AULA 5 – ZEROS REAIS DE FUNÇÕES REAIS (PARTE 2)

Prof. Gustavo Resque
gustavoresqueufpa@gmail.com

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

- Dadas as condições
  - f(x) seja contínua no intervalo [a,b]
  - f(a)f(b)<0
  - f(x) tenha somente uma raiz no intervalo [a,b]
- Procede semelhante ao método da bissecção, entretanto ao invés de utilizar a média aritmética entre a e b, usa-se a média ponderada com os pesos $|f(a)|$ e $|f(b)|$.

$$x = \frac{a|f(b)| + b|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|}$$

- Uma vez que $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos:

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

- Graficamente
  - x é a intersecção entre o eixo $\overrightarrow{0x}$ a reta $r(x)$ que passa entre os pontos $\left(a, f(a)\right)$ e $\left(b, f(b)\right)$.

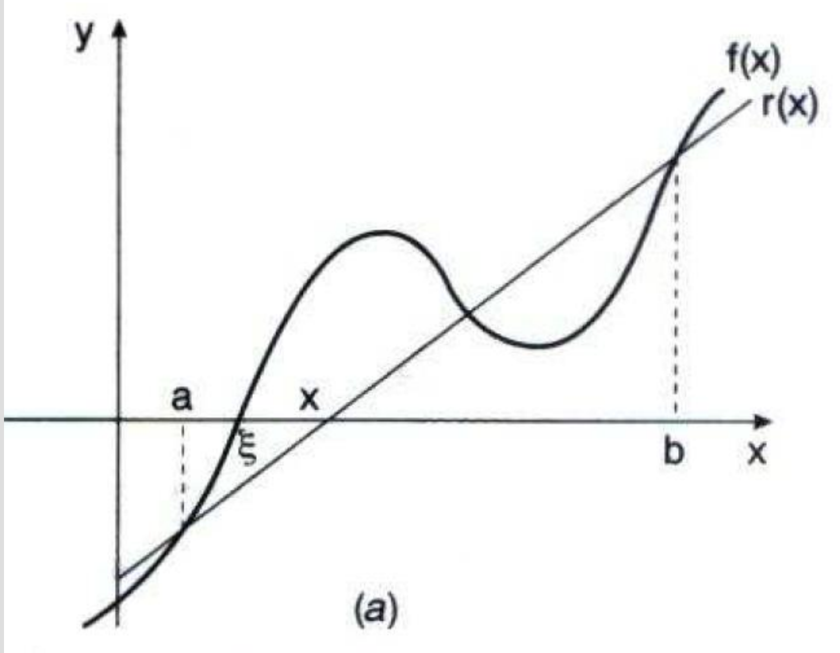


Figura 2.14

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

- As iterações ficam assim:

