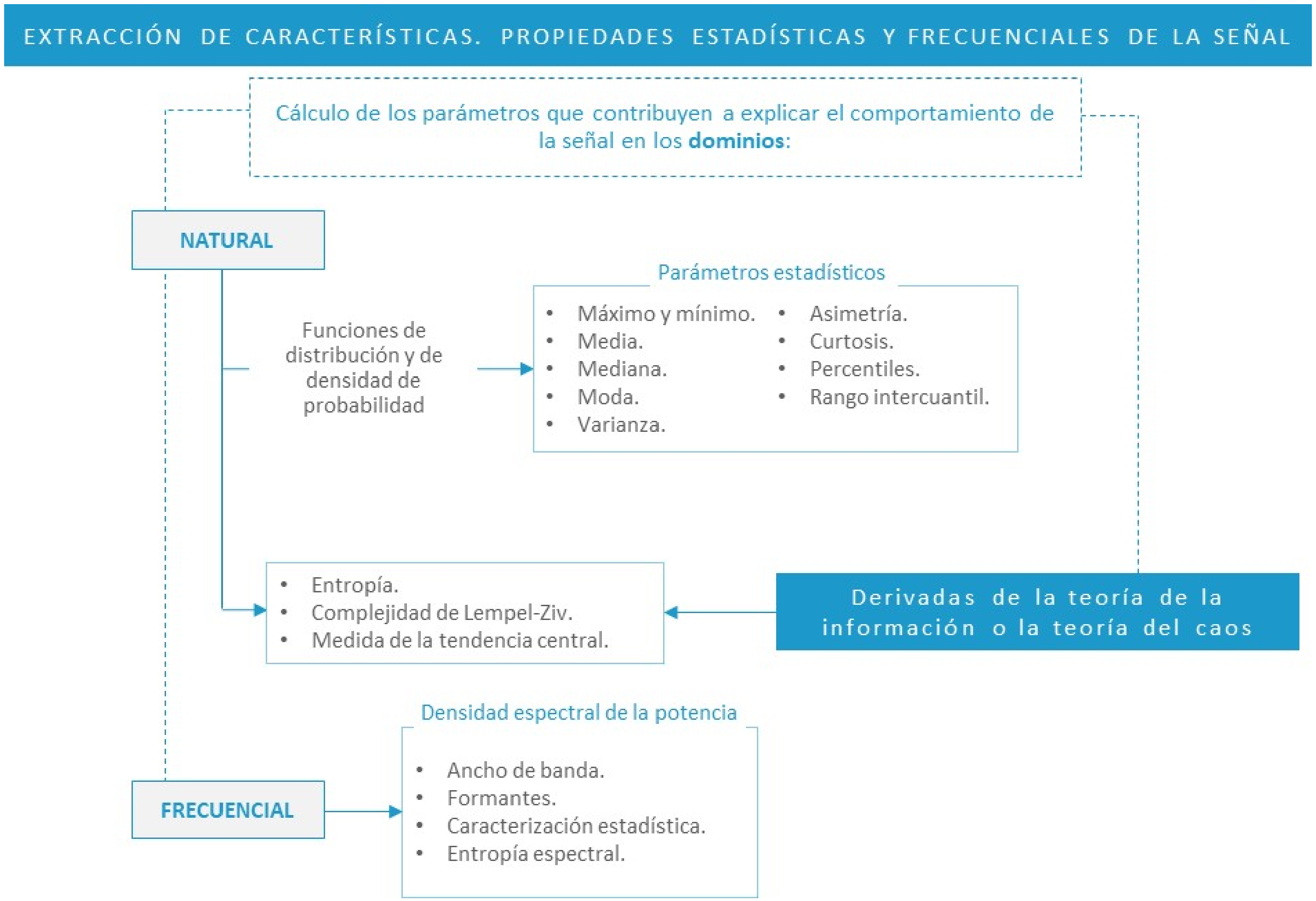
Visión Artificial

Tema 11. Extracción de características. Propiedades estadísticas y frecuenciales de la señal

Índice

Esquema



EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS. PROPIEDADES ESTADÍSTICAS Y FRECUENCIALES DE LA SEÑAL
Cálculo de los parámetros que contribuyen a explicar el comportamiento de la señal en los **dominios**:
NATURAL
Funciones de distribución y de densidad de probabilidad
Parámetros estadísticos
• Máximo y mínimo.
• Media.
• Mediana.
• Moda.
• Varianza.
• Asimetría.
• Curtosis.
• Percentiles.
• Rango intercuantil.
• Entropía.
• Complejidad de Lempel-Ziv.
• Medida de la tendencia central.
Derivadas de la teoría de la información o la teoría del caos
FRECUENCIAL
Densidad espectral de la potencia
• Ancho de banda.
• Formantes.
• Caracterización estadística.
• Entropía espectral.

11.1. ¿Cómo estudiar este tema?

