TP555 - AI/ML

Lista de Exercícios #9

k-Means

1. Cite alguns exemplos de aplicações reais do algoritmo *k-Means*.

2. Neste exercício, você irá utilizar o algoritmo *k-Means* com $k = 3$ para encontrar manualmente os centróides ótimos para o conjunto de dados de treinamento abaixo. Considere os centróides iniciais, C_0, C_1 e C_2, dados ao lado. Utilize a distância Euclidiana para encontrar o cluster a que cada exemplo de entrada pertence. Apresente todos os cálculos necessários para se encontrar os centróides ótimos.

$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$
1	4
4	3
4	5
3	6
6	7
3	3
2	5
2	2
2	3

$\mathbf{C}_0$	
x_1	x_2
5	3

$\mathbf{C}_1$	
x_1	x_2
1	3

$\mathbf{C}_2$	
x_1	x_2
3	4

Em seguida, faça o seguinte:

a. Crie uma figura mostrando os dados de treinamento.

b. Utilizando os centróides iniciais dados acima, instancie um objeto da classe `KMeans` da biblioteca `SciKit-Learn`.

```
km = KMeans(n_clusters=3, init=init_clusters)
```

c. Treine o modelo e imprima os centróides ótimos. Os valores encontrados pelo `KMeans` devem ser os mesmos que você encontrou manualmente. Os valores ótimos podem ser impressos como mostrado abaixo.

```
for i in range(0,3):
    print('Centroid %d: (%1.2f, %1.2f)' % (i,
        km.cluster_centers_[i][0], km.cluster_centers_[i][1]))
```

d. Quantas iterações foram necessárias para se treinar o modelo? **Dica**: a documentação da classe `KMeans` pode ser acessada via: https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html.

e. Crie uma figura com os dados de treinamento indicando através de cores ou marcadores diferentes a que clusters cada um deles pertence, além de mostrar os centróides encontrados pelo *k-Means*.

3. Crie um conjunto de dados de treinamento utilizando a função `make_blobs` como mostrado abaixo.

```
X, y = make_blobs(n_samples=150, n_features=2, centers=5,
    cluster_std=1.0, shuffle=True, random_state=42)
```

Em seguida, faça o seguinte:

a. Crie uma figura mostrando os dados de treinamento.

b. Após inspecionar a figura, decida quantos clusters devem ser utilizados com o algoritmo do *k-Means*.

c. Instancie um objeto da classe `KMeans` da biblioteca `SciKit-Learn`.

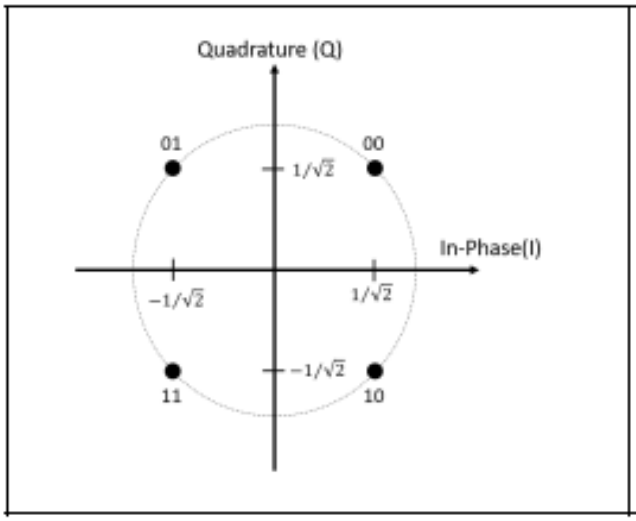
```
km = KMeans(n_clusters=????, init=init_clusters)
```

d. Treine o modelo e imprima os centróides ótimos.

e. Quantas iterações foram necessárias para se treinar o modelo? **Dica**: a documentação da classe `KMeans` pode ser acessada via: https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.cluster.KMeans.html.

f. Crie uma figura com os dados de treinamento indicando através de cores ou marcadores diferentes a que clusters cada um deles pertence, além de mostrar os centróides encontrados pelo *k-Means*.

