Ejercicio “atrévete” 1.2
Dibujo isotermas y cálculo del mínimo de una función de dos variables

Vázquez Alfonsín, Luis Alberto

Enunciado del ejercicio ejercicio

Dibujar las isostermas (curvas de temperatura constante) para la función temperatura

$$T = \frac{140 \times 30x^2 - 60x + 120y^2}{8 + x^2 - 2x + 4y^2} \; [{}^{\circ}C]$$

¿Cuál es la temperatura mínima?

1 Consideraciones previas

Extremos de una función de dos variables.

Una función $z=f(x,y)$ tiene un máximo (o mínimo) en un punto $P(x_0,y_0)$ si el valor de la función en este punto es mayor (o menor) que su valor en cualquier otro punto *X(x,y)* de algún entorno de *P*.

Condiciones necesarias de extremo.

Si una función diferenciable $z=f(x,y)$ alcanza un extremo en el punto $P(x_0,y_0)$ entonces sus derivadas parciales de primer orden en este punto son iguales a cero, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0 \;\; ; \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

Los puntos en los que las derivadas parciales son iguales a cero se llaman puntos críticos o estacionarios. No todo punto crítico es un punto extremo.

Condiciones suficientes para la existencia de extremos.

Caso de dos variables. Sea $P(x_0,y_0)$ un punto crítico de una función $z=f(x,y)$ con las derivadas parciales de segundo orden continuas en *P*, y sea $H(x_0,y_0)$ el determinante de su matriz hessiana, entonces:

$$H(x_0,y_0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$H(x_0,y_0)$	$f_{xx}(x_0,y_0)$	*tipo*
positivo	*positivo*	*Mínimo*
positivo	*negativo*	*Máximo*
negativo	*?*	*Punto silla*
cero	*?*	*Duda*

Es decir, si el hessiano es positivo hay extremo (el tipo nos lo da $f_{xx}(x_0,y_0)$, si es negativa es un máximo y si es positiva es un mínimo). Si el hessiano es negativo no hay extremo. Finalmente, si el hessiano es cero hay duda (que habrá que resolver por otro método).

2 Gráfica de la función e isotermas

Gráfica de la función y curvas de nivel generadas por la librería matplotlib del lenguaje Python. El mínimo de la función (calculado posteriormente) se muestra en rojo, las curvas de nivel aparecen proyectadas con un gradiente de colores.

