La edad del universo

Luis Antonio Soto Ruiz

April 19, 2025

En cosmología, la edad del universo es un parámetro crucial para entender su evolución. La estimación más precisa de la edad del universo se obtiene a partir del estudio de la radiación cósmica de fondo (CMB, por sus siglas en inglés), la expansión del universo y las observaciones astronómicas. El valor más aceptado para la edad del universo es de aproximadamente 13.8 mil millones de años.

Métodos para estimar la edad del universo

Radiación Cósmica de Fondo (CMB)

La CMB es el remanente de la radiación emitida aproximadamente 380,000 años después del Big Bang. El estudio de la CMB proporciona información sobre los parámetros cosmológicos, como la densidad de materia y la constante de Hubble, que a su vez permiten calcular la edad del universo.

Expansión del Universo

La ley de Hubble describe cómo las galaxias se alejan unas de otras a medida que el universo se expande. La constante de Hubble, H_0, es fundamental para determinar la tasa de expansión y, por lo tanto, la edad del universo. Usando la relación inversa entre la constante de Hubble y la edad del universo, se puede calcular el tiempo transcurrido desde el Big Bang.

Modelos Cosmológicos

El modelo más ampliamente aceptado es el modelo ΛCDM (Lambda Cold Dark Matter), que incluye una constante cosmológica (Λ) y materia oscura fría (CDM). Este modelo es consistente con las observaciones actuales y predice una edad del universo de aproximadamente 13.8 mil millones de años, con un margen de error de aproximadamente un 1%.

Constante cosmológica negativa

La constante cosmológica negativa implica una modificación en la ecuación de Einstein, la cual se expresa como:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

donde $G_{\mu\nu}$ representa la curvatura del espacio-tiempo, $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento y Λ es la constante cosmológica.

Originalmente, Einstein introdujo Λ con un valor positivo para mantener un universo estático, en un intento de equilibrar la atracción gravitatoria de la materia con una repulsión a gran escala. Sin embargo, con el descubrimiento de la expansión cósmica por Edwin Hubble en 1929, la necesidad de este ajuste artificial desapareció, y Einstein lo descartó como un "gran error".

Si Λ toma un valor negativo, en lugar de actuar como una fuerza repulsiva a gran escala, se convierte en una contribución atractiva adicional, intensificando el colapso gravitacional del universo. En términos de la ecuación de Friedmann:

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda \right)$$

si $\Lambda < 0$, el término Ω_Λ contribuye negativamente a la expansión. Esto provoca que la expansión del universo se frene más rápidamente que en un modelo sin constante cosmológica. Si la atracción inducida por Λ es suficientemente fuerte, la expansión puede detenerse completamente en un tiempo finito, dando lugar a un colapso gravitacional conocido como Big Crunch.

En este escenario, el universo primero se expande hasta alcanzar un máximo en su factor de escala $a_{\max}$, determinado por la ecuación:

$$\Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda = 0$$

y luego comienza a contraerse. El tiempo hasta alcanzar este punto, $t_{\max}$, se obtiene mediante la integral:

$$t_{\max} = \int_0^{a_{\max}} \frac{da'}{a' H_0 \sqrt{\Omega_m a'^{-3} + \Omega_\Lambda}}.$$

Dado que esta integral no tiene una solución analítica simple, debe resolverse numéricamente. Si se parte de un universo dominado por materia y con una constante cosmológica negativa significativa, el destino final es un colapso inevitable, lo que contrasta con el modelo estándar donde un $\Lambda > 0$ lleva a una expansión acelerada indefinida.

El estudio de universos con $\Lambda < 0$ es relevante en ciertos modelos cíclicos, donde el colapso podría dar lugar a un nuevo Big Bang en un universo oscilante.

1 Demostracion para un universo de Materia, Radiacion, plano y Constante cosmologica negativa

Primero tomaremos los valores y lo que usaremos para la demostración

$$\begin{aligned} \Omega_{m,0} &= 0.315 \\ \Omega_{r,0} &= 9.29e-5 \\ \Omega_{\Lambda} &= 0.685 \\ \Omega_{k,0} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

así pues tenemos de las ecuaciones de Friedmann

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\ \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) &= 0 \\ \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \end{aligned} \tag{2}$$

podemos tomar sin perdida de generalidad y tomando en cuenta la constante cosmológica

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_m + \frac{8\pi G}{3}\rho_r - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{3}$$

dividiremos entre $H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{c,0}$, obteniendo

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho(t)}{H_0^2} + \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho(t)_r}{H_0^2} - \frac{k}{a^2 H_0^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{4}$$

Tomando $k = 0$ se reduce como

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho(t)}{H_0^2} + \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho(t)_r}{H_0^2} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{5}$$

pero sabemos que H_0 está dado por la densidad critica a tiempo actual como $H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{c,0}$, sustituyendo esto obtenemos

