Sobre la estimación de la densidad de radiación debido a neutrinos en el universo

L. A. Soto Ruiz
Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono: (52) 5581009642 E-mail: lsotor1500@alumno.ipn.mx

Resumen — **Los neutrinos primordiales se desacoplaron temprano en el universo y contribuyen a la densidad de radiación. Su densidad de energía se expresa como:**$\rho_\nu = N_{\text{eff}} \times \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\rho_\gamma$ **donde** $N_{\text{eff}} \approx 3.046$**. Afectan la expansión cósmica, influyendo en la nucleosíntesis y el fondo cósmico de microondas. Su temperatura actual es de** 1.95 **K. Mediciones de Planck confirman valores cercanos al modelo estándar, pero desviaciones podrían señalar nueva física, como neutrinos estériles. Estimar su densidad es clave para entender la evolución del universo.**

Palabras Clave –

Abstract — **Primordial neutrinos decoupled early in the universe and contribute to the radiation density. Their energy density is expressed as:** $\rho_\nu = N_{\text{eff}} \times \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\rho_\gamma$ **where** $N_{\text{eff}} \approx 3.046$**. They affect cosmic expansion, influencing nucleosynthesis and the cosmic microwave background. Their current temperature is** 1.95 **K. Planck measurements confirm values close to the standard model, but deviations could indicate new physics, such as sterile neutrinos. Estimating their density is key to understanding the evolution of the universe.**

Keywords –

I. INTRODUCCIÓN

La densidad de energía de la radiación (ρ_{rad}) incluye fotones y neutrinos relativistas, y se expresa como:

$$\rho_{\text{rad}} = \rho_\gamma + \rho_\nu \tag{1}$$

donde ρ_γ es la densidad de energía de los fotones, y ρ_ν es la densidad de energía de los neutrinos.

I..I Densidad de los Fotones

La densidad de energía de los fotones sigue la ecuación de un gas de radiación de cuerpo negro:

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15}\frac{(k_B T_\gamma)^4}{(\hbar c)^3} \tag{2}$$

I..II Densidad de los Neutrinos

Los neutrinos estaban en equilibrio térmico con los fotones antes de desacoplarse. Su temperatura actual es:

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma \tag{3}$$

La densidad de energía de los neutrinos relativistas es:

$$\rho_\nu = \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}\rho_\gamma \tag{4}$$

Esto se debe al factor de $\frac{7}{8}$ que proviene de la estadística de Fermi-Dirac para los neutrinos en comparación con la estadística de Bose-Einstein de los fotones.

I..III Relación entre la Densidad de Neutrinos y la Densidad Total de Radiación

Definiendo el parámetro de efectividad de especies relativistas N_{eff}, que en el modelo estándar es aproximadamente 3.044, se tiene:

$$\rho_\nu = \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} N_{\text{eff}}\rho_\gamma \tag{5}$$

En valores aproximados, esto significa que los neutrinos contribuyen aproximadamente con el 68% de la densidad total de radiación en el universo temprano, mientras que los fotones contribuyen con el 32%.[1]

Esto, sin embargo, es solo un resumen de lo visto en clase; el siguiente analisis es sobre como se obtiene esta estimacion.

II. DESARROLLO

Análogo al fondo de radiación debido a fotones, también debería existir el fondo cósmico de neutrinos. Para temperaturas superiores a 1 MeV, neutrinos, electrones y fotones están en equilibrio térmico entre sí, dados por reacciones como $e^+e^- \longleftrightarrow \gamma\gamma$ o $e^+e^- \longleftrightarrow \nu\bar{\nu}$. Cuando la temperatura baja aproximadamente a la masa en reposo del electrón, toda la energía es transferida a los fotones por aniquilación de pares, incrementando así su temperatura. Consideremos la energía de partículas relativistas dada por [2]:

$$S = \frac{4}{3} k_B \frac{R^3}{T} \rho. \quad (6)$$

Como $\rho \sim T^4$, siguiendo la ley de Stefan-Boltzmann, se tiene que la entropía es constante:

$$S = (Ta)^3 = \text{Constante}. \quad (7)$$

La segunda ley de la termodinámica nos relaciona los cambios de un sistema adiabático como [3]:

$$d(s(T)V) = \frac{d(\rho(T)V) + p(T)dV}{T} \quad (8)$$

$$S(T) = \frac{\rho(T) + p(T)}{T}. \quad (9)$$

Igualando, obtenemos la fórmula de conservación de energía:

$$T \frac{dp(T)}{dT} = \rho(T) + p(T). \quad (10)$$

Dadas las ecuaciones vistas en el apéndice, vemos que:

$$\rho_{\nu_i} = \frac{7}{16} \rho_\gamma \quad (11)$$

y para $kT >> m_e c^2$:

$$\rho_{e^\pm} = \frac{7}{8} \rho_\gamma. \quad (12)$$

Utilizando los grados de libertad apropiados y la conservación de la entropía, obtenemos:

$$(T_\gamma a)_B^3 \left(1 + 2\frac{7}{8}\right) + (T_\nu a)_B^3 \sum_{i=1}^{6} \rho_{\nu_i} = (T_\gamma a)_A^3 + (T_\nu a)_A^3 \sum_{i=1}^{6} \rho_{\nu_i}. \quad (13)$$

Donde B representa el estado antes de la aniquilación, es decir, $kT > m_e c^2$, y A representa el estado después, $kT < m_e c^2$.