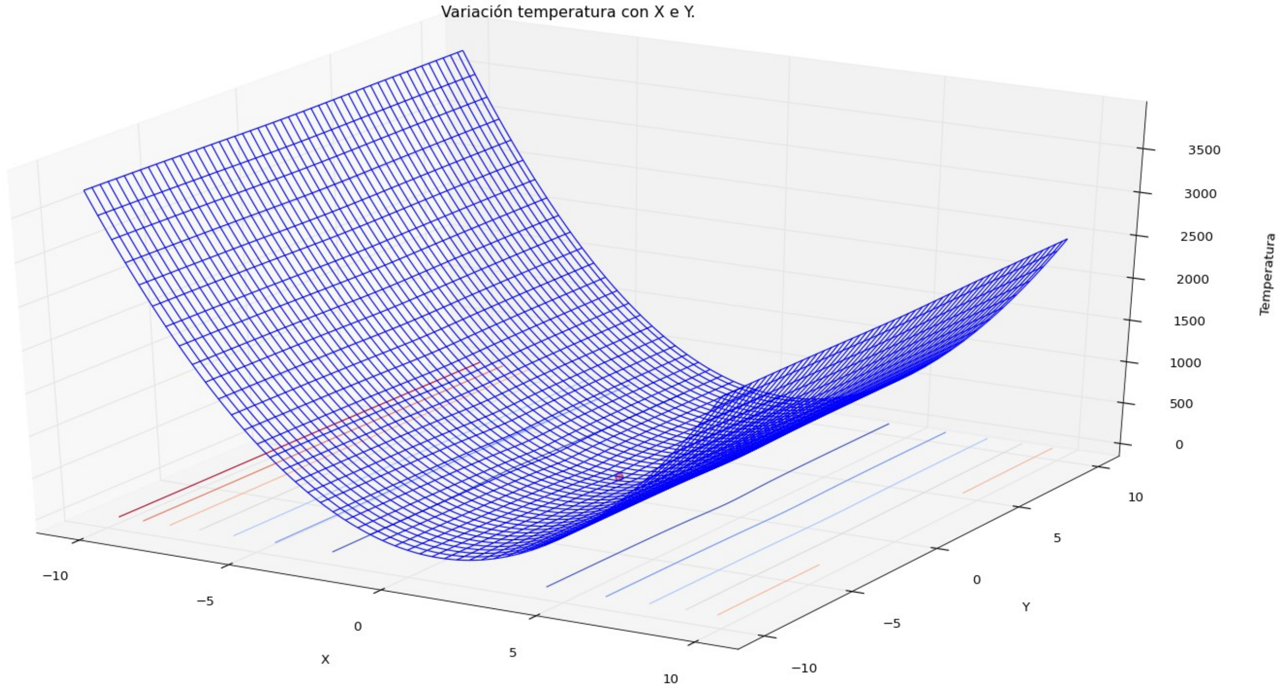

Figura 1: vista en perspectiva de la función.