Para estudiar este tema deberás leer con atención las ideas clave que se desarrollan a continuación.

Este tema tiene como objetivo proporcionar herramientas con las que caracterizar el comportamiento de nuestras señales. Se van a explicar las principales variables que describen las propiedades de la señal y, como resultado, tendremos un conjunto de atributos de diversa naturaleza que cuantifican diferentes cualidades de la fuente de información que manejamos.

Estos atributos contribuyen a sintetizar la información contenida en la señal, de forma que pueda ser manejada más eficientemente en una etapa final basada en técnicas de reconocimiento de patrones.

En temas anteriores, se ha descrito cómo las señales, generalmente series temporales de naturaleza unidimensional, e imágenes, definidas en dos dimensiones, que manejamos pueden ser modeladas matemáticamente como procesos estocásticos. Asumiremos en este tema que nuestras señales o procesos estocásticos son estacionarios en sentido amplio. Por tanto, las propiedades estadísticas de la señal no varían en función de las coordenadas del proceso.

De acuerdo a este modelo, las muestras observadas en una señal $f(\cdot)$ pueden ser consideradas como **realizaciones de una variable aleatoria.** Por ejemplo, si nuestra señal se trata de un electrocardiograma, cuya amplitud refleja el potencial del campo eléctrico generado por la actividad muscular del corazón, las muestras de la señal pueden tomarse como observaciones de una variable aleatoria que toma el valor de dicho potencial. Por tanto, puede caracterizarse el comportamiento estadístico de esta variable.

Las funciones de distribución y de densidad de probabilidad definen por completo el comportamiento estadístico de una variable.

Sin embargo, en algunas aplicaciones prácticas es deseable disponer de elementos cuantitativos más fácilmente manejables que una función para describir sus propiedades. Por ejemplo: el valor medio de la variable sería uno de estos atributos. Estos elementos permiten obtener una caracterización estadística parcial de la variable frente a la descripción completa que nos ofrecen las funciones mencionadas.

Además de la caracterización puramente estadística de la variable aleatoria que representa el valor de la señal, pueden calcularse otros parámetros que contribuyen a explicar el comportamiento de la señal en el dominio en el que queda definida (por ejemplo: en el tiempo, en el caso de series temporales o en las dos coordenadas espaciales para imágenes). En este sentido, es habitual emplear **medidas cuantitativas derivadas de la teoría de la información o la teoría del caos.**

Por último, cabe destacar que hemos mencionado la extracción de atributos de la señal de partida mediante su análisis en el dominio natural. Sin embargo, el análisis en el dominio frecuencial proporciona atributos de gran valor para la definición de su comportamiento. Estos atributos se derivan de la densidad espectral de potencia de la señal de partida, que se obtiene como la transformada de Fourier de su función de autocorrelación.

La siguiente figura muestra un esquema de los principales conceptos expuestos en este tema.

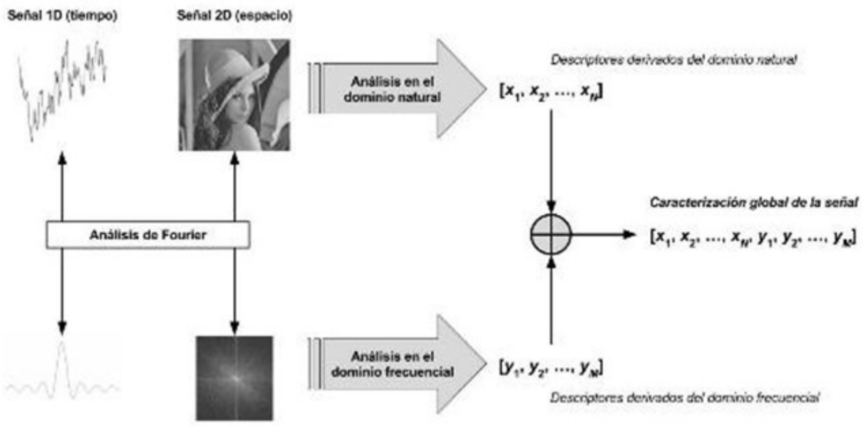


Figura 1. Proceso de caracterización de señales en su dominio natural y frecuencial para la generación de un vector global de características.

11.2. Caracterización de señales en el dominio natural

En primer lugar, se indicarán los **parámetros más comunes** a partir del análisis de la señal en el dominio en el que se define. Entre estos, se tendrán parámetros estadísticos y otros derivados de la teoría de la información.

Caracterización estadística parcial

Máximo y mínimo

La diferencia entre ambos valores define el **rango dinámico** de la señal.

Media

Asumamos que nuestra señal *f(·)* está compuesta por *M* muestras. En el caso de una serie unidimensional, esta tendría longitud *M.* Para una imagen, estaría formada por un total de *M* píxeles. Utilizamos para denotar los diferentes valores que toma nuestra señal, asumiendo que puede ser uno de *N* diferentes, es decir, $j = 1,...,N$.

