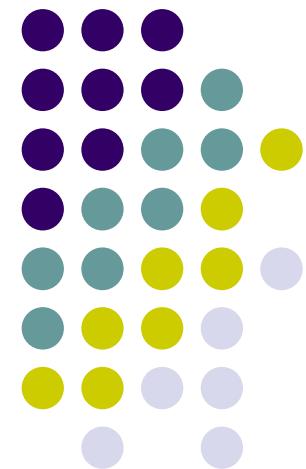


# ESTATÍSTICA NÃO PARAMÉTRICA

---





# ESTATÍSTICA NÃO PARAMÉTRICA

- Métodos Paramétricos
  - parâmetros especificados (normalidade dos dados)
- Métodos Não Paramétricos
  - não impõem nenhuma condição relativa à distribuição dos dados



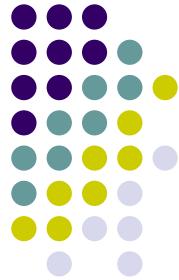
A designada “estatística não-paramétrica”, baseia-se num conjunto de processos de inferência, que são válidos para um grupo mais vasto e diversificado de distribuições, que não a Normal. O termo **inferência não-paramétrica**, deriva do facto de não ser necessário desenvolver um modelo populacional em termos de uma função densidade de probabilidade, dependente dos parâmetros, como é o caso da distribuição Normal.

Nos testes de hipóteses as estatísticas dos testes não paramétricos não dependem directamente dos valores das observações mas sim de outras características, como por exemplo a relação de ordem e a graduação das observações.



# TESTES NÃO PARAMÉTRICOS

- Teste a duas amostras independentes
  - Mann-Whitney
- Teste a duas amostras emparelhadas
  - Wilcoxon signed rank
- Teste a várias amostras independentes
  - Kruskal-Wallis ou Smirnov unilateral
- Teste a várias amostras emparelhadas
  - Quade
- Testes de bom ajuste
  - Kolmogorov-Smirnov



# MANN-WHITNEY

- Estatísticas

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1$$

$$U' = n_2 n_1 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2$$

$$U = n_1 n_2 - U'$$

$$N = n_1 + n_2$$

$$R_1 + R_2 = \frac{N(N+1)}{2}$$

- $R_1$  soma das graduações da amostra 1
- $R_2$  soma das graduações da amostra 2



# EXEMPLO 1

- A tabela apresenta as alturas de estudantes do sexo feminino e masculino. Verifique se as alturas dos estudantes são iguais.

Masculino	Feminino
193	175
188	173
185	168
183	165
180	163
178	
170	

MW [DataSet0] - SPSS Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

13 : sexo

	altura	sexo
1	193	Masculin
2	188	Masculin
3	185	Masculin
4	183	Masculin
5	180	Masculin
6	178	Masculin
7	170	Masculin
8	175	Feminin
9	173	Feminin
10	168	Feminin
11	165	Feminin
12	163	Feminin
13		
14		
15		
16		
17		

Analyze menu open, showing sub-options:

- Reports
- Descriptive Statistics
- Tables
- Compare Means
- General Linear Model
- Mixed Models
- Correlate
- Regression
- Loglinear
- Classify
- Data Reduction
- Scale
- Nonparametric Tests
  - Chi-Square...
  - Binomial...
  - Runs...
  - 1-Sample K-S...
  - 2 Independent Samples...
  - K Independent Samples...
  - 2 Related Samples...
  - K Related Samples...

**Output1 - SPSS Viewer**

File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help

Output Log NPar Tests Title Notes Active Dataset Mann-Whitney Test Title Ranks Test Statistics

NPAR TESTS  
/M-W= altura BY sexo(1 2)  
/MISSING ANALYSIS.

→ **NPar Tests**

[DataSet0]

**Mann-Whitney Test**

**Ranks**

sexo	N	Mean Rank	Sum of Ranks
altura	Masculino	7	8,71
	Feminino	5	3,40
	Total	12	17,00

**Test Statistics<sup>b</sup>**

	altura
Mann-Whitney U	2,000
Wilcoxon W	17,000
Z	-2,517
Asymp. Sig. (2-tailed)	,012
Exact Sig. [2*(1-tailed Sig.)]	,010 <sup>a</sup>

a. Not corrected for ties.  
b. Grouping Variable: sexo



# WILCOXON SIGNED RANK

- Estatísticas

$$T_+ = \frac{n(n+1)}{2} - T_-$$

$$T_- = \frac{n(n+1)}{2} - T_+$$

$$z_T = \frac{T - \mu_T}{\sigma_T}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

- $T_+$  soma das graduações positivas
- $T_-$  soma das graduações negativas



## EXEMPLO 2

- A redução da Capacidade Vital Forçada (ml) foi avaliada durante um período de 25 semanas, em 14 pacientes sujeitos a um tratamento com a droga e com um placebo. A tabela apresenta os resultados observados.



