Folha 7

7.1

a) $\int_0^1 e^{\pi x}\, dx = \frac{1}{\pi}\left[e^{\pi x}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi} - e^{0}\right) = \frac{e^{\pi}-1}{\pi}$.

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx = \int_{-\pi/2}^{0} |\operatorname{sen} x|\, dx + \int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x|\, dx$

$= \int_{-\pi/2}^{0} -\operatorname{sen} x\, dx + \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\, dx$

$= \left[\cos x\right|_{x=-\pi/2}^{0} + \left[-\cos x\right|_{x=0}^{\pi/2} = (1-0) + (-0+1) = 2$

c) $\int_{-3}^{5} |x-1|\, dx = \int_{-3}^{1} -(x-1)\, dx + \int_1^5 x-1\, dx$

$= \int_{-3}^{1} 1-x\, dx + \left[\frac{x^2}{2} - x\right|_{x=1}^{5}$

$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right|_{-3}^{1} + \left[\left(\frac{25}{2}-5\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$

$= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) - \left(-3-\frac{9}{2}\right)\right] + \frac{15}{2} + \frac{1}{2} = 16$

C.A

$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$

d) $\int_0^2 |(x-1)(3x-2)|\, dx$

		$2/3$		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	$+$	0	$-$	0	$+$

Assim

$|(x-1)(3x-2)| = |3x^2-5x+2|$

$= \begin{cases} 3x^2-5x+2, & x \leq 2/3 \vee x \geq 1 \\ -(3x^2-5x+2), & 2/3 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$\int_0^2 |(x-1)(3x-2)|\,dx = \int_0^{2/3} (x-1)(3x-2)\,dx + \int_{2/3}^{1} -(x-1)(3x-2)\,dx + \int_1^2 (x-1)(3x-2)\,dx$$

$$= \int_0^{2/3} 3x^2 - 5x + 2\,dx - \int_{2/3}^{1} 3x^2 - 5x + 2\,dx + \int_1^2 3x^2 - 5x + 2\,dx$$

$$= \left[x^3 - \frac{5x^2}{2} + 2x \right|_0^{2/3} - \left[x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 2x \right|_{2/3}^{1} + \left[x^3 - \tfrac{5}{2}x^2 + 2x \right|_1^2$$

$$= \left[\frac{8}{27} - \frac{10}{9} + \frac{4}{3} - 0 \right] - \left[\left(1 - \tfrac{5}{2} + 2\right) - \left(\frac{8}{27} - \frac{10}{9} + \frac{4}{3} \right) \right] + \left[(8 - 10 + 4) - \left(1 - \tfrac{5}{2} + 2\right) \right]$$

$$= \frac{14}{27} - \left[\frac{1}{2} - \frac{14}{27} \right] + \left[2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{28}{27} + 1 = 55/27$$

e) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$

Tomando $x = 3\,\mathrm{sen}\,t$ vem

$x = 0 \Rightarrow 3\,\mathrm{sen}\,t = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 3 \Rightarrow 3\,\mathrm{sen}\,t = 3 \Rightarrow \mathrm{sen}\,t = 1 \Rightarrow t = \pi/2$

Considere-se, então

$$\varphi : [0, \pi/2] \longrightarrow [0, 3]$$
$$t \longmapsto \varphi(t) = 3\,\mathrm{sen}\,t$$

Aqui $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ donde

$$f(\varphi(t)) = \sqrt{9 - 9\,\mathrm{sen}^2 t} = 3\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2 t}$$
$$= 3\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 3\cos t \quad \text{pois para } t \in [0, \pi/2],\ \cos t \geq 0.$$

Além disso

$$\varphi'(t) = 3\cos t.$$

Fazendo o m.v. definida por φ vem

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \times 3\cos t \; dt$$

$$= 9\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \; dt \qquad\qquad \cos^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

$$= 9\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt$$

$$= 9/2 \left[t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) \right|_0^{\pi/2}$$

$$= 9/2 \left[\left(\pi/2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) - 0 \right] = 9\pi/4$$

f) $$\int_{-5}^{0} \underset{v}{2x}\,\underset{u'}{\sqrt{4-x}}\,dx = -2/3\,(4-x)^{3/2} \cdot 2x \Big|_{-5}^{0} + \frac{2}{3}\int_{-5}^{0} (4-x)^{3/2} \times 2\,dx$$

$$= \left[-\frac{4}{3}x\,(4-x)^{3/2} \right]_{x=-5}^{0} + \frac{4}{3}\int_{-5}^{0} (4-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \left[0 + \left(\frac{4}{3}(-5) \times 9^{3/2} \right) \right] - \left[\frac{4}{3} \times \frac{2}{5}\;(4-x)^{5/2} \right|_{x=-5}^{0}$$

$$= -180 - \frac{8}{15}\left(4^{5/2} - 9^{5/2} \right)$$

$$= -180 - 8/15 \left[2^5 - 3^5 \right] = -\frac{1012}{15}$$

g) $$\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

Tome-se $x = \operatorname{sh} t$

- $x = 3/4 \Rightarrow \operatorname{sh} t = 3/4 \Leftrightarrow \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} = 3/4$

$$\Leftrightarrow e^t - e^{-t} = 6/4 \Leftrightarrow e^{2t} - 3/2\, e^t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^t = \frac{3/2 \pm \sqrt{9/4 + 4}}{2} \Rightarrow e^t = \frac{\frac{3}{2} \pm 5/2}{2}$$