Finalmente, supongamos que k_j muestras de las M observadas tienen un valor f_j. Puede deducirse de forma directa que el número total de muestras es la suma de los cardinales asociados a cada uno de los posibles valores f_j:

$$\sum_j k_j = M$$

A partir de este escenario, podemos calcular el **valor medio de la muestra** de la siguiente forma:

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{M} f_i$$

Es decir, el valor medio se obtiene como la media ponderada de todos los valores f_j posibles. El peso en la ponderación viene dado por la relación $\frac{k_j}{M}$, que aproxima la probabilidad de observar un valor f_j en la señal. Esta aproximación se obtiene, por tanto, como la fracción entre el número de observaciones del valor f_j y el número total de muestras en nuestra señal.

Cabe destacar que en un ejercicio aparentemente tan simple como el cálculo de la media se llevan cabo diferentes pasos:

- En primer lugar, se discretiza la variable continua que refleja la amplitud de la señal. Teóricamente, nuestra señal *f(·)* toma valores en un rango continuo. Sin embargo, se ha asumido para la estimación de la media que *f(·)* es discreta y toma únicamente uno de los N valores posibles $f_j j = 1, \ldots, N$.

- Posteriormente, se ha aproximado la función de densidad de probabilidad de esta variable discreta. Para ello, se ha aproximado la probabilidad asociada a cada posible valor de la variable como la frecuencia de observación de dicho valor.

Este ejercicio de discretización y estimación de la función de densidad de probabilidad de la variable discreta se repetirá para el cálculo de otros parámetros estadísticos que permiten una caracterización parcial.

El valor medio obtenido para la señal *f(·)* es una estimación de su media real η_F, que viene definida de la siguiente forma:

$$\eta_F = EF = \int_{-\infty}^{\infty} f p_F\left(f\right) df$$

Donde:

- *F* es la variable aleatoria que representa el valor de la señal.
- $p_F(f)$es la función de densidad de probabilidad de la variable.
- *F* y *E{·}* denota el operador esperanza matemática.

Mediana

El valor mediano o mediana de una variable F es el valor f_{med} de esta para el que la probabilidad de observar una muestra de F en el intervalo $(-\infty, f_{med}]$ es 0.5. Es decir, el área bajo la función de densidad de probabilidad a ambos lados de este valor es la misma y es 0.5. Por tanto, puede expresarse de la siguiente forma:

$$P\left(F \leq f_{med}\right) = P\left(F > f_{med} \right. = \int_{-\infty}^{f_{med}} pf\left(f\right) df = \int_{f_{med}}^{\infty} pf\left(f\right) df = 0{,}5$$

La definición se aplica de la misma forma a variables discretas, ya que su función de densidad de probabilidad puede escribirse en términos de funciones $\delta(x)$. Sin embargo, la estimación de la mediana suele obtenerse como el valor de la observación ubicada en la posición central tras la ordenación de las muestras disponibles para la variable. Si el número de muestras disponibles es par, se toma como estimación de la mediana el valor de la **media aritmética** entre las dos observaciones centrales.

Moda

La moda de la variable *F* (f_{med}) viene dada por el valor de la misma que se toma con mayor probabilidad. Es decir, vendría dada por el valor en el cual la función de densidad de probabilidad $p_F()$ alcanza su máximo:

$$f_{mod} = argmax\{p_F(f)\}$$

Varianza

La varianza de una variable aleatoria es el promedio de las desviaciones, en términos cuadráticos, de los valores que toma la variable respecto a su media. A partir de un conjunto de observaciones, la varianza puede estimarse de la siguiente forma:

$$\sigma^{-2} = \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{M} \left(f_j - \bar{f}\right)^2$$

Como puede apreciarse, para la **estimación de la varianza** se lleva a cabo la misma aproximación empleada para el cálculo de la media basada en la discretización de la variable y la estimación de su función de densidad de probabilidad.

De forma precisa y de acuerdo a su definición, la varianza viene dada por la esperanza matemática de las desviaciones cuadráticas de F respecto a su media:

$$\sigma_F^2 = E\{(F - \eta_F)\}$$

Asimetría

La asimetría (en inglés, *skewness)* de una variable aleatoria cuantifica el grado de asimetría de su función de densidad de probabilidad respecto al eje vertical que pasa por su media.

Este **estadístico,** de forma coloquial, refleja hacia qué lado de la media es más pronunciada la cola de la distribución.

- Un valor positivo de la asimetría refleja que la cola de la función de densidad de probabilidad a la derecha de la media es más larga que a la izquierda.
- En caso contrario, el valor de la asimetría será menor que 0.
- En el caso de una variable caracterizada por una **función simétrica,** como es el caso de las variables gaussianas, su asimetría es 0.

La figura 2 muestra gráficamente la interpretación de la asimetría de una variable aleatoria.