Sig\_rank [DataSet1] - SPSS Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

3 :

	paciente	placebo	droga	var	var
1	1	224	213		
2	2	80	95		
3	3	75	33		
4	4	541	440		
5	5	74	-32		
6	6	85	-28		
7	7	293	445		
8	8	-23	-178		
9	9	525	367		
10	10	-38	140		
11	11	508	323		
12	12	255	10		
13	13	525	65		
14	14	1023	343		
15					
16					

**Output1 - SPSS Viewer**

File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help

Output Log NPar Tests Log NPar Tests Title Notes Active Dataset Wilcoxon Signed Ranks Test Title Ranks Test Statistics

Hide / WILCOXON placebo WITH droga (PAIRED)

## NPar Tests

[DataSet1]

## Wilcoxon Signed Ranks Test

### Ranks

		N	Mean Rank	Sum of Ranks
droga - placebo	Negative Ranks	11 <sup>a</sup>	7,82	86,00
	Positive Ranks	3 <sup>b</sup>	6,33	19,00
	Ties	0 <sup>c</sup>		
	Total	14		

a. droga < placebo  
b. droga > placebo  
c. droga = placebo

### Test Statistics<sup>b</sup>

	droga - placebo
Z	-2,103 <sup>a</sup>
Asymp. Sig. (2-tailed)	,035

a. Based on positive ranks.  
b. Wilcoxon Signed Ranks Test



# KRUSKAL-WALLIS

- Estatística

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

$$N = \sum_{i=1}^k n_i$$

$$R_i = \sum_{j=1}^k R(x_{ij})$$



## EXEMPLO 3

Quatro rações alimentares diferentes foram testadas no crescimento de suínos. Os resultados observados (em Kg) foram os seguintes:

Ração 1	Ração 2	Ração 3	Ração 4
117 (15)	119 (16)	83 (7)	52 (2.5)
114 (14)	161 (20)	52 (2.5)	97 (9.5)
145 (18)	123 (17)	68 (5)	44 (1)
153 (19)	112 (13)	97 (9.5)	83 (7)
105 (12)	83 (7)		104 (11)
	66 (4)		
W1=78	W2=77	W3=24	W4=31

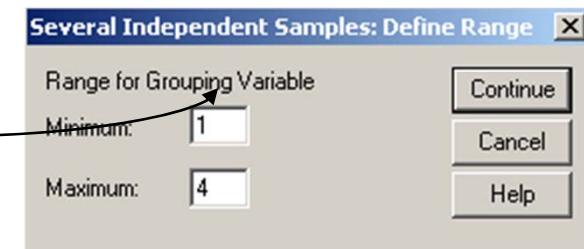
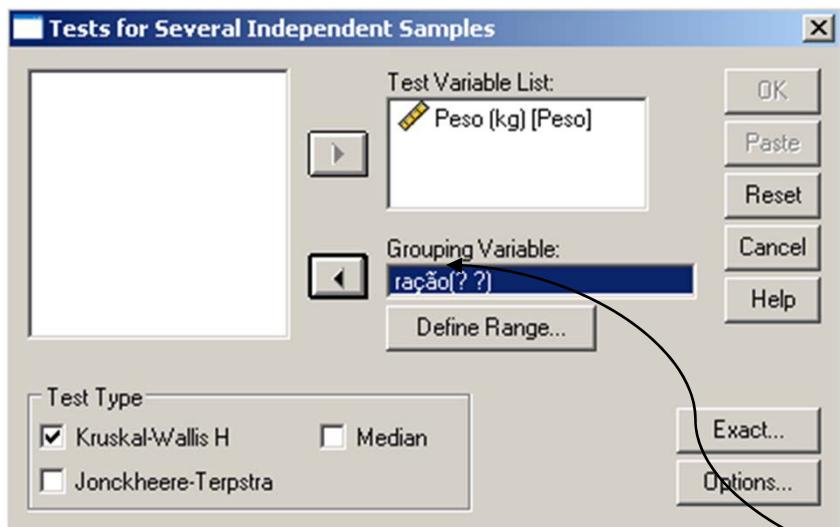
\*exemploKW [DataSet1] - SPSS Data Editor

File Edit View Data Transform Analyze Graphs Utilities Window Help

Reports  
Descriptive Statistics  
Tables  
Compare Means  
General Linear Model  
Mixed Models  
Correlate  
Regression  
Loglinear  
Classify  
Data Reduction  
Scale

Nonparametric Tests ▶  
Chi-Square...  
Time Series ▶  
Binomial...  
Survival ▶  
Multiple Response ▶  
Missing Value Analysis...  
Complex Samples ▶  
K Independent Samples...  
2 Related Samples...  
K Related Samples...