4. Neste exercício, você irá utilizar o algoritmo do *k-Means* para clusterizar os dados da modulação digital *QPSK*, ou seja, realizar a detecção de símbolos *QPSK*. Os símbolos *QPSK* são dados pela figura e tabela abaixo.



bits	Símbolo (I + jQ)
00	$\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$
01	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$
10	$\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$
11	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

O resultado do seu *'clusterizador'* (neste caso, um detector) pode ser comparado com a curva da taxa de erro de símbolo (`SER`) teórica, a qual é dada por:

$$\text{SER} = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) - \frac{1}{4}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right)^2$$

Utilizando a classe KMeans do módulo cluster da biblioteca sklearn, faça o seguinte

a. Construa um detector para realizar a detecção dos símbolos $QPSK$.
   i. Gere $N = 1,000,000$ símbolos $QPSK$ aleatórios.
   ii. Passe os símbolos através de um canal $AWGN$.
   iii. Detecte a probabilidade de erro de símbolo para cada um dos valores do vetor $E_s/N_0 = [-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20]$.

b. Apresente um gráfico comparando a `SER` simulada e a `SER` teórica versus os valores de E_s/N_0 definidos acima.

c. Podemos dizer que a curva simulada se aproxima da curva teórica da `SER`?

(**Dica:** Como a ordem dos centróides encontrados pelo k-Means é aleatória, o valor do símbolo que o centróide representa pode ser encontrado através de estimativa por máxima verossimilhança (ML), ou seja, testa-se o centróide de um símbolo detectado contra todos os símbolos possíveis, sendo o símbolo escolhido aquele que apresentar o menor erro.)

(**Dica:** A função erfc pode ser importada da seguinte forma: from scipy.special import erfc).

(**Dica:** A função train_test_split pode dividir qualquer número de vetores de entrada em vetores de treinamento e teste. Veja o exemplo abaixo onde três vetores de entrada, a, e c, são divididos em vetores de treinamento e teste.

```
# Split array into random train and test subsets.
a_train, a_test, b_train, b_test, c_train, c_test =
    train_test_split(a, b, c, random_state=42)
```

Para mais informações, leia a documentação da função train_test_split: https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.model_selection.train_test_split.html)

(**Dica:** Uma rápida revisão sobre taxa de erro de símbolo pode ser encontrada no link: http://www.dsplog.com/2007/11/06/symbol-error-rate-for-4-qam/).

5. Neste exercício, você irá aprender e utilizar 2 métodos para se escolher o parâmetro k, ou seja, o número de clusters. Crie um conjunto de dados utilizando o trecho de código abaixo.

```
N = 1000
# Generating the sample data from make_blobs. This particular
    setting has one distinct cluster and 3 clusters placed close
    together.
X, y = make_blobs(n_samples=N, n_features=2, centers=4,
    cluster_std=1, center_box=(-10.0, 10.0), shuffle=True,
    random_state=1)
```

Leia as referências abaixo para aprender sobre os métodos do cotovelo e da silhueta. Em seguida, faça o seguinte:

a. Plote os dados do conjunto de testes.

b. Visualmente, quantos clusters você acha que seriam necessários para agrupar os dados?

c. Utilizando o método do cotovelo, encontre o valor mais apropriado para k.

d. Com o(s) resultado(s) do método do cotovelo, crie uma figura com os dados de treinamento indicando através de cores ou marcadores diferentes a que clusters cada um deles pertence, além de mostrar os centróides encontrados pelo *k-Means*.

e. Utilizando o método da silhueta, encontre o(s) valor(es) mais apropriado(s) para k.

f. Com o(s) resultado(s) do método da silhueta, crie uma figura com os dados de treinamento indicando através de cores ou marcadores diferentes a que clusters cada um deles pertence, além de mostrar os centróides encontrados pelo *k-Means*.

Referências:

(a) Elbow Method

(b) Elbow and Silhouette Methods

(c) Elbow and Silhouette Methods