

---

# Métodos Lineares Explícitos de Três Passos

Luís Eduardo dos Santos Lopes <sup>1</sup>

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.

MAP5725 - Tratamento Numérico de Equações Diferenciais (2021)

## Resumo

Os métodos lineares explícitos de  $n$ -passos, em particular  $n = 3$ , são utilizados para encontrar soluções numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) com condição inicial. Neste trabalho, foi analisado o comportamento e convergência desses métodos a partir da implementação usando a linguagem de programação Python.

## 1. Introdução

Considere o problema de Cauchy na forma normal:

$$z'(t) = f(t, z(t)) \quad \text{com} \quad z(t_0) = z_0 \quad (1)$$

E com esse tipo de problema busca-se os métodos numéricos para calcular soluções aproximadas de (1) no intervalo de estudo  $I = [t_0, T] \in \text{Dom}(y(t))$ . O intervalo  $I$  é dividido em  $m \in \mathbb{N}$  subintervalos, i.e., esse  $m$  significa o número de passos de integração  $h = \frac{T - t_0}{m}$ , onde  $h$  é o tamanho do passo de integração.

Um método de passo múltiplo linear (ou método de  $n$ -passos linear) tem a forma

$$a_n z_{k+n} + \cdots + a_1 z_{k+1} + a_0 z_k = h[b_n f_{k+n} + \cdots + b_1 f_{k+1} + b_0 f_k] \quad (2)$$

onde os parâmetros  $a_j$  e  $b_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , são constantes, sendo  $a_n \neq 0$ ,  $a_0^2 + b_0^2 \neq 0$  e  $f_{k+i} = f(t_{k+i}, z_{k+i})$  com  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ , e o passo de integração  $h$ . Note que o intervalo é igualmente espaçado.

O método numérico definido por (2) é implícito quando  $b_n \neq 0$  e explícito quando  $b_n = 0$ . Sem perda de generalidade, assume-se que  $a_n = 1$ .

Estamos interessados em estudar os métodos lineares explícitos de 3 passos que podem ser escritos com a seguinte fórmula para cada passo no tempo

$$z_{k+3} + a_2 z_{k+2} + a_1 z_{k+1} + a_0 z_k = h[b_2 f_{k+2} + b_1 f_{k+1} + b_0 f_k] \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>luislopes@ime.usp.br

onde os parâmetros  $a_j$  e  $b_j$ ,  $j = 0, 1$  e  $2$ , são constantes a serem determinadas. Esses métodos podem ser estendidos para EDO's de ordens superiores adotando o modelo n-dimensional.

Para analisar esses métodos precisamos recordar alguns conceitos importantes dos métodos de passos múltiplos lineares. Baseado no capítulo 6 de Roma [1], o primeiro e o segundo polinômio característico destes métodos são definidos, respectivamente, por  $\rho$  e  $\sigma$ ,

$$\rho(w) = w^3 + a_2w^2 + a_1w + a_0 = (w - 1)(w - r_2)(w - r_3) \quad (4)$$

$$\sigma(w) = b_2w^2 + b_1w + b_0 \quad (5)$$

onde as raízes  $1, r_2$  e  $r_3$  são três números complexos.

Definimos também

$$\pi(s) = \rho(s) - \theta\sigma(s) \quad (6)$$

o polinômio de estabilidade absoluta associado a um problema linear de 3 passos, onde  $\rho$  e  $\sigma$  são definidos, respectivamente, em (4) e (5), e  $\theta = \lambda h \in \mathbb{C}$ .

Se todas as raízes  $s_j$  do polinômio de estabilidade absoluta forem  $|s_j| < 1$ , diremos que o método é absolutamente estável para  $\theta$  dado. A região de estabilidade absoluta é definida pelo conjunto de valores de  $\theta$  no plano complexo tal que o método é absolutamente estável.

O intervalo de estabilidade absoluta pode ser determinado calculando as raízes de (6) para um conjunto de valores de  $\theta$  numa vizinhança da origem, em seguida representar graficamente as funções  $|s_j(\theta)|$  e observar os intervalos para os quais  $|s_j(\theta)| < 1$ . Também há outra forma de determinar o intervalo de estabilidade absoluta que será apresentado mais a frente e aplicado nos métodos.

Neste trabalho, estudaremos três métodos explícitos de 3 passos e aplicaremos para dois casos de EDO's. Nosso objetivo é comparar o desempenho de cada método com o auxílio da implementação em Python. Os algoritmos foram organizados em 2 arquivos: *T4.caso1\_Luis.py* e *T4.caso2\_Luis.py*. E pode ser acessado pelo arquivo *.py* anexado ao trabalho ou pelo [github](#).

## 2. Métodos Lineares Explícitos de Três Passos

Inicialmente iremos apresentar e/ou construir os três métodos explícitos de 3 passos e determinar seus coeficientes, raízes do primeiro polinômio e intervalo de estabilidade absoluta.

## 2.1. Método I: Método de Adams-Bashforth de 3 passos

O método de Adams-Bashforth de 3 passos é da forma

$$z_{k+3} - z_{k+2} = h \left[ \frac{23}{12} f_{k+2} - \frac{16}{12} f_{k+1} + \frac{5}{12} f_k \right] \quad (7)$$

a dedução deste método pode ser encontrada nas notas de aula de Jim Lambers [2].

Por (7) tem-se os seguintes parâmetros:

$$a_0 = a_1 = 0, a_2 = -1, b_0 = \frac{5}{12}, b_1 = -\frac{16}{12} \text{ e } b_2 = \frac{23}{12}$$

Assim, o primeiro polinômio característico deste método é dado por

$$\begin{aligned} \rho(w) &= w^3 - w^2 + 0w + 0 = (w - 1)(w - r_2)(w - r_3) \\ &= w^3 - w^2 r_3 - w^2 r_2 + w r_2 r_3 - w^2 + w r_3 + w r_2 - r_2 r_3 \\ &= w^3 + (-1 - r_2 - r_3)w^2 + (r_2 + r_2 r_3 + r_3)w - r_2 r_3 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} -1 &= -1 - r_2 - r_3 \\ 0 &= r_2 + r_2 r_3 + r_3 \\ 0 &= -r_2 r_3 \end{cases}$$

Logo, as raízes são 1 e  $r_2 = -r_3$ . Note que a única possibilidade disto ocorrer é quando  $r_2 = r_3 = 0$ . De fato, bastava ter observado que  $\rho(w) = w^3 - w^2$ , i.e.,  $w^2(w - 1) = 0$ . Com isso, concluímos que 1 e 0 são as raízes de  $\rho(w)$ .