	Peso	ração
1	117	Ração 1
2	114	Ração 1
3	145	Ração 1
4	153	Ração 1
5	105	Ração 1
6	119	Ração 2
7	161	Ração 2
8	123	Ração 2
9	112	Ração 2
10	83	Ração 2
11	66	Ração 2
12	83	Ração 3
13	52	Ração 3
14	68	Ração 3
15	97	Ração 3
16	52	Ração 4
17	97	Ração 4
18	44	Ração 4
19	83	Ração 4
20	104	Ração 4



**Output1 - SPSS Viewer**

File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help

Output Log Graph NPar Tests

NPAR TESTS  
/K-W=Peso BY ração(1 4)  
/MISSING ANALYSIS.

→ **NPar Tests**

[DataSet1] C:\Documents and Settings\ana cris\Desktop\CESPU\_06\cespu

**Kruskal-Wallis Test**

**Ranks**

Peso (kg)	ração	N	Mean Rank
	Ração 1	5	15,60
	Ração 2	6	12,83
	Ração 3	4	6,00
	Ração 4	5	6,20
	Total	20	

**Test Statistics<sup>a,b</sup>**

	Peso (kg)
Chi-Square	9,648
df	3
Asymp. Sig.	,022

a. Kruskal Wallis Test  
b. Grouping Variable: ração



## Amostras independentes - Teste de Kruskal-Wallis

É o teste não paramétrico correspondente ao PCA (Planeamento Completamente Aleatório), quando a hipótese da normalidade da variável é violada.

Consiste num conjunto de  $n$  unidades ( $n = n_1 + n_2 + n_3 \dots + n_k$ ) dividido em grupos de  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  unidades aos quais é atribuído aleatoriamente um tratamento ( $k$  tratamentos)

### 1. Formulação de hipóteses

$H_0$  : Não existem diferenças significativas entre os efeitos dos tratamentos, ou as médias das distribuições das  $k$  populações são idênticas

$H_1$  : Nem todas as  $k$  distribuições têm médias idênticas

### 2. Estatística de teste

Os resultados da experiência formam uma tabela, em que  $y_{ij}$ , representa o resultado da observação (proveniente da unidade)  $i$  do tratamento  $j$ .



$R_{ij}$  corresponde à graduação da observação  $y_{ij}$  no conjunto das  $n$  observações (ordenando as observações por ordem crescente atribui-se 1 ao valor mais baixo, no caso de observações repetidas calcula-se a média das graduações que seriam atribuídas caso não existisse repetição, e atribui-se esse valor médio a todas as observações desse conjunto de repetições).

Tratamento 1		Tratamento 2		...	Tratamento k	
$y_{11}$	$(R_{11})$	$y_{12}$	$(R_{12})$	...	$y_{1k}$	$(R_{1k})$
$y_{21}$	$(R_{21})$	$y_{22}$	$(R_{22})$	...	$y_{2k}$	$(R_{2k})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$y_{n_1,1}$	$(R_{n_1,1})$	$y_{n_2,2}$	$(R_{n_2,2})$	...	$y_{n_k,k}$	$(R_{n_k,k})$
$W_1 = \sum_{i=1}^{n_1} R_{ij}$		$W_2 = \sum_{i=1}^{n_2} R_{ij}$			$W_k = \sum_{i=1}^{n_k} R_{ij}$	



$$H = \frac{12}{n(n+1)} \left[ \frac{W_1^2}{n_1} + \frac{W_2^2}{n_2} + \dots + \frac{W_k^2}{n_k} \right] - 3(n+1)$$

quando existem mais de 25% de observações repetidas o valor de H deve ser ajustado. A estatística ajustada é dada por:

$$H' = \frac{H}{1 - \frac{\sum_{j=1}^l q_j(q_j^2 - 1)}{n(n^2 - 1)}} \quad \text{com } l = n^o \text{ de conjuntos com obs. repetidas}$$

e  $q_j = n^o$  de elementos repetidos nesse conjunto

### Ponto crítico

A região de rejeição é definida como sendo:

R.R:  $H > c$  onde  $c$  pode ser retirado da tabela 10, para 3 amostras desde que  $n_1, n_2$  e  $n_3 \leq 5$ . Para  $k > 3$  ou  $n_1, n_2$  e  $n_3 > 5$ , então  $c$  poderá ser retirado da tabela 7 com  $k-1$  graus de liberdade. Para a estatística ajustada,  $H' \sim \chi^2_{k-1}$ .



