Taller Probabilidad

① Por Probabilidad

Con Repetición

a) $P(3E) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{8}{20}\cdot\frac{8}{20} = \frac{8}{125}$

b) $P(3S) = P(S_1)P(S_2)P(S_3) = \frac{3}{20}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{20} = \frac{27}{8000}$

c) $P(2E1S) = P(E_1)P(E_2)P(S_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{20}$

$P(2E1S) = P(S_1)P(E_2)P(E_3) = \frac{3}{20}\cdot\frac{8}{20}\cdot\frac{8}{20}$

$P(2E1S) = P(E_1)P(S_2)P(E_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{8}{20}$

$= \left(\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{8}{20}\right)3 = \frac{9}{125}$

d) $P(1S) = 1 - P(\bar{7}S) = 1 - \left(\frac{17}{20}\cdot\frac{17}{20}\cdot\frac{17}{20}\right) = \frac{3087}{8000}$

e) $P(ISE) = P(I_1)P(S_2)P(E_3) = \frac{9}{20}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{8}{20}$

$P(IES) = P(I_1)P(E_2)P(S_3) = \frac{9}{20}\cdot\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{20}$

$P(SIE) = P(S_1)P(I_2)P(E_3) = \frac{3}{20}\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{8}{20}$

$P(SEI) = P(S_1)P(E_2)P(I_3) = \frac{3}{20}\cdot\frac{8}{20}\cdot\frac{9}{20}$

$P(EIS) = P(E_1)P(I_2)P(S_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{3}{20}$

$P(ESI) = P(E_1)P(S_2)P(I_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{9}{20}$

$= \left(\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{9}{20}\right)6 = \frac{81}{500}$

f) $P(ESI) = P(E_1)P(S_2)P(I_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{3}{20}\cdot\frac{9}{20} = \frac{27}{100}$

Sin Repetición

a) $P(3E) = P(E_1)P(E_2)P(E_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18} = \frac{14}{285}$

b) $P(3S) = P(S_1)P(S_2)P(S_3) = \frac{3}{20}\cdot\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{18} = \frac{1}{1140}$

c) $P(2E1S) = P(E_1)P(E_2)P(S_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{3}{18}$

$P(2E1S) = P(S_1)P(E_2)P(E_3) = \frac{3}{20}\cdot\frac{8}{19}\cdot\frac{7}{18}$

$P(2E1S) = P(E_1)P(S_1)P(E_2) = \frac{8}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{7}{18}$

$= \left(\frac{8}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{7}{19}\right)3 = \frac{7}{95}$

d) $P(1S) = 1 - P(\bar{7}S) = 1 - \left(\frac{17}{20}\cdot\frac{16}{19}\cdot\frac{15}{18}\right) = \frac{23}{57}$

e) $P(ISE) = P(I_1)P(S_2)P(E_3) = \frac{9}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{8}{18}$

$P(IES) = P(I_1)P(E_2)P(S_3) = \frac{9}{20}\cdot\frac{8}{19}\cdot\frac{3}{18}$

$P(SIE) = P(S_1)P(I_2)P(E_3) = \frac{3}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18}$

$P(SEI) = P(S_1)P(E_2)P(I_3) = \frac{3}{20}\cdot\frac{8}{19}\cdot\frac{9}{18}$

$P(EIS) = P(E_1)P(I_2)P(S_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{3}{18}$

$P(ESI) = P(E_1)P(S_2)P(I_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{9}{18}$

$= \left(\frac{8}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{3}{18}\right)6 = \frac{18}{95}$

f) $P(ESI) = P(E_1)P(S_2)P(I_3) = \frac{8}{20}\cdot\frac{3}{19}\cdot\frac{9}{18} = \frac{3}{95}$

Por Analisis Combinatorio

$\frac{}{20}\ \frac{}{20}\ \frac{}{20}\ \underbrace{\frac{}{100}}$ f) $P(E\,S\,I) = P(E_1)P(S_2)P(I_3) = \frac{}{20}\ \frac{}{19}\ \frac{}{18}$