$$\Rightarrow e^t = 2 \quad \vee \quad e^t = -1/2 < 0 \ \times$$

$$\Rightarrow t = \ln 2$$

- $x = 4/3 \Rightarrow sh\, t = 4/3 \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow e^t - e^{-t} = 8/3$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} - 8/3\, e^t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^t = \frac{8/3 \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 4}}{2}$$

$$\Rightarrow e^t = \frac{8/3 \pm 10/3}{2}$$

$$\Rightarrow e^t = 3 \quad \vee \quad e^t = -1/3 < 0 \ \times$$

$$\Rightarrow t = \ln 3$$

Considere-se, então

$$\varphi : [\ln 2, \ln 3] \longrightarrow [3/4, 4/3]$$
$$t \longmapsto sh\, t$$

Aqui $f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$ pelo que

$$f(\varphi(t)) = \frac{1}{sh^2 t \sqrt{1 + sh^2 t}} = \frac{1}{sh^2 t \times ch\, t}$$

Além disso

$$\varphi'(t) = ch\, t.$$

Fazendo a m.v definida por φ vem

$$\int_{3/4}^{4/3} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{sh^2 t\,\cancel{ch t}} \times \cancel{ch t}\,dt$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{sh^2 t}\,dt$$

$$= \Big[-\coth t\Big|_{t=\ln 2}^{\ln 3} = \coth(\ln 2) - \coth(\ln 3)$$

$$= \frac{e^{\ln 2}+e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}} - \frac{e^{\ln 3}+e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3}-e^{-\ln 3}}, \quad \text{pois } \coth t = \frac{ch t}{sh t}$$

$$= \frac{2+1/2}{2-1/2} - \frac{3+1/3}{3-1/3} = 5/3 - 5/4 = 5/12$$

h) $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x^2+1)}_{v}\,dx$

$$= \Big[x \cdot \ln(x^2+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \hline -x^2-1 & 1 \\ \hline 0\;\; -1 & \end{array}$$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln 2 - 2\Big[x - \operatorname{arctg} x\Big]_0^1$$

$$= \ln 2 - 2\big[1 - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 0\big]$$

$$= \ln 2 - 2\big[1 - \pi/4 + 0\big] = \pi/2 - 2 + \ln 2$$

i) $\int_0^2 x^3 e^{x^2} dx = \int_0^2 \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{x e^{x^2}}_{u'} dx$

$= \left[\frac{1}{2} e^{x^2} x^2 \right]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 2x \, e^{x^2} dx$

$= 2e^4 - \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right|_0^2 = 2e^4 - \frac{e^4 - 1}{2}$

$= \frac{3e^4 - 1}{2}$

j) $\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{v} \underbrace{\operatorname{sen} x}_{u'} dx = \left[-\cos x \cdot x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx$

$= 1 + \left[\operatorname{sen} x \right|_0^{\pi} = 1$

k) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\operatorname{arc\,sen} x}_{v} dx = \left[x \cdot \operatorname{arc\,sen} x \right]_0^{\sqrt{2}/2} - \int_0^{\sqrt{2}/2} x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= \left[\sqrt{2}/2 \operatorname{arc\,sen} \left(\sqrt{2}/2 \right) - 0 \right] + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} \underbrace{-2x}_{u'} \underbrace{(1-x^2)^{-1/2}}_{u^n} dx$

$= \sqrt{2}/2 \times \pi/4 + \cancel{\frac{1}{2}} \left[\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\cancel{1/2}} \right]_0^{\sqrt{2}/2}$

$= \sqrt{2}/8 \, \pi + \left[\left(1 - 1/2\right)^2 - 1 \right]$

$= \frac{\sqrt{2}}{8} \pi - 3/4$

l) $\displaystyle\int_{-3}^{2} \sqrt{|x|}\, dx$

Temos

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{donde} \quad \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Logo

$$\int_{-3}^{2} \sqrt{|x|}\, dx = \int_{-3}^{0} \sqrt{-x}\, dx + \int_{0}^{2} \sqrt{x}\, dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} (-x)^{3/2} \right]_{-3}^{0} + \frac{3}{2} \left[x^{3/2} \right|_{0}^{2}$$

$$= -2/3 \left[0 - (3)^{3/2} \right] + 3/2 \left[2^{3/2} - 0 \right]$$

$$= 2/3 \; 3\sqrt{3} + \frac{3}{2}\, 2\sqrt{2} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

m) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx \quad , \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

$$= \int_{0}^{1} x^2\, dx + \int_{1}^{2} 2-x\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right|_{0}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{3} + \left[(4-2) - (2 - 1/2) \right]$$

$$= 1/3 + 1/2 = 5/6$$

n) $\int_0^1 g(x)\,dx$ $\qquad g(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1/2 \\ -x & , 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$

$= \int_0^{1/2} x\,dx + \int_{1/2}^{1} -x\,dx$

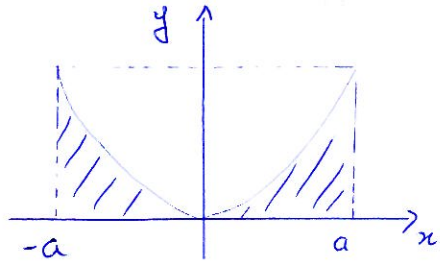
$= \left[\frac{x^2}{2}\right|_0^{1/2} - \left[\frac{x^2}{2}\right|_{1/2}^{1}$