### Amostras relacionadas - planeamento com blocos - Teste de Quade

É o teste não paramétrico correspondente ao PBA (Planeamento com Blocos Aleatórios), quando a hipótese da normalidade da variável é violada.

Supondo que:

- as  $b$  variáveis aleatórias, a  $k$  dimensões, são independentes, o que quer dizer que os resultados dentro de um bloco não influenciam os resultados dos outros blocos;
- em cada bloco, as observações podem ser graduadas ( $R_{ij}$ ) de acordo com um certo critério;
- a amplitude do bloco,  $A_i = \max_j(y_{ij}) - \min_j(y_{ij})$ , pode ser determinada por forma a ser possível atribuir graduações aos blocos ( $R(A_i)$ ).



$$S_{ij} = R(A_i) \left[ R_{ij} - \frac{k+1}{2} \right]$$

Blocos	Tratamentos							Tratamentos						
	1		2		...	k		A <sub>i</sub>	R(A <sub>i</sub> )	1	2	...	k	
1	$y_{11}$	$(R_{11})$	$y_{12}$	$(R_{12})$	...	$y_{1k}$	$(R_{1k})$	A <sub>1</sub>	R(A <sub>1</sub> )	$S_{11}$	$S_{12}$	...	$S_{1k}$	
2	$y_{21}$	$(R_{21})$	$y_{22}$	$(R_{22})$	...	$y_{2k}$	$(R_{2k})$	A <sub>2</sub>	R(A <sub>2</sub> )	$S_{21}$	$S_{22}$	...	$S_{2k}$	
:	:	:	:	:	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
b	$y_{b1}$	$(R_{b1})$	$y_{b2}$	$(R_{b2})$	...	$y_{bk}$	$(R_{bk})$	A <sub>b</sub>	R(A <sub>b</sub> )	$S_{b1}$	$S_{b2}$	...	$S_{bk}$	
									$S_1 = \sum_{i=1}^b S_{i1}$	$S_2 = \sum_{i=1}^b S_{i2}$		$S_k = \sum_{i=1}^b S_{ik}$		

### 1. Formulação de hipóteses

$H_0$ : Não existem diferenças significativas entre os efeitos dos tratamentos



$H_1$ : Pelo menos um dos tratamentos tende a conseguir valores observados maiores do que um outro tratamento

## 2. Estatística de teste

$$T = \frac{(b-1)SQT}{STQ - SQT} \text{ com}$$

$$STQ = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k S_{ij}^2$$

$$SQT = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^k S_j^2$$

se não existirem observações repetidas:  $STQ = \frac{b(b+1)(2b+1)k(k+1)(k-1)}{72}$

## 3. Ponto crítico

A região de rejeição é definida como sendo:

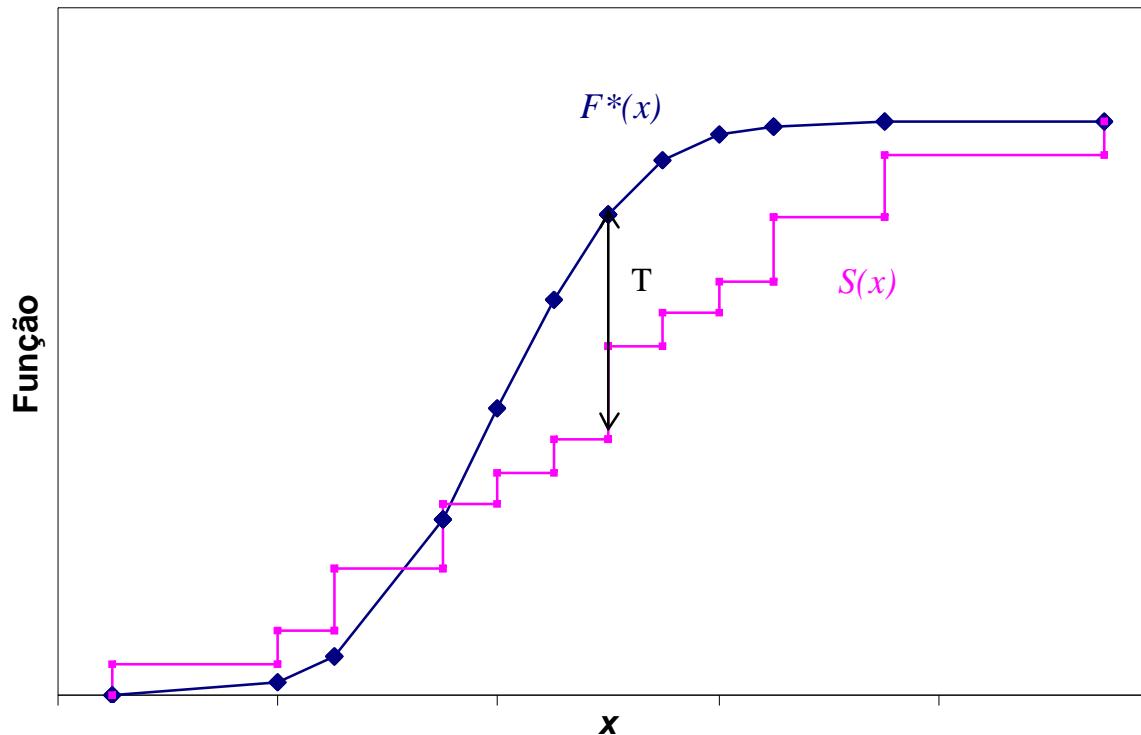
R.R:  $T > c$  onde  $c$  pode ser retirado da tabela de Fisher,  $c = F_{(k-1), (k-1)(b-1), \alpha}$ .