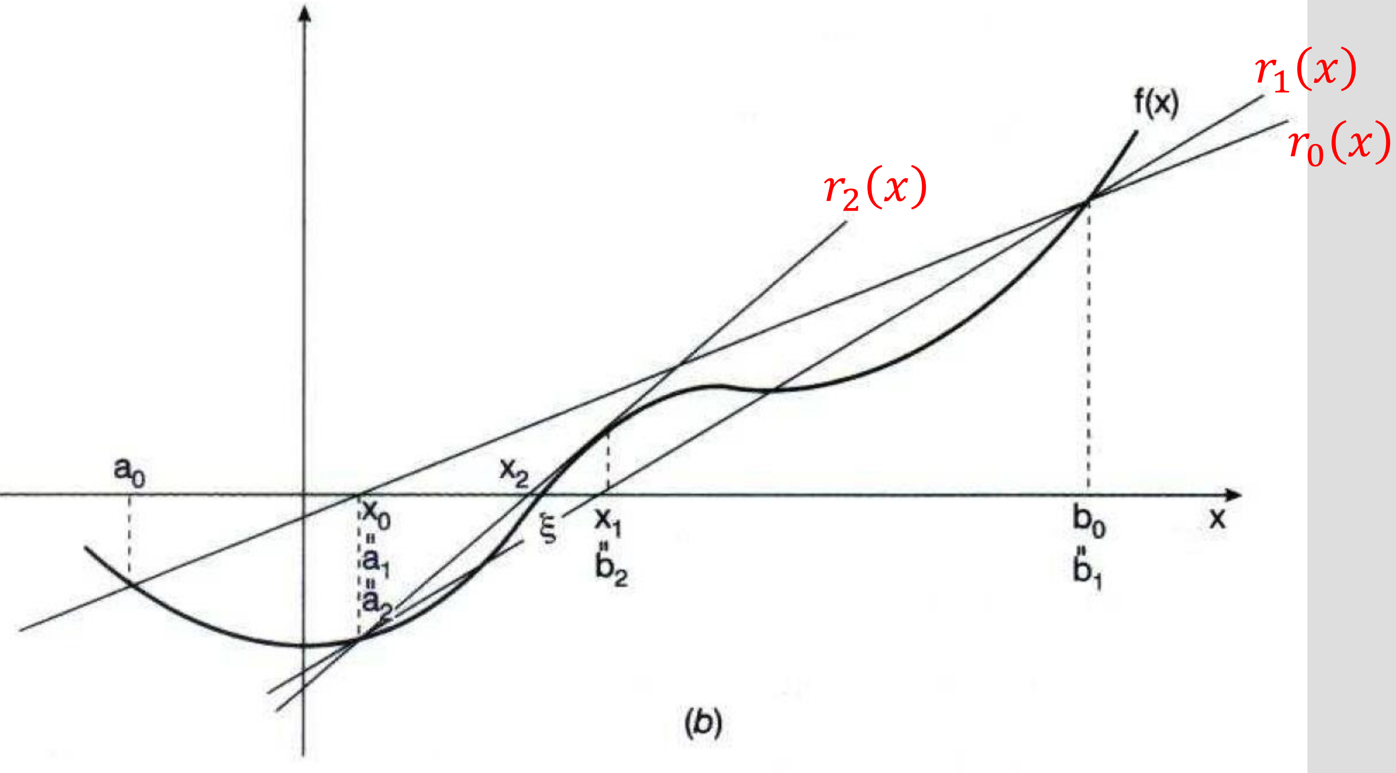


Figura 2.14

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

ALGORITMO 2

Seja f(x) contínua em [a, b] e tal que $f(a)f(b) < 0$.

1) Dados iniciais

   a) intervalo inicial [a, b]

   b) precisões ε_1 e ε_2

2) Se $(b - a) < \varepsilon_1$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \in [a, b]$. FIM.

$$\left.\begin{array}{l} \text{se } |f(a)| < \varepsilon_2 \\ \text{ou se } |f(b)| < \varepsilon_2 \end{array}\right] \text{escolha a ou b como } \bar{x}\text{. FIM.}$$

3) $k = 1$

4) $M = f(a)$

5) $x = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

6) Se $|f(x)| < \varepsilon_2$, escolha $\bar{x} = x$. FIM.

7) Se $Mf(x) > 0$, faça $a = x$. Vá para o passo 9.

8) $b = x$

9) Se $b - a < \varepsilon_1$, então escolha para $\bar{x}$ qualquer $x \in (a, b)$. FIM.

10) $k = k + 1$. Volte ao passo 5.

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

Exemplo 6

$f(x) = x^3 - 9x + 3 \quad I = [0, 1] \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 5 \times 10^{-4}$

Aplicando o método da posição falsa, temos:

Iteração	x	f(x)	b – a
1	.375	–.322265625	1
2	.338624339	$-8.79019964 \times 10^{-3}$	.375
3	.337635046	$-2.25883909 \times 10^{-4}$	.338624339

E portanto $\bar{x} = 0.337635046$ e $f(\bar{x}) = -2.25 \times 10^{-4}$.

