subclase: $C \subseteq D$ (C está incluido en D ó D subsume a C)
Intersección: $C \cap D$
Unión: $C \cup D$
Complemento: $\neg C$
Concepto vacío: $\perp$
Clases Disjuntas: $C \cap D \equiv \perp$
Equivalencia: $C \equiv D$

Tabla 3. Definición de conceptos.

Existen varias propiedades:

Existencial ($\exists$ R C)

x pertenece a $\exists$ R C si existe algún valor y $\in$ C tal que R(x, y)

Universal ($\forall$ R C)

x pertenece a $\forall$ R C si para todo y, si R(x, y), entonces y $\in$ C

Cardinalidad (P = n)

x pertenece a (P = n) si existen n y $\in$ C tales que R(x, y)

Cardinalidad máxima (P X n)

x pertenece a (P $\leq$ n) si existen n o menos y $\in$ C tales que R (x, y)

Cardinalidad mínima (P X n)

x pertenece a (P $\geq$ a) si existen n o más y $\in$ C tales que R(x, y)

Las propiedades pueden tener los siguientes atributos:

Reflexiva	P es reflexiva $\Rightarrow$ $\forall x P(x, x)$
Irreflexiva	P es irreflexiva $\Rightarrow$ $\forall x \neg P(x, x)$
Simetría	Si P(x,y) entonces P(y,x)
Asimetría	Si P(x,y) entonces $\neg$P(y,x)
Transitividad	Si P(x,y) y P(y,z) entonces P(x,z)

Tabla 4. Atributos de las propiedades.

Las relaciones que se establecen entre propiedades:

Inversa	P es inversa de Q ⇒ P(x,y) ⇔ Q(y,x)
Subpropiedad	P subpropiedad de Q si P(x,y) ⇒ Q(x,y)

Tabla 5. Relaciones entre propiedades.

Y tienen una serie de propiedades de funcionalidad:

Propiedad funcional	P(x,y) y P(x,z) entonces y = z
Propiedad funcional inversa	P(x,y) y P(z,y) entonces x = z
Claves	P(x,y) y P(z,y) entonces x = z

Tabla 6. Propiedades de funcionalidad.

A partir de una base de conocimiento se puede realizar un razonamiento (inferencia):

Satisfacción de conceptos	De $\sum$ no se deduce que $C \equiv \perp$
Subsunción	$\sum \Rightarrow C \subseteq D$
Instanciación	$\sum \Rightarrow a \in C$
Recuperación de información	Dado un concepto C, obtener a tales que $a \in C$
Comprensión	Dado un elemento a, obtener concepto más específico C tal que $a \in C$

Tabla 7. Razonamiento.

ALC es la lógica descriptiva básica. En la siguiente figura hay una presentación formal de este sistema.

ALC	*Sintaxis*	*Semántica* (*I* es una interpretación de los símbolos de la sintaxis)
Nombres de conceptos atómicos	$A, B, ..$	*Predicados unitarios* $I(A)$, $I(B)$,.. son subconjuntos de Δ (dominio de interpretación)
Nombres de roles atómicos	$R, S, ..$	*Predicados binarios* $I(R)$, $I(S)$,.. son relaciones binarias sobre Δ
Conceptos Universal y Vacío	$\top$ $\bot$	$I(\top) = \Delta$ Universal: describe el universo del dominio $I(\bot) = \varnothing$ Vacío: describe lo contradictorio.
Conceptos complejos (se obtienen a partir de los conceptos y roles atómicos usando constructores)	($\mathcal{C}$) $\neg C$	*Complementario: concepto con objetos que no son de C* $I(\neg C) = \Delta - I(C)$
	$C \sqcap D$	*Intersección de conceptos: concepto con objetos de C y D* $I(C \sqcap D) = I(C) \cap I(D)$
	($\mathcal{U}$) $C \sqcup D$	*Unión de conceptos: concepto con objetos de C o D* $I(C \sqcup D) = I(C) \cup I(D)$
	($\mathcal{E}$) $\exists R.C$	*Restricción existencial: el concepto cuyos objetos son los que están relacionados por R con los de C* $I(\exists R.C) = \{b \in \Delta$ / existe $c \in \Delta$ $((b,c) \in I(R)$ y $c \in I(C))\}$
	$\forall R.C$	*Restricción universal: el concepto cuyos objetos se relacionan por R sólo con objetos de C* $I(\forall R.C) = \{b \in \Delta$ / para todo c $((b,c) \in I(R)$ implica $c \in I(C))\}$

Figura 11. ALC. Fuente: (Huertas, 2006).