O polinômio de estabilidade absoluta para este método é

$$\pi(s) = s^3 - s^2 - \frac{\theta}{12}(23s^2 - 16s + 5) \text{ onde } \theta = \lambda h \quad (8)$$

Assim,

$$s^3 - s^2(1 + \frac{23}{12}\theta) + \frac{16}{12}\theta s - \frac{5}{12}\theta = 0 \quad (9)$$

Seu intervalo de estabilidade absoluta pode ser observado na Figura (1) ou estimado com precisão de 0.1 de modo a ser verificado que para  $\theta = \lambda h = -0.1, -0.2, -0.3, \dots$  o polinômio de estabilidade absoluta relacionado com  $\theta$  tenha todas as raízes com módulo menor que 1.

Vejamos as possibilidades, iremos escolher valores para  $\theta$  e estimar as raízes para cada caso em (9).

- Para  $\theta = -0.1 = -\frac{1}{10}$  :

$$s^3 - \frac{97}{120}s^2 - \frac{2}{15}s + \frac{1}{24} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.26818$ ,  $s_2 \approx 0.17171$  e  $s_3 \approx 0.90480$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

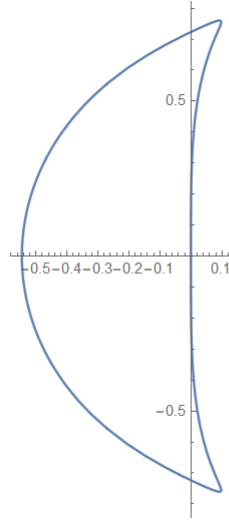


Figura 1: Região de Estabilidade para o Método de Adams-Bashforth de 3 passos.

- Para  $\theta = -0.2 = -\frac{1}{5}$  :

$$s^3 - \frac{37}{60}s^2 - \frac{4}{15}s + \frac{1}{12} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.43540$ ,  $s_2 \approx 0.23395$  e  $s_3 \approx 0.81811$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.3 = -\frac{3}{10}$  :

$$s^3 - \frac{17}{40}s^2 - \frac{2}{5}s + \frac{1}{8} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.59662$ ,  $s_2 \approx 0.28407$  e  $s_3 \approx 0.73755$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.4 = -\frac{2}{5}$  :

$$s^3 - \frac{7}{30}s^2 - \frac{8}{15}s + \frac{1}{6} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $s_2 = \frac{-1-\sqrt{201}}{20}$  e  $s_3 = \frac{1-\sqrt{201}}{20}$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.5 = -\frac{1}{2}$  :

$$s^3 - \frac{1}{24}s^2 - \frac{2}{3}s + \frac{5}{24} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.92393$ ,  $s_2 \approx 0.39556$  e  $s_3 \approx 0.57004$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.6 = -\frac{3}{5}$  :

$$s^3 + \frac{3}{20}s^2 - \frac{4}{5}s + \frac{1}{4} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -1.0921$ ,  $s_2 \approx 0.47106 - 0.08375i$  e  $s_3 \approx 0.47106 + 0.08375i$ . Note que  $|s_1| > 1$  contradizendo a definição de estabilidade absoluta. Portanto, o intervalo de estabilidade absoluta do Método de Adams-Bashforth de 3 passos é  $I = (-0.6, 0)$  com precisão de 0.1.

## 2.2. Método II

Para o segundo método iremos escolher as raízes  $r_2 = 0$  e  $r_3 = 1/10$  e substituir em (4) de modo que o método seja zero-estável. Com isso, obtemos o primeiro polinômio característico deste método

$$\begin{aligned}\rho(w) &= w^3 + a_2w^2 + a_1w + a_0 = (w-1)(w)(w-1/10) \\ &= w^3 - \frac{11}{10}w^2 + \frac{1}{10}w\end{aligned}$$

Logo,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = \frac{1}{10}$  e  $a_2 = -\frac{11}{10}$ .

Agora para determinar os  $b_j$  de modo que o método tenha ordem 3 de consistência, precisamos usar o Teorema 5.3 das notas de Roma [1], isto é, mostrar que  $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$  e  $C_4 \neq 0$  onde

$$C_p = \sum_{j=0}^n \frac{j^p a_j}{p!} - \sum_{j=0}^n \frac{j^{p-1} b_j}{(p-1)!}$$

Vejamos,

$$\begin{aligned}C_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + 1 = 1/10 - 11/10 + 1 = 0 \\ C_1 &= a_1 + 2a_2 + 3 - b_0 - b_1 - b_2 = 0 \Rightarrow b_0 + b_1 + b_2 = \frac{9}{10} \\ C_2 &= \frac{a_1 + 4a_2 + 9}{2} - b_1 - 2b_2 = 0 \Rightarrow b_1 + 2b_2 = \frac{47}{20} \\ C_3 &= \frac{a_1 + 8a_2 + 27}{6} - \frac{b_1 + 4b_2}{2} = 0 \Rightarrow b_1 + 4b_2 = \frac{61}{10}\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} \\ \frac{47}{20} \\ \frac{61}{10} \end{bmatrix}$$

Logo,  $b_0 = \frac{17}{40}$ ,  $b_1 = -\frac{56}{40}$  e  $b_2 = \frac{75}{40}$ .

Por fim,  $C_4 \neq 0$ . De fato,

$$C_4 = \frac{a_1 + 16a_2 + 81a_3}{24} - \frac{b_1 + 8b_2}{6} = \frac{1/10 + 16(-11/10) + 81}{24} - \frac{-56/40 + 8(75/40)}{6} = \frac{91}{240} \neq 0$$

Substituindo em (3) os parâmetros encontrados, obtemos a forma do Método 2:

$$z_{k+3} - \frac{11}{10}z_{k+2} + \frac{1}{10}z_{k+1} = \frac{h}{40}[75f_{k+2} - 56f_{k+1} + 17f_k] \quad (10)$$

O polinômio de estabilidade absoluta para este método é

$$\pi(s) = s^3 - \frac{11}{10}s^2 + \frac{1}{10}s - \frac{\theta}{40}(75s^2 - 56s + 17) \text{ onde } \theta = \lambda h \quad (11)$$

Ou seja,

$$s^3 - s^2\left(\frac{11}{10} + \frac{75}{40}\theta\right) + s\left(\frac{1}{10} + \frac{56}{40}\theta\right) - \frac{17}{40}\theta = 0 \quad (12)$$

Para estimar o intervalo de estabilidade absoluta deste método usaremos a mesma ideia feito no caso do Método I, verificando com  $\theta$  onde tem todas as raízes com módulo menor que 1.

