INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Amostragem

Aliasing em Senoides

Curso: Engenharia de Telecomunicações
Disciplina: PSD129005 - Processamento de Sinais Digitais
Professora: Elen Macedo Lobato

Aluna
Luiza Kuze Gomes

4 de abril de 2025

Sumário

1 Introdução

A amostragem estabelece a interface entre o mundo analógico e o mundo discreto dos computadores. Um exemplo prático dessa aplicação ocorre em chamadas de voz, onde um sinal contínuo é convertido para um formato digital, transmitido e posteriormente reconstruído no destino. Esse processo é fundamental para diversas áreas da engenharia e tecnologia, permitindo a representação e manipulação de sinais no domínio digital.

Este experimento explora os princípios da amostragem, analisando seu impacto na reconstrução de sinais e investigando fenômenos como o aliasing.

2 Objetivo

O objetivo deste experimento é aplicar os conceitos teóricos de amostragem na prática, verificando a influência da taxa de amostragem na reconstrução dos sinais e avaliando a ocorrência de aliasing. Para isso, foram realizadas simulações no MATLAB a fim de validar os conceitos estudados.

As combinações de frequências utilizadas nos experimentos foram:

- Cosseno de 30 Hz com taxa de amostragem de 50 Hz;
- Cosseno de 40 Hz com taxa de amostragem de 15 Hz;
- Cosseno de 10 Hz com taxa de amostragem de 50 Hz;
- Cosseno de 20 Hz com taxa de amostragem de 40 Hz.

3 Análise

Todo o experimento em MATLAB foi baseado nas funções auxiliares fornecidas durante as aulas, que não estão incluídas neste relatório. No entanto, o código principal utilizado para testar cada uma das combinações de frequências está disponível no Apêndice A.

a) Cosseno de 30 Hz e Amostragem a 50 Hz

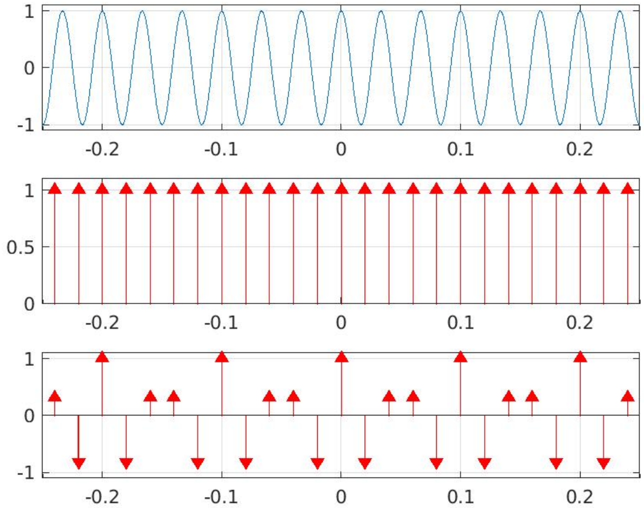
Neste experimento, o sinal analisado é um cosseno de 30 Hz, e a frequência de amostragem utilizada é de 50 Hz.

Segundo o Teorema da Amostragem de Nyquist, para evitar aliasing, a frequência de amostragem deve ser, no mínimo, o dobro da maior frequência presente no sinal. Neste caso, a taxa mínima necessária seria:

$$f_s \geq 2 \times 30 = 60 \text{ Hz}$$

Como a taxa de amostragem utilizada (50 Hz) está **abaixo da taxa de Nyquist** (60 Hz), ocorre o aliasing. Embora a reconstrução ainda tenha ficado relativamente próxima do sinal original, é possível notar uma leve distorção devido ao aliasing, especialmente se observarmos a suavização do sinal, que não consegue capturar com precisão todas as variações da onda original.

Figura 1: Gráfico de amostragem do cosseno de 30 Hz com amostragem a 50 Hz.

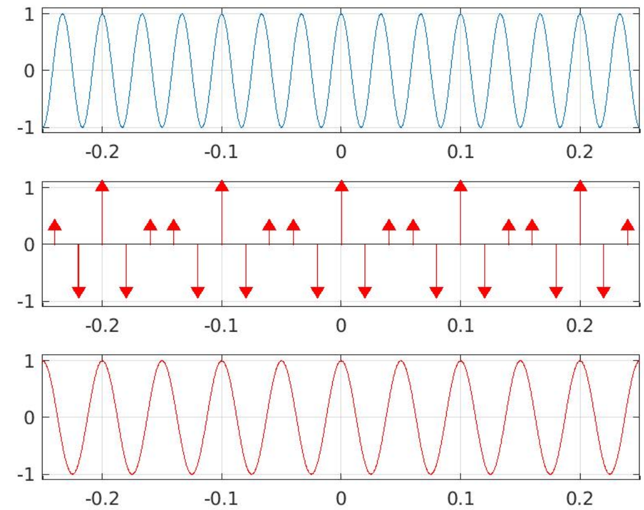


Fonte: Própria autora.