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{8\pi G\rho(t)_m}{3}\frac{3}{8\pi G\rho_{m,0}} + \frac{8\pi G\rho(t)_r}{3}\frac{3}{8\pi G\rho_{r,0}} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} \tag{6}$$

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\rho(t)_m}{\rho_{m,0}} + \frac{\rho(t)_r}{\rho_{r,0}} + \Omega_\Lambda \tag{7}$$

Retomando lo anterior tenemos:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\frac{\rho_{m,0}}{a^3(t)}}{\rho_{m,0}} + \frac{\frac{\rho_{r,0}}{a^4(t)}}{\rho_{r,0}} + \Omega_\Lambda \tag{8}$$

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4(t)} + \Omega_\Lambda \tag{9}$$

Finalmente como tenemos ya H_0 despejamos la ecuacion

$$H(t) = H_0 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4(t)} + \Omega_\Lambda \right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

pero sabemos que $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$,asi pues

$$\dot{a}(t) = H_0^{-1} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4(t)} + \Omega_\Lambda \right)^{\frac{1}{2}} * a \tag{11}$$

$$\frac{da}{dt} = H_0^{-1} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2(t)} + \Omega_\Lambda a^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{12}$$

despejando el tiempo

$$dt = H_0^{-1} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2(t)} + \Omega_\Lambda a^2 \right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{13}$$

Sin embargo en este caso

$$H(t_{max}) = 0 \tag{14}$$

$$0 = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4(t)} + \Omega_\Lambda \tag{15}$$

$$a_{max} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \tag{16}$$

integrando la ecuacion

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \left(\frac{\Omega_{mr,0}}{a(t)} + \Omega_\Lambda a^2 \right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{17}$$

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \left(\frac{\Omega_{mr,0} + \Omega_\Lambda a^3}{a(t)} \right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{18}$$

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \sqrt{a} \left(\Omega_{mr,0} + \Omega_\Lambda a^3 \right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{19}$$

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \sqrt{a} \left(\Omega_{mr,0} + \Omega_\Lambda a^3 \right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{20}$$

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \sqrt{a} (\Omega_{mr,0})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{mr,0}} a^3 \right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{21}$$

Pero ya tenemos este valor

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \sqrt{a} (\Omega_{mr,0})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{a^3}{a_{max}^3} \right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{22}$$

$$t_0 = H_0^{-1} (\Omega_{mr,0})^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 \sqrt{a} \left(1 + \frac{a^3}{a_{max}^3} \right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{23}$$

$$t_0 = H_0^{-1}\sqrt{\frac{a_{max}}{\Omega_{mr,0}}}\int_0^1 \sqrt{\frac{a}{a_{max}}}\left(1+\frac{a^3}{a_{max}^3}\right)^{-\frac{1}{2}} da \tag{24}$$

Tomando $x = \frac{a}{a_{max}} \rightarrow dx = \frac{da}{a_{max}}$, tambien cambiando loa rangos de integracion cuando $a = 0 \rightarrow x = 0$ y $a = a \rightarrow x = \frac{a}{a_{max}}$

$$t_0 = H_0^{-1}\sqrt{\frac{a_{max}}{\Omega_{mr,0}}}\int_0^{\frac{a}{a_{max}}} a_{max}\sqrt{x}\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}} dx \tag{25}$$

$$t_0 = H_0^{-1}\frac{a_{max}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Omega_{mr,0}}}\int_0^{\frac{a}{a_{max}}} \sqrt{x}\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}} dx \tag{26}$$

Centrémonos unicamente en la integral ahora

$$\int_0^{\frac{a}{a_{max}}} \sqrt{x}\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{2}} dx \tag{27}$$

Hagamos otro cambio de variables como $x = u^2 \rightarrow dx = 2udu$, asi pues si $x = 0 \rightarrow u = 0$, y $x = \frac{a}{a_{max}} \rightarrow u = \sqrt{\frac{a}{a_{max}}}$

$$\int_0^{\sqrt{\frac{a}{a_{max}}}} 2u^2\left(1-u^6\right)^{-\frac{1}{2}} du \tag{28}$$

$$2\int_0^{\sqrt{\frac{a}{a_{max}}}} u^2\left(1-u^6\right)^{-\frac{1}{2}} du \tag{29}$$