Antes de iniciar os cálculos, faremos uma observação que será útil neste trabalho.

**Observação 1.** *Seja  $r = x + iy$  uma raiz complexa. Se queremos que todas as raízes sejam  $|r| < 1$ , i.e.,  $\sqrt{x^2 + y^2} < 1$ , precisamos que  $x^2 + y^2 < 1$ .*

Vejamos as possibilidades.

- Para  $\theta = -0.1 = -\frac{1}{10}$  :

$$s^3 - \frac{73}{80}s^2 - \frac{1}{25}s + \frac{17}{400} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.21291$ ,  $s_2 \approx 0.22062$  e  $s_3 \approx 0.90479$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.2 = -\frac{1}{5}$  :

$$s^3 - \frac{29}{40}s^2 - \frac{9}{50}s + \frac{17}{200} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.37220$ ,  $s_2 \approx 0.27918$  e  $s_3 \approx 0.18802$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.3 = -\frac{3}{10}$  :

$$s^3 - \frac{43}{80}s^2 - \frac{8}{25}s + \frac{51}{400} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.52746$ ,  $s_2 \approx 0.32800$  e  $s_3 \approx 0.73696$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.4 = -\frac{2}{5}$  :

$$s^3 - \frac{7}{20}s^2 - \frac{23}{50}s + \frac{17}{100} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.68462$ ,  $s_2 \approx 0.37841$  e  $s_3 \approx 0.65621$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.5 = -\frac{1}{2}$  :

$$s^3 - \frac{13}{80}s^2 - \frac{3}{5}s + \frac{17}{80} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.84507$ ,  $s_2 \approx 0.45543$  e  $s_3 \approx 0.55213$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.6 = -\frac{3}{5}$  :

$$s^3 + \frac{1}{40}s^2 - \frac{37}{50}s - \frac{51}{200} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -1.0089$ ,  $s_2 \approx 0.49197 - 0.10346i$  e  $s_3 \approx 0.49197 + 0.10346i$ . Note que  $|s_1| > 1$  que contradiz a definição de estabilidade absoluta. Portanto, o intervalo de estabilidade absoluta do Método II é  $I = (-0.6, 0)$  com precisão de 0.1.

## 2.3. Método III

Para o terceiro e último método deste trabalho, iremos escolher duas raízes complexas conjugadas. Note que se  $r = x + iy$  e queremos que o método seja zero-estável, isto é,  $|r| = |x + iy| \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$ , podemos tomar  $x = y = \frac{1}{2}$ . Assim,  $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} < 1$ .

Então, escolhendo  $r_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$  e  $r_3 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$  temos que o método é zero-estável. Substituindo em (4), obtemos o primeiro polinômio característico deste método

$$\begin{aligned}\rho(w) &= w^3 + a_2w^2 + a_1w + a_0 = (w - 1)(w - \frac{1+i}{2})(w - \frac{1-i}{2}) \\ &= w^3 + (-1 - \frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{2})w^2 + (\frac{1+i}{2} + (\frac{1+i}{2})(\frac{1-i}{2}) + \frac{1-i}{2})w - (\frac{1+i}{2})(\frac{1-i}{2}) \\ &= w^3 - 2w^2 + \frac{3}{2}w - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Logo,  $a_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_1 = \frac{3}{2}$  e  $a_2 = -2$ .

Agora para determinar os  $b_j$  de modo que o método tenha ordem 3 de consistência, precisamos usar novamente o Teorema 5.3 das notas de Roma [1], isto é, mostrar que  $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$  e  $C_4 \neq 0$  onde

$$C_p = \sum_{j=0}^n \frac{j^p a_j}{p!} - \sum_{j=0}^n \frac{j^{p-1} b_j}{(p-1)!}$$

Vejamos,

$$\begin{aligned}C_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + 1 = -1/2 + 3/2 - 2 + 1 = 0 \\ C_1 &= a_1 + 2a_2 + 3 - b_0 - b_1 - b_2 = 0 \Rightarrow b_0 + b_1 + b_2 = \frac{1}{2} \\ C_2 &= \frac{a_1 + 4a_2 + 9}{2} - b_1 - 2b_2 = 0 \Rightarrow b_1 + 2b_2 = \frac{5}{4} \\ C_3 &= \frac{a_1 + 8a_2 + 27}{6} - \frac{b_1 + 4b_2}{2} = 0 \Rightarrow b_1 + 4b_2 = \frac{25}{6}\end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{25}{6} \end{bmatrix}$$

Logo,  $b_0 = \frac{17}{24}$ ,  $b_1 = -\frac{5}{3}$  e  $b_2 = \frac{35}{24}$ .

Por fim,  $C_4 \neq 0$ . De fato,

$$C_4 = \frac{a_1 + 16a_2 + 81a_3}{24} - \frac{b_1 + 8b_2}{6} = \frac{-1/2 + 16(-2) + 81}{24} - \frac{-5/3 + 8(-35/24)}{6} = \frac{97}{48} + \frac{20}{9} \neq 0$$

Substituindo em (3) os parâmetros encontrados, obtemos a forma do Método 3:

$$z_{k+3} - 2z_{k+2} + \frac{3}{2}z_{k+1} - \frac{1}{2}z_k = h[\frac{35}{24}f_{k+2} - \frac{5}{3}f_{k+1} + \frac{17}{24}f_k] \quad (13)$$

O polinômio de estabilidade absoluta para este método é

$$\pi(s) = s^3 - 2s^2 + \frac{3}{2}s - \frac{1}{2} - \theta(\frac{35}{24}s^2 - \frac{5}{3}s + \frac{17}{24}) \text{ onde } \theta = \lambda h \quad (14)$$

---

Ou seja,

$$s^3 - s^2(2 + \frac{35}{24}\theta) + s(\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\theta) - \frac{1}{2} - \frac{17}{24}\theta = 0 \quad (15)$$

Para estimar o intervalo de estabilidade absoluta deste método usaremos a mesma ideia feito no caso do Método I e II, verificando com  $\theta$  onde tem todas as raízes com módulo menor que 1.

Vejamos as possibilidades.