Na Figura 1, temos três subgráficos:

- **Sinal contínuo original (azul)**: Onda do cosseno de 30 Hz.
- **Trem de impulsos (vermelho)**: Indica os instantes de amostragem.
- **Sinal amostrado (vermelho)**: Mostra os valores do sinal nos instantes amostrados.

Figura 2: Reconstrução do sinal via interpolação sinc.



Fonte: Própria autora.

Na Figura 2, vemos:

- **Sinal original (azul)**: Mesmo cosseno de 30 Hz.
- **Sinal amostrado (vermelho)**: Pontos discretos extraídos durante a amostragem.

- **Sinal reconstruído (vermelho)**: Curva suavizada obtida por interpolação sinc.

A interpolação sinc tenta aproximar o sinal original, mas a falta de uma amostragem suficientemente alta resulta em uma perda sutil de detalhes.

b) Cosseno de 40 Hz e Amostragem a 15 Hz

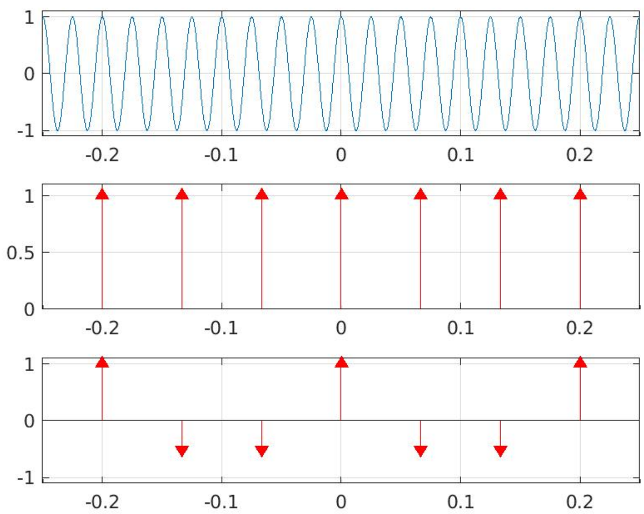
Neste experimento, o sinal analisado é um cosseno com frequência de 40 Hz, enquanto a frequência de amostragem utilizada é de apenas 15 Hz.

De acordo com o Teorema da Amostragem de Nyquist, para evitar aliasing, a taxa de amostragem deve ser, no mínimo:

$$f_s \geq 2 \times 40 = 80 \text{ Hz}$$

Como a frequência de amostragem (15 Hz) está bem **abaixo da taxa de Nyquist** (80 Hz), o sinal é amostrado de forma insuficiente, e ocorre aliasing, ou seja, há sobreposição espectral, fazendo com que o sinal reconstruído represente uma frequência diferente.

Figura 3: Gráfico de amostragem do cosseno de 40 Hz com amostragem a 15 Hz.

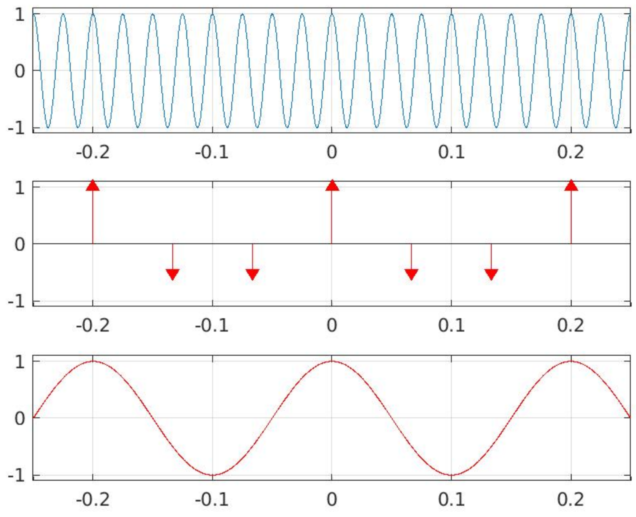


Fonte: Própria autora.