# KOLMOGOROV-SMIRNOV

## Teste de ajuste



- Máxima distância vertical entre a função empírica e a função de distribuição



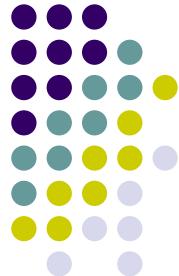


## EXEMPLO 4

- Os dados representam uma amostra aleatória das concentrações de um poluente (em ppm) num determinado lago.

1.10	1.40	1.60	1.82
2.10	2.36	2.40	2.45
2.56	2.88		

- Verifique se as concentrações constituem uma amostra aleatória de uma distribuição uniforme  $U(1,3)$ .



# SOLUÇÃO 4

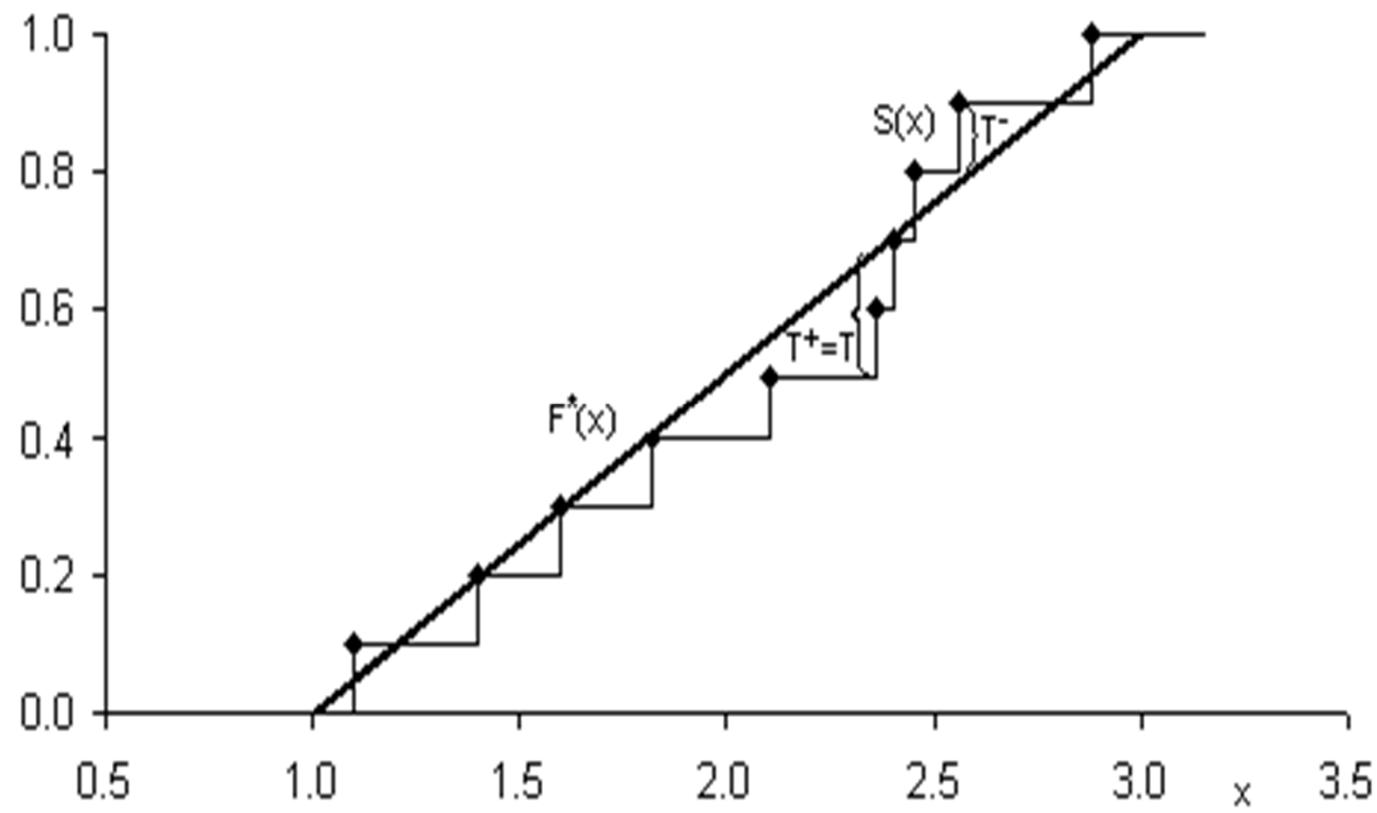
$H_0$ : Os dados seguem uma distribuição Uniforme (1, 3)