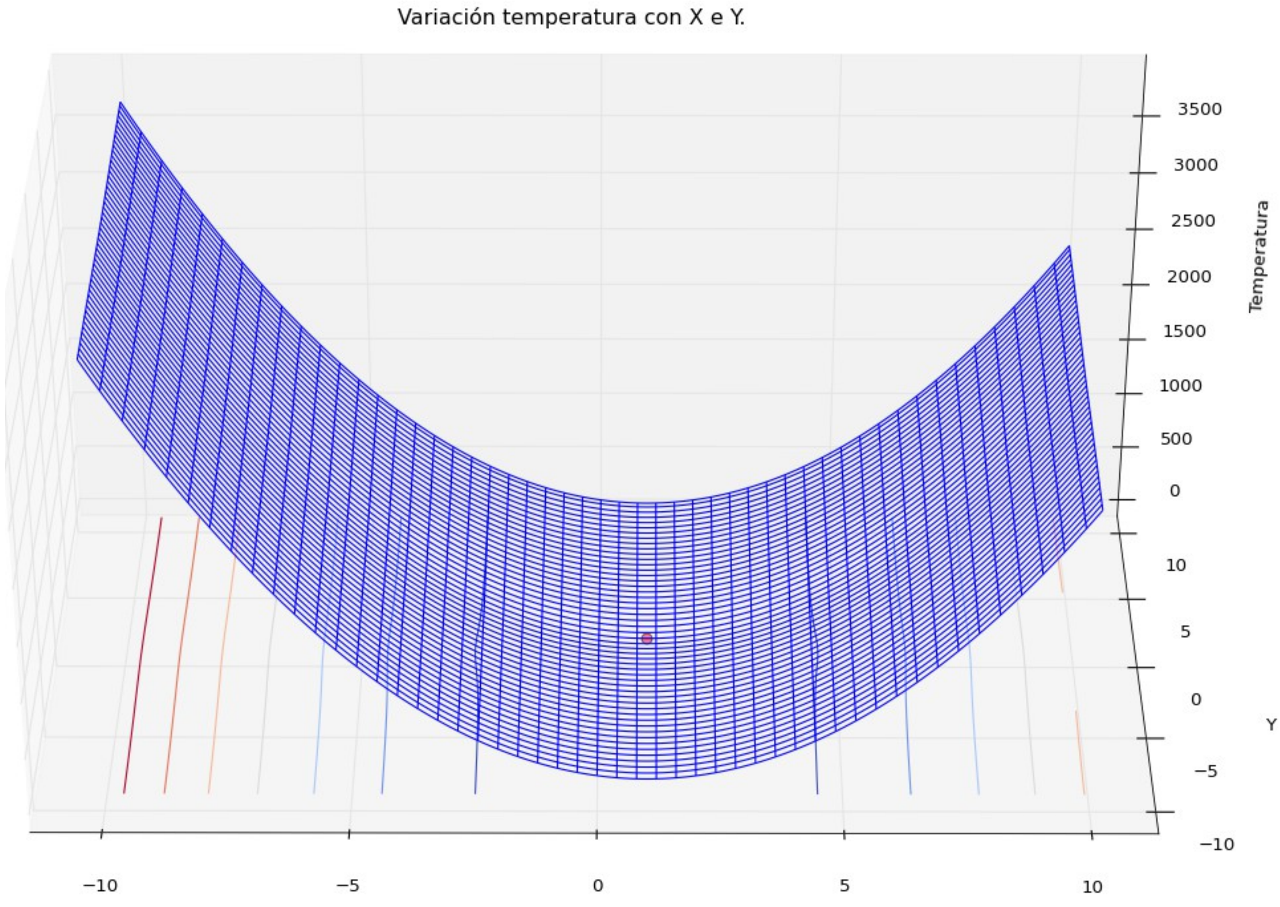

Figura 2: vista frontal desde el eje x.