Na Figura 3, temos:

- **Sinal original (azul)**: Cosseno de 40 Hz.
- **Trem de impulsos (vermelho)**: Indica os instantes de amostragem com grande espaçamento.
- **Sinal amostrado (vermelho)**: Os pontos coletados não capturam corretamente o comportamento do sinal original, o que caracteriza aliasing.

Figura 4: Reconstrução do sinal via interpolação sinc.



Fonte: Própria autora.

Na Figura 4, observamos:

- **Sinal original (azul)**: O cosseno real de 40 Hz.
- **Sinal amostrado (vermelho)**: Pontos esparsos, mal distribuídos.
- **Sinal reconstruído (vermelho)**: A curva reconstruída não reflete o sinal original. Em vez disso, forma um cosseno de frequência muito menor, uma ilusão causada pelo aliasing.

Este é um exemplo claro de que, ao amostrar abaixo da taxa de Nyquist, o sinal original não pode ser recuperado com fidelidade. O processo de reconstrução, mesmo sendo matematicamente correto, reconstrói o sinal incorretamente por conta da informação perdida durante a amostragem.

c) Cosseno de 10 Hz e Amostragem a 50 Hz

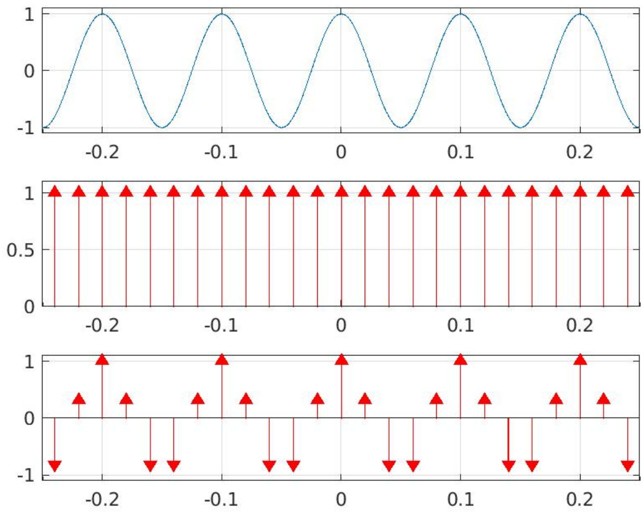
Neste experimento, o sinal é um cosseno com frequência de 10 Hz, e a frequência de amostragem adotada é de 50 Hz.

Segundo o Teorema da Amostragem de Nyquist, a frequência de amostragem deve ser pelo menos o dobro da maior frequência do sinal:

$$f_s \geq 2 \times 10 = 20 \text{ Hz}$$

Como a amostragem foi realizada a 50 Hz, muito acima da taxa mínima necessária, **não há risco de aliasing**, e o sinal pode ser reconstruído com alta fidelidade a partir dos pontos amostrados.

Figura 5: Gráfico de amostragem do cosseno de 10 Hz com amostragem a 50 Hz.

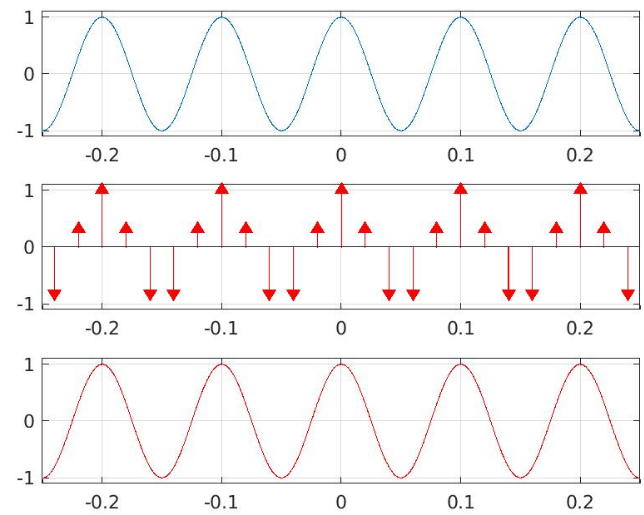


Fonte: Própria autora.

Na Figura 5, observamos:

- **Sinal contínuo original (azul)**: Cosseno de 10 Hz.
- **Trem de impulsos (vermelho)**: Amostragem regular e densa.
- **Sinal amostrado (vermelho)**: Os valores capturam perfeitamente o comportamento do sinal original.

Figura 6: Reconstrução do sinal via interpolação sinc.



Fonte: Própria autora.

Na Figura 6, temos:

- **Sinal original (azul)**: Mesmo cosseno de 10 Hz.