$= \underbrace{\frac{3}{95}}$

Por Analisis Combinatorio

Sin Repetición (usando Combinación)

$C^n_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ n: datos totales, k: elementos a elegir

$Sol = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{\text{casos fav}}{1140}$

$\hookrightarrow \binom{20}{3} = \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1}$

a) $\frac{\binom{8}{3}}{1140} = \frac{56}{1140} = \underbrace{\frac{14}{285}}$

b) $\frac{\binom{3}{3}}{1140} = \underbrace{\frac{1}{1140}}$

c) $\frac{\binom{8}{2}\binom{3}{1}}{1140} = \frac{84}{1140} = \underbrace{\frac{7}{95}}$

Con Repetición (usando Variación)

$V^k_{n,R} = n^k$ n: datos totales, k: elementos a elegir

$Sol = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$

$\frac{8^3}{20^3} = \underbrace{\frac{8}{125}}$

$\frac{3^3}{20^3} = \underbrace{\frac{27}{8000}}$

$\frac{8^2 3^1}{20^3} = \left(\frac{3}{125}\right)3 = \underbrace{\frac{9}{125}}$

d) $1 - \dfrac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \underbrace{\dfrac{23}{57}}$

$1 - \dfrac{17^3}{20^3} = \underbrace{\dfrac{3087}{8000}}$

e) $\dfrac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{1140} = \underbrace{\dfrac{18}{95}}$

$\dfrac{8^1 \cdot 9^1 \cdot 3^1}{20^3} = \left(\dfrac{27}{1000}\right)6 = \underbrace{\dfrac{81}{500}}$

f) Aquí usamos variación sin repetición

$V_{20}^{3} = 6840$ total ordenado

entonces:

$\dfrac{8 \cdot 3 \cdot 9}{6840} = \underbrace{\dfrac{3}{95}}$

$\dfrac{8 \cdot 3 \cdot 9}{20 \cdot 20 \cdot 20} = \underbrace{\dfrac{27}{1000}}$

②

a) Formas de Ordenar los bloques: $3!$
Formas Internas de cada bloque: $4!, 6!, 2!$

Total: $3! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 2! = 207,360$

b) Forma de ordenar el bloque de Ing. $4!$

68-10 95

(2)

a) Formas de Ordenar los bloques: 3!
Formas Internas de cada bloque. 4!, 6!, 2!

Total: $3! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 2! = 207{,}360$

b) Forma de ordenar el bloque de Ing. 4!
Formas de ordenar los 9 objetos: 9!

Total $9! \cdot 4! = 8'709{,}120$

(3) a) Cualquier Ingeniero y cualquier abogado — Usamos Combinaciones

Formas de elegir 2 ingenieros $\binom{5}{2} = 10$

Formas de elegir 3 abogados $\binom{7}{3} = 35$

Total. $10 \cdot 35 = 350$

b) Un abogado determinado debe pertenecer al comité

Sea A^* el abogado que debe estar. Lo incluimos y elegimos los otros 2 abogados entre los 6 restantes:

$\binom{6}{2} = 15$. Los ingenieros se eligen igual: $\binom{5}{2} = 10$

Total: $10 \cdot 15 = 150$

c) Vamos a dar la formula general:

Si hay t ingenieros prohibidos, entonces hay 5-t ingenieros disponibles.
Debemos elegir 2 de esos 5-t:

$\binom{5-t}{2}$. Los abogados se eligen igual: $\binom{7}{3} = 35$

Total: $\binom{5-t}{2} \cdot \binom{7}{3} = \binom{5-t}{2} \cdot 35$

casos típicos

si 1 ing están prohibido $(t=1)$: $\binom{4}{2}=6 \rightarrow 6 \cdot 35 = 210$

si 2 ing están prohibidos $(t=2)$: $\binom{3}{2}=3 \rightarrow 3 \cdot 35 = 105$

si $t \geq 4$ entonces $\binom{5-t}{2}=0$ (no hay suficientes ing disponibles)