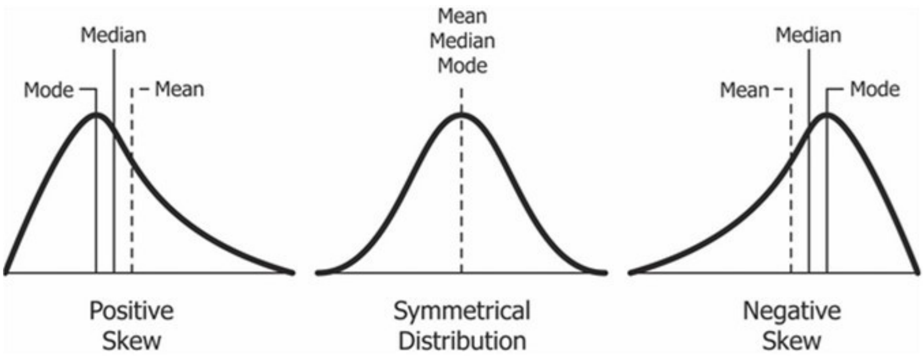


Figura 2. Interpretación de la asimetría estadística de una variable. Fuente: https://medium.com/@cybersiftIO/anomaly-detection-vs-ransomware-b83510a3a860

La asimetría γ viene dada por la siguiente expresión:

$$= E\left[\left(\frac{f-\eta_F}{\sigma}\right)^3\right]$$

Donde:

- σ es la desviación típica de la variable F, que viene dada por la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Curtosis

La curtosis de una variable caracteriza las **colas** de su función de densidad de probabilidad. Como referencia, se suele emplear la curtosis de la distribución normal, que es 3. Un valor inferior (curtosis negativa) refleja que los *outliers* que genera la distribución son menos extremos que los derivados de una distribución normal. La interpretación contraria es aplicable a un valor positivo de curtosis.

La siguiente imagen refleja la propiedad evaluada por este parámetro.

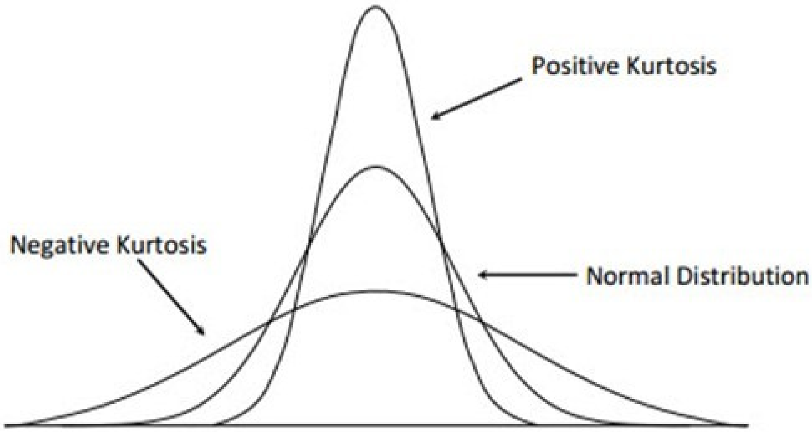


Figura 3. Interpretación de la curtosis de una variable. Fuente: https://medium.com/@cybersiftIO/anomaly-detection-vs-ransomware-b83510a3a860

La expresión para el cálculo de la curtosis (δ) es la siguiente:

$$\delta = E\left[\left(\frac{f-\eta_F}{\sigma}\right)^4\right]$$

Percentiles

Diferentes valores de percentil contribuyen a dar una idea de la distribución estadística de la variable a caracterizar. El percentil de la variable *F* representa el umbral para el cual la probabilidad acumulada es u. Matemáticamente, viene dado por la siguiente expresión:

$$P(F \leq f_u) = u$$

Generalmente, se calcula el valor del percentil para los umbrales 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. A fin de reducir el número de parámetros, en los umbrales 0.25, 0.5 y 0.75.

Rango intercuartil

Los percentiles para los umbrales de probabilidad 0.25 y 0.75 se denominan primer cuartil y tercer cuartil, respectivamente. El rango intercuartil (IQ) es la diferencia entre ambos percentiles:

$$IQ = f_{0.75} - f_{0.25}$$

Otros parámetros

Se indican a continuación otros parámetros que sintetizan información de interés sobre el comportamiento de la señal en su dominio original.

Entropía

Se incluye en este apartado, a pesar de que se corresponde con un parámetro estadístico más derivado de la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria a caracterizar. La entropía ha sido descrita en detalle en temas anteriores de la asignatura. Como se indicó, cuantifica el promedio de la cantidad de información generada por una variable aleatoria.

De forma intuitiva, una variable tendrá mayor entropía si su función de densidad de probabilidad tiende a ser más uniforme en el rango de definición de esta. Es decir, mayor entropía está asociada a mayor incertidumbre sobre el valor que a priori puede tomar la variable.

Por tanto, la **distribución uniforme** será la que tenga una mayor entropía asociada, pues ninguno de los valores que la variable puede tomar posee, a priori, mayor probabilidad de ser observado que otros.

