

# Bobinas de Helmholtz

L. A. Soto Ruiz

Laboratorio de Física II, ESFM-IPN, CDMX, México

Enviada 17 Octubre 2024

En esta practica se utilizo un montaje de bobinas de Helmholtz y usando las leyes de Ampere y Biot-Savart se puede denostar el comportamiento del campo magnético así pues las mediciones realizadas se alinean en gran medida con las demostraciones presentadas en los apéndices. Sin embargo, en el tercer ejercicio se encontraron dificultades debido a errores en la medición, lo que llevó a discrepancias en las gráficas. Sin embargo, otros casos mostraron una variación mínima entre las demostraciones y las mediciones.

**Keywords:** *Helmholtz, bobinas, Ampere, Biot-Savart*

## 1 Introducción

La Ley de Ampere establece que la circulación del campo magnético alrededor de un camino cerrado es proporcional a la corriente total que atraviesa el área delimitada por ese camino. Se expresa matemáticamente como:

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I \quad (1)$$

donde  $B$  es el campo magnético,  $dl$  es un elemento diferencial del camino,  $\mu_0$  es la permeabilidad del vacío, e  $I$  es la corriente encerrada por el camino.

La Ley de Biot-Savart describe cómo se genera un campo magnético  $B$  en un punto del espacio debido a una corriente eléctrica en un conductor. La ley establece que el campo magnético en un punto es proporcional a la corriente que fluye y a la longitud del elemento del conductor, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el elemento al punto de observación. Se expresa como:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^2} \quad (2)$$

donde  $dB$  es el campo magnético diferencial,  $I$  es la corriente,  $dl$  es un elemento diferencial del conductor,  $r$  es un vector unitario que apunta desde el elemento de corriente al punto donde se mide  $B$  y  $r$  es la distancia entre ellos. [1]

## 2 Desarrollo

Para esta practica realizamos cuatro experimentos para poder comprender de forma completa el fenómeno que sucede en las bobinas de Helmholtz.

El primero consta de tomar el diseño experimental de una bobina de helmholtz y tomar mediciones en el centro de esta haciendo variar la corriente de las bobinas  $I \in (0, 2)a$  que es el voltaje de funcionamiento de las bobinas.

Para el segundo experimento se propone un montaje mu parecido al anterior pero esta vez el medidor se mueve a lo largo del eje  $z$  sin embargo en este caso la corriente de operación se mantiene constante en  $I = 1a$ .

Después movemos la posición de la bobina de forma que podamos colocar el sensor en el centro de la bobina de igual forma pero esta vez el sensor se mueve radial mente a las bobinas, para este experimento se modifica los parámetros de operación.

## 3 Resultados

Para el primer experimento obtuvimos una expresión lineal bastante acorde con la teoría, en este caso vemos la gráfica

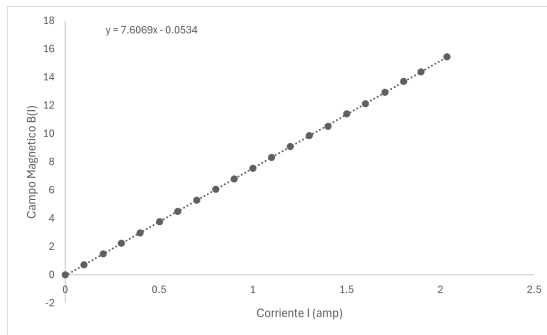


FIGURE 1. Experimento 1

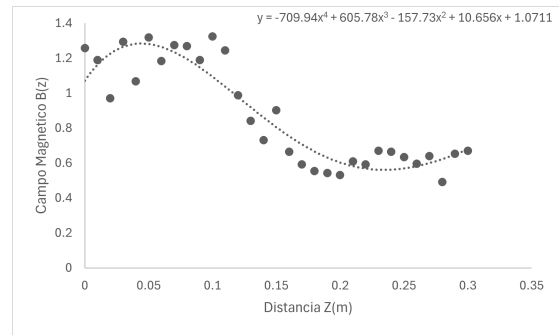


FIGURE 3. Experimento 3

Para el segundo experimento podemos ver como el numero de datos aumento debido a que la distancia que consideramos disminuyo con relación a experimentos anteriores