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DA POSIÇÃO FALSA

- Demonstração da convergência
  - Quando $f(x)$ é derivável duas vezes e $f''(x)$ não muda de sinal entre $[a, b]$
  - Podemos ver a convergência graficamente
  - Nesse caso, $|a - b| \nless \varepsilon$

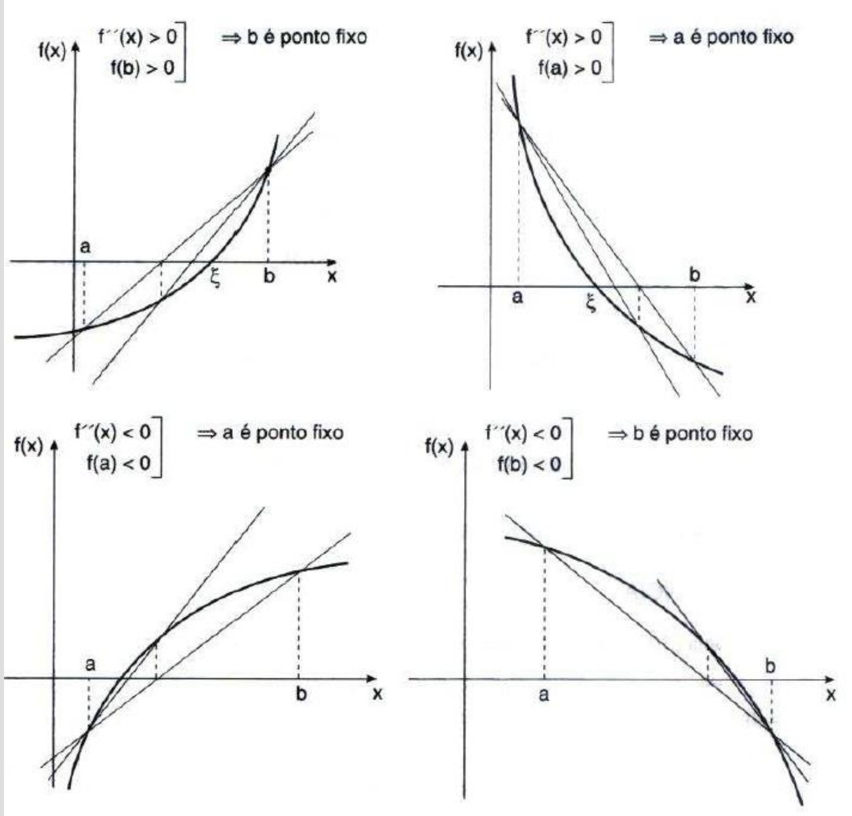


Figura 2.15

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

- Seu estudo é mais importante pelos conceitos que introduzem os métodos seguintes que pela sua eficiência computacional

