

Processos Estocásticos

Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006

ENGENHARIA DE TELECOMUNICAÇÕES



**INSTITUTO
FEDERAL**
Santa Catarina

Câmpus
São José

PMF conjunta e marginais

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **função massa de probabilidade conjunta** de X e Y , denotada por $p_{X,Y}$, é definida por

$$p_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x \wedge Y = y],$$

para $x \in S_X$ e $y \in S_Y$.



PMF conjunta: Definição e propriedades

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **função massa de probabilidade conjunta** de X e Y , denotada por $p_{X,Y}$, é definida por

$$p_{X,Y}(x, y) = \Pr[X = x \wedge Y = y],$$

para $x \in S_X$ e $y \in S_Y$.

Propriedades

$$1 \quad 0 \leq p_{X,Y}(x, y) \leq 1, \quad \forall x, y$$

$$2 \quad \sum_{x,y} p_{X,Y}(x, y) = 1$$



Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (**R**), uma bola verde (**G**) e uma bola azul (**B**). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja X o nº de bolas **R** e Y o nº de bolas **G** retiradas. Determine a PMF conjunta de X e Y .



Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (**R**), uma bola verde (**G**) e uma bola azul (**B**). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja X o nº de bolas **R** e Y o nº de bolas **G** retiradas. Determine a PMF conjunta de X e Y .

B_1	B_2	X	Y	Pr
R	R	2	0	1/6
R	G	1	1	1/6
R	B	1	0	1/6
G	R	1	1	1/6
G	B	0	1	1/12
B	R	1	0	1/6
B	G	0	1	1/12



Exemplo

Considere uma urna com duas bolas vermelhas (R), uma bola verde (G) e uma bola azul (B). Retira-se duas bolas, sem reposição. Seja X o nº de bolas R e Y o nº de bolas G retiradas. Determine a PMF conjunta de X e Y .

B_1	B_2	X	Y	Pr
R	R	2	0	1/6
R	G	1	1	1/6
R	B	1	0	1/6
G	R	1	1	1/6
G	B	0	1	1/12
B	R	1	0	1/6
B	G	0	1	1/12

$p_{X,Y}(x,y)$		
	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	0	1/6
$x = 1$	1/3	1/3
$x = 2$	1/6	0



PMFs marginais: Definição

Sejam X e Y duas VAs discretas com PMF conjunta $p_{X,Y}$.

Definição

As **PMFs marginais** de X e Y são dadas por

$$p_X(x) = \sum_{y \in S_Y} p_{X,Y}(x, y)$$

e

$$p_Y(y) = \sum_{x \in S_X} p_{X,Y}(x, y)$$



Exemplo

Considere o exemplo anterior (urna com 2R, 1G, 1B). Foi visto que a PMF conjunta de X e Y é dada por:

$p_{X,Y}(x, y)$		
	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	0	1/6
$x = 1$	1/3	1/3
$x = 2$	1/6	0

Determine as PMFs marginais de X e de Y.



PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	
$x = 1$	1/3	1/3	
$x = 2$	1/6	0	
$p_Y(y)$			



PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	
$x = 2$	1/6	0	
$p_Y(y)$			

■ $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$



PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	$1/6$	$1/6$
$x = 1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x = 2$	$1/6$	0	
$p_Y(y)$			

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$



PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	$1/6$	$1/6$
$x = 1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x = 2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$			

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$



PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	$1/6$	$1/6$
$x = 1$	$1/3$	$1/3$	$2/3$
$x = 2$	$1/6$	0	$1/6$
$p_Y(y)$	$1/2$		

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$



PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0, y=1) + p_{X,Y}(x=1, y=1) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/2$



PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0, y=1) + p_{X,Y}(x=1, y=1) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/2$



PMFs marginais: Exemplo

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

- $p_X(x=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=0, y=1) = 1/6$
- $p_X(x=1) = p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=1) = 2/3$
- $p_X(x=2) = p_{X,Y}(x=2, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/6$
- $p_Y(y=0) = p_{X,Y}(x=0, y=0) + p_{X,Y}(x=1, y=0) + p_{X,Y}(x=2, y=0) = 1/2$
- $p_Y(y=1) = p_{X,Y}(x=0, y=1) + p_{X,Y}(x=1, y=1) + p_{X,Y}(x=2, y=1) = 1/2$



Basta somar linhas e colunas.



PDF conjunta e marginais

Relembrando...

Seja X uma VA.

A **PDF** de X , denotada por f_X , é tal que

$$\Pr[X \in A] = \int_A f_X(x) dx,$$

para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.



Definição (indireta)

Sejam X e Y duas VAs (definidas no mesmo experimento probabilístico).

A **PDF conjunta** de X e Y , denotada por $f_{X,Y}$, é tal que

$$\Pr[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy,$$

para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$.



Definição (indireta)

Sejam X e Y duas VAs (definidas no mesmo experimento probabilístico).