Complejidad de Lempel-Ziv

La complejidad de Lempel-Ziv es una medida no paramétrica de complejidad de una fuente de información. Generalmente, su definición aplica a señales unidimensionales en forma de serie, sin embargo, es extensible a imágenes. Su cálculo se basa en la obtención del número de subsecuencias diferentes que hay contenidas en la señal original. Para cada una de ellas, se calcula la **frecuencia de repetición.**

Una mayor tasa de repetición reflejará una menor complejidad de la fuente de datos, ya que el contenido de la señal indica que su origen es menos caótico y, por tanto, su comportamiento es más predecible y hay **menor incertidumbre** asociada.

Medida de la tendencia central

Las ecuaciones derivadas de la teoría del caos pueden emplearse para generar distintos tipos de gráficos. Entre estos, tenemos el que se conoce como el **gráfico de diferencias de primer orden:** considerando una serie temporal $f[n]$, la representación de $f[n+2] - f[n+1]$ frente a $f[n+1] - f[n]$.

Centrado en el origen, ofrece una representación gráfica del **grado de variabilidad** en la serie temporal $f[n]$. Con este enfoque, en lugar de definir categóricamente una serie temporal como caótica o no caótica, se cuantifica el grado de variabilidad o caos.

A partir de la representación de las diferencias de primer orden se obtiene la métrica de variabilidad conocida como medida de la tendencia central.

Un mayor valor de esta métrica refleja mayor variabilidad y, por tanto, un mayor grado de caos y de dificultad para predecir el comportamiento de la fuente de datos.

11.3. Características derivadas del análisis en frecuencia

La representación de una señal en sus componentes frecuenciales permite apreciar atributos de esta que no son observables en su dominio natural. Dicha representación viene descrita por la teoría de Fourier, que define las operaciones de transformación directa e inversa a partir de una base ortogonal de funciones de la frecuencia.

La **densidad espectral de potencia** $S(\omega)$, abreviada como DEP, de una señal refleja la potencia contenida por unidad de frecuencia. Así, aquellas regiones de ω en las que esta función tome una amplitud mayor reflejarán las componentes frecuenciales más significativas de la señal. Por ejemplo: en el caso de una señal de voz, su densidad espectral de potencia se concentra en el rango entre 300 Hz y 4 KHz, aproximadamente.

A continuación, se indican diferentes **descriptores** de la función de densidad espectral de potencia que caracterizan su perfil y comportamiento.

Ancho de banda

El ancho de banda de una señal se define como el rango de frecuencias en el que su **densidad espectral de potencia es mayor que cero.** Se calcula como la diferencia entre las componentes frecuenciales máxima y mínima de la señal.

Generalmente no se suele emplear la definición anterior, que refleja el ancho de banda absoluto de la señal. Así, es habitual considerar el ancho de banda de acuerdo a criterios como la diferencia entre componentes frecuenciales para las que $S(\omega)$ refleja una atenuación de 3 dB respecto a su máximo o el rango de frecuencias donde se concentra el 90 % de la potencia de la señal.

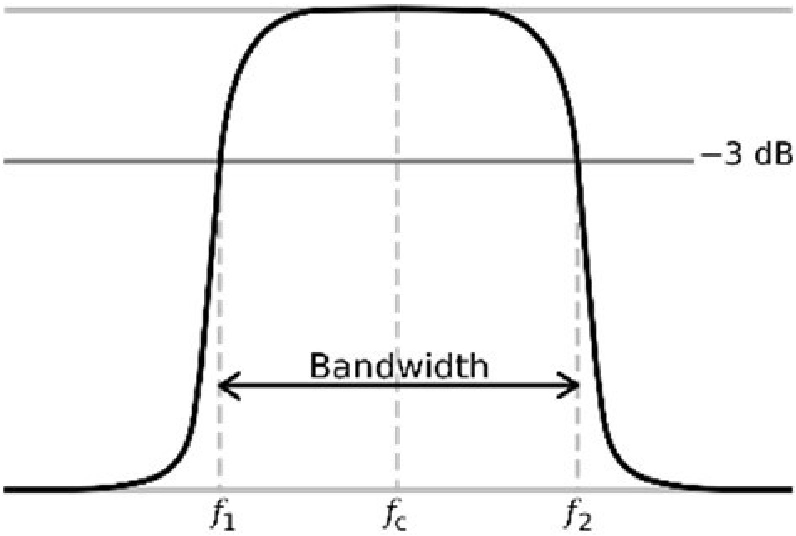


Figura 4. Definición del ancho de banda a 3 dB de una señal. Fuente: Adaptado de https://en.wikipedia.org/wiki/Bandwidth_(signal_processing)

Cualitativamente, puede interpretarse que una señal caracterizada por un mayor ancho de banda presenta diferencias más significativas en la velocidad de variación de su perfil (variaciones lentas y rápidas). Por tanto, la señal contiene cambios más diversos y está asociada a una mayor cantidad de información.

