

Sobre la formulación axiomática en ciencias empíricas

V. E. Rodríguez Medina¹, L. A. Soto Ruiz², F. Angulo Brown³

Departamento de Física, ESFM-IPN, México D.F., México

Teléfono (55) 26588612¹ E-mail: vrodriguez1500@alumno.ipn.mx¹

Teléfono (55) 81009642² E-mail: lsoto1500@alumno.ipn.mx²

Teléfono (55) 57296000³ Ext: 55034 E-mail: fangulob@ipn.mx³

Resumen — El trabajo compara formulaciones axiomáticas en matemáticas y física. La diferencia radica en los criterios de verdad: matemáticas se basa en la coherencia lógica, como en la geometría euclidiana, mientras que física requiere comprobación experimental. Se ilustra con postulados de termodinámica de Callen, destacando la no homogeneidad en escalas como causa de inconsistencias. Estas diferencias fundamentales entre disciplinas impactan cómo se establecen y validan teorías, es esencial para la investigación y desarrollo en ambos campos.

Palabras Clave – Formulación axiomática, criterios de verdad, homogeneidad de escalas

Abstract — The work compares axiomatic formulations in mathematics and physics. The difference lies in the criteria of truth: mathematics is based on logical coherence, as in Euclidean geometry, while physics requires experimental verification. It is illustrated with Callen's thermodynamics postulates, highlighting the non-homogeneity in scales as a cause of inconsistencies. These fundamental differences between disciplines impact how theories are established and validated; it is essential for research and development in both fields.

Keywords — Axiomatic formulation, truth criteria, homogeneity of scales

I. INTRODUCCIÓN

En lógica y matemáticas, un sistema axiomático implica tener declaraciones que se aceptan como verdaderas, y luego derivar otras declaraciones del área por deducción. Debe evitarse que los axiomas puedan derivarse de otros, y estos deben ser consistentes. El primer trabajo axiomático en la historia de las matemáticas aparece en los Elementos de Euclides (siglos IV-III aC), que trata sobre ciertos aspectos de la geometría plana y la aritmética.

A pesar de que muchos de los resultados de Euclides se habían mostrado anteriormente, Euclides fue el primero en organizar estas proposiciones en un sistema lógico en el que los resultados se prueban a partir de axiomas y teoremas previamente probados, aunque, durante más de dos mil años, el adjetivo "euclidiano" fue innecesario porque no se había concebido otro tipo de geometría.

La geometría euclidiana, es el estudio de las propiedades geométricas de los espacios euclídeos. En ocasiones los matemáticos usan las expresiones geometría euclídea o

geometría euclidiana para englobar geometrías de dimensiones superiores con propiedades similares. Sin embargo, con frecuencia son sinónimos de la geometría clásica.

La geometría euclidiana es un ejemplo de geometría sintética, ya que procede lógicamente de axiomas los cuales describen propiedades básicas de los objetos geométricos, como puntos y líneas, a proposiciones sobre estos. Esto contrasta con la geometría analítica, introducida casi 2000 años después por René Descartes, el cual usa coordenadas para expresar propiedades geométricas como fórmulas algebraicas [1].

Los postulados establecen condiciones de la existencia de objetos geométricos. Son propiedades simples que se pueden tomar como la base de las demás y se aceptan sin demostración, Euclides planteó cinco postulados en su sistema:

- Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une.
- Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido.
- Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio.
- Todos los ángulos rectos son congruentes.
- Si una recta corta a otras dos formando, a un mismo lado de la secante, dos ángulos internos agudos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están dichos ángulos

Una de las limitaciones del trabajo de Euclides fue que no reconoció la posibilidad de sistemas geométricos perfectamente consistentes donde el quinto axioma no era válido, es decir, para Euclides y los geómetras posteriores hasta el siglo XVIII pasó inadvertida la posibilidad de geometrías no euclidianas, hasta el trabajo de Nikolái Lobachevski, Gauss y Riemann.

Si bien durante el siglo XIX se consideró a las geometrías no euclidianas un artefacto matemáticamente interesante e incluso con cierto interés práctico pero limitado, como es el caso de la trigonometría esférica usada en astronomía, en cierto modo se admitió que la geometría del espacio físico era euclidiana y, por tanto, las geometrías no euclidianas eran tan solo un artificio abstracto útil para ciertos problemas, pero en modo alguno descripciones realistas del mundo. Sin embargo, el trabajo de Albert Einstein [2] hizo ver que entre las

necesidades de la física moderna están las geometrías no euclidianas para describir, por ejemplo, el espacio-tiempo curvo.