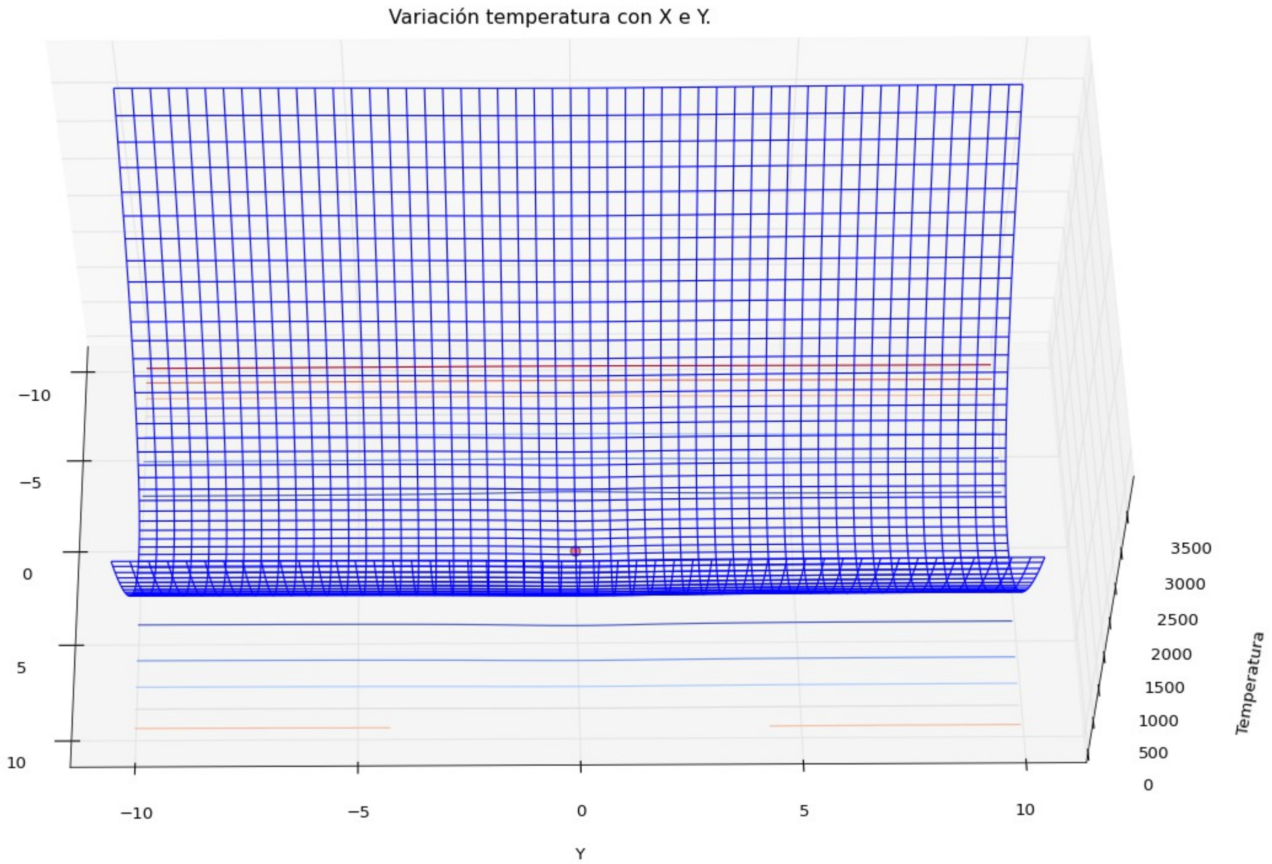

Figura 3: vista frontal desde el eje y.

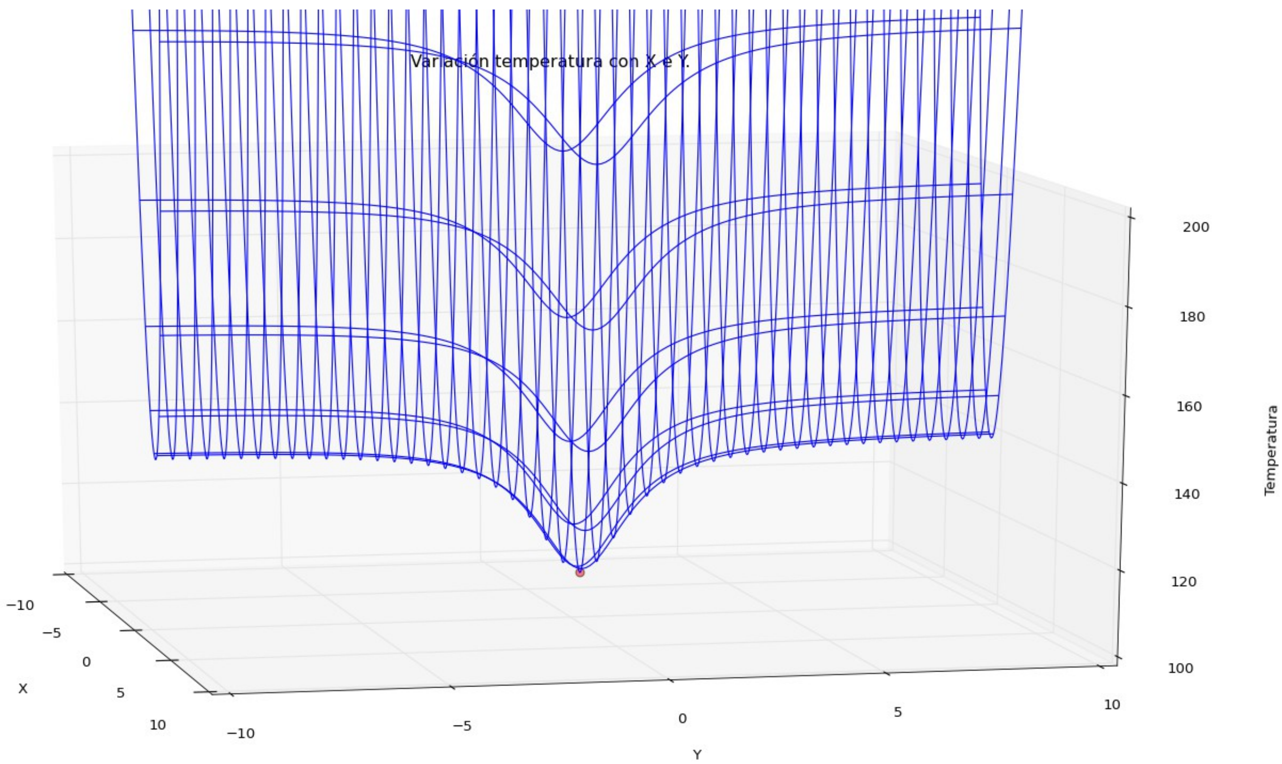

Figura 4: vista en perspectiva de la función (diferente escala en eje t), se aprecia claramente un mínimo de la función temperatura.