- **Sinal amostrado (vermelho)**: Pontos obtidos durante a amostragem.
- **Sinal reconstruído (vermelho)**: Linha suave obtida por interpolação sinc, perfeitamente sobreposta ao sinal original.

Esse resultado demonstra que a escolha de uma frequência de amostragem adequada, bem acima da taxa de Nyquist, permite a reconstrução fiel do sinal contínuo sem distorções.

d) Cosseno de 20 Hz e Amostragem a 40 Hz

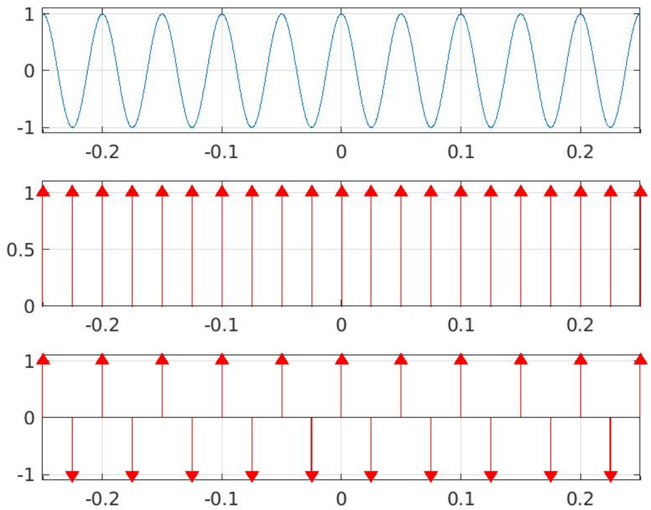
Neste experimento, o sinal contínuo é um cosseno de 20 Hz, e a taxa de amostragem utilizada é de 40 Hz.

De acordo com o Teorema da Amostragem de Nyquist, a frequência de amostragem deve ser, no mínimo:

$$f_s \geq 2 \times 20 = 40 \text{ Hz}$$

Ou seja, neste caso, a frequência de amostragem está exatamente no limite de Nyquist. Isso significa que pode não ocorrer aliasing, mas estamos no ponto crítico. A reconstrução é possível a depender do sinal.

Figura 7: Gráfico de amostragem do cosseno de 20 Hz com amostragem a 40 Hz.

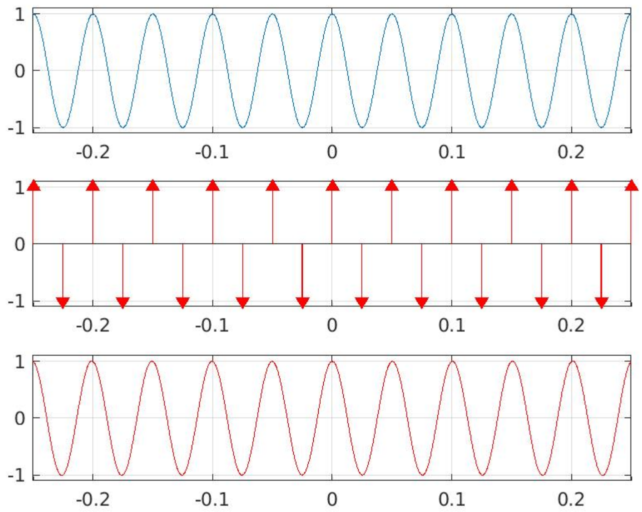


Fonte: Própria autora.

Na Figura 7, observamos:

- **Sinal original (azul)**: Cosseno de 20 Hz.
- **Trem de impulsos (vermelho)**: Amostragem regular com 40 Hz.
- **Sinal amostrado (vermelho)**: Os pontos capturam os picos e vales do sinal de forma alternada, o que é típico quando a frequência de amostragem é igual ao dobro da frequência do sinal.

Figura 8: Reconstrução do sinal via interpolação sinc.



Fonte: Própria autora.

Na Figura 8, vemos:

- **Sinal original (azul)**: O cosseno real de 20 Hz.
- **Sinal amostrado (vermelho)**: Pontos discretos obtidos durante a amostragem.
- **Sinal reconstruído (vermelho)**: Curva suavizada obtida via interpolação sinc, praticamente sobreposta ao sinal original.

Neste caso, mesmo estando no limite de Nyquist, a reconstrução foi realizada com sucesso e sem distorções visíveis. Contudo, se a frequência do sinal aumentasse mesmo que ligeiramente, a taxa de amostragem de 40 Hz já não seria suficiente para evitar aliasing.