- Seja $f(x)$ contínua num intervalo que contenha a raiz

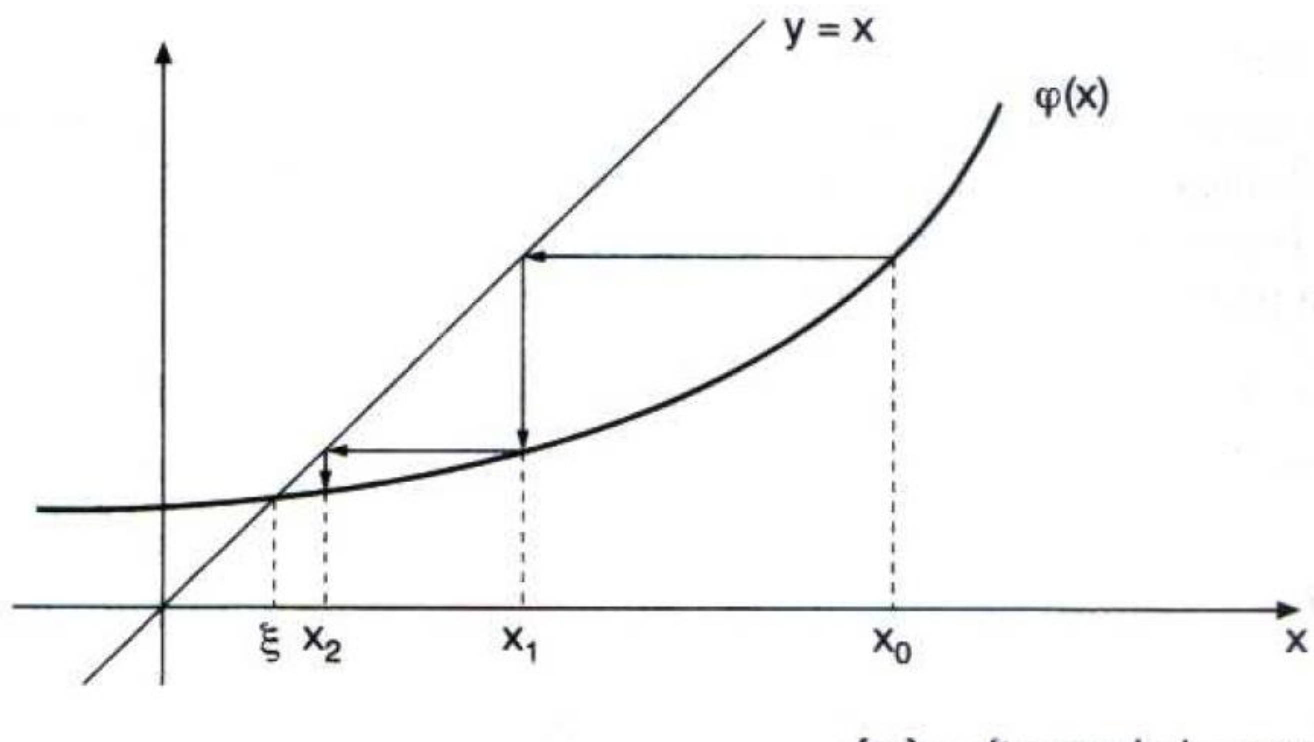
- O MPF consiste em transformar $f(x) = 0$ em uma equação equivalente $\varphi(x) = x$
  - Considerando que x é a reta $x = y$

- A partir de uma aproximação inicial x_0 gerar aproximações para a raiz pela relação $x_{k+1} = \varphi(x_k)$
  - Uma vez que $\varphi(\xi) = \xi$ se, e somente se, $f(\xi) = 0$

- Transformando o problema de encontrar o zero de $f(x)$ no problema de encontrar o ponto fixo de $\varphi(x)$

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

- Graficamente



(a)

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

Exemplo 7

Para a equação $x^2 + x - 6 = 0$ temos várias funções de iteração, entre as quais:

a) $\varphi_1(x) = 6 - x^2$;

b) $\varphi_2(x) = \pm\sqrt{6 - x}$;

c) $\varphi_3(x) = \dfrac{6}{x} - 1$;

d) $\varphi_4(x) = \dfrac{6}{x + 1}$.

