

# Sobre la relación entre dos formas distintas de considerar pérdidas internas en un ciclo Joule Brayton a tiempo finito

L. A. Soto Ruiz<sup>1</sup>, F. Angulo Brown<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono (55) 81009642 E-mail: lsotor1500@alumno.ipn.mx

**Resumen** — En este trabajo se presenta una comparación entre dos modos distintos de incluir las irreversibilidades internas en un ciclo Joule-Brayton que emula el comportamiento de las turbinas de gas. En un caso se incluyen las irreversibilidades internas por medio de la fricción del fluido de trabajo con las partes mecánicas del ciclo, incluyendo además un parámetro "de aglomeración"  $R$  proveniente de la desigualdad de Clausius para incluir irreversibilidades diferentes de la fricción. Por otro lado, otro modelo del ciclo Joule-Brayton irreversible debido a Gordon y Huleihil en el que las irreversibilidades internas se representan por parámetros que dan cuenta de las desviaciones de las ramas "adiabáticas" del ciclo real respecto del las verdaderas adiabáticas del ciclo ideal. Ambos modelos reproducen razonablemente las curvas en forma de rizo de potencia-eficiencia que son características de las máquinas del mundo real.

**Palabras Clave** – fuente, márgenes, tablas

**Abstract** — This paper presents a comparison between two different methods of incorporating internal irreversibilities into a Joule-Brayton cycle that emulates the behavior of gas turbines. In one case, internal irreversibilities are included through the friction of the working fluid with the mechanical parts of the cycle, additionally incorporating a "clustering" parameter  $R$  derived from the Clausius inequality to account for irreversibilities other than friction. On the other hand, another model of the irreversible Joule-Brayton cycle developed by Gordon and Huleihil represents internal irreversibilities through parameters that account for deviations of the cycle's "adiabatic" branches from the true adiabatic conditions of the ideal cycle. Both models reasonably reproduce the characteristic power-efficiency loop curves seen in real-world machines.

**Keywords** – Fonts, margins, tables

## I. INTRODUCCIÓN

Desde 1975, Curzon y Ahlborn (CA [1]) iniciaron una rama de la termodinámica irreversible conocida hoy en día como Termodinámica de Tiempos Finitos (TTF).[2, 3, 4, 5] Estos autores propusieron una versión modificada del ciclo reversible de Carnot, añadiendo flujos irreversibles de calor en las ramas

isotérmicas del ciclo. Estos flujos están dados por la ley de enfriamiento de Newton. Evidentemente, estos flujos irreversibles en el acoplamiento entre el fluido de trabajo y sus correspondientes almacenes térmicos producen entropía distinta de cero. De este modo, el llamado ciclo de Curzon y Ahlborn se distingue del ciclo de Carnot en que produce entropía. Además, integrando la ley de enfriamiento de Newton, se encuentran los tiempos de duración de los dos procesos isotérmicos, y de este modo, tomando los procesos adiabáticos como aproximadamente instantáneos, el periodo del ciclo  $\tau$  es simplemente la suma de los dos tiempos isotérmicos. Así, el ciclo CA, además de producir entropía, produce potencia distinta de cero, a diferencia del ciclo de Carnot, que es de duración infinita y tiene potencia y producción de entropía cero. De este modo, después de unos cálculos simples, CA encontraron que este ciclo tiene una configuración de potencia máxima en la que la eficiencia resulta ser:

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad (1)$$

siendo  $T_2$  y  $T_1$  las temperaturas absolutas de las isothermas fría y caliente respectivamente. Posteriormente, este modelo CA fue calificado como endorreversible; es decir, internamente reversible, produciendo entropía solo en los acoplamientos con los alrededores. Este artículo mostró una tabla comparando la ecuación (1) con resultados del mundo real correspondientes a tres plantas de potencia. La comparación resultó ser muy exitosa, con errores inferiores al 10% respecto a las eficiencias experimentales. De este modo, empezaron a publicarse numerosos artículos mejorando la aproximación de Curzon y Ahlborn, llegando a incluir irreversibilidades internas en el fluido de trabajo (ciclos no endorreversibles) [6, 7]. Entre las modificaciones al ciclo CA, debemos incluir la propuesta de nuevas funciones objetivo a optimizar[8, 9].