- Para  $\theta = -0.1 = -\frac{1}{10}$  :

$$s^3 - \frac{89}{48}s^2 + \frac{4}{3}s - \frac{103}{240} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.90475$ ,  $s_2 \approx 0.47471 - 0.49900i$  e  $s_3 \approx 0.47471 + 0.49900i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.2 = -\frac{1}{5}$  :

$$s^3 - \frac{41}{24}s^2 + \frac{7}{6}s - \frac{43}{120} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx 0.81732$ ,  $s_2 \approx 0.44551 - 0.48985i$  e  $s_3 \approx 0.44551 + 0.48985i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.3 = -\frac{3}{10}$  :

$$s^3 - \frac{25}{16}s^2 + s - \frac{23}{80} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx 0.73356$ ,  $s_2 \approx 0.41447 - 0.46919i$  e  $s_3 \approx 0.41447 + 0.46919i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.4 = -\frac{2}{5}$  :

$$s^3 - \frac{17}{12}s^2 + \frac{5}{6}s - \frac{13}{60} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx 0.64578$ ,  $s_2 \approx 0.38544 - 0.43267i$  e  $s_3 \approx 0.38544 + 0.43267i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.5 = -\frac{1}{2}$  :

$$s^3 - \frac{61}{48}s^2 + \frac{2}{3}s - \frac{7}{48} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx 0.53367$ ,  $s_2 \approx 0.36858 - 0.37069i$  e  $s_3 \approx 0.36858 + 0.37069i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .



- 
- Para  $\theta = -0.6 = -\frac{3}{5}$  :

$$s^3 - \frac{9}{8}s^2 + \frac{1}{2}s - \frac{3}{40} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx 0.29225$ ,  $s_2 \approx 0.41637 - 0.28855i$  e  $s_3 \approx 0.41637 + 0.28855i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.7 = -\frac{7}{10}$  :

$$s^3 - \frac{47}{48}s^2 + \frac{1}{3}s - \frac{1}{240} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx 0.012989$ ,  $s_2 \approx 0.48309 - 0.29565i$  e  $s_3 \approx 0.48309 + 0.29565i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -0.8 = -\frac{4}{5}$  :

$$s^3 - \frac{5}{6}s^2 + \frac{1}{6}s + \frac{1}{15} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.18669$ ,  $s_2 \approx 0.51001 - 0.31142i$  e  $s_3 \approx 0.51001 + 0.31142i$ .

- Para  $\theta = -0.9 = -\frac{9}{10}$  :

$$s^3 - \frac{11}{16}s^2 + \frac{11}{80} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.36197$ ,  $s_2 \approx 0.52473 - 0.32330i$  e  $s_3 \approx 0.52473 + 0.32330i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -1.0$  :

$$s^3 - \frac{13}{24}s^2 - \frac{1}{6}s + \frac{5}{24} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.52649$ ,  $s_2 \approx 0.53408 - 0.33236i$  e  $s_3 \approx 0.53408 + 0.33236i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -1.1 = -\frac{11}{10}$  :

$$s^3 - \frac{19}{48}s^2 - \frac{1}{3}s + \frac{67}{240} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.68521$ ,  $s_2 \approx 0.54052 - 0.33948i$  e  $s_3 \approx 0.54052 + 0.33948i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -1.2 = -\frac{12}{10}$  :

$$s^3 - \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{2}s + \frac{7}{20} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.84044$ ,  $s_2 \approx 0.54522 - 0.34523i$  e  $s_3 \approx 0.54522 + 0.34523i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -1.3 = -\frac{13}{10}$  :

$$s^3 - \frac{5}{48}s^2 - \frac{2}{3}s + \frac{101}{240} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -0.99339$ ,  $s_2 \approx 0.54878 - 0.34997i$  e  $s_3 \approx 0.54878 + 0.34997i$ . Todas satisfazem  $|s_j| < 1$ .

- Para  $\theta = -1.4 = -\frac{14}{10}$  :

$$s^3 + \frac{1}{24}s^2 - \frac{5}{6}s + \frac{59}{120} = 0$$

Tem-se as raízes  $s_1 \approx -1.1448$ ,  $s_2 \approx 0.55156 - 0.35394i$  e  $s_3 \approx 0.55156 + 0.35394i$ . Note que  $|s_1| > 1$  que contradiz a definição de estabilidade absoluta. Portanto, o intervalo de estabilidade absoluta do Método III é  $I = (-1.4, 0)$  com precisão de 0.1.

### 3. Resultados

Para um dado passo de integração  $h$  e um instante de tempo  $t$ , calculamos as soluções numéricas  $\eta(t, h)$  e, digamos  $h/2$ ,  $\eta(t, h/2)$ . Se  $h$  for suficientemente pequeno, podemos escrever o erro de discretização global como  $e(t, h) = y(t) - \eta(t, h)$  e para  $h/2$  a forma  $e(t, h/2) = y(t) - \eta(t, h/2)$ .

Nesta seção iremos aplicar os três métodos numéricos e compará-los em dois casos de edo's.

#### 3.1. Caso 1

Seja o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= \frac{y(t)}{t} - 4t^2x(t) \end{cases} \quad (16)$$

com  $t \in [\sqrt{\pi}, T]$  e condições iniciais  $x(\sqrt{\pi}) = 0$  e  $y(\sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}$ .

Podemos reescrever o sistema (16) da forma

$$\mathbb{Z}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathbb{F}(t, \mathbb{Z}) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{y(t)}{t} - 4t^2x(t) \end{pmatrix} \quad (17)$$

com

$$\mathbb{Z}(\sqrt{\pi}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{\pi} \end{pmatrix} \quad (18)$$

A solução exata de (17) pode ser escrita como

$$\mathbb{Z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t^2) \\ 2t \cos(t^2) \end{pmatrix} \quad (19)$$

De fato,

$$\mathbb{Z}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \cos(t^2) \\ 2 \cos(t^2) - 4t^2 \sin(t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ \frac{y(t)}{t} - 4t^2 x(t) \end{pmatrix} \quad (20)$$

e

$$\mathbb{Z}(\sqrt{\pi}) = \begin{pmatrix} \sin(\pi) \\ 2\sqrt{\pi} \cos(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\sqrt{\pi} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Tomando  $T = 2\pi$ , temos a solução (19) para  $t \in [\sqrt{\pi}, 2\pi]$  como na Figura (2). É um espiral que roda cada vez mais rápido em cada passo de integração e para ver esse comportamento iremos aplicar em métodos de 3 passos.