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

- Outro exemplo

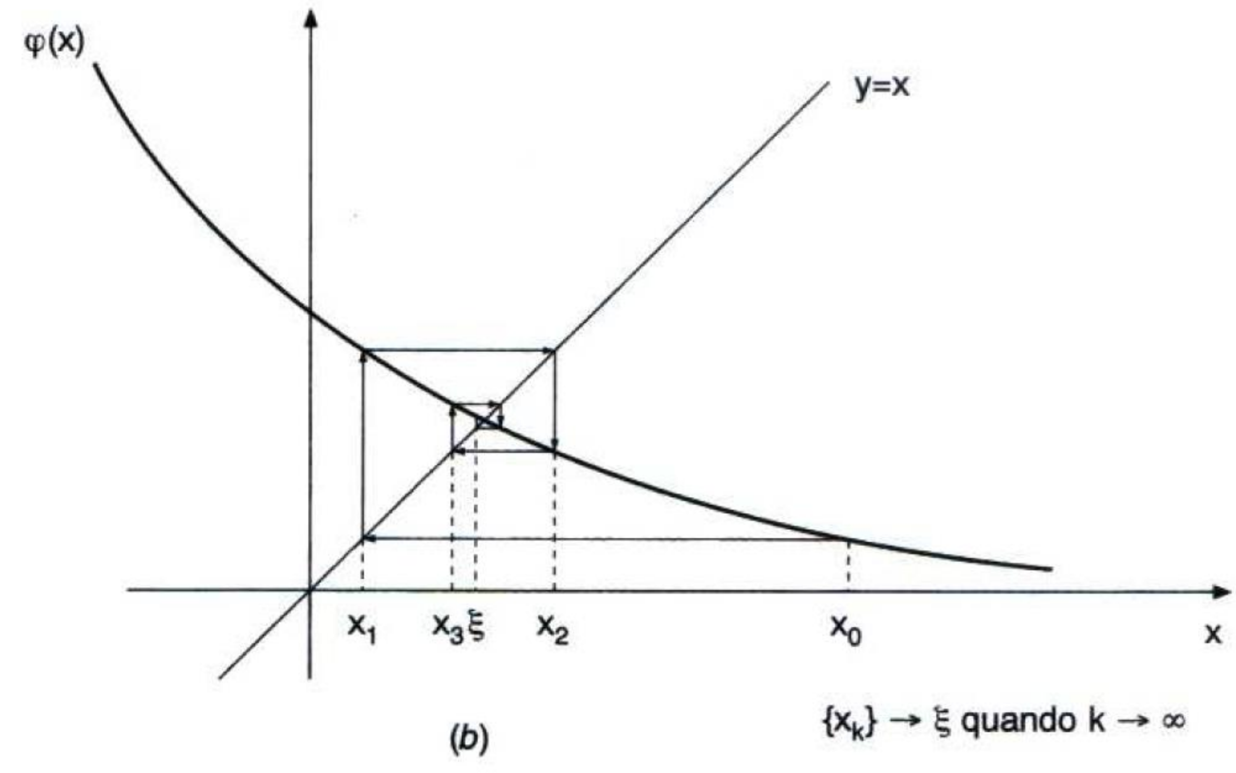
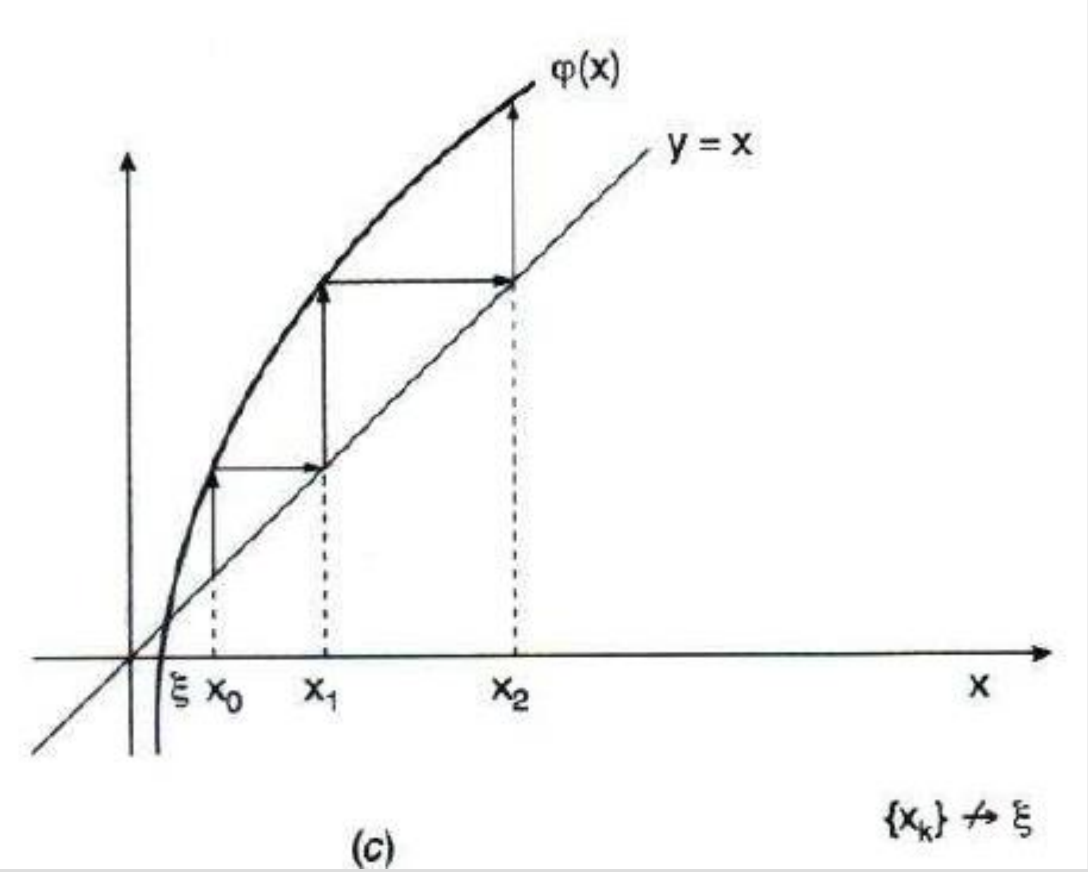