Alguno de los fallos de Euclides fue omitir al menos dos postulados más:

- Dos circunferencias cuyos centros están separados por una distancia menor a la suma de sus radios, se cortan en dos puntos (Euclides lo utiliza en su primera construcción).
- Dos triángulos con dos lados iguales y los ángulos comprendidos también iguales, son congruentes (afirmación equivalente al concepto de movimiento, que Euclides usa para su teorema cuarto sin definir explícitamente).

Debido a la estructura lógica y estética de la geometría eucladiana, algunos filósofos como Spinoza (1632-1677) [3] intentaron llevar la formulación axiomática a disciplinas humanísticas tales como la Ética [4], sin embargo, este intento hecho por Spinoza no causó que avanzara este tipo de formulaciones hacia el resto de disciplinas humanísticas.

Una formulación axiomática más completa de la geometría eucladiana nunca dejó de llamar la atención a grandes matemáticos de la era moderna. Por ejemplo, David Hilbert en 1902 propuso una reformulación de esta geometría basada en 21 axiomas [5]. Sin embargo, Kurt Gödel en 1929 demostró un perturbador teorema consistente en que en un sistema lógico suficientemente complejo existen enunciados que no pueden ser probados ni refutados. Por si fuera poco, también probó que la cuestión de si es sistema en sí mismo era lógicamente consistente no podía tampoco ser demostrado dentro de los límites del propio sistema [6].

Como sea, la formulación axiomática como era de esperarse tuvo más impacto en las ciencias empíricas, como es el caso de la termodinámica clásica [7] [8] [9]. Claramente, los intentos de hacer una formulación axiomática de la termodinámica tuvieron que ser posteriores al desarrollo del cuerpo de esta disciplina obtenido por procedimientos inductivos; es decir, yendo de casos particulares (casi siempre experimentales) a generalizaciones conceptuales. Una de las formulaciones axiomáticas de la termodinámica de mayor éxito es la de H. B. Callen [9]. En nuestro trabajo empezamos por discutir dicha formulación para después hablar de los casos de la electrodinámica y la mecánica clásicas. Finalmente; presentamos una discusión y las conclusiones.

II. MARCO TEÓRICO

A. Formulación axiomática a la Callen

La Termodinámica clásica está formada esencialmente de enfoques fenomenológicos (en el sentido macroscópico), es decir, en ningún momento usa modelos de la estructura

íntima de la materia; así tiene que ver, nada más con sistemas físicos macroscópicos, sean estos con masa o sin masa (radiación electromagnética), y es su propósito fundamental, describir la evolución y comportamiento de dichos sistemas, usando un pequeño número de variables cuando estos interactúan con otros sistemas a través de ciertas formas conocidas de trabajo y calor. La información que maneja y puede dar la termodinámica gira alrededor de 3 principios empíricos (Leyes 0, 1 y 2) y uno semi empírico (3ra ley), que pueden sustituirse por una colección de postulados sin justificación empírica. Que, asociados a un conjunto de teorías y definiciones constituyan el conocimiento termodinámico esencial.

La manera ordinaria de presentar la termodinámica es partiendo de una serie de definiciones que describen los sistemas físicos y conceptos con que trabaja, tales como sistemas termodinámicos, alrededores, paredes: aislantes, diatérmicas, adiabáticas, permeables; estados de equilibrio, procesos reversibles, etc., Para después proponer experimentos mediante los cuales se llega a sus principios fundamentales, que luego son usados para explicar algunos fenómenos típicos de ciertos sistemas, tales como gases imperfectos, sustancias puras, plasma, radiación electromagnética, etc. Aquí no repasamos los experimentos para llegar a las leyes de la termodinámica, simplemente, daremos éstas:

Ley cero: Si de tres sistemas A, B y C, A y B se encuentran separadamente en equilibrio térmico con C, entonces A y B se encuentran en equilibrio térmico uno con el otro.

Esta ley permite llegar a las definiciones de temperatura empírica y ecuación de estado

1a. Ley: Para todo sistema termodinámico la variación de la energía interna ΔU , es igual a la suma del calor y el trabajo intercambiados por el sistema con los alrededores.

$$\Delta U = Q + W \quad (1)$$

2a. Ley: Esta puede darse por medio de dos postulados equivalentes:

- Kelvin Planck: Toda transformación cíclica cuyo único resultado final sea absorber calor de un cuerpo de una temperatura dada y convertirlo integralmente en trabajo, es imposible.
- Clausius: Toda transformación cíclica cuyo único resultado final sea el de transferir una cierta cantidad de calor de un cuerpo frío a uno caliente, es imposible.