Dado que los neutrinos ya se habían desacoplado, su temperatura evolucionó proporcionalmente a a^{-1} y, por lo tanto, los últimos términos de ambos lados se cancelan. Así,

$$(T_\gamma a)_B^3 \frac{11}{4} = (T_\gamma a)_A^3. \quad (14)$$

Sin embargo, dado que antes de la fase de aniquilación de los pares e^+e^- se tiene que $T_\gamma = T_\nu$, esto implica que:

$$\left(\frac{T_\gamma}{T_\nu}\right)_B = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \approx 1.4. \quad (15)$$

Suponiendo que no se han producido cambios significativos posteriores en estas cantidades, hoy existe la siguiente relación entre las dos temperaturas:

$$T_{\nu,0} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_{\gamma,0}. \quad (16)$$

Una temperatura de $T_{\gamma,0} = 2.728$ K corresponde entonces a una temperatura de neutrino de 1.95 K. Si el fondo de fotones consiste en una densidad numérica de $n_{\gamma,0} = 412$ cm^{-3}, la densidad de partículas del fondo de neutrinos es:

$$n_{\nu_0} = \frac{3}{4} \frac{g_\nu}{g_\gamma} \frac{4}{11} n_{\gamma_0} = \frac{3 g_\nu}{22} n_{\gamma_0} = 336 \text{ cm}^{-3}. \quad (17)$$

$$\rho_{\nu_0} = \frac{7}{8} \frac{g_\nu}{g_\gamma} \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} \rho_{\gamma_0}. \quad (18)$$

Con $g_\nu = 6$ y $g_\gamma = 2$ [4], normalmente se toma $N_{\text{eff}} = \frac{g_\nu}{g_\gamma}$. La densidad energética y la energía media son:

$$\rho_{\nu_0} = 3\frac{7}{8} \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} \rho_{\gamma_0} = 0.178 \text{ eV cm}^{-3}. \quad (19)$$

$$\langle E_\nu \rangle_0 = 5.28 \times 10^{-4} \text{ eV}. \quad (20)$$

III. CONCLUSIONES

Los neutrinos primordiales desempeñan un papel crucial en la evolución del universo, contribuyendo significativamente a la densidad de radiación y afectando la expansión cósmica. Su desacoplamiento temprano y su temperatura actual, estimada en 1.95 K, han sido confirmados por observaciones como las del satélite Planck. La estimación de su densidad energética, $\rho_{\nu_0} = 0.178$ eV cm^{-3}, y su densidad numérica, $n_{\nu_0} = 336$ cm^{-3}, es clave para validar el modelo estándar y explorar posibles desviaciones que podrían indicar nueva física, como la existencia de neutrinos estériles.

APÉNDICE I

Tomemos la distribucion de la funcion de distribucion de neutrinos como sigue

$$n_\nu(x,p,t) = \sum_r \left(\prod_{i=1}^{3} \delta(x^i - x_r^i(t))\right) \left(\prod_{i=1}^{3} \delta(p_i - p_{ri}(t))\right)$$

con r las posibles trayectorias de neutrinos o antineutrinos. Por otro lado el momento esta dado como

$$p_r^\mu = dx_r^\mu / du_r$$

donde u_r es el parametro de normalizacion de la trayectoria en el espacio-tiempo

$$\frac{d^2 x_r^\lambda}{du_r^2} + \Gamma_{u\nu}^\lambda(x_r) \frac{dx_r^\mu}{du_r} \frac{d^2 x_r^\nu}{du_r}$$

Entre coliciones el rango de cambio entre momento esta dado por

$$\dot{p}_{ri} = \frac{1}{2p_r^0} p_r^j p_r^k \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right)_{x=x_r}$$

mientras el cambio de rango de coordinadas es

$$\dot{x}_r^i = p_r^i / p_r^0$$

asi se satisface la ecuacion de Boltzmann

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \frac{\partial n_\nu}{\partial x^i} \frac{p^i}{p^0} + \frac{\partial n_\nu}{\partial p_i} \frac{p^j p^k}{2p^0} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 0$$

$$g_{ij}(x,t) = a^2(t)\delta_{ij} + \delta g_{ij}(x,t)$$

$$n_\nu(x,t) = \bar{n}_\nu(a(t)\sqrt{g^{ij}(x,t)p_i p_j}) + \delta n_\nu(x,t)$$

$$\bar{n}_\nu(p) = \frac{1}{(2\pi)^3}[exp(p/k_B a(t)\bar{T}(t)) + 1]^{-1}$$

Así pues podemos obtener

$$n(p,T) = \frac{4\pi g p^2}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{exp\sqrt{p^2+m^2}/k_B T \pm 1}\right)$$