En el presente artículo comparamos dos formas distintas de incluir irreversibilidades internas para el tratamiento del ciclo Joule-Brayton. Por un lado, tenemos la referencia [10], donde las irreversibilidades se incluyen como fricción interna entre el fluido de trabajo y las partes mecánicas del ciclo [11]. Además, se incluye un parámetro de no endorreversibilidad  $R$ , que da cuenta de otras pérdidas internas acumuladas por turbulencia y otros fenómenos. Por otro lado, incluimos el modelo de Gordon y Huleihil [12], donde las irreversibilidades internas se introducen por las llamadas eficiencias isentrópicas, que miden la desviación de las eficiencias isentrópicas reales con respecto a

las isotermicas reversibles en el compresor y la turbina del ciclo Joule-Brayton respectivamente, ver figura (1). En nuestro trabajo mostramos que estas dos formas de incluir irreversibilidades internas son equivalentes.

## II. Primer modelo[10]

En 1998 Guzman-Vargas y Angulo-Brown publicaron un modelo disipativo del ciclo Joule-Brayton. En la figura 1 de tal articulo se muestra un diagrama TS del ciclo disipativo que es igual a la figura 4 del modelo de Gordon Huleihil.

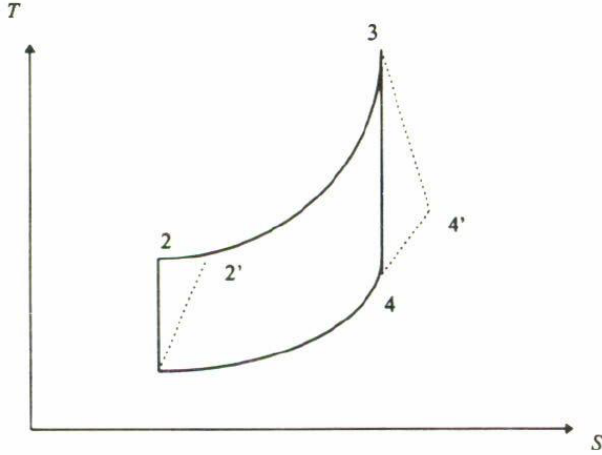


Fig. 1: Diagrama Temperatura-Entropía del ciclo Joule Brayton[10]

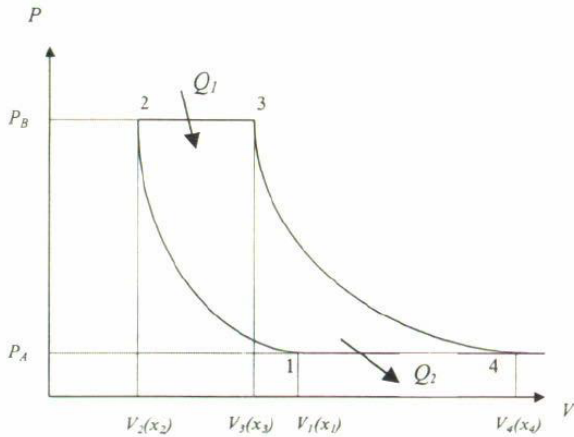


Fig. 2: Diagrama Presión-Volumen del ciclo Joule Brayton[10]

Sin entrar en muchos detalles Guzman-Vargas y Angulo-Brown llegaron a expresiones para la potencia con disipación y la eficiencia con disipación siguientes

$$P = \frac{C_{P_B} - C_{P_A} \theta r_p^{(1-\gamma)/\gamma}}{K_1 + k_2 r_p^{(1-\gamma)/\gamma}} - b [\theta r_p^{(2-\gamma)/\gamma} - 1]^2 \quad (2)$$

y

$$\eta = 1 - \frac{C_{P_A} r_p^{(1-\gamma)/\gamma}}{C_{P_B}} - \frac{b [\theta r_p^{(2-\gamma)/\gamma} - 1]^2}{C_{P_B}} [K_1 + K_2 r_p^{(1-\gamma)/\gamma}] \quad (3)$$