Para resolver esta ecuación necesitamos otro cambio de variable como $v = u^3 \rightarrow u = v^{1/3} \rightarrow du = \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}dv$ asi pues para $u = 0 \rightarrow v = 0$ y $u = \sqrt{\frac{a}{a_{max}}} \rightarrow v = \frac{a}{a_{max}}^{3/2}$ asi pues juntando toda la ecuacion obtenemos

$$H_0 t = 2\frac{a_{max}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\int_0^{\sqrt{\frac{a}{a_{max}}}} \frac{u^2}{\sqrt{1-u^6}}du = 2\frac{a_{max}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\int_0^{\frac{a}{a_{max}}^{3/2}} \frac{(v^{1/3})^2(1/3 * v^{-2/3})}{\sqrt{1-v^2}}dv \tag{30}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{a_{max}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\int_0^{\frac{a}{a_{max}}^{3/2}} \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \tag{31}$$

finalmente haremos otro cambio de variables como $v = \sin\theta \rightarrow dv = \cos\theta$ asi pues $v = 0 \rightarrow \theta = 0$ y $v = \frac{a}{a_{max}}^{3/2}$ entonces $\theta = \arcsin\frac{a}{a_{max}}^{3/2}$

$$H_0 t = \frac{2}{3}\frac{a_{max}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\int_0^{\frac{a}{a_{max}}^{3/2}} \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{2}{3}\frac{a_{max}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\int_0^{\arcsin\frac{a}{a_{max}}^{3/2}} \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \tag{32}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{a_{max}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\int_0^{\arcsin\frac{a}{a_{max}}^{3/2}} \frac{\cos\theta d\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{3}\frac{a_{max}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\int_0^{\arcsin\frac{a}{a_{max}}^{3/2}} d\theta \tag{33}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{a_{max}^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\arcsin((\frac{a}{a_{max}})^{3/2}) \tag{34}$$

Regresemos la definicion de a_{max}

$$= \frac{2}{3}\frac{(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}-1})^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\arcsin((\frac{a}{a_{max}})^{3/2}) = \frac{2}{3}\frac{((\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}-1})^{1/3})^{3/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\arcsin((\frac{a}{a_{max}})^{3/2}) \tag{35}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}-1})^{1/2}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}\arcsin((\frac{a}{a_{max}})^{3/2}) \tag{36}$$

asi finalmente reduciendo

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}\arcsin((\frac{a}{a_{max}})^{3/2}) \tag{37}$$

sustituyamos la ultima a_{max}

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}\arcsin((\frac{a}{(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}-1})^{1/3}})^{3/2}) = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}\arcsin((\frac{a^{3/2}}{(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}-1})^{1/2}})) \tag{38}$$

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}\arcsin(\frac{a^{3/2}\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}) \tag{39}$$

Para el momento actual tomamos $a(t_0) = 1$

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}\arcsin(\frac{\sqrt{\Omega_{m,0}-1}}{\sqrt{\Omega_{m,0}}}) \tag{40}$$

Aqui las notas toman el valor de equilibrio donde $t_0 = H_0^{-1}$ esta en $\Omega_{m,0} = 1.92$ por lo mismo $\Omega_\Lambda = -0.1$ sin embargo al graficar las funciones yo obtengo un valor diferente dado por $\Omega_{m,0} = 1.92$

sin embargo tomando los valores dados en las notas obtenemos

$$t_0 = \frac{2(9.78(1/0.7) * 10^9 \text{años}))}{3\sqrt{1.1-1}}\arcsin\frac{\sqrt{1.1-1}}{\sqrt{1.1}} = 5.168 * 10^{11}\text{años} \tag{41}$$

esto es una cota superior de la edad del universo, con el otro valor obtengo 15.20e9.