Formantes

Las frecuencias formantes se identifican como **máximos locales** en la función de densidad espectral de potencia (como se ve en la figura 5). Estas componentes se asocian con las principales frecuencias contenidas en la señal bajo estudio.

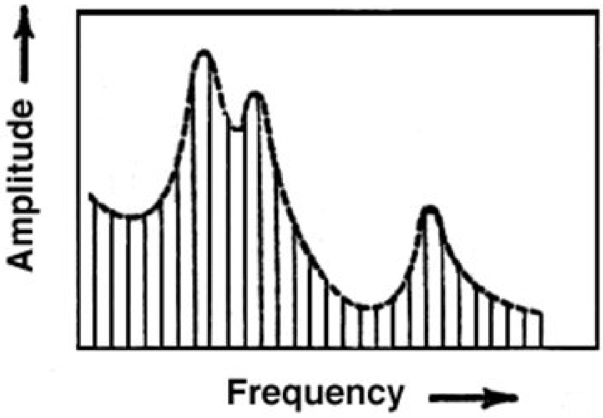


Figura 5. Ejemplo de una función de densidad espectral de potencia en la que se aprecian tres frecuencias fromantes. Fuente: https://www.sfu.ca/sonic-studio/handbook/Formant.html

Caracterización estadística

La **normalización** de la función de densidad espectral de potencia, de tal forma que el área contenida bajo la misma sea igual a la unidad, hace que pueda ser interpretada como una función de densidad de probabilidad. Esta caracterizaría el comportamiento estadístico de la variable aleatoria que viene dada por la frecuencia. Así, el área bajo dicha función de probabilidad hasta la frecuencia ω_0 representaría la probabilidad de observar componentes frecuenciales menores o iguales que ω_0 en nuestra señal.

Así, a partir de esta **función de densidad de probabilidad,** pueden obtenerse parámetros de naturaleza estadística como la media, la mediana o la varianza. Concretamente, la frecuencia mediana se ha empleado comúnmente para la caracterización del espectro de una señal.

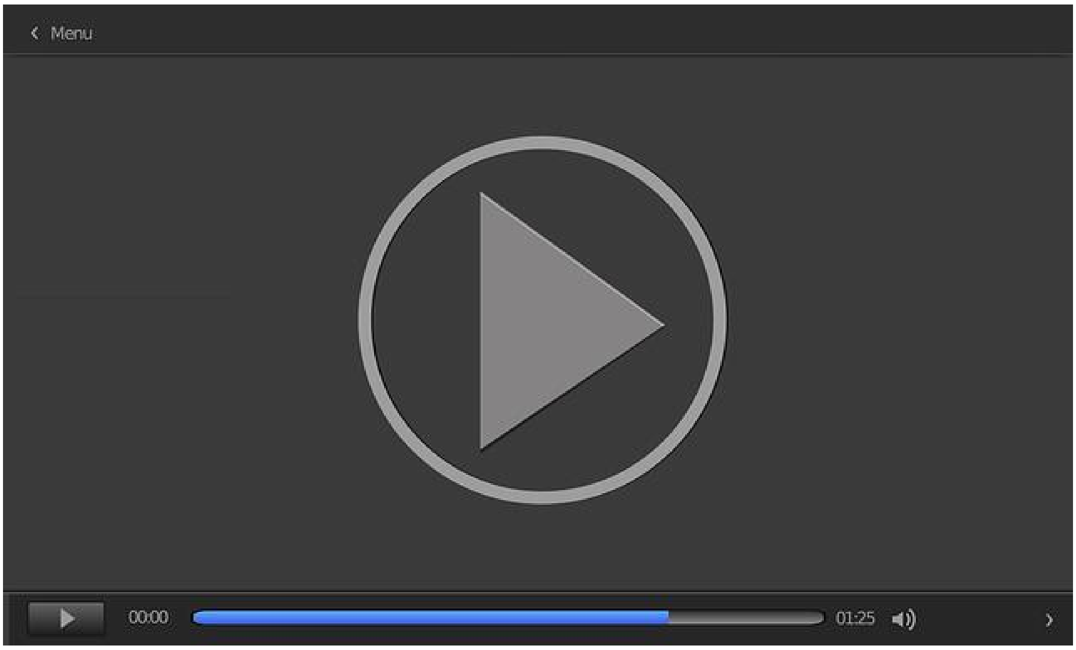
Entropía espectral

Por último, a partir de la función de densidad espectral normalizada se obtiene la entropía espectral. Este parámetro no es más que el cálculo de entropía para la variable aleatoria que representa la componente frecuencial.

Continuous Random Variables: Probability Density Functions

MrNichollTV. (2014, enero 28). *Continuous Random Variables: Probability Density Functions* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=9KVR1hJ8SxI

Vídeo que profundiza en la función de densidad de probabilidad.