④ Datos:

Electrónica: 5
Sistemas: 2 — Total: 10 posiciones en la fila.
Industrial: 3

Este es un caso de permutaciones con repetición: $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}$

donde. $n=10$ total elementos
$n_1=5$ electrónica
$n_2=2$ sistemas
$n_3=3$ Industrial

Calculo:

$$\frac{10!}{5!\,2!\,3!} = \frac{3628.800}{1440} = 2540 \text{ de ordenarlos}$$

⑤

a) No obtener un total de 7 u 11 en ninguno de los 2 lanzamientos de un par de dados.

1 Espacio Muestral para un lanzamiento: $6 \times 6 = 36$ posibles resultados

$n_3 = 3$ Industrial

Calculo:

$$\frac{10!}{5!2!3!} = \frac{3628.800}{1140} = 2540 \text{ de ordenarlos}$$

(5)

a) No obtener un total de 7 u 11 en ninguno de los 2 lanzamientos de un par de dados.

1 Espacio Muestral para un lanzamiento: $6 \times 6 = 36$ posibles resultados

2. Casos favorables (suman 7 u 11)

Suma 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) → 6 casos

Suma 11: (5,6), (6,5) → 2 casos

Total casos de 7 u 11. $6+2=8$

$$P(7 \text{ u } 11) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

3. Probabilidad de NO obtener 7 u 11 en un lanzamiento.

$$P(\text{No } 7 \text{ ni } 11) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

4. En 2 lanzamientos independientes

$$P(\text{No } 7 \text{ ni } 11 \text{ en ninguno}) = \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$$

b) Obtener 3 veces el número 6 en 5 lanzamientos

Esto es un caso de distribución binomial con:

Numero de ensayos: $n=5$

Éxito = "Sacar un 6" $\rightarrow$ probabilidad $p=\frac{1}{6}$

Fracaso = "No sacar un 6" $\rightarrow$ probabilidad $q=\frac{5}{6}$

Queremos exactamente $k=3$ éxitos

Formula Binomial.

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 \rightarrow P=\frac{250}{7776}\cong 3.2\%$$

6. Producción Diaria: 12.000 memorias

Defectuosas: 3% $\rightarrow$ probabilidad de defecto $p=0.03$

Se seleccionan: $n=600$ memorias

Queremos: probabilidad de que exactamente $k=12$ sean defectuosas

Modelo Binomial:

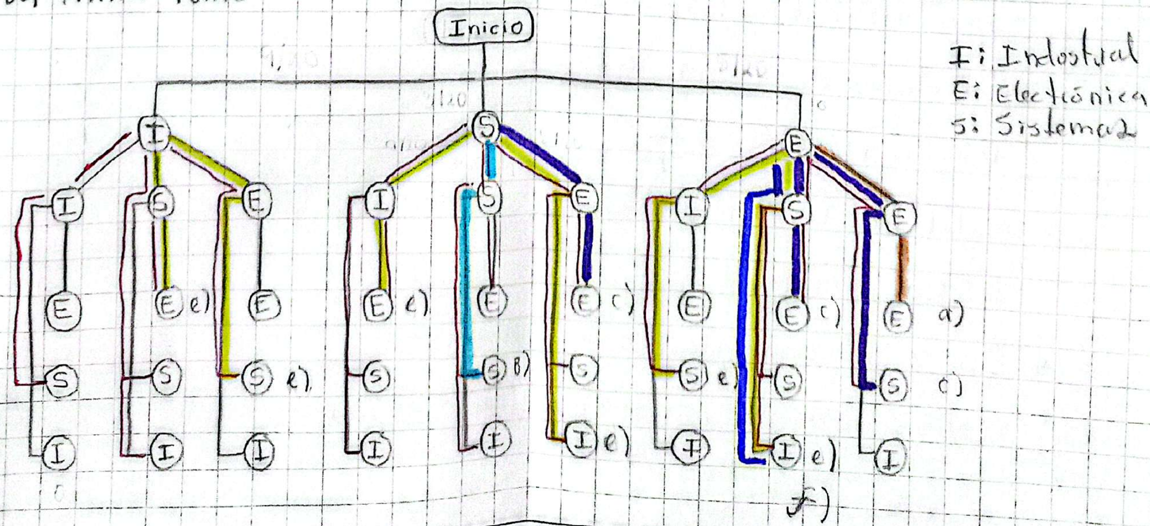
La variable aleatoria $X\sim \text{Binomial}(n=600,\ p=0.03)$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=12)=\binom{600}{12}(0.03)^{12}(0.97)^{588}\cong 0.03603$$