Donde  $C_{P_A}$  y  $C_{P_B}$  son las capacidades caloríficas de las sustancias de trabajo en los procesos isobáricos  $P_A$  y  $P_B$  respectivamente,  $r_p$  es la razón de presiones  $P_B/P_A$ ,  $\gamma$  es el exponente adiabático que es  $C_P/C_V$  la  $\theta$  es  $T_3/T_1$  y la  $b = \mu(x_2/\Delta t)^2$ ,  $x_2$  corresponde al volumen mínimo  $V_2$ ,  $K_1 = 1/t_1$  y  $K_2 = 1/t_2$  siendo  $t_1$  y  $t_2$  la duración de los procesos 2-3 y 4-1 respectivamente, ver referencia [10]. Cuando en la ecuación (3) se toma  $C_{P_A} = C_{P_B}$  y  $\mu = b = 0$  uno obtiene inmediatamente la eficiencia del ciclo ideal de Joule Brayton, la cual es  $\eta = 1 - r_p^{(1-\gamma)/\gamma}$  [13] tomando los valores numéricos de todas las constantes involucradas de [10, 13, 14] que son:  $b = 32.6W$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $C_p = 0.418464 JK^{-1}$ ,  $K_1 = 8.128 \times 10^{-6} sK^{-1}$ , y  $K_2 = 18.67 \times 10^{-6} sK^{-1}$ . Con estos valores se obtienen las figuras (3) y (4). Donde se observan los valores de  $r_p$  que maximizan a la potencia y eficiencia con disipación respectivamente siendo estos valores  $r_p = 19.5$  para la potencia y  $r_p = 16.4$  para la eficiencia, los cuales son valores típicos de turbinas de gas reales[14]. Por medio de las ecuaciones (2) y (3) obtenemos las curvas en forma de rizo, como se observa en la figura (5).

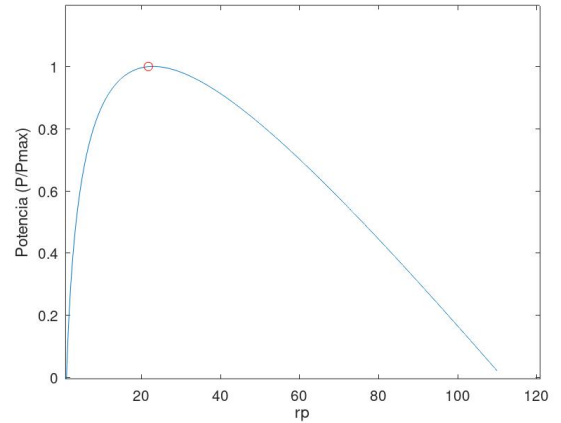


Fig. 3: Gráfica Potencia-r en un ciclo con fricción interna

Estas figuras de rizo son características de maquinas térmicas del mundo real con disipación como lo afirman Gordon y Huleihil[12]

## III. Caso no endorreversible

Partiendo de la desigualdad de Clausius

$$\Delta S_{w1} + \Delta S_{2w} \leq 0 \quad (4)$$

se puede definir el parámetro R(parámetro de no endorreversibilidad) de la siguiente manera