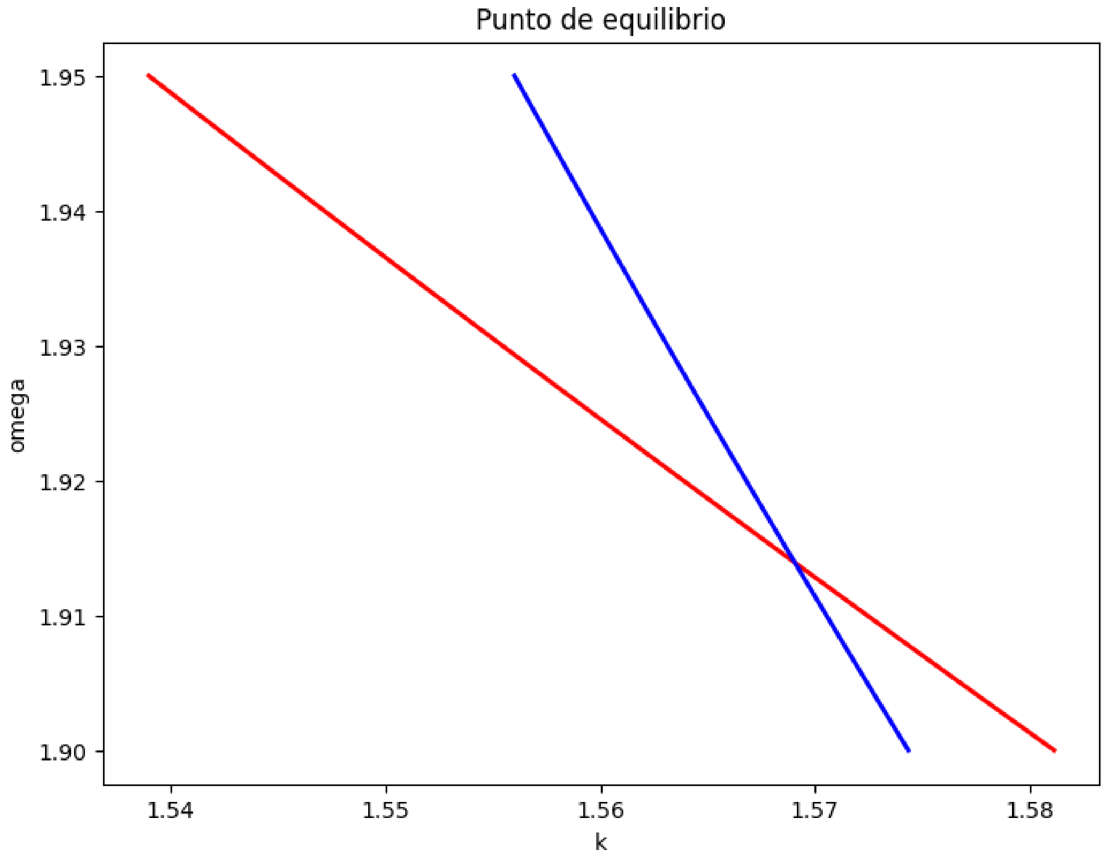

Figure 1: Punto de equilibrio

Una duda que me surgio, es como variaria la edad del universo si varia H0, esto ya que se habia comentado que se pensaba que H0 estaba entre los valores de 50 - 100 $kms^{-1}mpc^{-1}$

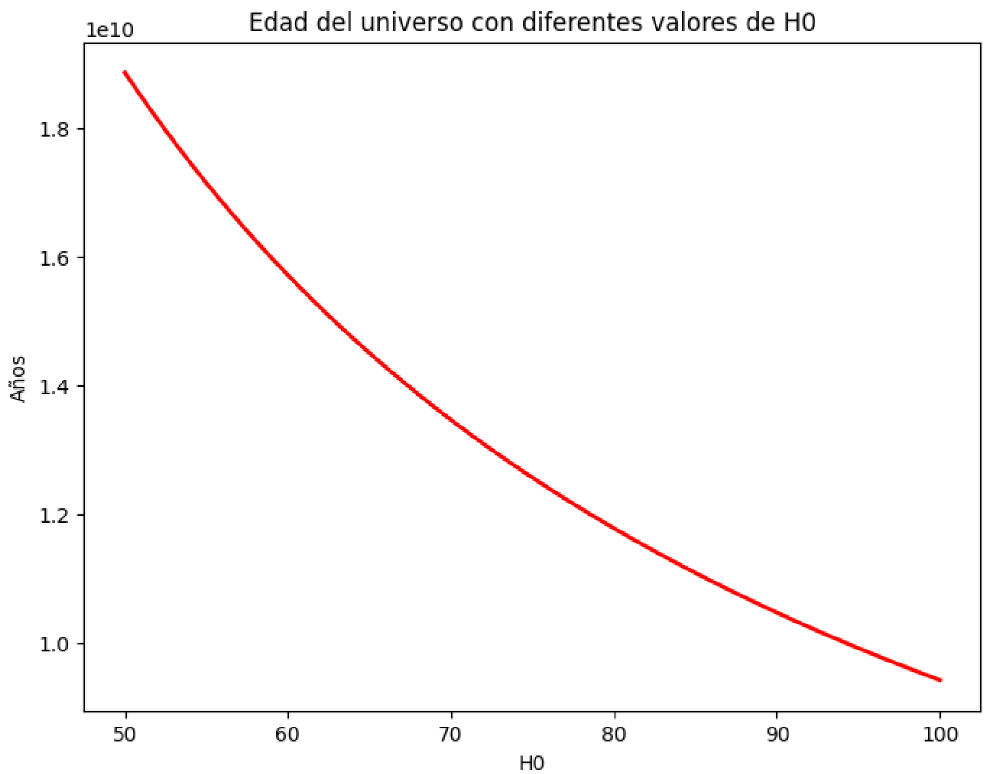

Figure 2: Variacion de la edad del universo con diferentes valores de H0 (50 - 100 $kms^{-1}mpc^{-1}$)