$\uparrow$ esta es la probabilidad

Arbol Primer Punto



Observaciones

Día	Mes	Año	Hora	Institución UDFJDC		
Alumno Luis Fernando López Pardo - 20241020045					Código	Materia Probabilidad y Estadística
Curso	Bimestre	Semestre	Salón	Hoja No ___ de ___		CALIFICACIÓN
Profesor Alberto Acosta López						

Taller #2 Probabilidad y Estadística.

①

$$f(x) = \begin{cases} Kx^2, & 0<x<6 \\ \phi, & x<\phi, x\geq 6 \end{cases}$$

- Hallar función de probabilidad y función de distribución acumulativa.

1. Hallar función de probabilidad.

1. identificar el tipo de variable

$f(x) = Kx^2$, $0<x<6$

Describe una variable aleatoria continua.

Hallar K:

condición de normalización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^6 Kx^2\,dx = 1$$

calculamos la integral:

$$\int_0^6 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6 = \frac{6^3}{3} - 0 = 72$$

Entonces:

$$K \cdot 72 = 1 \rightarrow K = \frac{1}{72}$$

Finalmente, la función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{72}, & 0<x<6 \\ 0, & x<0, x\geq 6 \end{cases}$$

2. Función de distribución acumulativa $F(x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

- caso 1: $x \leq 0$

Fuera del soporte, $F(x) = 0$

- caso 2: $0<x<6$

$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{72}\,dt = \frac{1}{72}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{216}$$

- caso 3: $x \geq 6$

$F(x) = 1$ (Ya acumuló toda la probabilidad)

Finalmente, la función acumulativa es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^3}{216}, & 0<x<6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$

Comprobación de las dos funciones:

- En función acumulativa:

$$\frac{x^3}{216} \rightarrow \frac{5^3}{216} - \frac{1^3}{216} = \frac{31}{54}$$

- En función de probabilidad:

$$\int_1^5 \frac{x^2}{72}\,dx = \left(\frac{x^3}{216}\right)\Big|_1^5 = \frac{31}{54}$$

= igual ✓

② Cálculo de función de probabilidad, función de distribución acumulativa, varianza y valor medio, para el lanzamiento de dos dados.

1. Espacio muestral

Dos dados equilibrados $\rightarrow 6 \times 6 = 36$ resultados posibles
Variable aleatoria $X = D_1 + D_2$, donde $X \in \{2, 3, ..., 12\}$

2. Función de probabilidad $P(X=x)$ con combinaciones

X	Combinaciones	# Combinaciones	$P(X=x)$
2	(1,1)	1	1/36
3	(1,2)(2,1)	2	2/36
4	(1,3)(2,2)(3,1)	3	3/36
5	(1,4)(2,3)(3,2)(4,1)	4	4/36
6	(1,5)(2,4)(3,3)(4,2)(5,1)	5	5/36
7	(1,6)(2,5)(3,4)(4,3)(5,2)(6,1)	6	6/36
8	(2,6)(3,5)(4,4)(5,3)(6,2)	5	5/36
9	(3,6)(4,5)(5,4)(6,3)	4	4/36
10	(4,6)(5,5)(6,4)	3	3/36
11	(5,6)(6,5)	2	2/36
12	(6,6)	1	1/36