Figura 2.16

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

- Entretanto não é sempre que o MPF converge



FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

- Entretanto não é sempre que o MPF converge

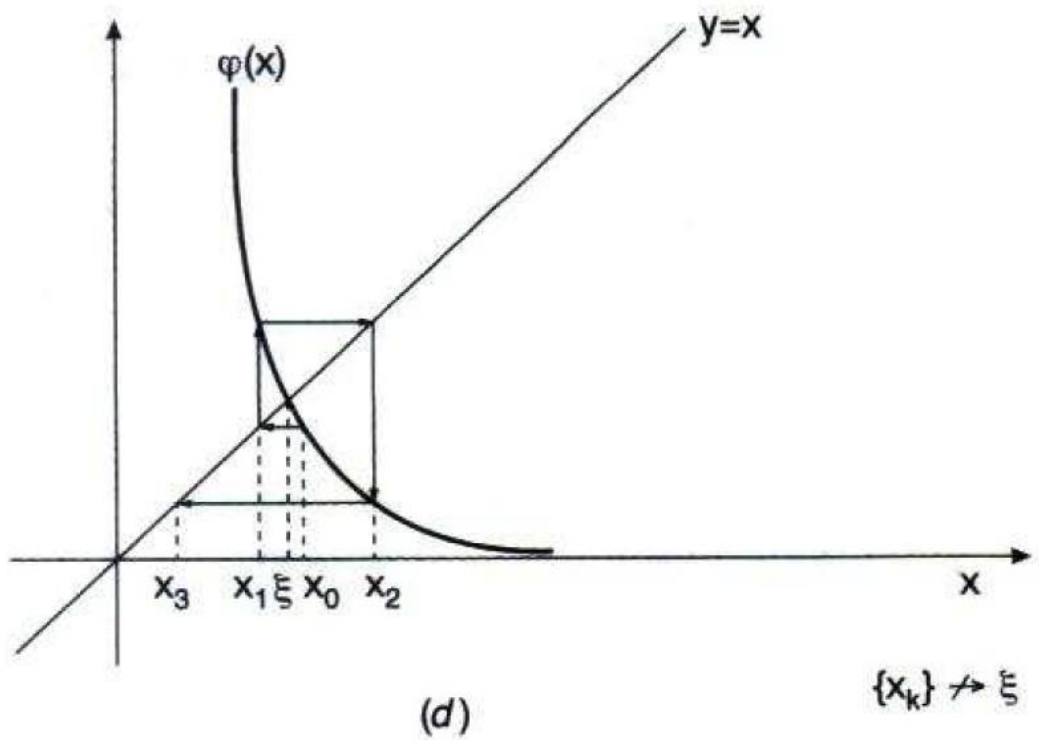


Figura 2.16

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

- **Teorema 2:**
  - Seja ξ uma raiz da equação $f(x) = 0$, isolada num intervalo I centrada em ξ.
  - Seja $\varphi(x)$ uma função de iteração para a equação $f(x) = 0$
  - Se
    - $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I
    - $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \forall\ x \in I$
    - $x_0 \in I$
  - Então a sequência $\{x_k\}$ gerada por $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para ξ.