A partir de estos postulados puede llegarse a definir una función de estado (La entropía S), cuyo comportamiento nos

dice cuándo una transformación termodinámica es posible o no.

3a. Ley: La entropía de todo sistema en el cero absoluto puede siempre tomarse igual a cero (Teorema de Nernst).

Una forma alternativa de presentar la termodinámica basándose en un método postulacional fue dada entre otros por Laszlo Tisza en The Massachusetts Institute of Technology [8] y adoptada por H. B. Callen en su libro “Thermodynamics” [9]. Callen usa cuatro postulados a partir de los cuales reconstruye toda la termodinámica clásica, estos postulados son:

Postulado I: Existen estados particulares (denominados estados de equilibrio) de sistemas simples (homogéneos, isotrópicos, sin carga eléctrica, químicamente inertes, sin efectos de superficie y sin acción de campos externos) que macroscópicamente están caracterizados completamente por la energía interna U , el volumen V y los números de moles N_1, N_2, \dots, N_r , que se enumeran más adelante explícitamente.

Postulado II: Existe una función (denominada entropía S) de los parámetros extensivos de cualquier sistema compuesto, definida para todos los estados de equilibrio y que tiene la siguiente propiedad. Los valores tomados por los parámetros extensivos en ausencia de restricciones externas son aquellos que maximizan la entropía con respecto al conjunto de estados de equilibrio restringidos.

Postulado III: La entropía de un sistema compuesto es aditiva sobre los subsistemas constituyentes. La entropía es una función continua, diferenciable y monótonamente creciente de la energía.

Postulado IV: La entropía de cualquier sistema se anula en el estado para el que se cumple:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N_1, \dots, N_r} = 0 \quad (2)$$

Esto es en el cero absoluto de temperatura.

Citaremos nada más un ejemplo, de cómo a partir de estos postulados se obtiene la termodinámica usual:

Sean $\{U, V, N_1, N_2, \dots, N_r\}$ los parámetros extensivos que caracterizan un sistema termodinámico, entonces por el postulado II existe

$$S = S(U, V, N_1, N_2, \dots, N_r) \quad (3)$$

que además por el postulado III puede expresarse como

$$U = U(S, V, N_1, N_2, \dots, N_r) \quad (4)$$

de donde obtenemos:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N_1, N_2, \dots, N_r} ds + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N_1, N_2, \dots, N_r} dV + \sum_{i=1}^r \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S, V, N_K, K \neq i} dN_i \quad (5)$$

, la cual se puede reescribir como:

$$dU = TdS - PdV + \sum_{i=1}^r \mu_i dN_i \quad (6)$$

, habiendo usado las definiciones:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, N_1, \dots, N_r} \equiv T \quad \text{Temperatura} \quad (7)$$

$$-\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{S, N_1, N_2, \dots, N_r} \equiv P \quad \text{Presión} \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S, V, N_K, K \neq i} \equiv \mu_i \quad \text{Potencial químico} \quad (9)$$

Probaremos cómo la definición de T coincide con el concepto termodinámico de temperatura. Consideremos un sistema compuesto aislado consistiendo en dos sistemas simples separados por una pared que es rígida e impermeable a la materia pero que permite el paso de calor. El volumen y el número de moles de cada uno de los sistemas simples es fijo, pero las energías $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$ pueden cambiar sujetas a las restricciones de conservación.

$$U^{(1)} + U^{(2)} = \text{Const} \quad (10)$$

, ya que el sistema completo es cerrado. Suponiendo que el sistema ha llegado al equilibrio; deseamos encontrar los valores de $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$. Por el postulado II los valores de $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$ son tales que maximizan la entropía. Por lo que mediante la condición matemática usual para una extremal; concluimos que en el estado de equilibrio una transferencia virtual infinitesimal de energía del sistema 1 al sistema 2 no producirá cambio en la entropía del sistema compuesto. Esto es:

$$dS = 0 \quad (11)$$

Por el postulado III (aditividad), tenemos:

$$S = S^{(1)}(U^{(1)}, V^{(1)}, N_i^{(1)}) + S^{(2)}(U^{(2)}, V^{(2)}, N_i^{(2)}) \quad (12)$$

y como $U^{(1)}$ y $U^{(2)}$ están cambiando por una transferencia virtual de energía, el cambio de entropía es:

$$dS = \left(\frac{\partial S^{(1)}}{\partial U^{(1)}} \right)_{V^{(1)}, N_i^{(1)}} dU^{(1)} + \left(\frac{\partial S^{(2)}}{\partial U^{(2)}} \right)_{V^{(2)}, N_i^{(2)}} dU^{(2)} \quad (13)$$