3.5. Lógica de orden superior

Una lógica de orden superior o de segundo orden es una extensión de una lógica de primer orden en la que se añaden variables para propiedades, funciones y relaciones, y cuantificadores que operan sobre esas variables. Así, se expande el poder expresivo del lenguaje sin tener que agregar nuevos símbolos lógicos (Enderton, 2009).

La necesidad de la lógica de segundo orden se refleja en el axioma de inducción de la aritmética de Giuseppe Peano.

Se requiere un lenguaje en el que los cuantificadores puedan abarcar no solo las variables que representan los elementos de hormigón, sino también las relaciones o funciones.

En la lógica de primer orden, los cuantificadores solo se pueden aplicar a los objetos (elementos de primer orden), mientras que los de mayor orden son extensiones de la lógica de primer orden que permiten que los cuantificadores se apliquen a los predicados definidos en los objetos de segundo orden.

La lógica de segundo orden tiene un **poder expresivo mayor** que la de primer orden, lo que permite crear axiomas matemáticos de sistemas complejos que no son formalizables por medio de la lógica de primer orden.

Existen **varios tipos de lógica de segundo orden** según el tipo de variables adicionales introducidas con respecto a las de la lógica de primer orden:

- La lógica de segundo orden monádica (LSOM): añadimos variables para cierto dominio dentro de sus subconjuntos.
- La lógica de segundo orden completa (LSOC): se añaden tanto variables como cuantificadores que pueden referirse a cualquiera de estas variables.

Sintaxis de la lógica de segundo orden (LSO):

Dado: vocabulario X

La lógica de segundo orden (LSO) sobre $\mathcal{L}$ es definida como la extensión de LPO que incluye las siguientes reglas:

- *Si $t_1, \ldots, t_k$ son $\mathcal{L}$-términos y X es una variable de segundo orden de aridad k (vale decir, una relación con $k \geq 1$ argumentos), entonces $X(t_1, \ldots, t_k)$ es una fórmula en LSO*
- *Si φ es una fórmula en LSO y X es una variable de segundo orden de aridad k, entonces $\exists X \varphi$ y $\forall X \varphi$ son fórmulas en LSO*

Figura 12: Sintaxis de la lógica de segundo orden. Fuente: (Arenas, 2010).

Semántica de la lógica de segundo orden:

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A, una asignación σ es una función que asigna:

- *un valor en A a cada variable x de primer orden: $\sigma(x) \in A$*
- *un subconjunto de A^k a cada variable X de segundo orden con k argumentos: $\sigma(X) \subseteq A^k$*

Figura 13: Semántica de la lógica de segundo orden. Fuente: (Arenas, 2010).

La definición de LSO incluye tres casos extra:

Para una variable de segundo orden X con aridad k:

- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models X(t_1, \ldots, t_k)$ *si y sólo si* $(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_k)) \in \sigma(X)$
- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \exists X \varphi$ *si y sólo si existe* $S \subseteq A^k$ *tal que* $(\mathfrak{A}, \sigma[X/S]) \models \varphi$
- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \forall X \varphi$ *si y sólo si para todo* $S \subseteq A^k$, *se tiene que* $(\mathfrak{A}, \sigma[X/S]) \models \varphi$

Figura 14: Casos extra de la lógica de segundo orden. Fuente: (Arenas, 2010).

La definición de LSO incluye tres casos extra:

Para una variable de segundo orden X con aridad k:

- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models X(t_1, \ldots, t_k)$ *si y sólo si* $(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_k)) \in \sigma(X)$
- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \exists X \varphi$ *si y sólo si existe* $S \subseteq A^k$ *tal que* $(\mathfrak{A}, \sigma[X/S]) \models \varphi$
- $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \forall X \varphi$ *si y sólo si para todo* $S \subseteq A^k$, *se tiene que* $(\mathfrak{A}, \sigma[X/S]) \models \varphi$

3.6. Lógica multivaluada y lógica difusa

La **lógica multivaluada** es una lógica que permite valores intermedios (grande, tibio, lejos, pocos, muchos, etc.) y en la que se emplean más de dos valores de verdad para describir conceptos que van más allá de lo verdadero y lo falso. Las lógicas multivaluadas ofrecen herramientas conceptuales que **hacen posible describir formalmente la información difusa, vaga o incierta**.

