Lista de Exercícios - Projeto e Análise de Algoritmos

Luiz Alberto do Carmo Viana

8 de novembro de 2019

Questão 1

Mostre que, se um array de n posições representa uma heap de n elementos, então as folhas dessa heap estão nas posições do array de índices $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, \ldots, n$.

Questão 2

Mostre que existem no máximo $\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \rceil$ nós de altura h em uma heap com n elementos.

Questão 3

Dada uma sequência de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, um infixo dessa sequência é uma subsequência da forma $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_j$, para $1 \leq i \leq j \leq n$. Elabore um algoritmo para determinar o infixo de soma máxima de uma sequência de números.

Questão 4

No começo de uma viagem, você se encontra no km 0. No caminho, existem n hotéis, nos km's $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Ao final de um dia de viagem, você deve fazer uma parada em um desses hotéis. Você deve parar no hotel do km a_n, já que esse é seu destino. Idealmente, você gostaria de viajar 200 km por dia. Sendo assim, se você viaja x km em um dia, há uma penalidade de $(200 - x)^2$ para aquele dia de viagem. Elabore um algoritmo que determina em que hotéis você deve parar, de forma que a soma das penalidades diárias seja minimizada.

Questão 5

Dada uma string de n caracteres $s[1 \ldots n]$, gostaríamos de decidir se s pode ser "quebrada" em uma sequência de palavras de um certo dicionário d. Consultar o dicionário d, isto é, determinar se uma certa substring contígua de s está em d custa $O(1)$. Desenvolva um algoritmo com custo de execução $O(n^2)$ para resolver esse problema.

Questão 6

Dada uma sequência de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma subsequência $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ é palindrômica se $a_i = a_j, a_{i+1} = a_{j-1}$ e assim por diante. Desenvolva um algoritmo com custo de execução $O(n^2)$ que encontra a subsequência palindrômica máxima de $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Questão 7

Dadas duas strings $x[1 \ldots m]$ e $y[1 \ldots n]$, gostaríamos de encostrar o comprimento de sua maior substring comum, isto é, o maior valor de k para o qual haja índices $i \in [m-k+1]$ e $j \in [n-k+1]$ tais que $x_i x_{i+1} \ldots x_{i+k-1} = y_j y_{j+1} \ldots y_{j+k-1}$. Para tanto, desenvolva um algoritmo com custo de execução $O(mn)$.

Questão 8

Tome n moedas viciadas, com probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n \in [0,1]$ de resultarem em cara. Qual a probabilidade de se obter exatamente k caras quando cada uma dessas n moedas é arremessada uma vez? Desenvolva um algoritmo que responda essa pergunta em tempo $O(n^2)$.

Questão 9

Tome uma chapa retangular de aço, com dimensões $M \times N$. Uma unidade do produto p_i gera um lucro c_i quando vendida, e precisa de exatamente uma chapa retangular de aço com dimensões $x_i \times y_i$ para ser fabricada, $i \in [n]$. Desenvolva um algoritmo para determinar a melhor forma de cortar a chapa de aço $M \times N$, isto é, que permita fabricar unidades dos produtos de forma a maximizar o lucro.

Questão 10

Tome uma quantidade ilimitada de moedas com valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Desenvolva um algoritmo que determina o número mínimo de moedas necessárias para representar um certo valor v, caso seja possível representar v. Seu algoritmo deve ter custa de tempo $O(nv)$. Agora, resolva esse problema considerando que não se pode usar moedas repetidas.

Questão 11

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma cobertura de vértices de G é um subconjunto $S \subseteq V$ tal que $S \cap e \neq \emptyset$, para toda aresta $e \in E$. Uma árvore é um grafo conexo e acíclico. Dada uma árvore $T = (V, E)$, desenvolva um algoritmo que determina a cardinalidade da menor cobertura de vértices de T. Seu algoritmo deve ter custo de tempo $O(|V|)$. Dica: cada vértice $v \in V$ tem vizinhos $N(v) \subseteq V \setminus \{v\}$, e remover v de T produz $|N(v)|$ árvores.

Questão 12

Considere um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de inteiros. Dado um inteiro t, desenvolva um algoritmo que decide se o somatório de algum subconjunto de A é maior que t. Seu algoritmo deve ter custo de tempo $O(nt)$.

Questão 13

Considere um conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de inteiros. Dado um inteiro t, desenvolva um algoritmo que decide se o somatório de algum subconjunto de A é exatamente t. Seu algoritmo deve ter custo de tempo $O(nt)$.