, donde empleando nuestra definición de temperatura T,

$$dS = \frac{1}{T^{(1)}} dU^{(1)} + \frac{1}{T^{(2)}} dU^{(2)} \quad (14)$$

y por la condición de conservación:

$$dU^{(2)} = -dU^{(1)} \quad (15)$$

por lo que

$$dS = \left(\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} \right) dU^{(1)} \quad (16)$$

Aplicando la condición de equilibrio tenemos

$$\frac{1}{T^{(1)}} = \frac{1}{T^{(2)}} \quad (17)$$

que es otra forma de esta condición para cuando hay transferencia de calor entre los dos sistemas, este resultado está de acuerdo con la idea de la temperatura que da la ley cero de la termodinámica, ahora queda averiguar ¿de dónde fluye el calor para equilibrar las temperaturas? Supongamos:

$$T^{(1)} > T^{(2)} \quad (18)$$

Si la pared de separación es diatérmica; habrá un flujo de calor que hará que la entropía del sistema compuesto se incremente

$$\Delta S > 0 \quad (19)$$

así pues

$$\left(\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} \right) \Delta U^{(1)} > 0 \quad (20)$$

ya que $T^{(1)} > T^{(2)}$; $\frac{1}{T^{(1)}} - \frac{1}{T^{(2)}} < 0$ por lo que $\Delta U^{(1)} < 0$, lo cual significa que el proceso espontáneo fue el de pérdida de energía para (1) y ganancia para (2). Es decir, el calor fluye del subsistema caliente al frío, lo cual está de acuerdo con la 2a. Ley de la Termodinámica. Así es como Callen logra obtener todos los resultados de la termodinámica convencional desde sus cuatro postulados.

B. Formulaciones axiomáticas simples del electromagnetismo y de la mecánica clásica

Mediante experimentos simples se puede llegar a las leyes fundamentales del electromagnetismo, representadas por las ecuaciones de Maxwell (ver Tabla 1).

TABLA I.
LEYES DEL ELECTROMAGNETISMO [12]

Nombre	Ecuación	Describe	Experimento clave
Ley de Gauss para la electricidad	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$	Carga y Campo eléctricos	1. Cargas iguales se repelen y cargas diferentes se atraen. 1'. Una carga aplicada a un conductor aislado se mueve a la superficie
Ley de Gauss para el magnetismo	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	Campo magnético	2. Es imposible crear un monopolio magnético.
Ley de Ampere	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt} + \vec{j} \right)$	Efecto magnético de una corriente eléctrica que cambia	3. La velocidad de la luz se puede calcular mediante mediciones electromagnéticas.
Ley de inducción de Faraday	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$	Efecto eléctrico de un campo magnético que cambia	4. Un imán recto que se hace pasar por una espira cerrada de alambre produce una corriente en la espira.

Las cuales involucran cantidades físicas descriptivas de los sistemas electromagnéticos tales como carga eléctrica, corriente eléctrica, intensidad de campo, flujo de campo, etc. Bajo el enfoque postulacional, la teoría electromagnética puede expresarse de la siguiente manera:

Postulado I: Existen las cantidades ρ : densidad de carga, \vec{j} : densidad de corriente. \vec{E} : intensidad de campo eléctrico, \vec{B} : inducción magnética; definidas para toda posición \vec{r} y todo tiempo t que son diferenciables.

Postulado II: \vec{E} y \vec{B} son tales que satisfacen:

- $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$
- $\text{div } \vec{B} = 0$

Postulado III: \vec{E} y \vec{B} no son independientes y satisfacen las relaciones:

- $\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \right)$

Postulado IV: Existe \vec{F} , llamada fuerza de Lorentz tal que:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (21)$$

No obstante que las leyes de Newton se presentaron como base de un sistema axiomático; se postularon a partir de observaciones experimentales, las tomaremos de esta última forma y propondremos otros postulados para las reformulaciones comentadas.

Consideramos las leyes de la mecánica de la siguiente manera

1.- Principio Galileano. - Las leyes de la mecánica tienen la misma forma para todo par de sistemas que se muevan con velocidad relativa uniforme. Existe una cantidad F llamada fuerza la cual cumple que:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ donde } \vec{p} = m\vec{v} \quad (22)$$

2.- Ley de inercia. - Un sistema inercial será aquel en el cual una partícula que no interactúe con ninguna otra permanecerá en reposo o estado de movimiento rectilíneo uniforme.

