Equações Matriciais

25) Sendo $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}-3 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}$, resolva as seguintes equações matriciais:

a) $XA+B=C^T$ b) $AXA-C=B$ c) $A^{-1}XA+B=C$

d) $AXA^T+B=C$ e) $XA+B=XC$ f) $XA+C^T=A$

a) De $\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]$ resulta que $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

Ora $XA+B=C^T \Leftrightarrow XA=C^T-B \Leftrightarrow XAA^{-1}=(C^T-B)A^{-1} \Leftrightarrow X=(C^T-B)A^{-1}$

Donde $X=(C^T-B)A^{-1}=\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 0\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -5\\2 & 6\end{bmatrix}$

b) $AXA-C=B \Leftrightarrow AXA=B+C \Leftrightarrow A^{-1}AXAA^{-1}=A^{-1}(B+C)A^{-1} \Leftrightarrow X=A^{-1}(B+C)A^{-1}$

Donde: $X=A^{-1}(B+C)A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 6\\4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 9\\4 & 4\end{bmatrix}$$

c) $A^{-1}XA+B=C \Leftrightarrow A^{-1}XA=C-B \Leftrightarrow AA^{-1}XAA^{-1}=A(C-B)A^{-1} \Leftrightarrow X=A(C-B)A^{-1}$

Donde: $X=A(C-B)A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-3 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 4\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -3\\-2 & 2\end{bmatrix}$$

d) $AXA^T+B=C \Leftrightarrow AXA^T=C-B \Leftrightarrow A^{-1}AXA^T\left(A^T\right)^{-1}=A^{-1}(C-B)\left(A^T\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X=A(C-B)\left(A^T\right)^{-1}=A(C-B)\left(A^{-1}\right)^T$$

Donde: $\Leftrightarrow X=A(C-B)\left(A^{-1}\right)^T=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 4\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\2 & 4\end{bmatrix}$

e) Tem-se $A-C=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & 5\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -9\\-1 & -1\end{bmatrix}$

De $\left[\begin{array}{cc|cc}4 & -9 & 1 & 0\\-1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & -1\\4 & -9 & 1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & -1\\0 & -13 & 1 & 4\end{array}\right]\to$

$$\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1/13 & -4/13\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/13 & -9/13\\0 & 1 & -1/13 & -4/13\end{array}\right]$$

resulta que $(A-C)^{-1}=\begin{bmatrix}1/13 & -9/13\\-1/13 & -4/13\end{bmatrix}$

Ora: $XA+B=XC \Leftrightarrow XA-XC=-B \Leftrightarrow X(A-C)=-B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X(A-C)(A-C)^{-1}=-B(A-C)^{-1} \Leftrightarrow X=-B(A-C)^{-1}$$

Donde: $X=-B(A-C)^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/13 & -9/13\\-1/13 & -4/13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/13 & 23/13\\-5/13 & 19/13\end{bmatrix}$

Ora: $XA+B=XC \Leftrightarrow XA-XC=-B \Leftrightarrow X(A-C)=-B \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X(A-C)(A-C)^{-1}=-B(A-C)^{-1} \Leftrightarrow X=-B(A-C)^{-1}$$

Donde: $X=-B(A-C)^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/13 & -9/13\\ -1/13 & -4/13\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/13 & 23/13\\ -5/13 & 19/13\end{bmatrix}$

e) $XA+C^T=A \Leftrightarrow XA=A-C^T \Leftrightarrow XAA^{-1}=(A-C^T)A^{-1} \Leftrightarrow X=I_2-C^TA^{-1}$

Donde: $X=I_2-C^TA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 5 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -5 & -2\end{bmatrix}$

26) Supondo que as matrizes A, B e C são todas quadradas, de ordem n, e que A, B e $A-A^T$, todas de ordem n, são invertíveis, resolva as seguintes equações matriciais:

a) $A^TXA+A=A^T$
b) $A^{-1}XA^T=A+A^T$
c) $XA^T-A=A^T$
d) $AXA^T=A^TA$
e) $(X-I_n)^TA=A^T-A$
f) $AX-B=A^TX$
g) $(AX)^TB=A^{-1}$
h) $(B+XA)^TB=B$
i) $A^{-1}X+A^{-1}B=A$

a) $A^TXA+A=A^T \Leftrightarrow A^TXA=A^T-A \Leftrightarrow (A^T)^{-1}A^TXAA^{-1}=(A^T)^{-1}(A^T-A)A^{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X=(A^T)^{-1}(A^T-A)A^{-1}=(A^T)^{-1}A^TA^{-1}-(A^T)^{-1}AA^{-1}=A^{-1}-(A^T)^{-1}$$

b) $A^{-1}XA^T=A+A^T \Leftrightarrow AA^{-1}XA^T(A^T)^{-1}=A(A+A^T)(A^T)^{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X=A(A+A^T)(A^T)^{-1}=AA(A^T)^{-1}+AA^T(A^T)^{-1}=AA(A^T)^{-1}+A$$

c) $XA^T-A=A^T \Leftrightarrow XA^T=A^T+A \Leftrightarrow XA^T(A^T)^{-1}=(A^T+A)(A^T)^{-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X=(A^T+A)(A^T)^{-1}=A^T(A^T)^{-1}+A(A^T)^{-1}=I_n+A(A^T)^{-1}$$

d) $AXA^T=A^TA \Leftrightarrow A^{-1}AXA^T(A^T)^{-1}=A^{-1}A^TA(A^T)^{-1} \Leftrightarrow X=A^{-1}A^TA(A^T)^{-1}$

e) $(X-I_n)^T A = A^T - A \Leftrightarrow (X^T - I_n)A = A^T - A \Leftrightarrow X^T A - A = A^T - A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^T A - A + A = A^T - A + A \Leftrightarrow X^T A = A^T \Leftrightarrow X^T A A^{-1} = A^T A^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^T = A^T A^{-1} \Leftrightarrow X^T = (A^T A^{-1})^T = (A^{-1})^T A$

f) $AX - B = A^T X \Leftrightarrow AX - A^T X = B \Leftrightarrow (A - A^T)X = B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A - A^T)^{-1}(A - A^T)X = (A - A^T)^{-1} B \Leftrightarrow X = (A - A^T)^{-1} B$

g) $(AX)^T B = A^{-1} \Leftrightarrow X^T A^T B = A^{-1} \Leftrightarrow X^T A^T B B^{-1} = A^{-1} B^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^T A^T = A^{-1} B^{-1} \Leftrightarrow X^T A^T (A^T)^{-1} = A^{-1} B^{-1} (A^T)^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^T = A^{-1} B^{-1} (A^T)^{-1} \Leftrightarrow X = \left(A^{-1} B^{-1} (A^T)^{-1}\right)^T = A^{-1}\left((BA)^{-1}\right)^T$

h) $(B + XA)^T B = B \Leftrightarrow (B^T + A^T X^T)B = B \Leftrightarrow B^T B + A^T X^T B = B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^T X^T B = B - B^T B \Leftrightarrow (A^T)^{-1} A^T X^T B B^{-1} = (A^T)^{-1}(B - B^T B)B^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X^T = (A^T)^{-1}(B - B^T B)B^{-1} = (A^T)^{-1} B B^{-1} - B^T B B^{-1} = (A^T)^{-1} - B^T = (A^{-1} - B)^T$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} - B$

i) $A^{-1}X + A^{-1}B = A \Leftrightarrow A^{-1}X = A - A^{-1}B \Leftrightarrow AA^{-1}X = A(A - A^{-1}B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = A(A - A^{-1}B) = AA - AA^{-1}B = AA - B$