$x_i$	$F^*(x_i)$	$S_i(x)$	$S_{i-1}(x)$	$ F^*(x_i)-S_i(x) $	$ F^*(x_i)-S_{i-1}(x) $
1,1	0,05	0,1	0	0,05	0,05
1,4	0,2	0,2	0,1	0,00	0,10
1,6	0,3	0,3	0,2	0,00	0,10
1,82	0,41	0,4	0,3	0,01	0,11
2,1	0,55	0,5	0,4	0,05	0,15
2,36	0,68	0,6	0,5	0,08	0,18
2,4	0,7	0,7	0,6	0,00	0,10
2,45	0,725	0,8	0,7	0,07	0,03
2,56	0,78	0,9	0,8	0,12	0,02
2,88	0,94	1	0,9	0,06	0,04

$$T = 0,18$$



# SOLUÇÃO 4





# SMIRNOV

Os testes às distribuições servem para situações em que são retiradas amostras de várias populações (possivelmente diferentes) e têm como objectivo comparar as funções de distribuição associadas às populações, para se verificar a existência de diferenças significativas entre elas.

Equanto o teste de Kruskal-Wallis era um teste sensível apenas à possível diferença entre as médias, o teste de **Smirnov** é sensível também à possível diferença a nível das variâncias.

O teste bilateral de Smirnov é consistente em relação a todos os tipos de diferenças que possam surgir entre as duas funções de distribuição.



# SMIRNOV

- Hipóteses

$$H_0 : F(x) = G(y)$$

$-\infty < x < \infty$

$-\infty < y < \infty$

$$H_1 : F(x) \neq G(y)$$

para pelo menos  
um par de valores  $x, y$

- Estatística

$$T = \sup_x |S_1(x) - S_2(y)|$$



## EXEMPLO 5

- Para estudar dois tipos de filtros de poluição atmosférica, duas amostras foram recolhidas durante a operação de cada um dos filtros. Os dados representam as concentrações em ( $\text{g/m}^3$ ) de dióxido de enxofre após a filtragem. Verifique se as duas distribuições são idênticas.