$= \left(1/8 - 0\right) - \left(\frac{1}{2} - 1/8\right)$

$= -1/4$

7.2

a) Se f é par então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



f par $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \qquad (*)$$

Considerando a mudança de variável $x = -t$

vem

$x = -a \Rightarrow -t = -a \Rightarrow t = a$

$x = 0 \Rightarrow -t = 0 \Rightarrow t = 0$

Isto é, tomando

$$\varphi : [0, a] \longrightarrow [-a, 0]$$
$$t \longmapsto \varphi(t) = -t \quad , \quad \varphi'(t) = -1$$

fazendo o m.v. definida por φ, o 1º integral em $(*)$ é

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)\cdot(-1)\,dt$$

$$= -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt$$

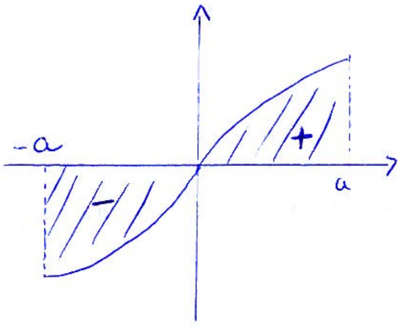
$$= \int_0^a f(t)\,dt \quad \text{pois } f \text{ é par}$$

Assim,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx$$

b) Se f é ímpar então $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$



f é ímpar $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$

Considerando a m.v. utilizada na alínea anterior agora vem

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-1)\,dt$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{a} -f(t)\,dt\,, \quad \text{pois } f \text{ é ímpar}$$

pelo que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} -f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 0.$$

7.3 Nestas condições, pelo Teorema do valor médio para integrais, sabe-se que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

isto é

$$0 = f(c)\,(b-a)$$

donde

$$f(c) = 0$$

já que $b-a \neq 0$.

7.4 Pelo Teorema fundamental do cálculo sendo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad , \quad x \in [a, b]$$

e sendo $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, então

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in [a, b] .$$

a) $F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

Tem-se

$$F'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$$

b) $F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

seja G uma primitiva de

$$f(t) = (1+t^2)^{-3} \qquad (\therefore G'(x) = f(x))$$

Então, pelo T. fundamental do cálculo

$$F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt = G(x^2) - G(0)$$

Derivando, e usando o Teorema da derivada da função composta, vem

$$F'(x) = \left(\int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt \right)' = \left[G(x^2) - G(0) \right]'$$

$$= 2x \, G'(x^2)$$

$$= 2x \cdot f(x^2) = 2x \, (1+x^4)^{-3}$$

Assim

$$F' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x \Big/ (1+x^4)^{-3}$$

c) $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt, \; x \in \mathbb{R}$

Seja G uma primitiva de $f(t) = \frac{t^6}{1+t^4}$

Então, para $x<0$

$$F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt = G(x^2) - G(x^3)$$

Derivando vem

$$F'(x) = \left(\int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4} dt \right)' = \left[G(x^2) - G(x^3) \right]'$$

$$= 2x \, G'(x^2) - 3x^2 \, G'(x^3)$$

$$= 2x \, f(x^2) - 3x^2 \, f(x^3)$$

$$= 2x \times \frac{x^{12}}{1+x^8} - 3x^2 \frac{x^{18}}{1+x^{12}}$$

Para $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{x^3}^{x^2} f(t)\,dt = - \int_{x^2}^{x^3} f(t)\,dt = -\left(G(x^3) - G(x^2) \right)$$

$$= G(x^2) - G(x^3)$$

pelo que

$$F'(x) = \frac{2x^{14}}{1+x^8} - 3\frac{x^{20}}{1+x^{12}}.$$

(7.5)

a) $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$

Definido
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad , \text{ isto é } F(x) = x^2(1+x)$$

do T. fundamental do cálculo
$$F'(x) = f(x) \qquad , \quad x \in \mathbb{R}_0^+$$

Ora
$$F'(x) = \left[x^2(1+x)\right]' = 2x(1+x) + x^2$$
$$= 3x^2 + 2x$$

pelo que
$$f(x) = 3x^2 + 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

b) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3 e^x - x^4$

Definindo
$$F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt \quad , \text{ isto é } F(x) = x^3 e^x - x^4$$

como consequência do Teorema fundamental do cálculo (c.f. exa 1.4b) sabe-se que
$$F'(x) = 2x\, f(x^2) \qquad (*)$$

Ora
$$F'(x) = \left[x^3 e^x - x^4\right]' = 3x^2 e^x + x^3 e^x - 4x^3$$
$$= x\left[(3x + x^2)e^x - 4x^2\right] \qquad (**)$$

Comparando $(*)$ e $(**)$ conclui-se que, para $x>0$
$$f(x^2) = \frac{1}{2}\left[(3x + x^2)e^x - 4x^2\right]$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(3\sqrt{x} + x)e^{\sqrt{x}} - 4x\right]$$

Como f é contínua
$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

pelo que
$$f(x) = \frac{1}{2}\left[(3\sqrt{x} + x)e^{\sqrt{x}} - 4x\right] \quad , \quad x \geq 0.$$

7.6 $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$

$F(\sqrt{3}) = \int_0^3 f(t)\,dt = 2 + 1 = 3$ (área calculada usando o gráfico de f)