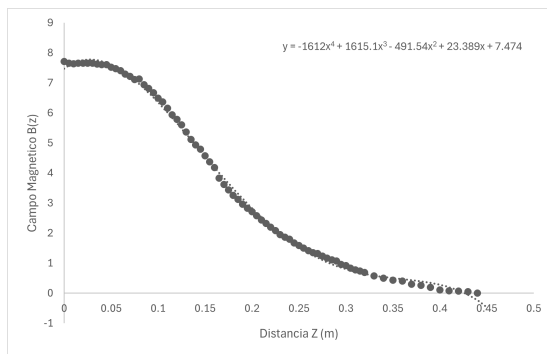


FIGURE 2. Experimento 2

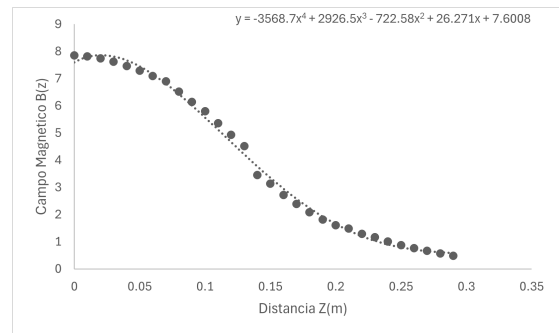


FIGURE 4. Experimento 4 a 70 grados

Para el caso radial obtuvimos una relación mas dispersa al principio, supongo que por la falta de precisión del medidos en esta sección ya que aunque los datos parecieran erráticos, realmente al hacer el análisis podemos ver que coincide con la teoría mas adelante mostrada

Finalmente en ultimo experimento nos muestran una relación muy parecida a la segunda que varia en z pero en el centro de la bobina, en este caso se varia con una inclinación de 70 grados.

## 4 Análisis de resultados

Primero veamos el primer experimento, para este vemos como la relación lineal y la relación teórica coincide exactamente así pues se puede concluir que tanto el experimento fue correctamente realizada así como la teoría fue bien hecha

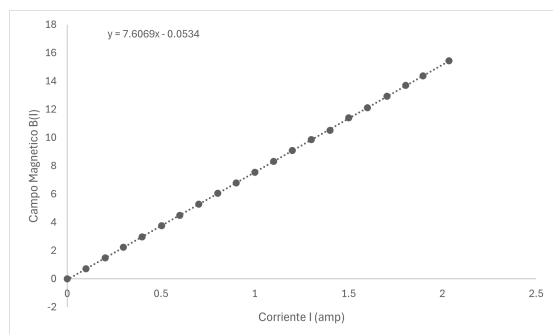


FIGURE 5. Experimento 1

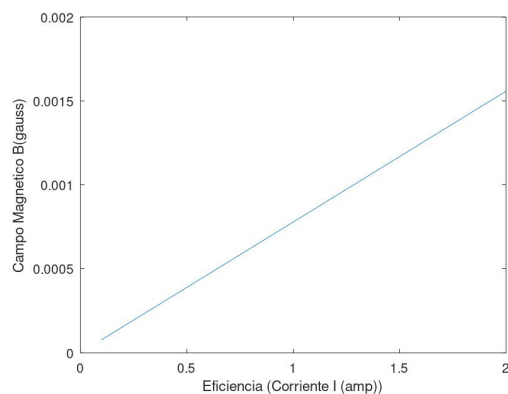


FIGURE 6. simulacion primer experimento

Para el segundo experimento obtenemos algo diferente, para este caso tomamos los primeros datos

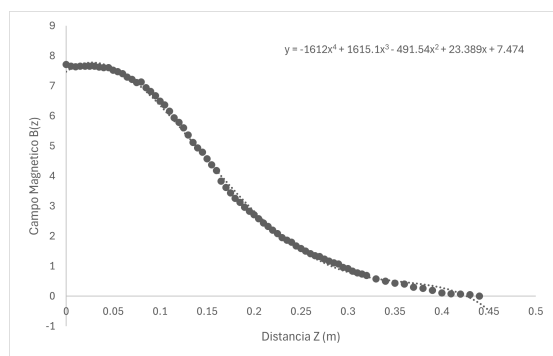


FIGURE 7. Experimento 2

y vemos que su linea de tendencia polinómica es de cuarto grado, así pues aislando este termino junto con el constante obtenemos el siguiente gráfico