3. Función de distribución acumulativa $F(x) = P(X \leq x)$

Acumulando la probabilidad

X	F(x)
2	$1/36 \approx 0.0278$
3	$3/36 \approx 0.0833$
4	$6/36 \approx 0.1667$
5	$10/36 \approx 0.2778$
6	$15/36 \approx 0.4167$
7	$21/36 \approx 0.5833$
8	$26/36 \approx 0.7222$
9	$30/36 \approx 0.8333$
10	$33/36 \approx 0.9167$
11	$35/36 \approx 0.9722$
12	$36/36 \approx 1.0000$

4. Valor Medio

$$E[X] = \sum x P(X=x) = (2(1)+3(2)+4(3)+5(4)+6(5)+7(6)+8(5)+9(4)+10(3)+11(2)+12(1))/36$$

$$E[X] = \frac{252}{36} = 7$$

5 Varianza Var(X)

$$E[X^2] = (4+18+48+100+180+294+320+324+300+242+144)/36$$

$$= \frac{1974}{36} \approx 54.8333$$

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 54.8333 - 49 = 5.8333 = \frac{35}{6}$$

Día	Mes	Año	Hora	Institución
03	10	2025		UDFJDC

Alumno: Luis Fernando López Pardo - 20241020045 | Código | Materia

Curso | Bimestre | Semestre | Salón | Hoja No ______ de ______ | CALIFICACIÓN

Profesor: Alberto Acosta

Taller Probabilidad y Est. #3

① Ejercicio Estudiantes

Datos: 3 est sistemas
2 est Electrónica
3 est industrial

Se seleccionan 2 estudiantes de los 8 totales

Definimos X = n° est elegidos de sistemas, Y = n° estudiantes elegidos de electrónica.

Los pares posibles son: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$

a) Función de Probabilidad conjunta

Se seleccionan 2 estudiantes del grupo de 8 totales.

total de formas: $\binom{8}{2} = 28$

La Función de Prob. Conjunta se define como.

$$P_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = \frac{\text{n° de maneras de elegir } x \text{ de sistemas, } y \text{ de electrónica y } 2-x-y \text{ de industrial.}}{\binom{8}{2}}$$

Entonces la Función de Probabilidad sería:

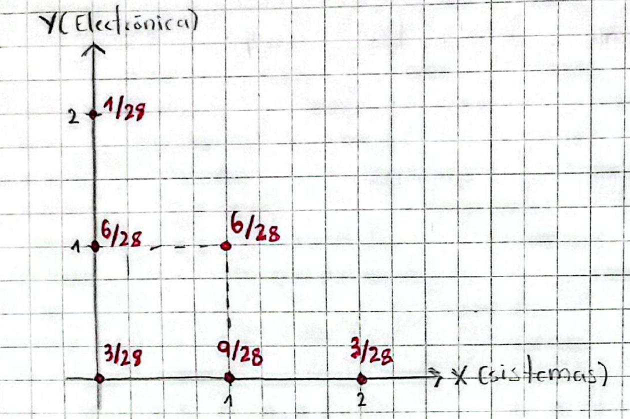
$$P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}, \quad x, y \geq 0, \quad x+y \leq 2$$

y $P_{X,Y}(x,y) = 0$ en otro caso.