Como

$F'(x) = 2x\, f(x^2)$ ((c.f. Exer 7.4 b)

vem

$F'(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}\, f(3)$

$= 2\sqrt{3} \cdot (-1) = -2\sqrt{3}$

7.7 $f(x) = 3 + \int_0^x \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2}\,dt$

Considere-se

$F(x) = \int_0^x \frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2}\,dt$

e designe-se

$\frac{1 + \operatorname{sen} t}{2 + t^2} = g(t)$ contínua em $\mathbb{R}$

Aplicando o T. fundamental do cálculo à funç. F vem

$F'(x) = g(x)$

$= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{2 + x^2}.$

Ora

$f(x) = 3 + F(x)$

donde

$f'(x) = F'(x) = g(x) = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{2 + x^2}$

e

$f''(x) = F''(x) = g'(x) = \frac{\cos x\,(2 + x^2) - 2x\,(1 + \operatorname{sen} x)}{(2 + x^2)^2}$

O polinómio pedido, é o polinómio de Taylor de f de grau 2 em torno de $x = 0$. isto é

$P_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)\, x + f''(0)\,\frac{x^2}{2}$

Onde

$$f(0) = 3 + F(0) = 3 + \int_0^0 g(t)\,dt = 3$$

$$f'(0) = F'(0) = 1/2$$

$$f''(0) = F''(0) = 2/4 = 1/2$$

Assim

$$P_{2,0}(x) = 3 + \frac{1}{2}x + 1/4\, x^2.$$

7.8

a) $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

não é integrável : $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$ e $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1$

b) Não existe tal função pois

f é derivável em $[a,b]$

$\Rightarrow$ f é contínua em $[a,b]$

$\Rightarrow$ f é integrável em $[a,b]$

c) Não existe tal função

Atendendo à alínea b e ao Teorema fundamental do cálculo : se f é contínua f é primitivável

d) A função

$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1/2|$

é primitivável mas não é derivável.

e) A funç $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & , \ 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

não é primitivável mas é integrável.

se f fosse primitivável, existia F derivável tal que $F' = f$. Mas se F é derivável, verifica o T. do valor médio para a derivada (T. Darboux), o que é falso!

A funç f é integrável pois tem um nº finito de descontinuidades.

f) $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \ x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & , \ x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

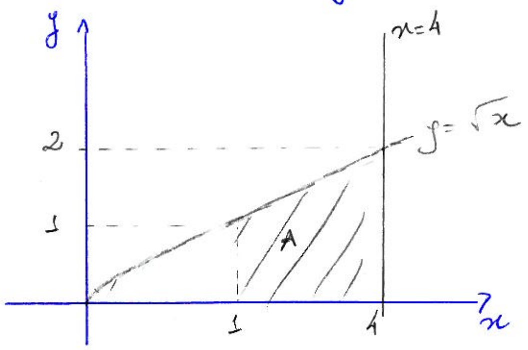
Não é integrável, no entanto a funç $|f|: [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = 1 \ , \ x \in [0,1]$$

pelo que é integrável.

7.9 a) $x = 1$ $\quad y = \sqrt{x}$

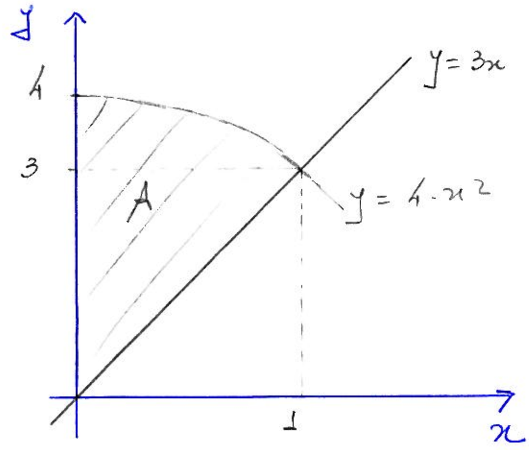
$x = 4$ $\quad y = 0$



$$\text{área}_A = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} \left[x^{3/2} \right|_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

b) $x=0$ $\quad y = 3x$

$x=1$ $\quad y = 4-x^2$



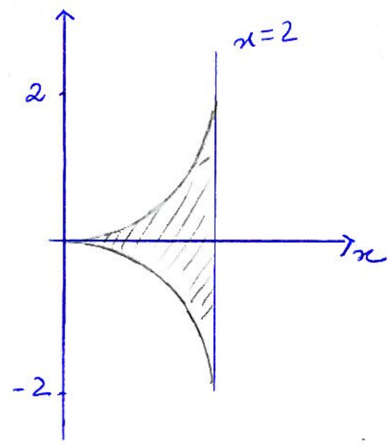
$$\text{área}_A = \int_0^1 (4-x^2) - 3x \, dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= 4 - 1/3 - 3/2 = 13/6$$

c) $x=0$ $\quad x^2 + (y-2)^2 = 4$

$x=2$ $\quad x^2 + (y+2)^2 = 4$



$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{4-x^2}$$

$$x^2 + (y+2)^2 = 4 \Rightarrow y = -2 \pm \sqrt{4-x^2}$$

Como A é a região compreendida entre as duas circunferências quando x está entre 0 e 2 há que escolher

$$y = 2 - \sqrt{4-x^2}$$

$$y = -2 + \sqrt{4-x^2}$$

Assim

$$\text{área}_A = \int_0^2 \left(2 - \sqrt{4-x^2}\right) - \left(-2 + \sqrt{4-x^2}\right) dx$$

$$= 2 \int_0^2 2 - \sqrt{4-x^2} \, dx$$

$$= 2 \int_0^2 2 \, dx - 2 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$$

$$= 8 - 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\,\text{sen}^2 t} \cdot 2\cos t \, dt$$