$$R = \frac{\Delta S_{1w}}{|\Delta S_{2w}|} \quad (5)$$

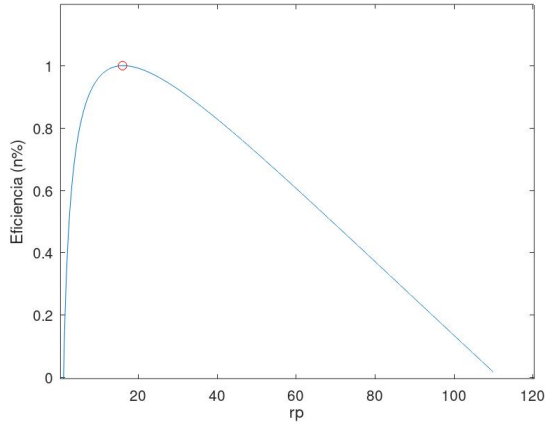


Fig. 4: Gráfica Eficiencia-r en un ciclo con fricción interna

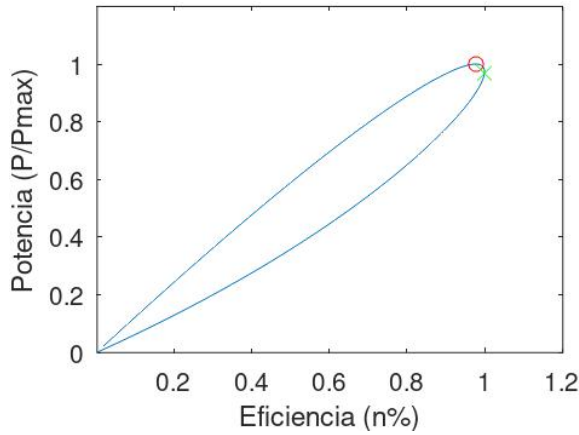


Fig. 5: Gráfica Potencia - Eficiencia en un ciclo con fricción interna

Esta R nos convierte la desigualdad de Clausius en una igualdad

$$\Delta S_{1w} + R\Delta S_{2w} = 0 \quad (6)$$

Por lo tanto se obtiene

$$R = \frac{\Delta S_{1w}}{|\Delta S_{2w}|} = \frac{C_{P_B} \ln T_3/T_2}{C_{P_A} \ln T_4/T_1} \quad (7)$$

esta R se encuentra en el intervalo  $0 \leq R \leq 1$  y cuando  $R=1$  se recupera el modelo endorreversible[10]. Usando el parámetro R las ecuaciones (2) y (3) se convierten en (8) y (9)[10]

$$P = \frac{C_{P_A} \left[ \frac{R}{\alpha} \theta r_p^{(1-\gamma)/\gamma} \right]}{K_1 + K_2 r_p^{(1-\gamma)/\gamma}} - b[\theta r_p^{(2-\gamma)/\gamma} - 1]^2 \quad (8)$$

y

$$\eta = 1 - \frac{\alpha}{R} \left\{ r_p^{(1-\gamma)/\gamma} + \frac{b[\theta r_p^{(2-\gamma)/\gamma} - 1]^2}{C_{P_A}} [K_1 + K_2 r_p^{(1-\gamma)/\gamma}] \right\} \quad (9)$$

En las ecuaciones (8) y (9)  $\alpha$  está dada por

$$\alpha = \frac{\ln T_3/T_2}{\ln T_4/T_1} < \frac{\ln T_3/T_2}{\ln T_4/T_1} \quad (10)$$

Si tomamos  $\alpha$  muy cercana a 1 y R menor a 1 se obtienen rizados como los de la figura(8)

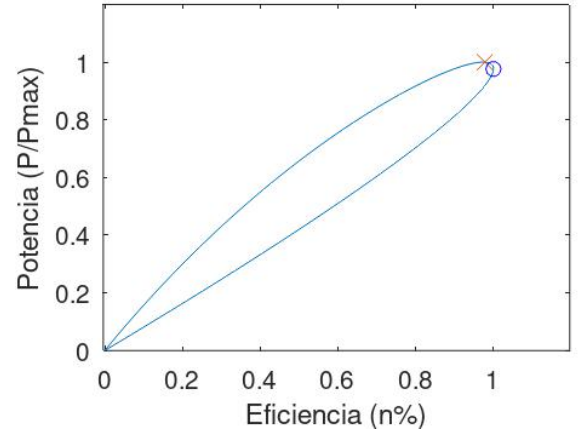


Fig. 6: Gráfica Potencia - Eficiencia, ciclo no endorreversible con R=0.8

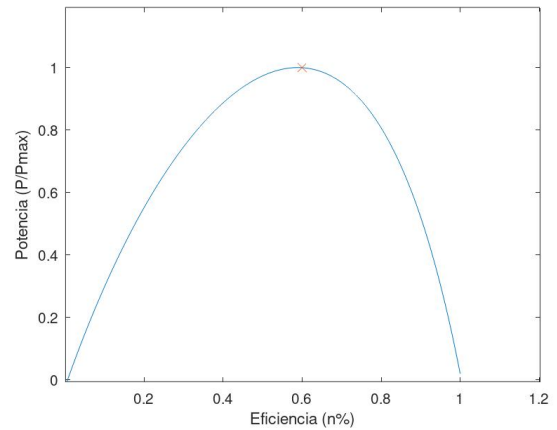


Fig. 7: Gráfica Potencia - Eficiencia del modelo (1), ciclo no endorreversible; es decir, se recupera el caso endorreversible con R=1