Calculando con cada pareja posible:

- $p(0,0) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{28} = \dfrac{1}{28}\left(\dfrac{3!}{0!(3-0)!} \cdot \dfrac{2!}{0!(2-0)!} \cdot \dfrac{3!}{2!(3-2)!}\right) = \dfrac{3}{28}$
- $p(0,1) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{28} = \dfrac{1}{28}\left(\dfrac{3!}{0!(3-0)!} \cdot \dfrac{2!}{1!(2-1)!} \cdot \dfrac{3!}{1!(3-1)!}\right) = \dfrac{6}{28}$
- $p(0,2) = \dfrac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{28} = \dfrac{1}{28}\left(\dfrac{3!}{0!(3-0)!} \cdot \dfrac{2!}{2!(2-2)!} \cdot \dfrac{3!}{0!(3-0)!}\right) = \dfrac{1}{28}$
- $p(1,0) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{28} = \dfrac{1}{28}\left(\dfrac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \dfrac{2!}{0!(2-0)!} \cdot \dfrac{3!}{1!(3-1)!}\right) = \dfrac{9}{28}$
- $p(1,1) = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{28} = \dfrac{1}{28}\left(\dfrac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \dfrac{2!}{1!(2-1)!} \cdot \dfrac{3!}{0!(3-0)!}\right) = \dfrac{6}{28}$
- $p(2,0) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{28} = \dfrac{1}{28}\left(\dfrac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \dfrac{2!}{0!(2-0)!} \cdot \dfrac{3!}{0!(3-0)!}\right) = \dfrac{3}{28}$

Gráfica de la Función de Probabilidad Conjunta



$f(x,y)$	0	1	2	Σx
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0	$\frac{12}{28}$
2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
Σy	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{28}{28}$

b) $P((X,Y)\in R)$ con $R=\{(X,Y) \mid x+y\leq 1\}$

los pares con $x+y\leq 1$ son $(0,0),(0,1),(1,0)$. Entonces:

$$P((X,Y)\in R) = p(0,0)+p(0,1)+p(1,0) = \frac{3+6+9}{28} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$$

② Ejercicio Fábrica de dulces

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0\leq x,\ y\leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Verifique que $f(x,y)$ es una función de probabilidad conjunta:

1. No Negatividad

Dentro del rectángulo $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ tenemos que $2x\geq 0$ y $3y\geq 0$

Entonces:

$$2x+3y\geq 0 \longrightarrow f(x,y)=\frac{2}{5}(2x+3y)\geq 0$$

y fuera de esa región, $f(x,y)=0$

Por lo que se cumple la condición de No Negatividad.

2. Integral total $=1$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy$$

Integrar en x.

$$\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx = \frac{2}{5}\left[\int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 3y\,dx\right] = \frac{2}{5}(1+3y)$$

continuación siguiente página

Ahora integrar en y:

$$\int_0^1 \frac{2}{5}(1+3y)\,dy = \frac{2}{5}\left[\int_0^1 1\,dy + \int_0^1 3y\,dy\right] = \frac{2}{5}\left[1+\frac{3}{2}\right] = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2} = 1$$

Como $f \geq 0$ y la integral doble sobre todo el espacio es 1, $f(x,y)$ es una función de probabilidad conjunta valida.

3. Datos

$f(x,y) = x+y = 30$

Espacio Muestral

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Y	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

a) $P(x+y=4)$.

Si la condición es $x+y=30$, $x+y=4$ es imposible

$P(x+y=4) = 0$

b). $P(X>Y)$

los pares validos son $(x, 30-x)$

$X = 0, 1, \ldots, 30$ Son 31 posibilidades

$X>Y$

$X > 30-X$

$2X > 30$

$X > 15$

$X = 16, 17, \ldots, 30$ 15 posibilidades

casos favorables

$$P(X>Y) = \frac{15}{31}$$

c) $P(X \geq 2, Y \leq 1)$

Con $Y \leq 1$ entonces $Y=0$ o $Y=1$

Si $Y=0$ — $X=30$

Si $Y=1$ — $X=29$

2 casos favorables

$$P(X \geq 2, Y \leq 1) = \frac{2}{31}$$

d) $P(X \leq 2, Y=1)$

Si $Y=1$, $X=29$

Pero entonces $X \leq 2$ no se cumple, por lo tanto $P=0$

③ Fabrica de Dolces

punto b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \leq X, Y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular $P(x,y) \in R$ tal que