$x = 2\,\text{sen}\, t$

$x=0 \Rightarrow t=0$

$x=2 \Rightarrow t=\pi/2$

$\varphi : [0, \pi/2] \longrightarrow [0,2]$

$t \longrightarrow \varphi(t) = 2\,\text{sen}\, t$

$\varphi'(t) = 2\cos t$

$$= 8 - 4\int_0^{\pi/2} 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\cdot \cos t\, dt$$

$$= 8 - 8\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \quad , \text{ pois em } [0, \pi/2],\ \cos t \geq 0$$

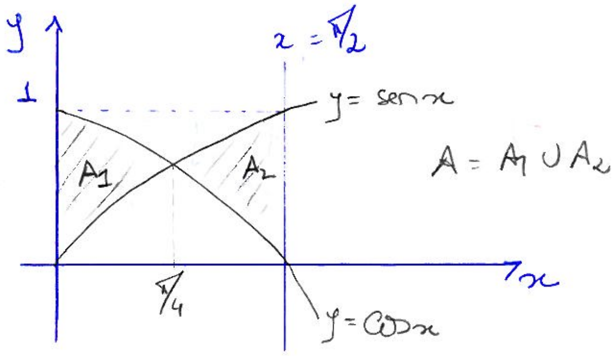
pelo que $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$

$$= 8 - 8\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2}\, dt$$

$$= 8 - 4\left[t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right|_{t=0}^{\pi/2}$$

$$= 8 - 2\pi$$

d) $x = 0$ $\quad y = \operatorname{sen} x$
$x = \pi/2$ $\quad y = \cos x$



Note-se que para $0 \leq x \leq \pi/2$ se tem

$$\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow x = \pi/4$$

e

$\cos x \geq \operatorname{sen} x \quad$ se $x \in [0, \pi/4]$

$\operatorname{sen} x \geq \cos x \quad$ se $x \in [\pi/4, \pi/2]$

Assim, aqui, sendo A o região limitada pelas curvas dadas, temos

$$A = A_1 \cup A_2$$

pelo que

$$\text{área}_A = \text{área}_{A_1} + \text{área}_{A_2}$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$$

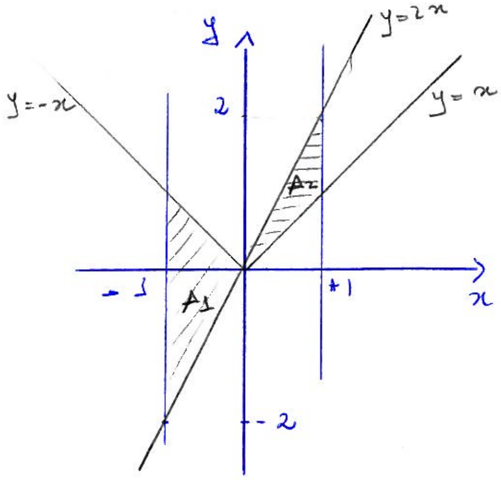
$$= \left[\operatorname{sen} x + \cos x\right|_0^{\pi/4} + \left[-\cos x - \operatorname{sen} x\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \left[\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \cos 0\right] + \left[-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \left(-\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (\sqrt{2} - 1) + (-1 + \sqrt{2})$$

$$= 2(\sqrt{2} - 1)$$

e) $x = -1 \qquad y = |x|$
$x = 1 \qquad y = 2x$



Aqui
$$A = A_1 \cup A_2$$
onde A_1 é a região limitada pelas curvas de equação
$$x=-1 \qquad y=2x$$
$$x=0 \qquad y=-x$$
e A_2 é a região limitada pelas curvas de equação
$$x=0 \qquad y=x$$
$$x=1 \qquad y=2x$$

Assim
$$\text{área}_A = \text{área}_{A_1} + \text{área}_{A_2}$$
$$= \int_{-1}^{0} (-x-2x)\,dx + \int_0^1 (2x-x)\,dx$$
$$= -3\int_{-1}^{0} x\,dx + \int_0^1 x\,dx$$
$$= -3\left[\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = -3\left[0-\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}$$
$$= 2$$

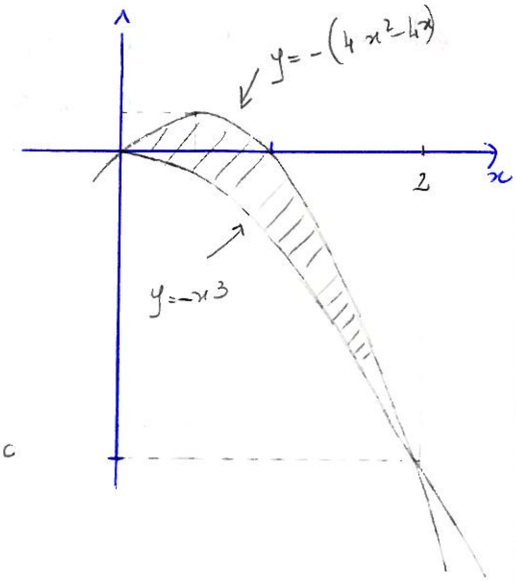
f) $y = -x^3$
$y = -(4x^2-4x)$

Comece-se por notar que
$$y = -(4x^2-4x) = -\left[(2x)^2 - 2(2x)\right]$$
$$= -\left[\underbrace{(2x)^2 - 2(2x) + 1} - 1\right]$$
$$= -\left[(2x-1)^2 - 1\right] = 1 - (2x-1)^2$$