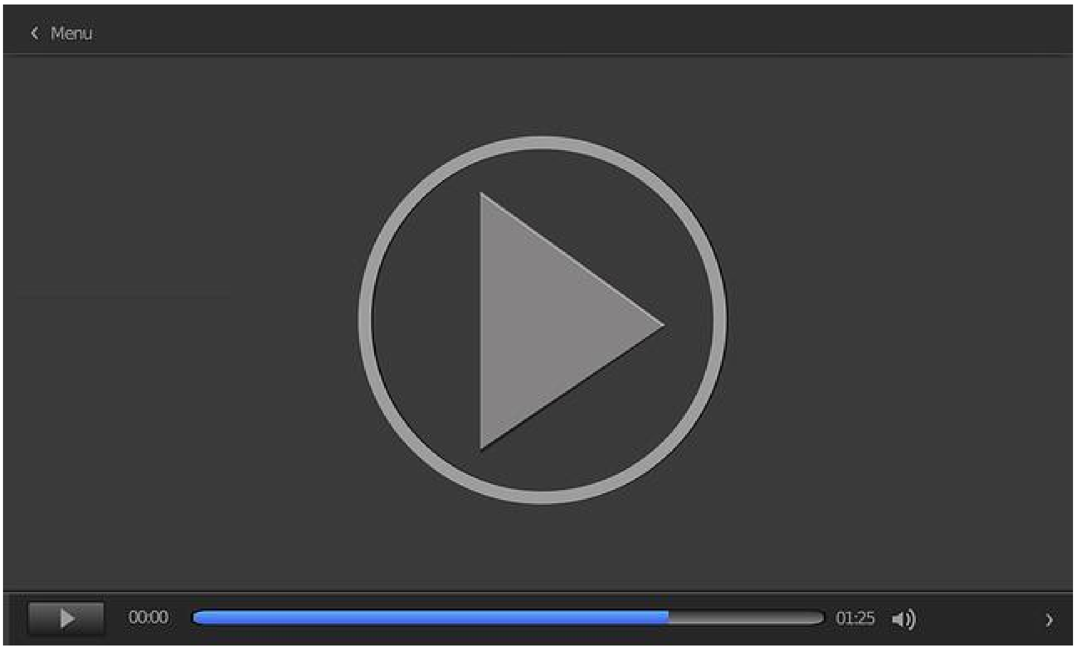
Accede al vídeo:

https://www.youtube.com/embed/9KVR1hJ8SxI

Continuous Random Variables: Cumulative Distribution Functions

MrNichollTV. (2012, noviembre 26). *Continuous Random Variables: Cumulative Distribution Functions* [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=4BswLMKgXzU

Segundo vídeo que describe la función de distribución.



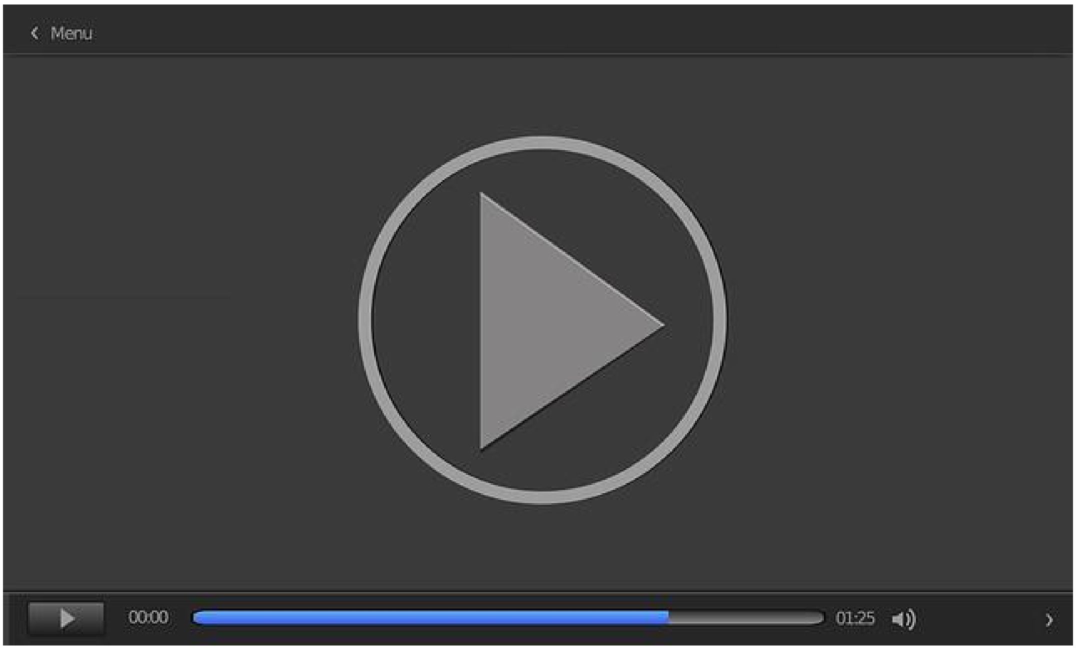
Accede al vídeo:

https://www.youtube.com/embed/4BswLMKgXzU

Continuous Random Variables: Mean and Variance

MrNichollTV. (2016, diciembre 5). *Continuous Random Variables: Mean & Variance [*Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=gPAxuMKZ-w8

Tercer vídeo que profundiza en los conceptos estadísticos esenciales, en este caso la media y la varianza.