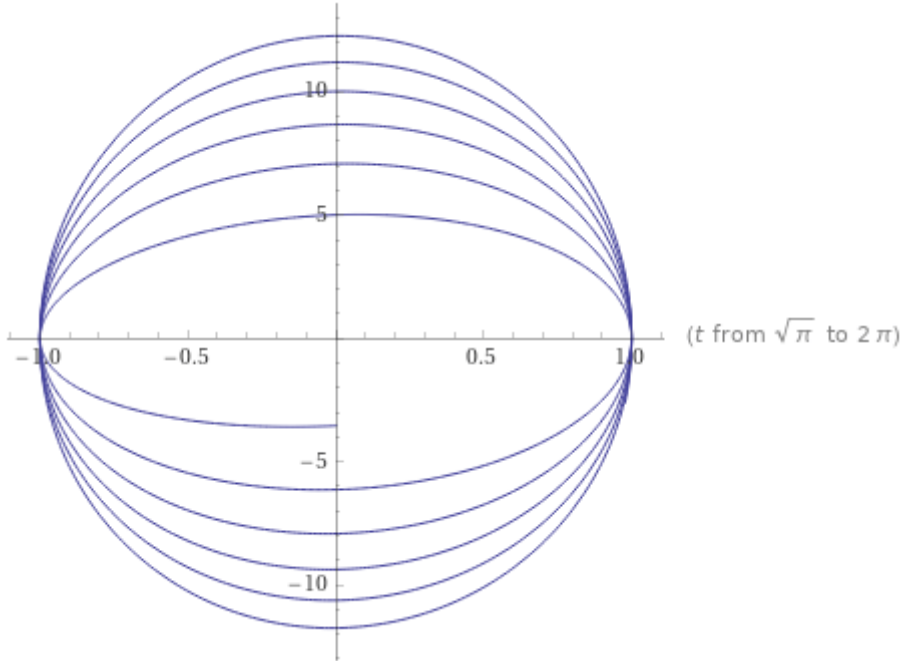


Figura 2: Solução Exata do Sistema (17) para  $t \in [\sqrt{\pi}, 2\pi]$ .

Iremos testar os três métodos de três passos proposto neste trabalho usando o intervalo  $[\sqrt{\pi}, 2\pi]$ . Então, o passo de integração é  $h = \frac{T - t_0}{n} = \frac{2\pi - \sqrt{\pi}}{n}$ , onde adotaremos nessa seção o valor  $n$  sendo o número de passos de integração. E sabendo que a solução exata em  $T = 2\pi$  vale  $[x(2\pi), y(2\pi)] = [0.97834055, -2.60126196]$ .

## A) Método I: Método de Adams-Bashforth de 3 passos

Usando a equação (7) no problema (17) encontramos a solução aproximada para  $h$  suficientemente pequeno. Para verificar a ordem de convergência do Método I, organizamos a Tabela (1) para facilitar a visualização da convergência.

$n$	$ e(t, h) $	$q = \frac{ e(t, 2h) }{ e(t, h) }$	$\log_2(q)$
128	0.9869948803802941		
256	0.10689819371612508	9.233036088535991	3.20680
512	0.00703906505515306	15.186419343840067	3.92470
1024	0.00076753204365009	9.17103737021567	3.19708
2048	6.6118035114581e-05	11.60851259902044	3.53711

Tabela 1: Verificação da Ordem de Convergência do Método I aplicado em (17) no instante  $t = 2\pi$ .

Obsevamos pela Tabela (1) o comportamento esperado para o Método I com o erro proporcional a  $h$ . A Figura (3) ilustra a aproximação numérica para  $h$  suficientemente pequeno e pertencente ao intervalo de estabilidade absoluta estudado na seção 2.1. E assim, encontramos pela Tabela (1) que  $\log_2(q) \approx 3$ , isto é, a ordem 3 do método coincide com a teoria.

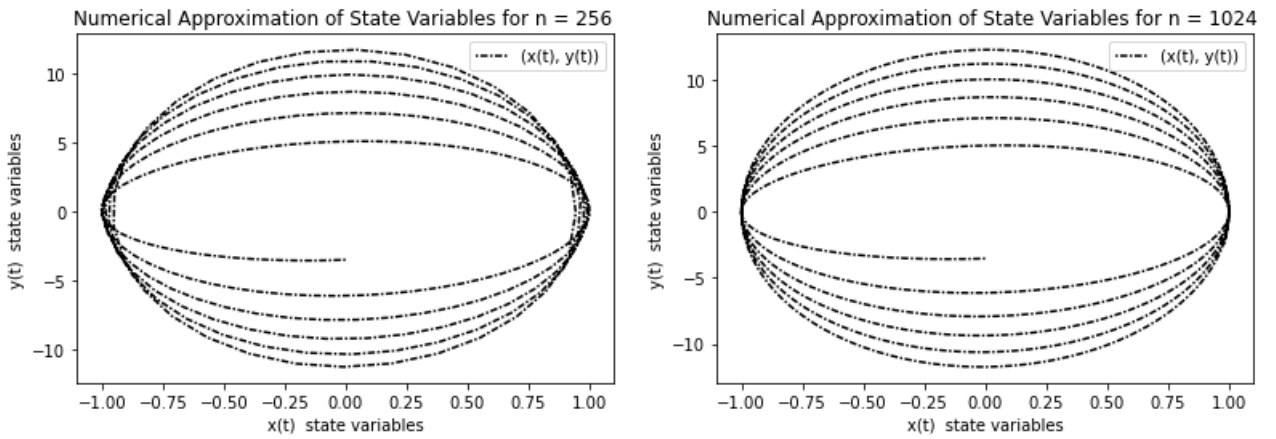


Figura 3: Aproximação Numérica da EDO (17) pelo Método de Adams-Bashforth de 3 passos para  $n = 256$  e  $n = 1024$ .

## B) Método II

Usando a equação (10) no problema (17) encontramos a solução aproximada para  $h$  suficientemente pequeno. Para verificar a ordem de convergência do Método II, organizamos a Tabela (2) com alguns testes para facilitar a visualização da convergência.

$n$	$ e(t, h) $	$q = \frac{ e(t, 2h) }{ e(t, h) }$	$\log_2(q)$
512	0.007953044889055016		
1024	0.0008779432637591178	9.058723060305981	3.17930
2048	7.833869806128657e-05	11.207018823216567	3.48633

Tabela 2: Verificação da Ordem de Convergência do Método II aplicado em (17) no instante  $t = 2\pi$ .