Além disso, as curvas dadas intersectam-se quando
$$-x^3 = -(4x^2-4x) \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left[x^2 + 4x - 4\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ (x-2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee\ x = 2$$

Isto é, as curvas intersectam-se nos pontos de coordenadas

$(0,0)$
$(2,-8)$



A curva de equação

$$y = -(4x^2-4x) = 1-(2x-1)^2$$

é uma parábola de concavidade voltada para baixo cujo vértice está no ponto de coordenadas

$$x = 1/2, \; y = 1$$

Assim

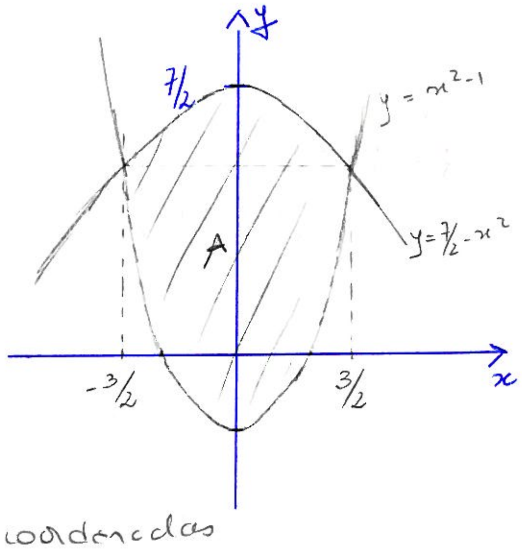
$$\text{área}_A = \int_0^2 -(4x^2-4x)+x^3 \, dx$$

$$= \int_0^2 -4x^2+4x+x^3 \, dx$$

$$= \left[-\frac{4}{3}x^3 + 2x + \frac{x^4}{4} \right|_0^2$$

$$= -\frac{32}{3}+4+4-0 = 16/3$$

g) $y = -x^2+7/2$
$y = x^2-1$



As curvas dadas intersectam-se quando

$$-x^2+7/2 = x^2-1$$

$$\Rightarrow x^2 = 9/4 \Rightarrow x = \pm 3/2$$

Ou seja intersectam-se nos pontos de coordenadas

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

Seja A a região limitada pelas curvas dadas. A região A é simétrica relativamente ao eixo dos yy.

Assim

$$\text{área}_A = \int_{-3/2}^{3/2} \left(\frac{7}{2} - x^2\right) - \left(x^2 - 1\right) dx$$

$$= 2 \int_0^{3/2} \left(\frac{7}{2} - x^2\right) - \left(x^2 - 1\right) dx$$, pois A é simétrica relativamente ao eixo dos yy.

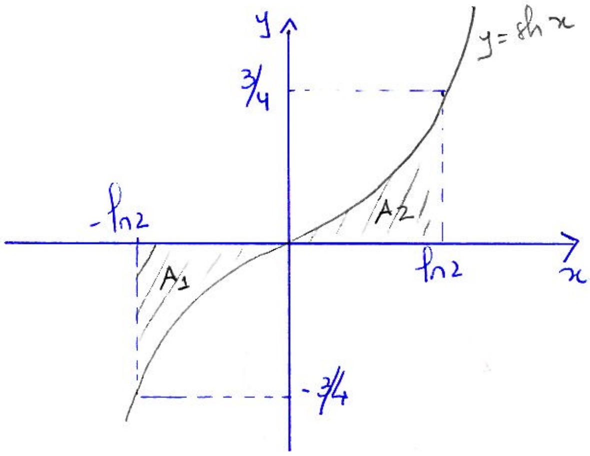
$$= 2 \int_0^{3/2} \frac{9}{2} - 2x^2 \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{9}{2} x - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^{3/2} = 2 \left[\frac{27}{4} - \frac{9}{4} \right]$$

$$= 8.$$

h) $y = 0$ $\quad x = \ln 2$

$y = sh\, x$ $\quad x = -\ln 2$



Note-se que

$$sh\, x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Além disso,

$$x = \ln 2 \Rightarrow y = sh(\ln 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2 - 1/2}{2} = 3/4$$

e

$$x = -\ln 2 \Rightarrow y = sh(-\ln 2) \Rightarrow y = \frac{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}{2} = -3/4$$

Seja A a região limitada pelas curvas dadas. Então

$$A = A_1 \cup A_2$$

sendo que A_1 é a região limitada por

$x = -\ln 2 \quad y = 0$

$x = 0 \quad y = sh\, x$

e A_2 a região limitada por

$x = 0 \quad y = sh\, x$

$x = \ln 2 \quad y = 0.$

As áreas de A_1 e A_2 são iguais, logo

$$\text{área}_A = 2 \int_0^{\ln 2} sh\, x \, dx = 2 \left[ch\, x \right|_0^{\ln 2}$$

$$= 2\left[ch(\ln 2) - ch\, 0\right]$$

$$= 2\left[\frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} - 1\right]$$