$$R = \{(x,y) \quad 0 < X < \tfrac{1}{2} ; \tfrac{1}{4} < Y < \tfrac{1}{2}\}$$

$$P = \int_{\frac{1}{4}}^{1/2} \int_{0}^{1/2} \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx\,dy = \frac{2}{5} \int_{0}^{1/2} (2x+3y)\,dx = \left[x^2 + 3xy\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2}y = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}y\right) = \frac{1}{10} + \frac{3}{5}y$$

$$= \int_{\frac{1}{4}}^{1/2} \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{5}y\right) dy = \left[\frac{y}{10} + \frac{3y^2}{10}\right]\Bigg|_{1/4}^{1/2}$$

$y = 1/2$

$$\frac{1}{20} + \frac{3}{40} = \frac{2}{40} + \frac{3}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$y = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{40} + \frac{3}{160} = \frac{4}{160} + \frac{3}{160} = \frac{7}{160}$$

$$\frac{1}{8} - \frac{7}{160} = \frac{20}{160} - \frac{7}{160} = \boxed{\frac{13}{160}}$$

servaciones

Nombre: Luis Fernando López Pardo - 20241020045 Fecha:

Profesor: Alberto Acosta Materia: Probabilidad y Estadística

Institución: UDFJDC Curso: Nota:

Ejercicios Aplicaciones de Función de Prob

1. Ejercicio Discreto

Una urna contiene 3 bolas rojas y 2 bolas azules. Se extraen 2 bolas sin reemplazo. Sea X = número de bolas rojas y Y = número de bolas azules

La función de probabilidad conjunta es:

$$f(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}}{\binom{5}{2}}, \quad x+y=2$$

• Pregunta:

1. $P(X=2, Y=0)$ prob de que salgan 2 rojas

$$P(X=2,Y=0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{\left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right)\left(\frac{2!}{0!(2-0)!}\right)}{\frac{5!}{2!(5-2)!}} = \frac{3}{10}$$

• Demostración de que $f(x,y)$ es func de Probabilidad.

1) No negatividad

Para cualquier par (x,y) con $x+y=2$, los coeficientes binomiales $\binom{3}{x}$ y $\binom{2}{y}$ son enteros NO negativos, y $\binom{5}{2} > 0$. Por tanto

$f(x,y) \geq 0$ para todo (x,y) en el soporte.

2) Suma total igual a 1.

El espacio de valores posibles (soporte) está dado por todas las parejas (x,y) con $x,y \in \{0,1,2\}$ y $x+y=2$. Es decir:

$$(2,0), (1,1), (0,2)$$

Calculemos f en cada caso (recordando $\binom{5}{2} = 10$)

• Para $(x,y) = (2,0)$

$$\binom{3}{2}\binom{2}{0} = 3 \cdot 1 = 3 \longrightarrow f(2,0) = \frac{3}{10}$$

• Para $(x,y) = (1,1)$

$$\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 3 \cdot 2 = 6 \qquad f(1,1) = \frac{6}{10}$$

• Para $(x,y) = (0,2)$

$$\binom{3}{0}\binom{2}{2} = 1 \cdot 1 = 1 \qquad f(0,2) = \frac{1}{10}$$

Sumamos las probabilidades

$$f(2,0) + f(1,1) + f(0,2) = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3+6+1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Conclusión: SI es función de Prob ya que cumple los dos criterios.