Obsevamos pela Tabela (2) o comportamento esperado para o Método II com o erro proporcional a  $h$ . A Figura (4) ilustra a aproximação numérica para  $h$  suficientemente pequeno e pertencente ao intervalo de estabilidade absoluta estudado na seção 2.2. E assim, encontramos pela Tabela (2) que  $\log_2(q) \approx 3$ , isto é, a ordem 3 do método coincide com a ordem estabelecida na seção 2.2.

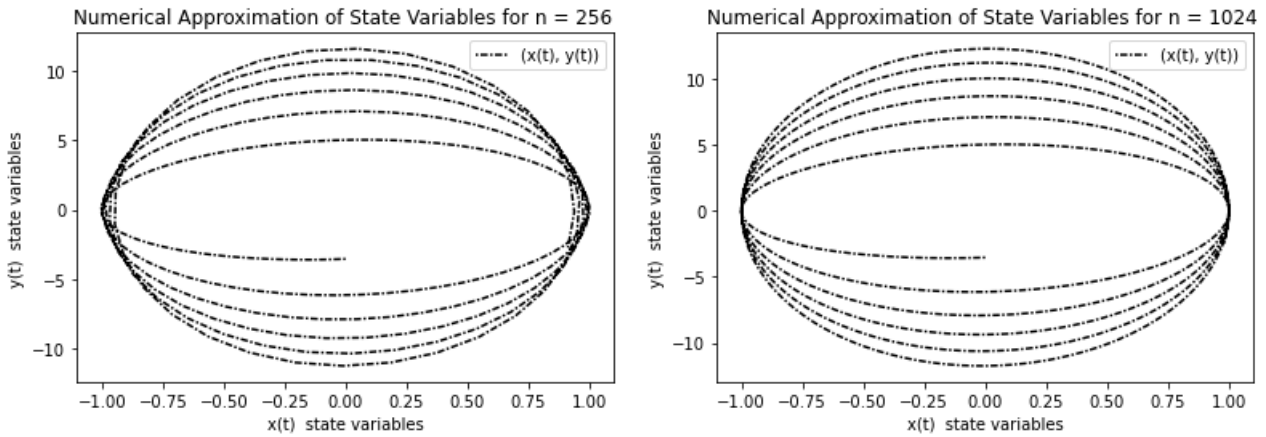


Figura 4: Aproximação Numérica da EDO (17) pelo Método II para  $n = 256$  e  $n = 1024$ .

## C) Método III

Usando a equação (13) no problema (17) encontramos a solução aproximada para  $h$  suficientemente pequeno. Para verificar a ordem de convergência do Método II, organizamos a Tabela (3) com alguns testes para facilitar a visualização da convergência.

$n$	$ e(t, h) $	$q = \frac{ e(t, 2h) }{ e(t, h) }$	$\log_2(q)$
256	0.24403495549819132		
512	0.01775485258941445	13.744690600455137	3.78080
1024	0.0021137579388530447	8.399662167111002	3.07033
2048	0.0002344565028357115	9.015565417412194	3.17241

Tabela 3: Verificação da Ordem de Convergência do Método III aplicado em (17) no instante  $t = 2\pi$ .

Obsevamos pela Tabela (3) o comportamento esperado para o Método III com o erro proporcional a  $h$ . A Figura (5) ilustra a aproximação numérica para  $h$  suficientemente pequeno e pertencente ao intervalo de estabilidade absoluta estudado na seção 2.3. E assim, encontramos pela Tabela (3) que  $\log_2(q) \approx 3$ , isto é, a ordem 3 do método coincide com a ordem estabelecida na seção 2.3.

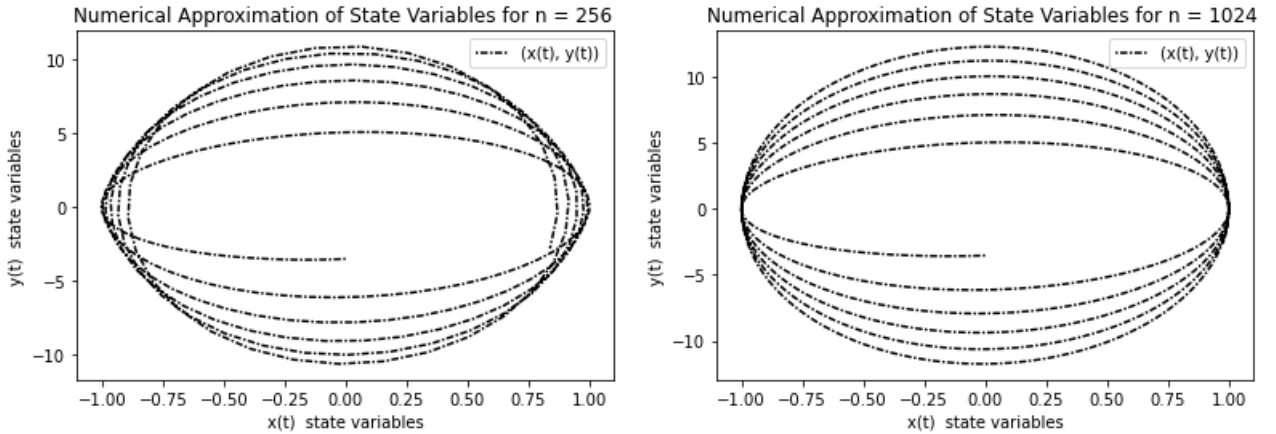


Figura 5: Aproximação Numérica da EDO (17) pelo Método III para  $n = 256$  e  $n = 1024$ .

Após observar a aplicação dos três métodos numéricos de 3 passos, concluímos que todos esses métodos possuem a ordem 3 de convergência e a partir das tabelas apresentadas temos a diferença entre eles. O método I é o que melhor se aproxima da solução exata, em seguida do Método II e III, isto é, os três métodos se aproximam com a mesma ordem de convergência, mas método I possui o menor erro de discretização global ao compará-los.

### 3.2. Caso 2

Seja o Problema de Cauchy

$$y'(t) = \left( -2t + \frac{5 \cos(5t)}{2 + \sin(5t)} \right) y(t) \quad (22)$$

com  $t \in [-\pi, 3\pi]$  e condição inicial  $y(-\pi) = 2\exp(-\pi^2)$ .

A solução exata de (22) pode ser escrita como

$$y(t) = \exp(-t^2)(2 + \sin(5t)) \quad (23)$$

De fato,  $y'(t) = -2te^{-t^2}(2 + \sin(5t)) + 5e^{-t^2} \cos(5t) = -2te^{-t^2}(2 + \sin(5t)) + \frac{5 \cos(5t)e^{-t^2}}{2 + \sin(5t)}(2 + \sin(5t)) = -2ty(t) + \frac{5 \cos(5t)}{2 + \sin(5t)}y(t) = \left( -2t + \frac{5 \cos(5t)}{2 + \sin(5t)} \right) y(t)$ .