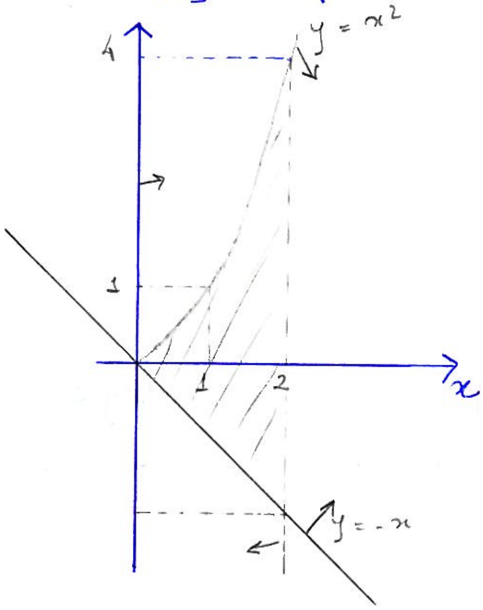
$$= 2\left[\frac{2 + 1/2}{2} - 1\right] = 1/2$$

7.10 a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge -x \leq y \leq x^2\}$

Representa-se geometricamente as curvas de equação

$x = 0$ $\quad y = -x$

$x = 2$ $\quad y = x^2$

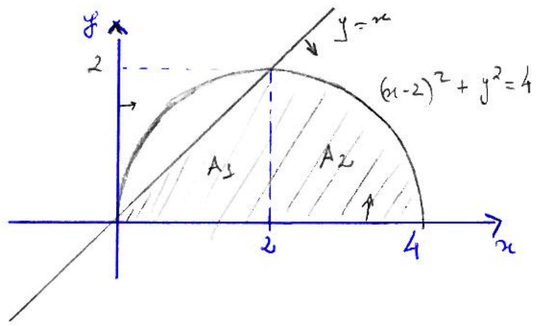


$$\text{área} = \int_0^2 x^2 - (-x)\,dx$$

$$= \int_0^2 x^2 + x\,dx$$

b) $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$

$0 \leq y \leq x$



Representam-se as curvas de equação

$y = 0$, $y = x$

e

$(x-2)^2 + y^2 = 4$

↳ circunferência de centro $(2,0)$ e raio 2

$(x-2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4 - (x-2)^2}$

Aqui, sendo A a região do plano limitada pelas curvas dadas, tem-se que

$$A = A_1 \cup A_2$$

onde A_1 é a região limitada por

$x = 0$ $\quad y = x$

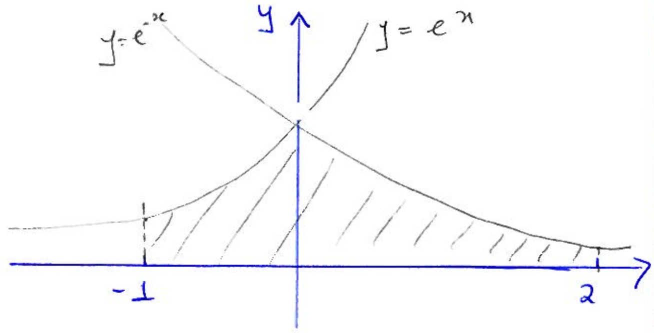
$x = 0$ $\quad y = 0$

e A_2 é a região limitada por

$x = 2$ $\quad y = \sqrt{4 - (x-2)^2}$

$x = 4$ $\quad y = 0$

e) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le e^x \wedge 0 \le y \le e^{-x}\}$



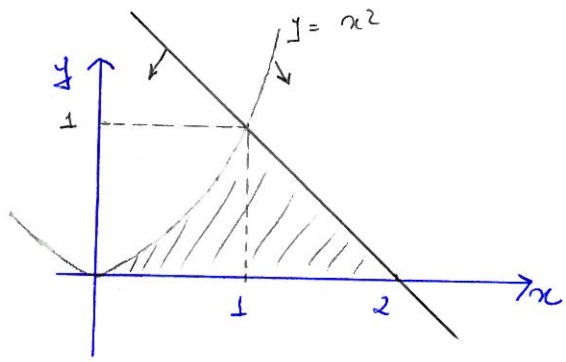
$$\text{área}_A = \int_{-1}^{0} e^x \, dx + \int_0^2 e^{-x} \, dx$$

f) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \wedge 0 \le y \le x^2 \wedge 0 \le y \le 2-x\}$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2-x \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Rightarrow x = -2 \vee x = 1$$



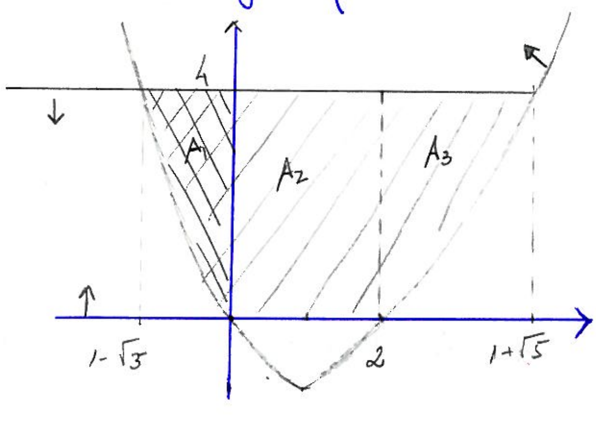
$$\text{Área}_A = \int_0^1 x^2 \, dx + \int_1^2 2-x \, dx$$

g) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge y \geq x^2 - 2x \wedge y \le 4\}$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2}$$