La **lógica difusa** (también llamada lógica borrosa) es una lógica multivaluada que permite **representar matemáticamente la incertidumbre y la vaguedad**, proporcionando herramientas formales para su tratamiento. Lofti A. Zadeh es considerado el padre de la lógica difusa. Su carrera se centró en trabajos sobre conjuntos difusos y la aplicación de la lógica difusa en el razonamiento aproximado. El término «lógica difusa» aparece por primera vez en 1974.

«Cuando aumenta la complejidad, los enunciados precisos pierden su significado y los enunciados útiles pierden precisión.» Esto puede resumirse en «los árboles no te dejan ver el bosque» (Zadeh, 1973).

El modelo de caracterizar un problema por medio de lógica difusa se basa en la prerrogativa de que el mapeo entre conceptos se realiza por medio de la semántica, no de la precisión numérica. Es muy adecuado para modelizar problemas a partir del conocimiento de los expertos que, normalmente, detallan su base de conocimiento en forma de expresiones poco precisas.

La aplicación de esta lógica en la Inteligencia artificial está orientada a manejar el razonamiento bajo incertidumbre y con nociones imprecisas. También puede emplearse para la gestión de bases de datos y sistemas basados en el conocimiento cuando se sepa que la información es imprecisa.

En procesos de automatización de las técnicas de prospección de datos, que suelen estar ligadas a conjuntos difusos o multivaluados, también interesa disponer de métodos de razonamiento automático para estas lógicas.

Un esquema de funcionamiento típico para un sistema difuso podría ser:

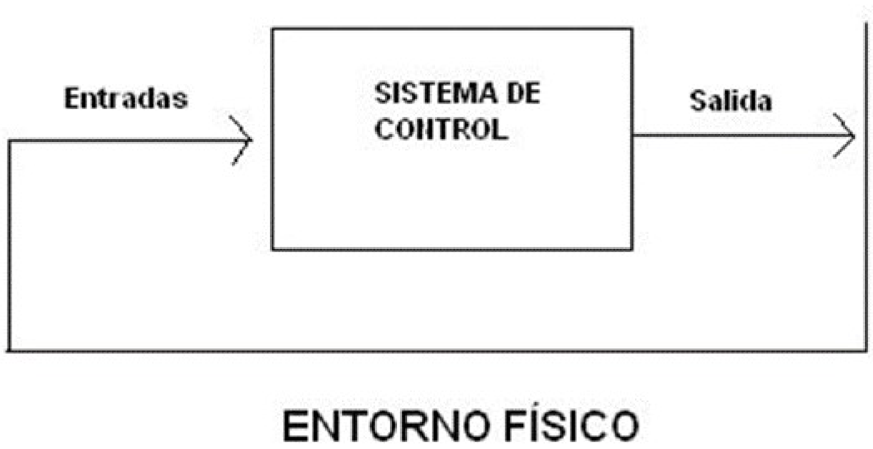

Figura 15: Esquema de funcionamiento para un sistema difuso.

Observando el esquema: el sistema de control hace los cálculos con base en sus reglas heurísticas, de la forma SI (antecedente) ENTONCES (consecuente), donde el antecedente y el consecuente son también conjuntos difusos. Por ejemplo: SI hace calor, ENTONCES bajar temperatura. La salida final actuaría sobre el entorno físico y los valores sobre el entorno físico de las nuevas entradas (modificados por la salida del sistema de control) serían tomados por sensores del sistema.

Imaginemos que nuestro sistema difuso era el acondicionador de aire que regula la temperatura de acuerdo con las necesidades. Los chips difusos del acondicionador de aire recogen los datos de entrada, que en este caso podrían ser simplemente la temperatura y la humedad. Estos datos están sujetos a las reglas del motor de inferencia (como se discutió anteriormente, en la forma SI… ENTONCES…), lo que deriva en un área de resultados. Desde esa área, se elegirá el centro de gravedad, proporcionándolo como una salida. Según el resultado, el acondicionador de aire podría aumentar la temperatura o disminuirla en función del grado de salida.

3.7. Referencias bibliográficas

Arenas, M. (12 de 12 de 2010). *Marenas.sitios.ing.uc.cl*. Obtenido de La lógica de segundo orden: Sintaxis: https://marceloarenas.cl/iic3260-10/clases/comp-lpo-ext-II.pdf

Caparrini, F. S. (07 de 01 de 2014). *Fernando Sancho Caparrini*. Obtenido de Una introducción a Prolog: http://www.cs.us.es/~fsancho/?e=73

Enderton, H. (2009). Second-order and Higher-order Logic. En Zalta, E. (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford: Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Huertas, A. (2006). Lógicas descriptivas: lógicas para la red. (págs. 8(85-102)). Azafea.