## EXEMPLO 5

- Amostra 1

8.8 11.4 11.1 8.6 11.3 10.7

6.5 10.2 9.9 10.1 11.9 7.5

- Amostra 2

13.2 6.6 7.1 8.6 13.0 5.6 13.3 8.1

4.3 13.4 4.8 11.6 12.4 5.9 8.1 8.5

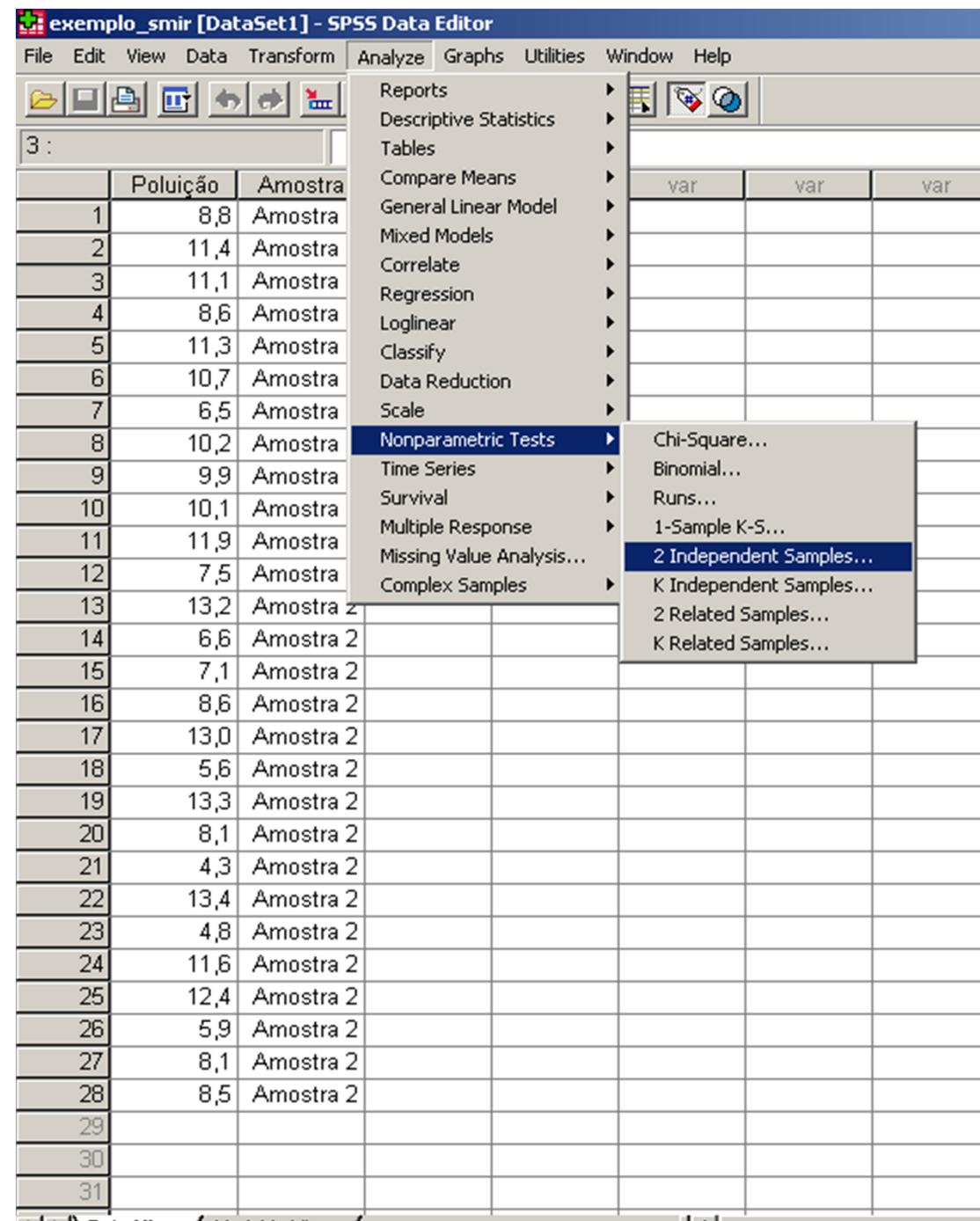


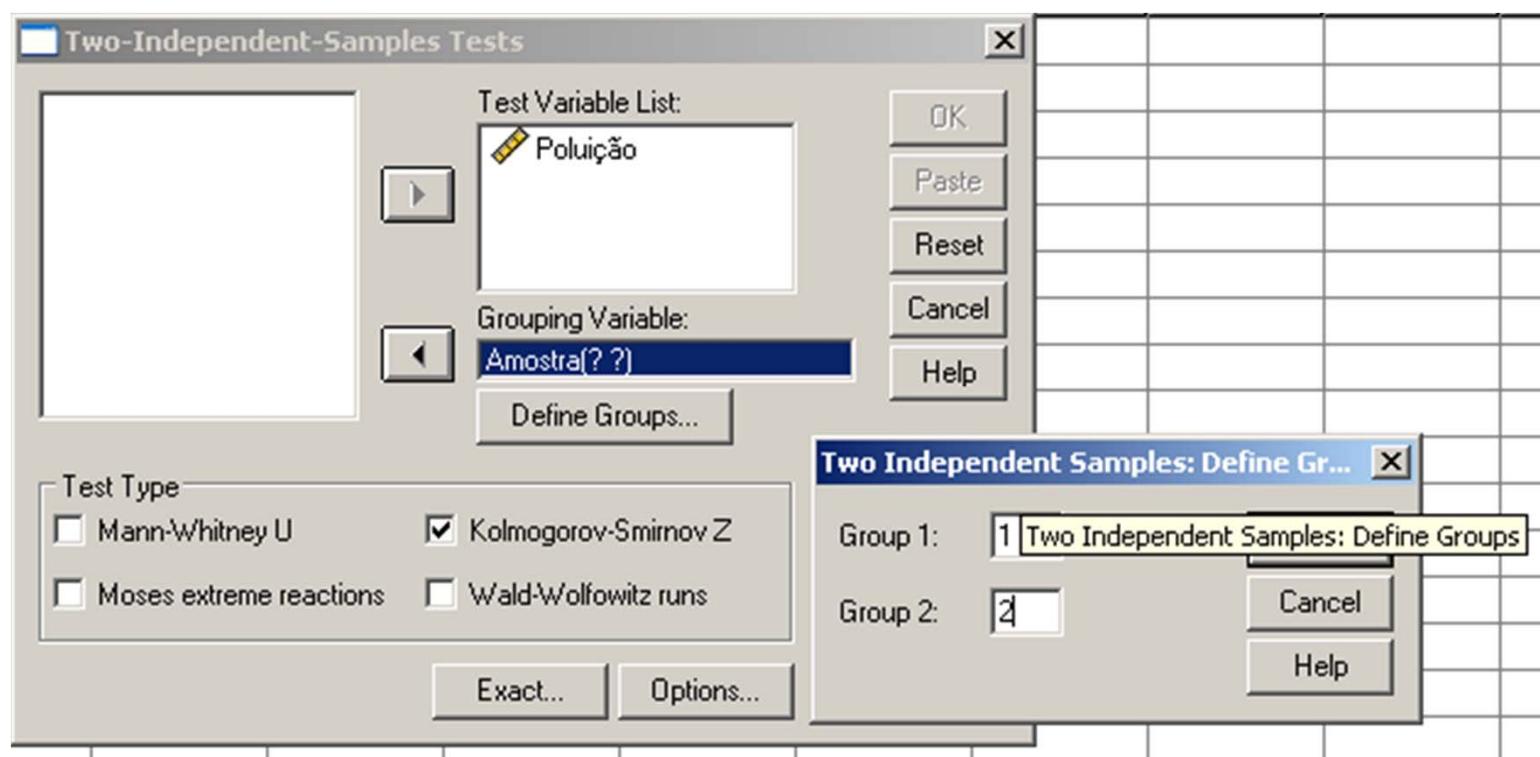
X1	X2	S1	S2	S1-S2
	4,3	0	1/14	0,0714
	4,8	0	1/7	0,1429
	5,6	0	3/14	0,2143
	5,9	0	2/7	0,2857
6,5		1/10	2/7	0,1857
	7,1	1/10	5/14	0,2571
7,5		2/10	5/14	0,1571
	8,1	2/10	1/2	0,3000
	8,1	2/10	1/2	0,3000
	8,5	2/10	4/7	0,3714
8,6		3/10	4/7	0,2714
	8,6	3/10	9/14	0,3429
9,9		4/10	9/14	0,2429
10,1		5/10	9/14	0,1429
10,2		6/10	9/14	0,0429
10,7		7/10	9/14	0,0571
11,1		8/10	9/14	0,1571
11,3		9/10	9/14	0,2571
	11,6	9/10	5/7	0,1857
11,9		1	5/7	0,2857
	12,4	1	11/14	0,2143
	13	1	6/7	0,1429
	13,3	1	13/14	0,0714
13,4		1	1	0,0000

$H_0$ : As distribuições de concentrações nos dois filtros são idênticas  
 $F(x) = G(x)$

$H_1$ :  $F(x) \neq G(x)$

$$T = 0,3714$$

A screenshot of the SPSS Data Editor window titled "exemplo\_smir [DataSet1] - SPSS Data Editor". The window shows a data table with 31 rows and two columns: "Poluição" and "Amostra". The "Poluição" column contains numerical values ranging from 6.5 to 13.2. The "Amostra" column contains categorical values "Amostra" and "Amostra 2". The "Amostra" row has a value of 8.8, and the "Amostra 2" row has a value of 13.2. The "Analyze" menu is open, and the "Nonparametric Tests" option is selected. A submenu is displayed with several options: Chi-Square..., Binomial..., Runs..., 1-Sample K-S..., 2 Independent Samples..., K Independent Samples..., 2 Related Samples..., and K Related Samples... The "2 Independent Samples..." option is highlighted with a blue selection bar.



Output1 - SPSS Viewer

File Edit View Data Transform Insert Format Analyze Graphs Utilities Window Help

CB\exemplo\_smir.sav  
/COMPRESSED.  
NPAR TESTS  
/K-S= Poluição BY Amostra(1 2)  
/MISSING ANALYSIS.

→ NPar Tests

[DataSet1] C:\Documents and Settings\ana cris\Desktop\CESPU\_06\cespu2005\_06\ACB\exe

### Two-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

Frequencies

	Amostra	N
Poluição	Amostra 1	12
	Amostra 2	16
	Total	28

Test Statistics<sup>a</sup>

	Poluição
Most Extreme Differences	,396
Absolute	,396
Positive	-,313
Negative	1,037
Kolmogorov-Smirnov Z	,233
Asymp. Sig. (2-tailed)	

a. Grouping Variable: Amostra



# SOLUÇÃO 5