2. Ejercicio continuo

En una cafetería el tiempo de espera para ser atendido (X) y el tiempo del consumo del café (Y) se miden en minutos. Ambos varían entre 0 y 10 mins, y su función de distribución conjunta es:

$$f(x,y) = \frac{1}{100} \qquad 0 < x < 100,\ 0 < y < 10$$

• Calcular $P(X<3,\ Y<5)$: probabilidad de que una persona espere menos de 3 minutos y consuma el café en menos de 3 mins.

$$P(X<3,\ Y<5) = \int_0^3\int_0^5 \frac{1}{100}\,dy\,dx = \frac{1}{100}(3)(5) = \frac{15}{100} = 0.15 \text{ mins}$$

• Mostrar que $f(x,y)$ es una función de Probabilidad

1) No negatividad

$$f(x,y) \geq 0 \longrightarrow \frac{1}{100} \geq 0 \ ✓$$

2) Integral debe dar 1

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^{10}\int_0^{10} \frac{1}{100}\,dx\,dy \rightarrow \int_0^{10} \frac{1}{100}\,dx = \frac{1}{100}(10-0) = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$\longrightarrow \int_0^{10} 0.1\,dy = 0.1(10-0) = 1 \ ✓$$

Conclusión: SI es función de Probabilidad

Día	Mes	Año	Hora	Institución UDFJDC		
Alumno Luis Fernando López Pardo - 20241020045					Código	Materia Prob. y Estadística.
Curso	Bimestre	Semestre	Salón	Hoja No ___ de ___		CALIFICACIÓN
Profesor Alberto Acosta						

Ejercicios Distribución de Poisson y Normal

Poisson

1. En una intersección muy concurrida, el promedio histórico de accidentes de tránsito es de 3 accidentes por mes.

Durante los últimos meses, la alcaldía ha implementado una nueva señalización y quiere evaluar su impacto.

Pregunta: Si la tasa de accidentes sigue siendo la misma, ¿Cuál es la probabilidad de que en un mes se registren a lo sumo 2 accidentes?

Solución:

Datos: $\lambda = 3$

Se pide $P(x \leq 2)$

$$P(x \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$$

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

- $P(0) = e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} = 0.0498$
- $P(1) = e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!} = 0.1494$
- $P(2) = e^{-3} \cdot \frac{3^2}{2!} = 0.2240$

$\rightarrow P(x \leq 2) = 0.0498 + 0.1494 + 0.2240$

$= 0.4232$

La Prob de tener a lo sumo 2 accidentes al mes es de 42.32%.

2. Una persona recibe en promedio 6 correos electrónicos por hora. Durante una hora en particular, quiere saber que tan probable es recibir 8 correos.

Solución:

$\lambda = 6 \quad x = 8$

$$P(X = 8) = \frac{e^{-6} \cdot 6^8}{8!} \rightarrow P(X = 8) = e^{-6} \frac{1679616}{40320} = 0.1033$$

La probabilidad de recibir exactamente 8 correos en una hora es 10.33%.

Normal

1. Una maquina embotelladora llena botellas de jugo de 500mL con una desviación estandar de 5mL. Se sabe que la cantidad de jugo sigue una distribución normal.

¿Que porcentajes de botellas contiene entre 495 mL y 510 mL?

Solución:

$\mu = 500mL$

$\sigma = 5mL$

Intervalo: $[495, 510]$

$$z_1 = \frac{495 - 500}{5} = -1$$

$$z_2 = \frac{510 - 500}{5} = 2$$

Usando tabla:

$P(z > -1) = 0.8413$

$P(z > 2) = 0.0228$

$P(-1 < z < 2) = P(z > -1) - P(z > 2)$

$P(-1 < z < 2) = 0.8413 - 0.0228 = 0.8185$

El 81.85% de las botellas contienen entre 495mL y 510mL

2. El tiempo de atención de un paciente en urgencias sigue una distribución normal con media 25min y desviación estandar 4min

¿Cuál es la probabilidad de que un paciente sea atendido en mas de 30mins?

$\mu = 25$

$\sigma = 4$

$$z = \frac{30 - 25}{4} = 1.25$$

Usando tabla de $P(Z > z)$

$P(z > 1.25) = 0.1056$

La probabilidad de que un paciente espere más de 30 mins es de 10.56%.