Reina, A. (22 de 02 de 2016). *DGETI - CBTis 137: Lógica*. Obtenido de UNIDAD 4 EVALUAR ARGUMENTACIONES (EPR).

Zadeh, J. (1973). *Outline of a new approach to the analysis of complex system*. IEEE Transaction on System Man and Cybernetics, (págs. 1, 28-44).

Lógica descriptiva ALC

Alonso, J. A., Martín-Mateos, F. J., Hidalgo, M. y Ruiz, J. L. (2006). *Formalización de la lógica descriptiva ALC en PVS.* Universidad de Sevilla. Sevilla. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/251809495_Formalizacion_de_la_logica_descriptiva_ALC_en_PVS

Recurso para ahondar en la lógica descriptiva ALC.

Lógicas de segundo orden

Márquez, D. (2008). Límites de la lógica de predicados de primer orden para análisis lingüístico. *Lenguaje*, *36*(2), 617-628. Recuperado de: http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/2807/1/Lenguaje36%282%29,p.617-628,2008.pdf

En este artículo se muestran algunas de las insuficiencias de la lógica de primer orden en el análisis lingüístico.

Lógicas multivaluadas

Arnold, O. Sobre lógicas Multivaluadas. Universidad del Tolima. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/266499366_Sobre_logicas_multivaluadas

En este artículo se muestran introducciones muy generales a tres lógicas sin la dualidad verdadero/falso y una formalización de la lógica difusa.

Introducción a las lógicas multivaluadas

Ojeda, M. (2007). *Breve introducción a las lógicas multivaluadas.* Programa de Doctorado en Computación, Universidad de Málaga. Málaga. Recuperado de: https://www.dc.fi.udc.es/~cabalar/mvl.pdf

Diapositivas que permiten adentrarse en el mundo de las lógicas multivaluadas.

Web ontológica

Accede a la página web a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web: https://www.w3.org/

Página web en la que puedes profundizar en el lenguaje de web ontológica.

Glosario de lógica

Página web en la que puedes consultar un glosario de lógica.

Accede a la página web a través del aula virtual o desde la siguiente dirección web: https://glosarios.servidor-alicante.com/logica

Bibliografía adicional

Baader, F., McGuinness, D., Nardi, D. y Patel-Schneider, P. (2003). *The Description Logic Handbook*. Cambridge: Cambridge U.P.

1. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones?

A. Ayer fue martes.

B. El motor tiene un fallo.

C. (A + B)*(A-B) = 2A-2B.

D. Todas son correctas.

2. Señala qué enunciados no son declarativos:

A. La tierra es redonda.

B. Recoge las zapatillas, por favor.

C. Doce menos tres igual a nueve

D. ¿Cómo te encuentras?

3. La siguiente tabla de verdad es una tautología:

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

A. Verdadero.

B. Falso.

4. A qué tipo de lógica corresponde la siguiente definición: «deriva de la lógica matemática y se aplica al área de las ciencias de la computación. Permite trabajar con lenguajes de programación».

A. Lógica de primer orden.

B. Lógica computacional.

C. Lógica informal.

5. La lógica difusa permite:

A. Representar matemáticamente la vaguedad.

B. Representar matemáticamente la incertidumbre.

C. Ambas respuestas son correctas.

6. En la lógica matemática:

A. Las expresiones no tienen por qué tener significado exacto.

B. Cada expresión tiene un significado exacto.

C. Las expresiones se formalizan de manera poco concreta y no se emplea el simbolismo.

7. Un sistema difuso:

A. La salida final puede actuar sobre el entorno físico.

B. Emplea reglas de la forma «si antecedente, entonces consecuente».

C. Nunca produce ninguna salida.

8. La siguiente tabla de verdad corresponde a una contingencia:

A. Verdadero.

B. Falso.

9. El considerado padre de la lógica difusa es:

A. Aristóteles.

B. Zadeh.

C. Gödel.

10. ¿Cuál de los siguientes tipos de lógica permite valores intermedios como templado, o cerca?:

A. Lógica multivaluada.

B. Lógica de segundo orden.

C. Lógica de primer orden.