Resumen Completo de Tensores en Física

¿Qué es un tensor?

Un **tensor** es un objeto matemático que generaliza escalares, vectores y matrices. Representa relaciones entre cantidades físicas y se transforma de forma específica bajo cambios de coordenadas, lo que lo hace ideal para formular leyes físicas de manera **invariante**.

Rango	**Notación**	**Ejemplo físico**
0	T	Escalar (masa, temperatura)
1	T^μ o T_μ	Vector (velocidad, fuerza)
2	$T^{\mu\nu}$	Tensor de tensiones, métrica $g_{\mu\nu}$
3+	$T^{\mu\nu\rho}$	Tensor de Riemann $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$

Tipos de tensores

- **Contravariantes:** índices superiores V^μ
- **Covariantes:** índices inferiores A_μ
- **Mixtos:** combinación de ambos, $T^\mu_{\ \nu}$

Transformación de tensores

Segundo orden contravariante

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}T^{\mu\nu}$$

Tensor mixto

$$T'^\mu_{\ \nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}T^\alpha_{\ \beta}$$

Operaciones con tensores

- **Suma, resta:** solo entre tensores del mismo tipo
- **Producto tensorial:** $(A \otimes B)^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$

- **Contracción:** $T^{\mu}_{\ \mu}$ (traza)
- **Simetrización:** $T^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu})$
- **Antisimetrización:** $T^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})$

Derivación

Derivada covariante (ejemplo para vector contravariante)

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

Tensores importantes en física

Tensor	Rango	Aplicación	Notas
$g_{\mu\nu}$	2	Relatividad	Métrica del espacio-tiempo
$T^{\mu\nu}$	2	Energía-momento	Conservación de energía
$F_{\mu\nu}$	2	Electromagnetismo	Campo E y B unificado
$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$	4	Curvatura	Tensor de Riemann
δ^{μ}_{ν}	2	Identidad	Delta de Kronecker
$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$	4	Volumen/dualidad	Levi-Civita (antisimétrico)

Aplicaciones físicas

Relatividad general

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Electromagnetismo

Tensor del campo electromagnético:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Mecánica de medios continuos

$$\begin{aligned} \text{Ecuación de Cauchy:} \quad & f_i = \partial_j \sigma_{ij} \\ \text{Ley de Fourier:} \quad & q_i = -k_{ij} \partial_j T \\ \text{Elasticidad (Hooke):} \quad & \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

Notación de Einstein

Cuando un índice aparece una vez arriba y una vez abajo, se sobreentiende una **suma** sobre él:

$$A^\mu B_\mu = \sum_\mu A^\mu B_\mu$$

Propiedades generales

- Lineales y multilineales
- Objeto geométrico independiente de coordenadas
- Pueden ser simétricos o antisimétricos
- Se definen sobre espacios vectoriales y variedades