Para  $t \in [-\pi, 3\pi]$ , temos na Figura (6) a solução exata de (22). É ilustrado algumas oscilações numa região limitada.

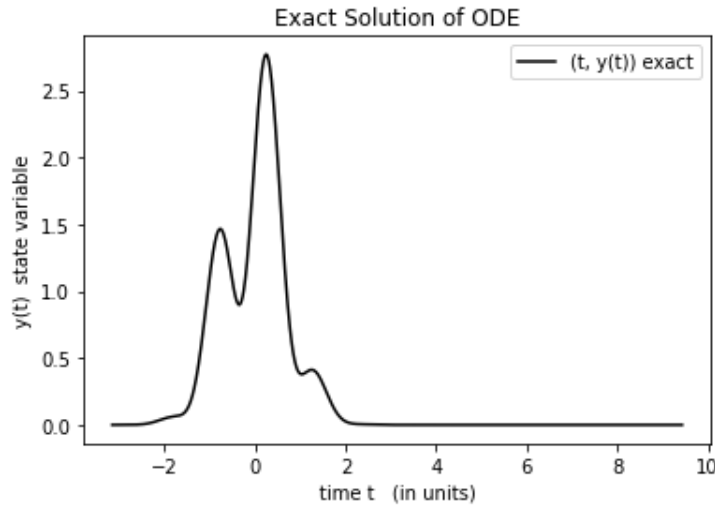


Figura 6: Solução Exata da EDO (22) para  $t \in [-\pi, 3\pi]$ .

Iremos testar novamente os três métodos de três passos proposto neste trabalho usando o intervalo  $[-\pi, 3\pi]$ . Então, o passo de integração é  $h = \frac{3\pi - (-\pi)}{n} = \frac{4\pi}{n}$ .

#### A) Método I: Método de Adams-Bashforth de 3 passos

Usando a equação (7) no problema (22) encontramos a solução aproximada para  $h$  suficientemente pequeno. Para verificar a ordem de convergência do Método I, organizamos a Tabela (4) para facilitar a visualização da convergência.

Obsevamos pela Tabela (4) o comportamento esperado para o Método I com o erro proporcional a  $h$ . A Figura (7) ilustra a aproximação numérica para  $h$  suficientemente pequeno e

$n$	$ e(t, h) $	$q = \frac{ e(t, 2h) }{ e(t, h) }$	$\log_2(q)$
1024	1.00420338e-39	4.80908848e+00	2.26576347e+00
2048	1.22596637e-40	8.19111683e+00	3.03406017e+00
4096	1.46911785e-41	8.34491511e+00	3.06089737e+00
8192	1.79207085e-42	8.19787816e+00	3.03525055e+00
16384	2.21206060e-43	8.10136417e+00	3.01816486e+00

Tabela 4: Verificação da Ordem de Convergência do Método I aplicado em (22) no instante  $t = 3\pi$ .

pertencente ao intervalo de estabilidade absoluta estudado na seção 2.1. E assim, encontramos pela Tabela (4) que  $\log_2(q) \approx 3$ , isto é, a ordem 3 do método coincide com a teoria.

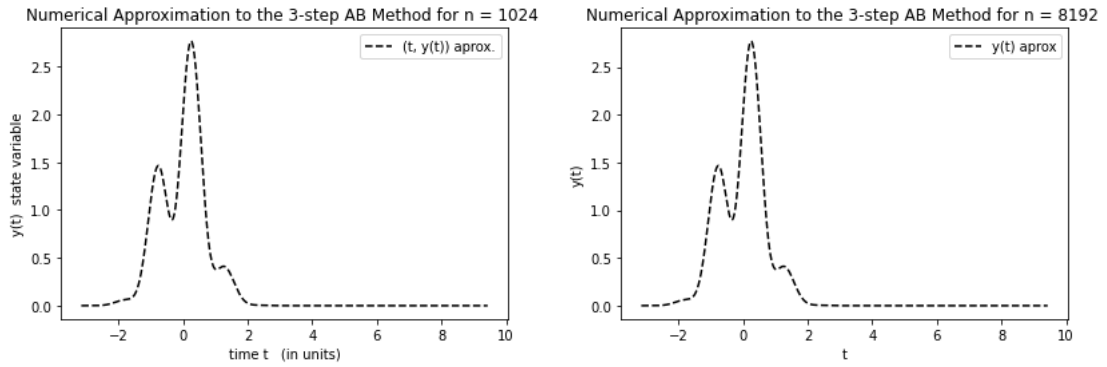


Figura 7: Aproximação Numérica da EDO (22) pelo Método de Adams-Bashforth de 3 passos para  $n = 1024$  e  $n = 8192$ .

## B) Método II

Usando a equação (10) no problema (22) encontramos a solução aproximada para  $h$  suficientemente pequeno. Para verificar a ordem de convergência do Método II, organizamos a Tabela (5) com alguns testes para facilitar a visualização da convergência.

Obsevamos pela Tabela (5) o comportamento esperado para o Método II com o erro proporcional a  $h$ . A Figura (8) ilustra a aproximação numérica para  $h$  suficientemente pequeno e pertencente ao intervalo de estabilidade absoluta estudado na seção 2.2. E assim, encontramos pela Tabela (2) que  $\log_2(q) \approx 3$ , isto é, a ordem 3 do método coincide com a ordem estabelecida na seção 2.2.



$n$	$ e(t, h) $	$q = \frac{ e(t, 2h) }{ e(t, h) }$	$\log_2(q)$
1024	1.14056650e-39	4.41951821e+00	2.14388910e+00
2048	1.39126311e-40	8.19806470e+00	3.03528338e+00
4096	1.65945559e-41	8.38385260e+00	3.06761335e+00
8192	2.01881913e-42	8.21993199e+00	3.03912646e+00
16384	2.48854384e-43	8.11245153e+00	3.02013795e+00

Tabela 5: Verificação da Ordem de Convergência do Método II aplicado em (17) no instante  $t = 3\pi$ .