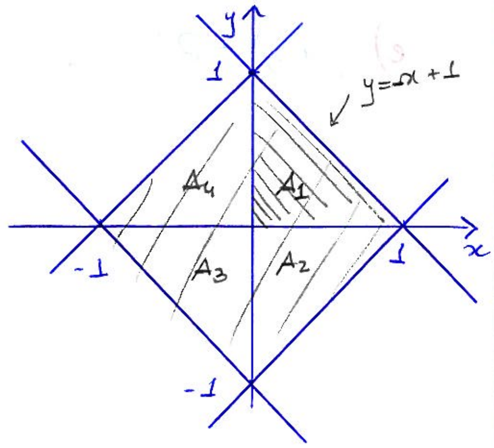
$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}$$



Aqui $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ pelo que

$$\text{área}_A = \int_{1-\sqrt{5}}^{0} 4 - (x^2 - 2x) \, dx + \int_0^2 4 \, dx + \int_2^{1+\sqrt{5}} 4 - (x^2 - 2x) \, dx$$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\} = A$



Tem-se

$$|x|+|y| \leq 1 \iff |x| \leq 1-|y|$$

$$\iff -(1-|y|) \leq x \leq (1-|y|)$$

Ora

$$-(1-|y|) \leq x \iff |y| \leq x+1$$

$$\iff -(x+1) \leq y \leq x+1$$

e

$$x \leq 1-|y| \iff |y| \leq 1-x$$

$$\iff -(1-x) \leq y \leq 1-x$$

Há então que representar geometricamente as rectas de equação

$$y = -(x-1) \quad ; \quad y = x+1$$

$$\text{e} \quad y = x-1 \quad ; \quad y = 1-x$$

Como

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

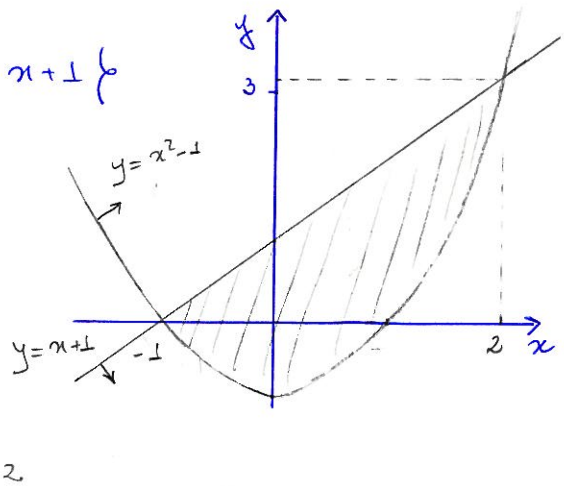
e a área das regiões A_1, A_2, A_3 e A_4 é igual, pode-se escrever

$$\text{área}_A = \text{área}_{A_1} + \text{área}_{A_2} + \text{área}_{A_3} + \text{área}_{A_4}$$

$$= 4 \times \text{área } A_1$$

$$= 4 \int_0^1 1-x \, dx$$

d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-1 \leq y \leq x+1\}$



$$x^2-1 = x+1$$

$$\Rightarrow x^2-x-2=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow x=2 \vee x=-1$$

Assim

$$\text{área}_A = \int_{-1}^{2} (x+1)-(x^2-1)\, dx = \int_{1}^{2} x^2+x+2 \, dx$$

h) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \wedge y \geq x^2 - 4x + 3 \wedge y \leq -x^2 + 5x - 4\}$

$y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 2 \times 2x + 4) - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow$ parábola de vértice em $x = 2$ $y = -1$

$y = -x^2 + 5x - 4 = -[x^2 - 5x + 4]$

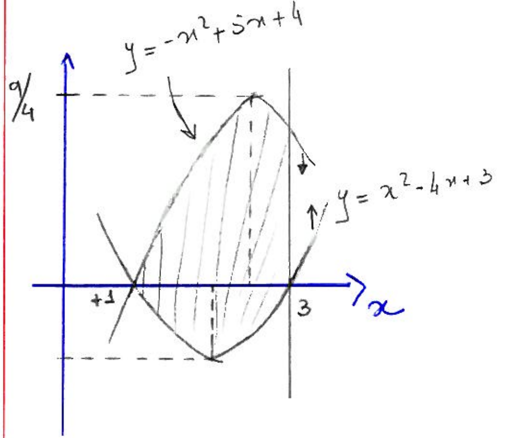
$= -\left[x^2 - 2 \times \frac{5}{2} x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4\right] = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right] \Rightarrow$ parábola de vértice em $x = 5/2$, $y = 9/4$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -x^2 + 5x - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 5x - 4$$

$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 7 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{4}$

$\Rightarrow x = \dfrac{9 \pm 5}{4} \Rightarrow x = 1 \vee x = 7/2$



$$\text{Área} = \int_1^3 (-x^2 + 5x + 4) - (x^2 - 4x + 3)\, dx$$

$$= \int_1^3 -2x^2 + 9x + 1\, dx$$