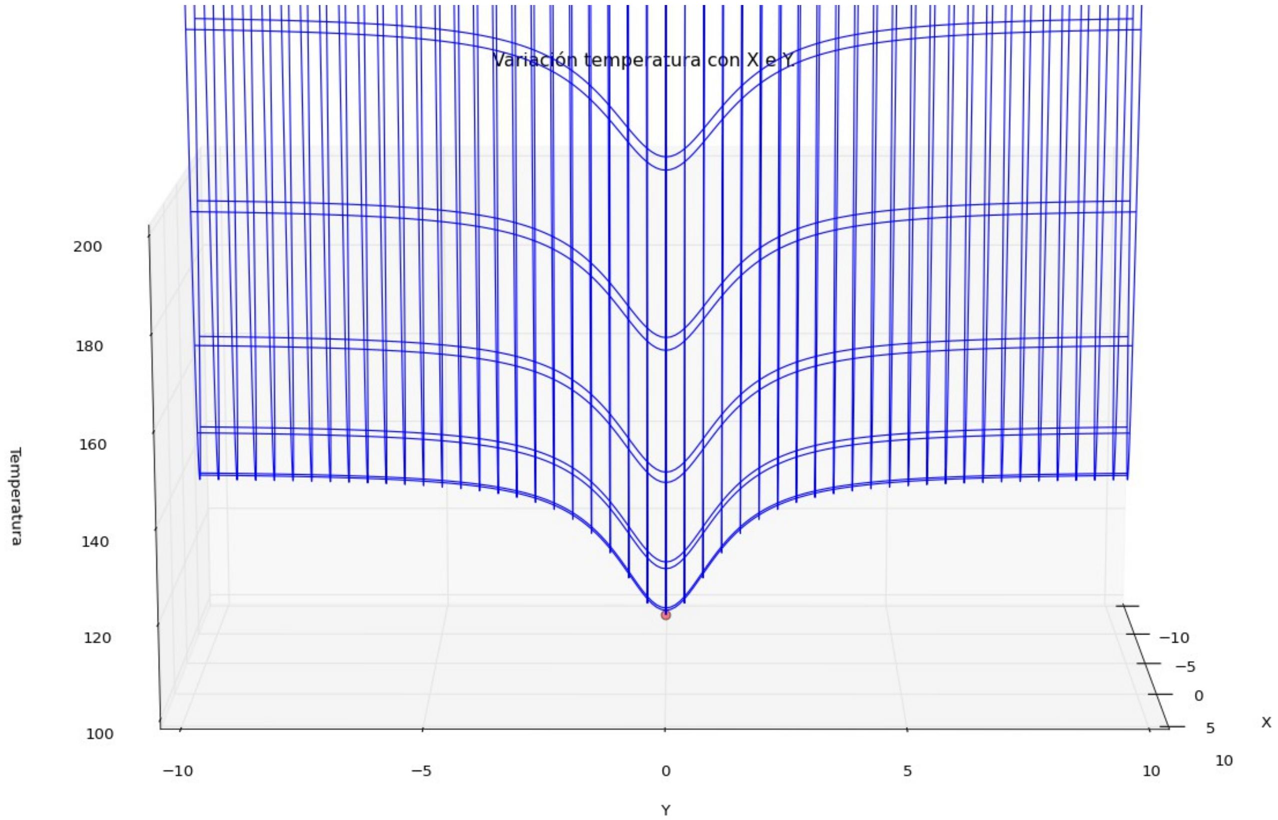

Figura 5: vista frontal de la gráfica desde el eje y(diferente escala en eje t).

3 Resolución del ejercicio mediante el lenguaje Python

NOTA: el código se muestra en color blanco y fondo negro.