Las densidades están dadas por

$$\rho(T) = \int_0^\infty n(p,T)dp\sqrt{p^2+m^2}$$

resolviendo la ecuación

$$\begin{aligned}\rho(T) &= g\int_0^\infty \frac{4\pi p^3 dp}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{1}{exp(p/k_B T) \pm 1}\right)\\ &= \begin{cases} g a_B T^4/2 & \text{Bosones} \\ 7 g a_B T^4/16 & \text{Fermiones}\end{cases}\end{aligned}$$

REFERENCIAS

[1] A. Liddle, *An introduction to modern cosmology*. Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell, 3 ed., June 2015.

[2] K. Zuber, *Neutrino physics*. Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation, London, England: CRC Press, 3 ed., May 2020.

[3] S. Weinberg, *Cosmology*. London, England: Oxford University Press, Feb. 2008.

[4] Planck Collaboration, N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, R. Battye, K. Benabed, J.-P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, F. R. Bouchet, F. Boulanger, M. Bucher, C. Burigana, R. C. Butler, E. Calabrese, J.-F. Cardoso, J. Carron, A. Challinor, H. C. Chiang, J. Chluba, L. P. L. Colombo, C. Combet, D. Contreras, B. P. Crill, F. Cuttaia, P. de Bernardis, G. de Zotti, J. Delabrouille, J.-M. Delouis, E. Di Valentino, J. M. Diego, O. Doré, M. Douspis, A. Ducout, X. Dupac, S. Dusini, G. Efstathiou, F. Elsner, T. A. Enßlin, H. K. Eriksen, Y. Fantaye, M. Farhang, J. Fergusson, R. Fernandez-Cobos, F. Finelli, F. Forastieri, M. Frailis, A. A. Fraisse, E. Franceschi, A. Frolov, S. Galeotta, S. Galli, K. Ganga, R. T. Génova-Santos, M. Gerbino, T. Ghosh, J. González-Nuevo, K. M. Górski, S. Gratton, A. Gruppuso, J. E. Gudmundsson, J. Hamann, W. Handley, F. K. Hansen, D. Herranz, S. R. Hildebrandt, E. Hivon, Z. Huang, A. H. Jaffe, W. C. Jones, A. Karakci, E. Keihänen, R. Keskitalo, K. Kiiveri, J. Kim, T. S. Kisner, L. Knox, N. Krachmalnicoff, M. Kunz, H. Kurki-Suonio, G. Lagache, J.-M. Lamarre, A. Lasenby, M. Lattanzi, C. R. Lawrence, M. L. Jeune, P. Lemos, J. Lesgourgues, F. Levrier, A. Lewis, M. Liguori, P. B. Lilje, M. Lilley, V. Lindholm, M. López-Caniego, P. M. Lubin, Y.-Z. Ma, J. F. Macías-Pérez, G. Maggio, D. Maino, N. Mandolesi, A. Mangilli, A. Marcos-Caballero, M. Maris, P. G. Martin, M. Martinelli, E. Martínez-González, S. Matarrese, N. Mauri, J. D. McEwen, P. R. Meinhold, A. Melchiorri, A. Mennella, M. Migliaccio, M. Millea, S. Mitra, M.-A. Miville-Deschênes, D. Molinari, L. Montier, G. Morgante, A. Moss, P. Natoli, H. U. Nørgaard-Nielsen, L. Pagano, D. Paoletti, B. Partridge, G. Patanchon, H. V. Peiris, F. Perrotta, V. Pettorino, F. Piacentini, L. Polastri, G. Polenta, J.-L. Puget, J. P. Rachen, M. Reinecke, M. Remazeilles, A. Renzi, G. Rocha, C. Rosset, G. Roudier, J. A. Rubiño-Martín, B. Ruiz-Granados, L. Salvati, M. Sandri, M. Savelainen, D. Scott, E. P. S. Shellard, C. Sirignano, G. Sirri, L. D. Spencer, R. Sunyaev, A.-S. Suur-Uski, J. A. Tauber, D. Tavagnacco, M. Tenti, L. Toffolatti, M. Tomasi, T. Trombetti, L. Valenziano, J. Valiviita, B. Van Tent, L. Vibert, P. Vielva, F. Villa, N. Vittorio, B. D. Wandelt, I. K. Wehus, M. White, S. D. M. White, A. Zacchei, and A. Zonca, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *arXiv*, July 2018.