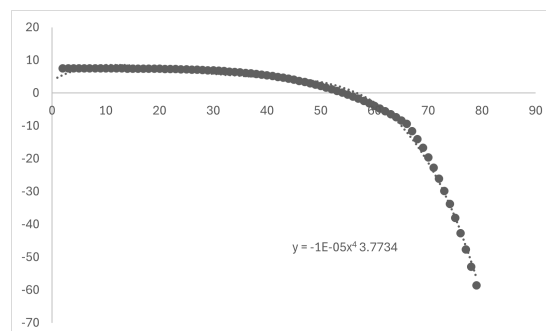


FIGURE 8. Linea de tendencia del experimento 2

la cual podemos comparar con la aproximación de un polinomio de cuarto orden dada en la teoría

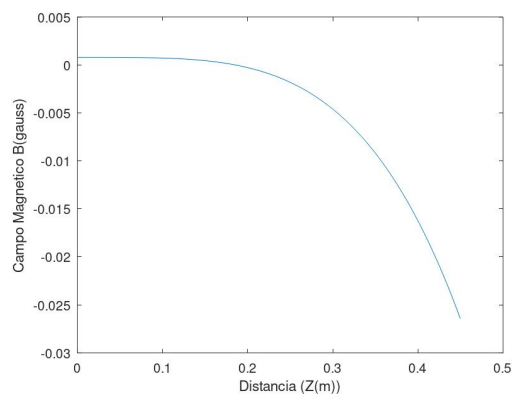


FIGURE 9. simulacion experimento 2

las cuales de igual forma coinciden. Para el tercer experimento comparamos los resultados que obtuvimos con la teoría

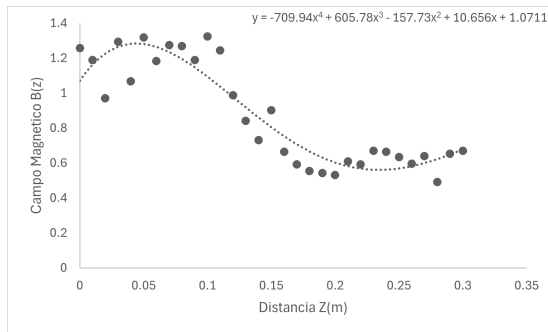


FIGURE 10. Experimento 3

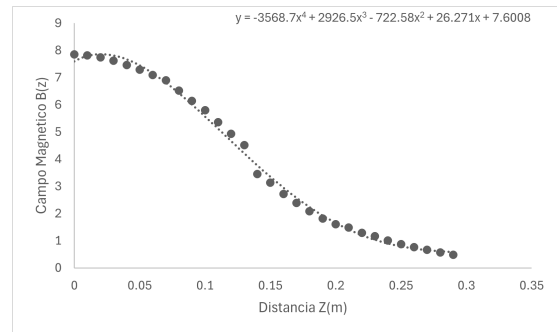


FIGURE 12. Experimento 4

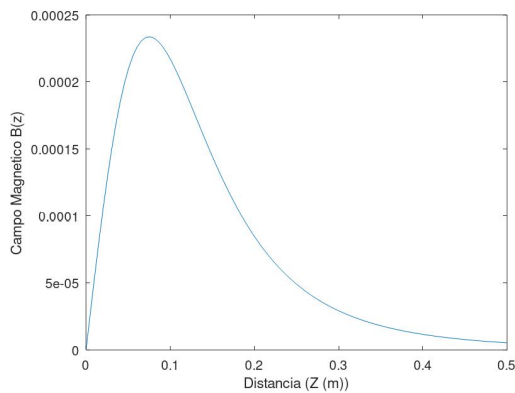


FIGURE 11. Simulación experimento 3

después vemos que su linea de tendencia es un polinomio de grado 4 así pues tomando los términos cuarto y constante podemos obtener el siguiente gráfico