3.- Ley de acción y reacción. - A toda fuerza de acción corresponde una reacción que es una fuerza de igual magnitud y de sentido contrario.

Si tomamos estos principios como fenomenológicos, una forma postulacional alternativa (para sistemas holónomicos y conservativos) sería:

Postulado I.- Existe $L=L(q_i, \dot{q}_i, t)$ donde las q son independientes y están relacionadas con las coordenadas cartesianas de manera unívoca por

$$q_i = q_i(r_1, \dots, r_n, t) \text{ y } \dot{q} = \frac{dq}{dt} \quad (23)$$

Tales que $L=T-V$, siendo V y T la energía potencial y cinética del sistema respectivamente.

Postulado II $V = V(q_i)$ con $i = 1, \dots, f$ y está dada por $V = \sum_i^f V_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}$ donde V_i es debido a las influencias externas y V_{ij} a las internas y tal que: $-\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij}$

Postulado III En el espacio de configuraciones de dimensión f , el movimiento del sistema entre los puntos t_1 y t_2 son tales que la integral:

$I = \int L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$ (donde $L=T-V$), es una extremal respecto a la trayectoria del movimiento, es decir $\delta I = \delta \int L dt = 0$.

Ahora veremos, mediante un ejemplo, cómo a partir de estos postulados se recupera la mecánica de Newton. Usando técnicas de cálculo variacional a partir del postulado III se puede llegar a las llamadas ecuaciones de Lagrange, que son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, f \quad (1')$$

Las cuales para el problema de una partícula (en coordenadas cartesianas) nos da lo siguiente:

Sea un sistema conservativo con fuerzas derivables de un potencial

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (2')$$

Las ecuaciones (1') pueden escribirse como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (3')$$

Que para una partícula de masa m con $Q_i = F_x, F_y, F_z$ quedan:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z} \end{aligned}$$

Por lo que

$m\ddot{x} = F_x, m\ddot{y} = F_y, m\ddot{z} = F_z$ que no son otra cosa que la segunda ley de Newton. [10]

III. DISCUSIÓN

Independientemente de los límites impuestos por el teorema de Gödel [11] a las formulaciones axiomáticas, que en sí mismo se trata de una demostración muy sofisticada que está más allá de los alcances de nuestro trabajo, vamos a discutir sobre otras posibles limitaciones de las formulaciones axiomáticas de las llamadas ciencias empíricas. En principio, todos los enunciados verdaderos de la geometría plana se pueden demostrar con los teoremas de Euclides mejorados por la formulación de Hilbert [6]; es decir, en términos generales la geometría euclidiana a lo Hilbert es una disciplina auto consistente, sin embargo, cuando se emula la formulación axiomática de la geometría plana en la termodinámica clásica aparecen ciertas inconsistencias como lo ilustraremos con un ejemplo tomado del libro de Callen [9]. Tomemos por caso la siguiente ecuación de estado y nos preguntamos si cumple con los 4 postulados de Callen encontrando lo siguiente:

Tomemos

$$\begin{cases} S_1 = k \frac{V_1^3}{n_1 U_1} \\ S_2 = k \frac{V_2^3}{n_2 U_2} \end{cases} \quad (24)$$

Entonces

$$S_T = S_1 + S_2 = k \left[\frac{V_1^3}{n_1 U_1} + \frac{V_2^3}{n_2 U_2} \right] \quad (25)$$

$$= k \left[\frac{n_1^2 V_1^3}{n_1^3 U_1} + \frac{n_2^2 V_2^3}{n_2^3 U_2} \right] \quad (26)$$

$$= k \left[n_1 \frac{n_1 V_1^3}{n_1^3 U_1} + n_2 \frac{n_2 V_2^3}{n_2^3 U_2} \right] \quad (27)$$

$$= k \left[n_1 \frac{V_1^3}{n_1^3 U} + n_2 \frac{V_2^3}{n_2^3 U} \right] \quad (28)$$

$$= k \left[n_1 \frac{V^3}{n^3 U} + n_2 \frac{V^3}{n^3 U} \right] \quad (29)$$

$$= k(n_1 + n_2) \frac{V^3}{n^3 U} \quad (30)$$

$$= k \frac{V^3}{n^2 U} \quad (31)$$

Por lo que es consistente con los postulados I, II y III. Despejando a U:

$$U = \frac{kV^3}{nS} \quad (31)$$

Y entonces

$$dU = TdS - PdV \quad (32)$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{n,V} \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{n,V} = - \frac{kV^3}{nS^2} \neq 0 \quad (34)$$

Lo cual implica que cuando $S \rightarrow 0$, T diverge. Por lo tanto, no cumple con el postulado IV.