#### IV. Modelo dos[12]

En 1992 Gordon y Huleihil publicaron un artículo [12] en el que reprodujeron las típicas curvas en forma de rizo de potencia contra eficiencia de máquinas reales tomando el caso particular de un ciclo Joule-Brayton. La manera en que ellos consideraron las irreversibilidades internas del fluido de trabajo fue a través de las llamadas eficiencias isentrópicas que dan cuenta de las desviaciones de las isentrópicas "reales" de las isentrópicas ideales, ver figura (1). Para la turbina (proceso 3-4) la eficiencia isentrópica se define como el cociente del trabajo real sobre el trabajo reversible ( $\eta_{turb}$ ), mientras que para el compresor se define como el cociente del trabajo reversible sobre el trabajo real ( $\eta_{comp}$ ). Así, pueden calcular la potencia efectiva como

$$P = P_{turb} - P_{comp} = mC_p T_3 \left( \eta_{turb} - \frac{T_1 a}{T_3 \eta_{comp}} \right) \left( 1 - \frac{1}{a} \right) \quad (11)$$

Donde  $a$  esta dada como

$$\frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_3}{p_4} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = a \quad (12)$$

Por otro lado

$$Q_1 = mC_p T_3 \left( 1 - \frac{T_1}{T_3} - \frac{T_1(a-1)}{T_3 \eta_{comp}} \right) \quad (13)$$

$$\eta = P/Q_1 \quad (14)$$

En este caso tomando los mismos valores de las ecuaciones anteriores, y algunas relaciones como  $\theta$  que en las ecuaciones anteriores eran definidas como  $T_1/T_3$ , y tomando igual que en [12]  $\eta_{turb} = \eta_{comp}$  se obtienen las figuras (8) y (9), que son analogas a las obtenidas con el modelo 1[10]; es decir las dos maneras de incluir irreversibilidades internas son equivalentes.

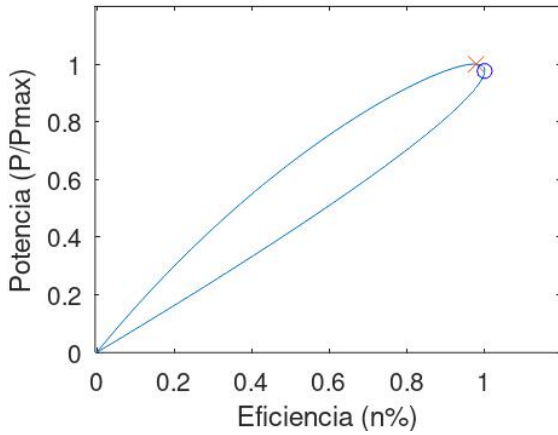


Fig. 8: Gráfica Potencia - Eficiencia usando el modelo 2 con  $\eta_{turb} = \eta_{comp} = 0.8$

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos hecho notar que hay al menos dos maneras distintas de involucrar las irreversibilidades internas en un ciclo térmico productor de potencia. Hemos tomado como ejemplo particular el ciclo Joule-Brayton que es la versión idealizada de las turbinas de gas. Los modelos que proporciona la termodinámica de tiempos finitos son adecuados para considerar fenómenos involucrados con la producción interna de entropía