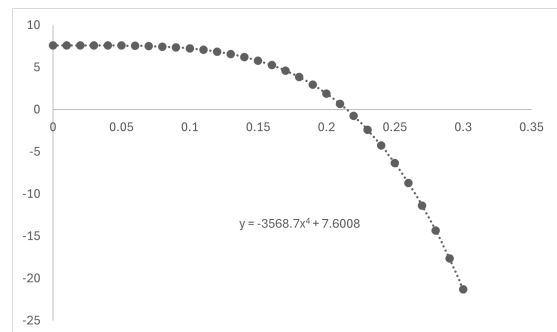


FIGURE 13. Linea de tendencia del experimento 4

este es el caso mas complicado el cual podemos ver como la teoría y las mediciones varían bastante sin embargo conservan la misma forma aproximada, en ambos casos se ven máximos cercanos aunque no iguales como lo son en los demás casos.

Finalmente para el ultimo ejercicio vemos de nuevo una distribucion parecida a la segunda, primero vemos los datos recogidos

y de igual forma la teoria nos dice que la funcion se deberia de comportar exactamente de esa forma

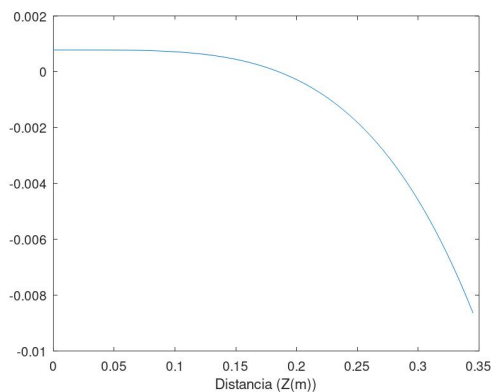


FIGURE 14. Simulación del experimento 4

## 5 Conclusión

Así podemos ver como realmente las mediciones concuerdan con las demostraciones que hicimos

mas adelante en los apéndices, sin embargo mostrando la dificultad del tercer ejercicio, debido a que por fallas en la medición las gráficas aunque parecidas no concuerdan del todo, caso contrario con otros casos donde la variación es mínima entre las demostraciones y las mediciones.

## 6 Referencias

1. D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*. Boston, MA: Pearson, 4th ed., 2013.
2. J. R. Reitz, F. Milford, and R. Christy, *Foundations of electromagnetic theory*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1960.
3. R. C. Calhoun, "An elementary derivation of the midplane magnetic field inside a pair of Helmholtz coils," *Am. J. Phys.*, vol. 64, pp. 1399–1404, Nov. 1996.

## 7 Anexo I

### 7.1 Punto central

#### 7.1.1 Demostración

Para la primera parte podemos tomar resultados ya dados por Reitz y Milford [2], ellos desarrollan, se tiene la ecuacion

$$B_z(Z) = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{3/2}} \right\} \quad (3)$$

Derivando así primero con respecto a z

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ -\frac{3}{2} \frac{2z}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{3}{2} \frac{2(z - 2b)}{[(2b - z)^2 + a^2]^{5/2}} \right\} \quad (4)$$

Para el caso central tomamos z=b así pues la ecuacion desaparece, tomando la segunda ecuacion tenemos

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} = -\frac{3N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{1}{(z^2 + a^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2(z - 2b)^2}{(z^2 + a^2)^{7/2}} + \frac{1}{[(2b - z)^2 + a^2]^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{2(z - 2b)}{[(2b - z)^2 + a^2]^{7/2}} \right\} \quad (5)$$

evaluando en z=b

$$\left. \frac{d^2 B_z}{dz^2} \right|_{z=b} = -\frac{3N\mu_0 I a^2}{2} \left\{ \frac{b^2 + a^2 - 5b^2 + b^2 + a^2 - 5b^2}{(b^2 + a^2)^{7/2}} \right\} \quad (6)$$

$$B_z = \frac{\mu_0 N I}{a} \frac{8}{5^{3/2}} \quad (7)$$

#### 7.1.2 Código Octave

```
1 n=30;
2 n=130;
3 a=0.15;
4 m=1.256*10^(-6);
5 i=[0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1.1,1.2,1.3,1.4,1.5,1.6,1.7,1.8,1.9,2];
6 c=(8*m*n)/(a*5^(3/2));
7 b=c*i;
8 plot(i,b)
```