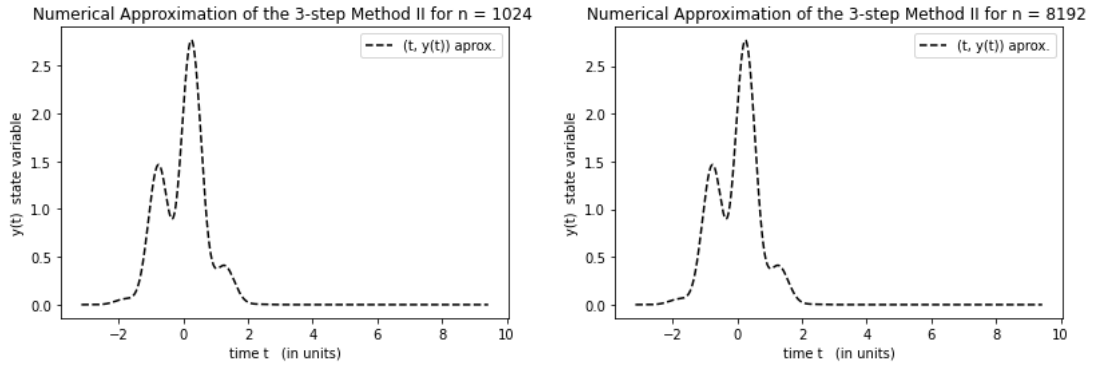


Figura 8: Aproximação Numérica da EDO (22) pelo Método II para  $n = 1024$  e  $n = 8192$ .

### C) Método III

Usando a equação (13) no problema (22) encontramos a solução aproximada para  $h$  suficientemente pequeno. Para verificar a ordem de convergência do Método II, organizamos a Tabela (6) com alguns testes para facilitar a visualização da convergência.

$n$	$ e(t, h) $	$q = \frac{ e(t, 2h) }{ e(t, h) }$	$\log_2(q)$
1024	2.02459567e-39	2.60583503e+00	1.38174575e+00
2048	2.80798875e-40	7.21012743e+00	2.85002476e+00
4096	3.42298059e-41	8.20334407e+00	3.03621214e+00
8192	4.18365264e-42	8.18179922e+00	3.03241813e+00
16384	5.16396438e-43	8.10162955e+00	3.01821212e+00

Tabela 6: Verificação da Ordem de Convergência do Método III aplicado em (22) no instante  $t = 3\pi$ .

Obseamos pela Tabela (6) o comportamento esperado para o Método III com o erro proporcional a  $h$ . A Figura (9) ilustra a aproximação numérica para  $h$  suficientemente pequeno e pertencente ao intervalo de estabilidade absoluta estudado na seção 2.3. E assim, encontramos pela Tabela (6) que  $\log_2(q) \approx 3$ , isto é, a ordem 3 do método coincide com a ordem estabelecida na seção 2.3.

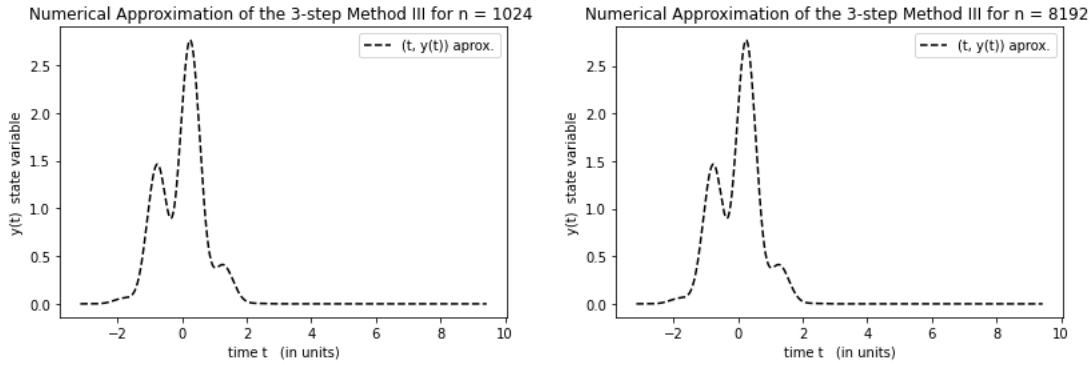


Figura 9: Aproximação Numérica da EDO (22) pelo Método III para  $n = 1024$  e  $n = 8192$ .

Após observar a aplicação dos três métodos numéricos de 3 passos, concluímos que todos esses métodos possuem a ordem 3 de convergência e a partir das tabelas apresentadas temos a diferença entre eles. O método I é o que melhor se aproxima da solução exata, em seguida do Método II e III, isto é, os três métodos se aproximam com a mesma ordem de convergência, mas método I possui o menor erro de discretização global ao compará-los.

## 4. Considerações Finais

No trabalho apresentado, os métodos lineares explícitos de 3 passos de terceira ordem foram utilizados com o objetivo de analisar seus resultados comparando-os com a solução analítica da teoria de EDO. Existem situações em que é preferível um método numérico ao método analítico ainda que este exista, por exemplo se a solução para um problema envolve muitos cálculos. A maior parte dos problemas concretos são, em geral, complexos e envolvem fenômenos não lineares, pelo que é comum de se encontrar numa situação em que os conhecimentos de matemática não são suficientes para a descoberta de uma solução exata para um problema real.

Com o estudo e desenvolvimento dos métodos numéricos pode-se concluir que para obter resultados coerentes e precisos, utilizando os métodos já mencionados, é necessário uma correta implementação do problema, atentando-se para a discretização do domínio e a correta substituição das aproximações na equação do problema em questão.

---

Os métodos numéricos apresentados neste trabalho são métodos de implementação que exige apenas um cálculo de  $f$  por passo no tempo e produzem soluções eficientes para diversos problemas envolvendo EDO's. E a implementação feita em Python aplicado nos dois casos de EDO de estudo foram bem sucedidos com o procedimento de verificação por solução manufaturada e razão de refinamento  $r = 2$ , conforme apresentado nas tabelas.

De acordo com os problemas apresentados neste trabalho, nota-se que o método de Adams-Bashforth de 3 passos foi mais eficaz em relação aos outros métodos estudados. Isso parte do fato de que o método apresenta erro de ordem  $O(h^3)$  e é o que possui o menor erro de discretização global (pequeno) ao compará-los.

## Referências

- [1] ROMA, A. L.; BEVILACQUA, J. S.; NÓS, R. L. *Métodos para a Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias a Valores Iniciais*. Notas de aula em construção. São Paulo: IME-USP, ed. dez-2020.
- [2] LAMBERS, J. *Lecture 5 Notes*. MAT 461/561. Spring Semester 2009-10.