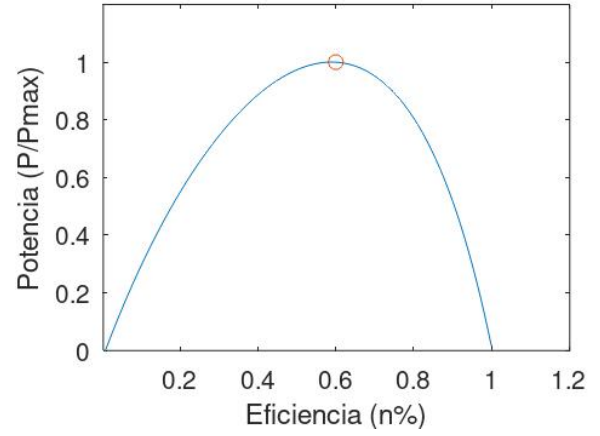


Fig. 9: Gráfica Potencia - Eficiencia usando el modelo 2 con  $\eta_{turb} = \eta_{comp} = 1$ . En este caso también se recupera el modelo endoreversible

en las máquinas reales. En el presente trabajo hemos considerado dos formas distintas de incluir las irreversibilidades internas en un ciclo Joule-Brayton. La primera forma introduciendo pérdidas por fricción y aglomerando las otras posibles causas de pérdidas a través de un parámetro  $R$  que surge de la desigualdad de Clausius. Como era de esperarse, este modelo reprodujo las curvas en forma de rizo potencia-eficiencia características del mundo real. Por otro lado, hemos incluido un segundo modelo donde las irreversibilidades internas se introducen a través de un parámetro "isentropico" que da cuenta de las desviaciones del ciclo Joule-Brayton real comparado con el ciclo Joule-Brayton ideal en las ramas adiabáticas de tal ciclo. Este segundo modelo también reproduce las curvas en forma de rizo características de los ciclo del mundo real. Por ultimo, queremos hacer notar que en las curvas en forma de rizo el punto de máxima potencia y el punto de máxima eficiencia en general son cercanos entre si como se puede ver en las figuras de rizo presentadas en este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] F. L. Curzon and B. Ahlborn, "Efficiency of a Carnot engine at maximum power output," *Am. J. Phys.*, vol. 43, pp. 22–24, Jan. 1975.
- [2] A. de Vos, *Endoreversible Thermodynamics of Solar Energy Conversion*. Oxford, England, UK: Oxford University Press, July 1992.
- [3] S. Sieniutycz and P. Salamon, eds., *Finite-time thermodynamics and thermoeconomics*. Boca Raton, FL: CRC Press, Nov. 1990.
- [4] A. Bejan, *Advanced Engineering Thermodynamics*. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 4 ed., Sept. 2016.
- [5] D. Gutkiewicz-Krusin, I. Procaccia, and J. Ross, "On the efficiency of rate processes. Power and efficiency of heat engines," *J. Chem. Phys.*, vol. 69, pp. 3898–3906, Nov. 1978.
- [6] L. A. Arias-Hernández and F. Angulo-Brown, "Thermodynamic optimization of endoreversible engines," *Rev. Mex. Fis.*, vol. 40, pp. 866–877, Jan. 1993.

- [7] C. Wu, L. Chen, and J. Chen, *Recent advances in finite-time thermodynamics*. Hauppauge, NY: Nova Biomedical, Oct. 1999.
- [8] A. M. Ares de Parga-Regalado and M. A. Ramírez-Moreno, "On the analysis of an ecological regime for energy converters," *Physica A*, vol. 605, p. 128049, Nov. 2022.
- [9] T. Yilmaz, "A new performance criterion for heat engines: Efficient power," *J. Energy Inst.*, vol. 79, no. 1, pp. 38–41, 2024.
- [10] L. Guzmán-Vargas and F. Angulo-Brown, "A dissipative Joule-Brayton cycle model," *Rev. Mex. Fís.*, vol. 44, pp. 619–623, Jan. 1998.
- [11] F. Angulo-Brown, J. A. Rocha-Martínez, and T. D. Navarrete-González, "A non-endoreversible Otto cycle model: improving power output and efficiency," *J. Phys. D: Appl. Phys.*, vol. 29, p. 80, Jan. 1996.
- [12] J. M. Gordon and M. Huleihil, "General performance characteristics of real heat engines," *J. Appl. Phys.*, vol. 72, pp. 829–837, Aug. 1992.
- [13] E. Piña, *Termodinamica*. Mexico: Trillas, 1978.
- [14] R. W. Haywood, *Analysis of engineering cycles: Worked examples to 3r.E*. Thermodynamics & fluid mechanics for mechanical engineers, Amsterdam, Netherlands: Pergamon, June 1986.