### 7.1.3 Grafico simulado

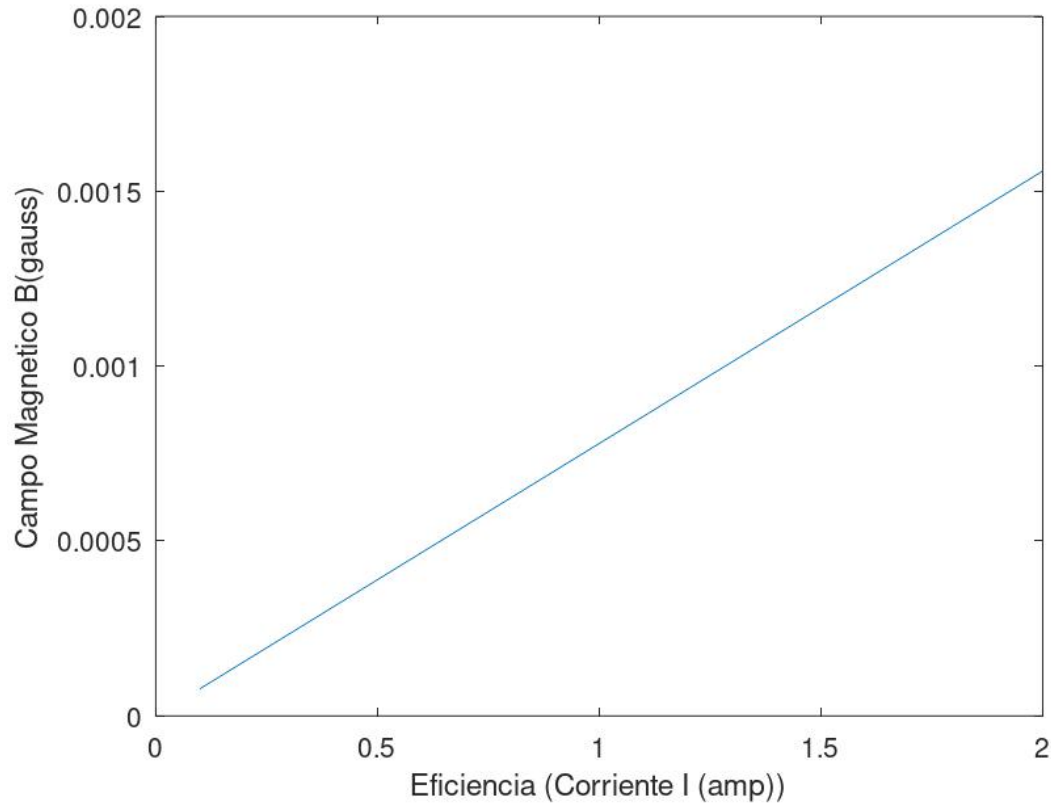


FIGURE 15. Simulacion experimento 1

## 7.2 Eje Z

### 7.2.1 Demostración

Primero tomaremos como hecho lo siguiente [2], el campo en el centro de un par de bobinas de Helmholtz esta dada por

$$B(o) = \frac{8\mu_0 NI}{5\sqrt{5}a} \quad (8)$$

Para esta demostracion haremos un desarrollo parecido al hecho por Richard C. Calhoun [3],

$$dl_1 = dl_2 = a[-\sin \theta i + \cos \theta j]d\theta \quad (9)$$

y por otro lado

$$r_1 = (r - a \cos \theta)i - a \sin \theta j + \frac{a}{2}k \quad (10)$$

$$r_2 = (r - a \cos \theta)i - a \sin \theta j - \frac{a}{2}k \quad (11)$$

el primer termino es la diferencial de la contribucion al campo magnetico dada por las bobinas a el punto P, mientras que  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias en coordenadas polares de P a las bobinas, asi la contribucion sobre el punto P esta dada por la suma del campo en el punto dada por cada bobina

$$dB = dB_1 + dB_2 = \frac{\mu_0 NI}{4\pi} \left[ \frac{dl_1 x r_1}{r_1^3} + \frac{dl_2 x r_2}{r_2^3} \right] = \frac{\mu_0 NI}{4\pi} dl_1 \left[ \frac{r_1 + r_2}{r_1^3} \right] \quad (12)$$

asi la derivada esta dada por

$$dB_z = \frac{\mu_0 NI}{2\pi} \left[ \frac{a \sin^2 \theta - \cos \theta (r - a \cos \theta)}{[(r - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2 + a^2/4]^{3/2}} \right] d\theta \quad (13)$$