3.1 Código de la gráfica y sus isotermas

```
#!/usr/bin/python
# −∗− coding: utf−8 −∗−

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
import numpy as np
from math import *

INICIO_INTERVALO = -10
FIN_INTERVALO = 10
INCREMENTO = 0.1


def grafica_atrevete():

        fig = plt.figure()
        ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')
        xs = np.arange(INICIO_INTERVALO,FIN_INTERVALO,INCREMENTO)
        ys = np.arange(INICIO_INTERVALO,FIN_INTERVALO,INCREMENTO)
        ax.set_title(u"Variación temperatura con X e Y.")
        ax.set_xlabel("X")
        ax.set_ylabel("Y")
        ax.set_zlabel("Temperatura")
        #Consideraciones de eficiencia
        xs,ys = np.meshgrid(xs,ys)

        #función temperatura
        ts = 140 + 30*xs**2-60*xs+120*ys**2/(8+xs**2-2*xs+4*ys**2)

        ax.plot_wireframe(xs,ys,ts,rstride=4,cstride=4)

        #curvas de nivel con gradiente de colores
```

```
	cset = ax.contour(xs,ys,ts,cmap=cm.coolwarm, offset=0)

	x0=1
	y0=0
	z0=110
	#Marco el mínimo de la función en en rojo
	ax.scatter(x0, y0, z0, c='red', s=50, alpha=0.5)

	plt.show()
	return

grafica_atrevete()
```

3.2 Código del programa de cálculo del mínimo

```
#!/usr/bin/python
# -*- coding: utf-8 -*-

from numpy import *
from scipy import *
from sympy import *

x = symbols('x')
y = symbols('y')

f= 140 + 30*x**2-60*x+120*y**2/(8+x**2-2*x+4*y**2)

#Primera derivada de f con respecto de x:
f1x = diff(f,x,1)

#Primera derivada de f con respecto de y:
f1y = diff(f,y,1)

print
'\n\t\t******************************************************************************************'
print '\n\t\t*    Atrevete 1.1. Calculo de la temperatura minima de una funcion de dos
variables   *******'
print
```

```
'\n\t\t*******************************************************************************************'

print '\n\n\tDerivada parcial de x respecto de f: ', f1x

print '\n\n\tDerivada parcial de y respecto de f: ', f1y


print '\n\n\tResolviendo sistema de ecuaciones de la derivada con respecto de x e y. Sustituyendo x e y en f para calcular t....'


#Los puntos x0, y0 son la solución del sistema formado por las primeras derivadas de f con respecto de x e y:

solucionf1x_f2y = solve([f1x,f1y],[x,y])




x0 = solucionf1x_f2y[0][0]


y0 = solucionf1x_f2y[0][1]


#Para conocer z0, sustituyo x0 e y0 en f:

t0 = f.subs( [ (x, solucionf1x_f2y[0][0]) , (y, solucionf1x_f2y[0][1])])


print '\n\n\tCompletado. Punto critico de la funcion P(x, y, T) = P(%d,%d,%d) ' % (x0, y0, t0)


#Calculo las segundas derivadas para la matriz hessiana:


f2xx = diff(f,x,2)

f2yy = diff(f,y,2)

f2yx = diff(f1y,x,1)

f2xy= diff(f1x,y,1)


#Determinante matriz hessiana:


f2xx_x0y0 = f2xx.subs( [ (x, x0) , (y, y0)])


f2yy_x0y0 = f2yy.subs( [ (x, x0) , (y, y0)])


det_hess = f2xx.subs( [ (x, x0) , (y, y0)])*f2yy.subs( [ (x, x0) , (y, y0)])-f2yx.subs( [ (x, x0) , (y, y0)])*f2xy.subs( [ (x, x0) , (y, y0)])
```

```
print '\n\n\tDeterminante matriz hessiana > 0 (%d) --> Hay un maximo o minimo relativo.' % (det_hess)


print '\n\n\tSegunda derivada de f con respecto de x e y son positivas (%d,%d)--> Hay un minimo relativo, en este caso parece absoluto.' % (f2xx_x0y0, f2yy_x0y0 )


print '\n\n\t----> La temperatura minima es, por tanto %d grados centigrados.' % t0
```