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

- Critérios de Parada:
  - $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$
  - Ou
  - $f(x_k) < \varepsilon$

- Uma coisa não implica a outra

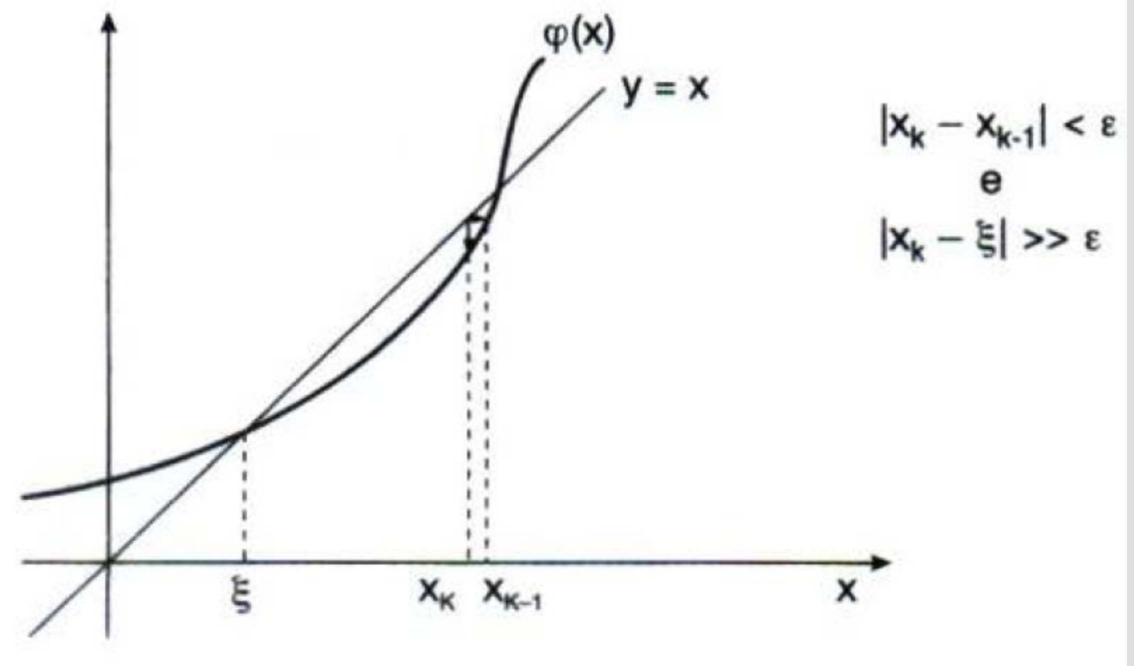


Figura 2.19

FASE 2: REFINAMENTO – MÉTODO DO PONTO FIXO

ALGORITMO 3

Considere a equação $f(x) = 0$ e a equação equivalente $x = \varphi(x)$.

Supor que as hipóteses do Teorema 2 estão satisfeitas.

1) Dados iniciais:

   a) x_0: aproximação inicial;

   b) ε_1 e ε_2: precisões.

2) Se $|f(x_0)| < \varepsilon_1$, faça $\bar{x} = x_0$. FIM.

3) $k = 1$

4) $x_1 = \varphi(x_0)$

5) $\left.\begin{array}{l} \text{Se } |f(x_1)| < \varepsilon_1 \\ \text{ou se } |x_1 - x_0| < \varepsilon_2 \end{array}\right]$ então faça $\bar{x} = x_1$. FIM.

6) $x_0 = x_1$

7) $k = k + 1$
   Volte ao passo 4.