Integrando lo anterior tenemos que

$$B_z(r, \theta) = \frac{4\mu_0 NI}{5\sqrt{5}a\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \frac{r}{a} \cos \theta}{\left[1 + \frac{4}{5}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2r}{a} \cos \theta\right)\right]^{3/2}} \quad (14)$$

Asi pues para integrar esto procedemos a hacer una expansion en el denominador como

$$[1 + Y]^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}Y + \frac{15}{8}Y^2 - \frac{36}{16}Y^3 + \dots \quad (15)$$

$$|Y| = \frac{4r}{5a} \left| \frac{r}{a} - 2 \cos \theta \right| < \frac{12r}{5a} \quad (16)$$

asi sustituyendo en la integral obtenemos

$$B_z(r, \theta) = \frac{4\mu_0 NI}{5\sqrt{5}a\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \frac{r}{a} \frac{7}{5} \cos \theta + \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(-\frac{6}{5} + \frac{12}{5} \cos^2 \theta\right) + \dots \right] \quad (17)$$

asi, haciendo una expansion hasta el cuarto grado vemos como cada integral se hace cero excepto la de cuarta potencia

$$B_z = B(0) \left[ 1 - \frac{54}{125} \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots \right] \quad (18)$$

### 7.2.2 Código Octave

```

1 n=130;
2 a=0.15;
3 m=1.256*10^(-6);
4 r=linspace(0,0.45,100);
5 i=1;
6 c=(8*m*n*i)/(sqrt(5)*5*a);
7 b=c.*(1.-(54/125).*(r./a).^4);
8 plot(r,b)
9 xlabel("Distancia (Z(m))")
10 ylabel("Campo Magnetico B(gauss)")