Accede al vídeo:

https://www.youtube.com/embed/gPAxuMKZ-w8

Bibliografía

Alberola, C. (2004). *Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos: una introducción orientada a las Telecomunicaciones*. Valladolid: Universidad de Valladolid, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Editorial. Recuperado de https://cesarperezsite.files.wordpress.com/2014/12/pr0b4b1l1d4d-v4r14bl35-4l34tor345.pdf

Jobson, J. D. (1991). *Applied multivariate data analysis. Volume I: Regression and experimental design*. Berlín: Springer-Verlag.

Jobson, J. D. (1992). *Applied multivariate data analysis: volume II: Categorical and Multivariate Methods*. Berlín: Springer-Verlag.

Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. y Nawab, S. H. (1998). *Señales y sistemas*. Naucalpán de Juárez: Prentice Hall.

Yamane, T. (1973). *Statistics: An introductory analysis*. San Francisco: Harper & Row.

1. ¿Cuál es el propósito de la etapa de extracción de características?

    A. Reducir el ruido de la señal y facilitar el procesado en etapas posteriores.

    B. Detectar elementos anómalos en la señal para su eliminación.

    C. Ensalzar elementos o estructuras de interés en la señal.

    D. Sintetizar la información contenida en la señal, de forma que pueda ser manejada más eficientemente en una etapa final basada en técnicas de reconocimiento de patrones.

2. ¿En qué dominios, a grandes rasgos, se lleva a cabo la caracterización de una señal?

    A. Dominio natural (tiempo o espacio) y frecuencia.

    B. Frecuencia.

    C. Tiempo.

    D. Tiempo y espacio.

3. La caracterización estadística parcial de una señal conlleva el cálculo de:

    A. La asimetría y la curtosis.

    B. El ancho de banda de la señal.

    C. La media, la moda, la varianza, la mediana y otros derivados de la función de densidad de probabilidad.

    D. Métricas derivadas de la teoría de la información y la teoría del caos.

4. ¿Tiene sentido calcular la media de los valores que toma una señal unidimensional definida en el tiempo si esta no es estacionaria?

A. Sí, representa un parámetro estadístico que describe el comportamiento de la señal.

B. Sí, pero ha de indicarse también la varianza para completar la caracterización.

C. No, dado que la media será una función del tiempo, por lo que no será un descriptor preciso de su comportamiento global.

D. Sí, siempre.

5. Supongamos que la variable aleatoria que representa el valor de nuestra señal tiene varianza nula. ¿Cuál es su entropía?

A. 0.

B. Menor que en el caso de una variable uniforme, pero mayor que para una variable normal.

C. No es posible calcular su valor.

D. Depende de la presencia de ruido en la señal.

6. Si pretendemos comparar dos señales A y B de la misma naturaleza (similar función de densidad de probabilidad) mediante su rango intercuartil y observamos que A tiene un valor más elevado. ¿Qué podemos afirmar al respecto?

A. Los valores que toma A tienen un mayor grado de dispersión.

B. Los valores que toma B tienen un mayor grado de dispersión.

C. No podemos afirmar nada.

D. Las señales A y B tienen un comportamiento estadístico idéntico.

7. Podemos cuantificar cómo de predecible es una señal basándonos en el histórico de la serie mediante:

A. Asimetría y curtosis.

B. La caracterización estadística parcial.

C. Su ancho de banda.

D. La complejidad de Lempel-Ziv.

8. La densidad espectral de potencia de una señal:

A. Refleja la cantidad de información contenida en la señal.

B. Refleja el comportamiento estadístico de la señal.

C. Refleja la potencia contenida por unidad de frecuencia.

D. Refleja la densidad de probabilidad de la señal.

9. El ancho de banda de una señal se define como:

A. La diferencia entre las componentes frecuenciales más relevantes de una señal.

B. La componente frecuencial más relevante de una señal.

C. La diferencia entre las componentes frecuenciales máxima y mínima de la señal.

D. La componente frecuencial para la que se observa una atenuación de 3 dB en el espectro de potencia de la señal.

10. ¿Un mayor valor del ancho de banda?

A. Está asociado a un valor de entropía espectral que tiende a cero.

B. Está asociado a señales con mayor disparidad entre sus componentes frecuenciales.

C. Depende de la tasa de bits por segundo en una señal de comunicaciones digital.

D. Está asociado a la utilización de filtros paso alto en el preprocesado de la señal.