4 Conclusão

Portanto, a amostragem de sinais contínuos é um processo essencial para a conversão de sinais analógicos em digitais. O teorema de Nyquist é fundamental para garantir que a amostragem seja realizada de forma a preservar as informações do sinal original, desde que a frequência de amostragem seja suficiente. O aliasing é uma limitação importante a ser evitada, pois causa distorções irreparáveis no sinal amostrado. Embora a reconstrução perfeita do sinal original seja teoricamente possível com um filtro passa-baixas ideal, a implementação prática dessa reconstrução é desafiadora devido às limitações dos filtros reais. A compreensão desses conceitos é crucial para o desenvolvimento de sistemas de processamento digital de sinais eficientes e precisos.

Apêndices

A Código MATLAB

```
%% Laboratório de Processamento de Sinais

%% Sinal base para testes
% Gerar um cosseno de 20 Hz
% [m,t] = makecos(20);

%% Cenário 1: Amostragem com 50 Hz (acima da taxa de Nyquist)
[it1, ts1] = makeimp(50);              % Gera trem de impulsos com 50 Hz
ms1 = sampleit1(t, m, ts1);            % Amostra o sinal original
c1 = 'r';                              % Cor para os gráficos
figure; smpl_plot(t, m, ts1, it1, ms1, c1); % Plota o sinal original e os pontos amostrados

%% Cenário 2: Amostragem com 30 Hz (abaixo da taxa de Nyquist)
[it2, ts2] = makeimp(30);              % Gera trem de impulsos com 30 Hz
ms2 = sampleit1(t, m, ts2);            % Amostra o sinal original
c2 = 'g';                              % Cor para os gráficos
figure; smpl_plot(t, m, ts2, it2, ms2, c2); % Plota o sinal original e os pontos amostrados

%% Reconstrução dos sinais amostrados
mr1 = interpsinc(ms1, ts1, t);         % Reconstrução do sinal com fs = 50 Hz
mr2 = interpsinc(ms2, ts2, t);         % Reconstrução do sinal com fs = 30 Hz
figure; recon_plot(t, m, ts1, ms1, mr1, c1); % Plota sinal original vs reconstruído (50 Hz)
figure; recon_plot(t, m, ts2, ms2, mr2, c2); % Plota sinal original vs reconstruído (30 Hz)

%% Espectro dos sinais para análise de aliasing
f = (-5000/2):(1/2):(5000/2);          % Vetor de frequências
M   = am_spectrum(m);                 % Espectro do sinal original
MR1 = am_spectrum(mr1);               % Espectro da reconstrução com fs = 50 Hz
MR2 = am_spectrum(mr2);               % Espectro da reconstrução com fs = 30 Hz
figure; am_plot(f, M, MR1, MR2, 0.02); % Plota os espectros

%% Estudo de casos adicionais

% Caso 1: Cosseno de 30 Hz, amostragem a 50 Hz
[m, t] = makecos(30);
[it3, ts3] = makeimp(50);
ms3 = sampleit1(t, m, ts3);
c3 = 'r';
figure; smpl_plot(t, m, ts3, it3, ms3, c3);
mr3 = interpsinc(ms3, ts3, t);
figure; recon_plot(t, m, ts3, ms3, mr3, c3);

% Caso 2: Cosseno de 40 Hz, amostragem a 15 Hz (bem abaixo da taxa de Nyquist)
[m, t] = makecos(40);
[it4, ts4] = makeimp(15);
ms4 = sampleit1(t, m, ts4);
c4 = 'r';
figure; smpl_plot(t, m, ts4, it4, ms4, c4);
mr4 = interpsinc(ms4, ts4, t);
figure; recon_plot(t, m, ts4, ms4, mr4, c4);

% Caso 3: Cosseno de 10 Hz, amostragem a 50 Hz (bem acima da taxa de Nyquist)
[m, t] = makecos(10);
[it5, ts5] = makeimp(50);
ms5 = sampleit1(t, m, ts5);
c5 = 'r';
figure; smpl_plot(t, m, ts5, it5, ms5, c5);
mr5 = interpsinc(ms5, ts5, t);
figure; recon_plot(t, m, ts5, ms5, mr5, c5);

```

```
% Caso 4: Cosseno de 20 Hz, amostragem a 40 Hz (na taxa de Nyquist)
[m, t] = makecos(20);
[it6, ts6] = makeimp(40);
ms6 = sampleit1(t, m, ts6);
c6 = 'r';
figure; smpl_plot(t, m, ts6, it6, ms6, c6);
mr6 = interpsinc(ms6, ts6, t);
figure; recon_plot(t, m, ts6, ms6, mr6, c6);
```