```



### 7.3 Grafico

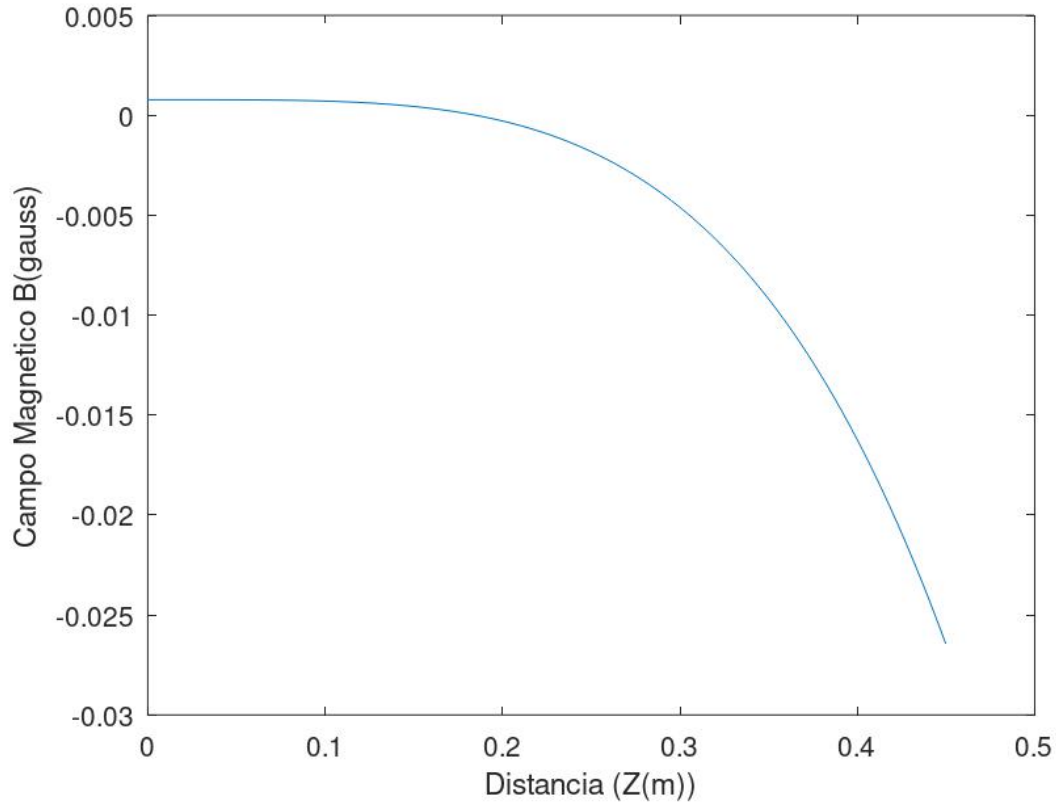


FIGURE 16. Simulacion experimento 2

### 7.4 Radial

#### 7.4.1 Demostracion

Para este caso tomamos la definicion de campo electrico en una bobina de Helmholtz dada por

$$B_z(Z) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (19)$$

sin embargo para cumplir las ecuaciones de Maxwell en el punto radial se debe tomar la siguiente relación

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (20)$$

asi pues obteniendo la primera derivada, ya es algo muy parecido a lo que habiamos calculado anteriormente

$$\frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = \frac{3\mu_0 N I a^2 z r}{2(a^2 + z^2)^{5/2}} \quad (21)$$

asi pues integrando es facil ver que

$$B_r = \frac{3\mu_0 N I a^2 z r}{4(a^2 + z^2)^{5/2}} \quad (22)$$

#### 7.4.2 Código Octave

```

1 n=130;
2 a=0.15;
3 m=1.256*10^(-6);
4 r=linspace(0,0.5,100);
5 i=1;
6 c=(3*m*n*i*a^3)/(4);
7 b=c.*(r./(a^2.+r.^2).^ (5/2));
8 plot(r,b)
9 xlabel("Distancia (Z (m))")
10 ylabel("Campo Magnetico B(z)")