Como se ve en el cálculo anterior la ecuación de estado mencionada cumple satisfactoriamente con los postulados I, II y III de Callen, sin embargo, no cumple con el postulado IV. Como es claro, el postulado IV es enunciado para cubrir la tercera ley de la termodinámica. Y como se sabe las leyes 0, 1 y 2 de la termodinámica tienen un origen genuinamente empírico; es decir fueron generalizaciones de hechos experimentales observados. Este no es el caso de la tercera ley, que, aunque fue sugerida por experimentos, su demostración formal necesitó de la física estadística y de la mecánica cuántica; es decir, la naturaleza de la tercera ley es diferente a la naturaleza de las leyes 0, 1 y 2, ya que éstas surgieron de estudiar el mundo microscópico sin necesidad de hacer hipótesis sobre los constituyentes íntimos de la materia, a diferencia de la tercera ley que echó mano de propiedades del mundo microscópico.

Esta inconsistencia con los postulados de Callen mostrados por el ejercicio anterior se encuentra en muchos otros sistemas macroscópicos como es el caso de los gases ideales, de Van der Waals, de Berthelot y otros. Así, podríamos afirmar que las inconsistencias mencionadas tienen que ver con que la naturaleza de los sistemas estudiados por la termodinámica pertenece a escalas macroscópicas; es decir, con un numero de constituyentes del orden del número de Avogadro ($n=6 \times 10^{23}$ part/mol). Por lo tanto, para lograr

formulaciones axiomáticas de disciplinas empíricas un primer requisito debería ser la homogeneidad de las escalas de los sistemas.

IV. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos hecho una breve presentación de las formulaciones axiomáticas y hemos destacado cómo su utilización en el caso de las matemáticas puras es de naturaleza necesariamente diferente a su aplicación en las ciencias empíricas. Esto no es de extrañar, ya que los criterios de verdad en matemáticas puras y ciencias empíricas son distintos. Mientras que en matemáticas puras un enunciado se considera verdadero si no tiene contradicciones lógicas con los axiomas y postulados que rigen su campo de estudio, en disciplinas empíricas como la física el criterio de verdad es el experimento.

REFERENCIAS

- [1] Colaboradores de Wikipedia. *Geometría euclidiana* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2023 [fecha de consulta: 27 de abril del 2023]. Disponible en https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Geometr%C3%ADa_euclidiana&oldid=150803775.
- [2] A. Einstein, "On the influence of gravitation on the propagation of light," in *The collected papers of Albert Einstein*, Ed. Princeton University Press, NJ: Princeton University, 1993, pp. 379–387.
- [3] Colaboradores de Wikipedia. *Baruch Spinoza* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2023 [fecha de consulta: 15 de julio del 2023]. Disponible en https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Baruch_Spinoza&oldid=152484479.
- [4] B. Spinoza, *Ética*. Ed. Gredos, Madrid, 2017.
- [5] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, 1950.
- [6] S. Hawking, *Dios creó los números*. Barcelona, Critica, 2006.
- [7] C. Carathéodory, "Natural philosophy of cause and chance," in *The collected papers of Albert Einstein*, Ed. Princeton University Press, NJ: Princeton University, vol. 67, n° 355, 1909.
- [8] L. Tisza, *Generalized thermodynamics*, Cambridge: M.I.T. Press, 1966.
- [9] H. B. Callen, *Thermodynamics*, Pennsylvania: University of Pennsylvania, 1985.
- [10] F. Angulo Brown, "Sobre la formulación axiomática en la física clásica" in *Boletín del departamento de física N. 1*, ESFM, Ciudad de México, enero 1975, pp. 40–55.
- [11] Colaboradores de Wikipedia. *Teoremas de incompletitud de Gödel* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2023 [fecha de consulta: 30 de marzo del 2023]. Disponible en https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Teoremas_de_incompletitud_de_G%C3%B6del&oldid=150226338.
- [12] R. R. K. S. K. David Halliday, «Ecuaciones de Maxwell,» de *Física Vol. 2*, Mexico, Compañía editorial continental, 1999, p. 302.