Questão 14

Tome um conjunto de inteiros $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Desenvolva um algoritmo para determinar se existe uma partição $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$, de forma que $\sum_{a \in B} a = \sum_{a \in C} a$. Seu algoritmo deve ser polinomial em n e $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Questão 15

Tome um conjunto de inteiros $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Desenvolva um algoritmo para particionar A em $A = B \cup C, B \cap C = \emptyset$, de forma que $|\sum_{a \in B} a - \sum_{a \in C} a|$ seja mínimo. Seu algoritmo deve ser polinomial em n e $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Questão 16

Tome um conjunto de inteiros $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Desenvolva um algoritmo para particionar A em $A = B \cup C \cup D$, onde o somatório das três partes é igual entre si. Seu algoritmo deve ser polinomial em n e $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Questão 17

Tome $D = (V, A)$ um digrafo sem ciclos negativos, $w : A \to \mathbb{R}$, e $s \in V$. Para cada $v \in V$, seja n_v o menor número de arcos em um caminho mais curto de s a v. Seja $m = \max\{n_v : v \in V\}$. Altere o algoritmo de Bellman-Ford de forma que o conteúdo do primeiro laço precise ser executado apenas $m + 1$ vezes, mesmo que m seja um valor desconhecido. Argumente. Dica: talvez seja preciso mudar o laço de "Para" para "Enquanto".

Questão 18

Desenvolva um algoritmo eficiente (tempo polinomial) para encontrar o número total de caminhos em um dag (*directed acyclic graph*). Dica: todo caminho termina em algum vértice.

Questão 19

Tome um digrafo $D = (V, A)$ e uma função de confiabilidade $p : A \to [0, 1]$. Se D está representando um sistema de comunicação, por exemplo, então p indica a probabilidade das conexões (representadas pelos arcos de D) não falharem. Considerando que essas probabilidades são independentes, desenvolva um algoritmo para encontrar o caminho mais confiável de u a v, dados como parte da entrada.

Questão 20

É possível utilizar a saída do algoritmo de Floyd-Warshall para determinar a presença de ciclos com peso negativo no grafo de entrada? Dica: qual a menor distância de um vértice para si mesmo?

Questão 21

Tome um conjunto finito S e um inteiro k. Dado $\mathcal{I} = \{C \subseteq S : |C| \leq k\}$, prove que $M = (S, \mathcal{I})$ é um matróide. Que problema envolvendo M e uma função de peso $w : S \to \mathbb{R}_+$, estritamente positiva, um algoritmo guloso seria capaz de resolver?

Questão 22

Tome $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Seja S o conjunto de colunas de A e $\mathcal{I} = \{C \subseteq S : C \text{ é linearmente independente}\}$. Prove que $M = (S, \mathcal{I})$ é um matróide.

Questão 23

Seja $M = (S, \mathcal{I})$ um matróide. Tome $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ a família de subconjuntos independentes maximais de M. Definimos $\mathcal{I}' = \{C \subseteq S \mid \exists\, B \in \mathcal{B} : B \subseteq S \setminus C\}$. Prove que $M' = (S, \mathcal{I}')$ é um matróide.

Questão 24

Dado um matróide $M = (S, \mathcal{I})$ e uma função de peso $w : S \to \mathbb{R}_+$ estritamente positiva, considere o problema P de encontrar um conjunto independente maximal de M com peso mínimo. Descreva uma função de peso $w' : S \to \mathbb{R}_+$, estritamente positiva, tal que um conjunto independente de M com peso máximo, de acordo com w', seja uma solução para P.

Questão 25

Tome um grafo $G = (V, E)$ e uma função de peso $w : E \to \mathbb{R}_+$. Um corte de G é um conjunto $E' \subseteq E$ tal que $G' = (V, E \setminus E')$ é desconexo. Sabendo que uma árvore geradora de G tem pelo menos uma aresta de cada corte de G, desenvolva um algoritmo, por indução, para encontrar uma árvore geradora de peso mínimo de G. Dica: a remoção de um corte minimal de G o divide em dois subgrafos conexos menores, digamos G_1 e G_2; como são menores, uma hipótese nos daria árvores geradoras de G_1 e G_2; o que resta para construir uma árvore geradora de G? Outra dica: as arestas incidentes em um vértice formam um corte de G; de forma generalizada, as arestas incidentes em um conjunto de vértices de G formam um corte de G.