```

#### 7.4.3 Gráfico

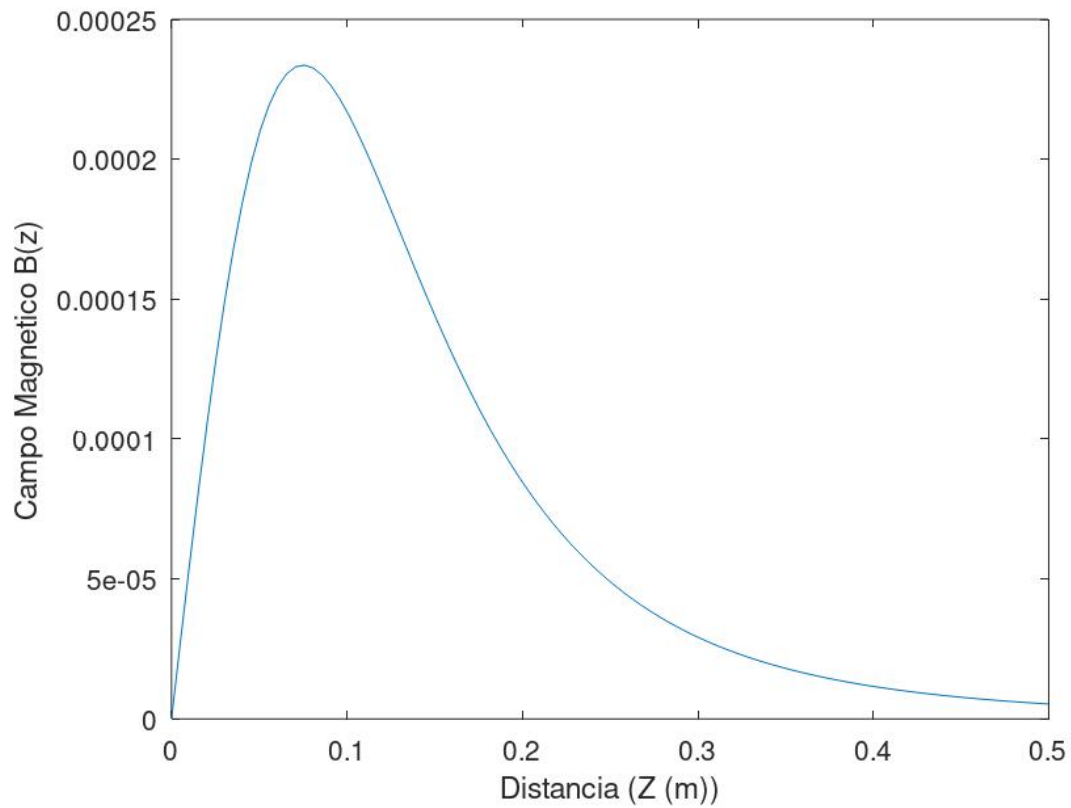


FIGURE 17. Simulacion experimento 3

## 7.5 Fuera de eje

### 7.5.1 Demostración

Para esta demostración lo que hice fue tomar los resultados de la segunda demostración y simplemente se multiplico por  $r$  por  $-r \cos \theta$  así pues obteniendo una mejor aproximación

### 7.5.2 Código

```
1 n=130;
2 a=0.15;
3 m=1.256*10^(-6);
4 q=linspace(0,0.45,100);
5 r=q.*-cos(1.22173*pi)
6 i=1;
7 c=(8*m*n*i)/(sqrt(5)*5*a);
8 b=c.*(1.-(54/125).*(r./a).^4);
9 plot(r,b)
10 xlabel("Distancia (Z(m))")
11 ylabel("Campo Magnetico B(gauss)")
```

## 7.5.3 Gráfico

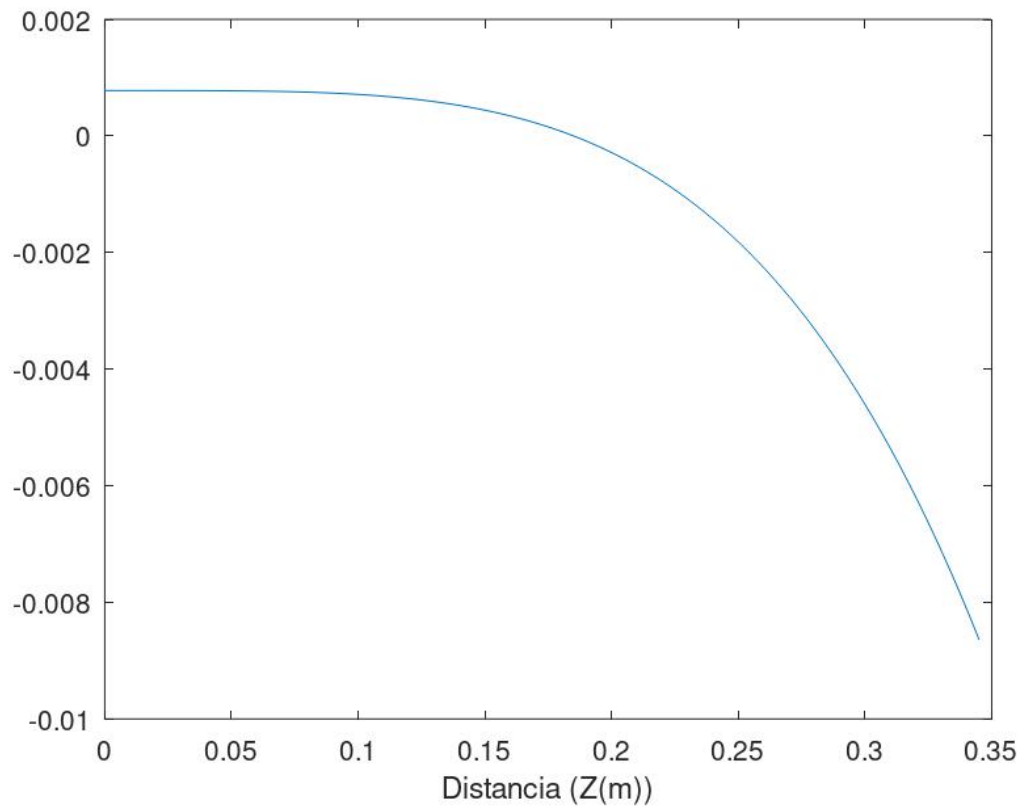


FIGURE 18. Simulacion experimento 4