A **PDF conjunta** de X e Y , denotada por $f_{X,Y}$, é tal que

$$\Pr[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy,$$

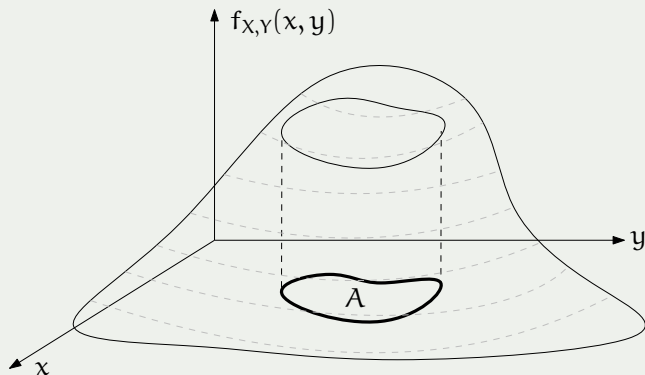
para todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$.

Propriedades

1 $f_{X,Y}(x, y) \geq 0, \forall x, y$

2 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = 1$



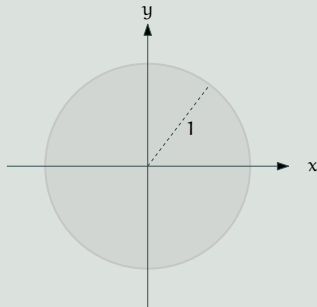


$$\Pr[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$



Exemplo

Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine a PDF conjunta de X e Y . Vídeo relacionado: YouTube [!\[\]\(9dfdaff1d86ba3c1f8353b4d1b61b8c5_img.jpg\)](#)



A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.

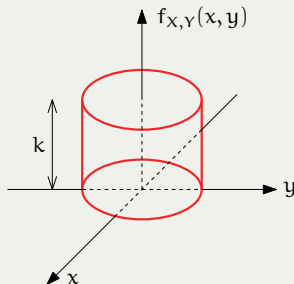


PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.

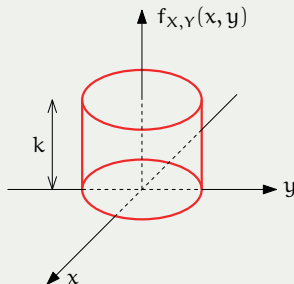


PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

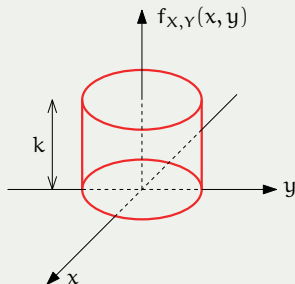


PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

$$\pi \cdot k = 1$$

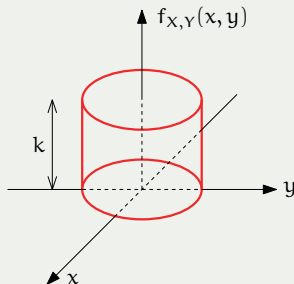


PDF conjunta: Exemplo

A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$$

$$\pi \cdot k = 1$$

$$k = \frac{1}{\pi}$$



A PDF conjunta é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k, & (x,y) \in \text{Circ}(\text{centro}=(0,0), \text{raio}=1), \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde k é uma constante.

Portanto:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



PDFs marginais: Definição

Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta $f_{X,Y}$.

Definição

As **PDFs marginais** de X e Y são dadas por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

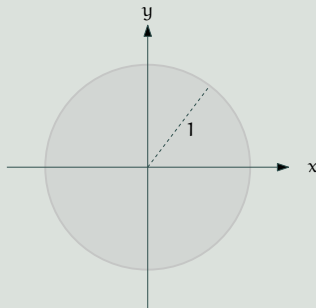
e

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$



Exemplo

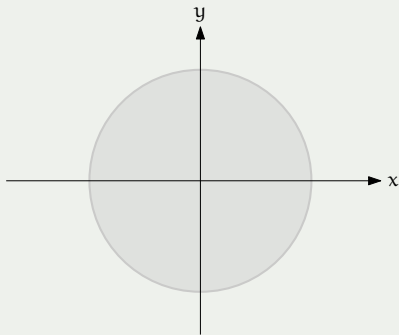
Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine as PDFs marginais de X e de Y .

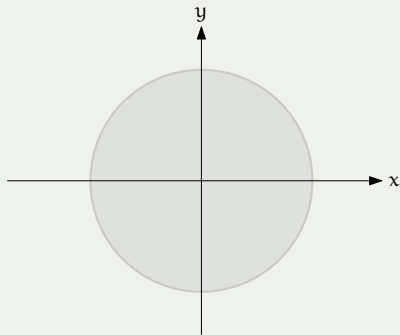


Já foi visto que a PDF conjunta é dada por $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1]$.



Já foi visto que a PDF conjunta é dada por $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

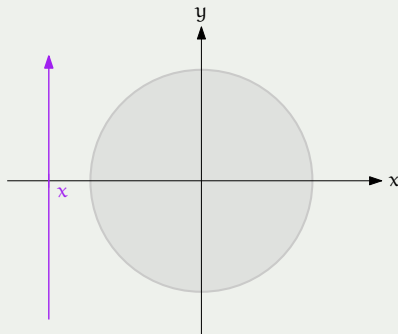


Já foi visto que a PDF conjunta é dada por $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

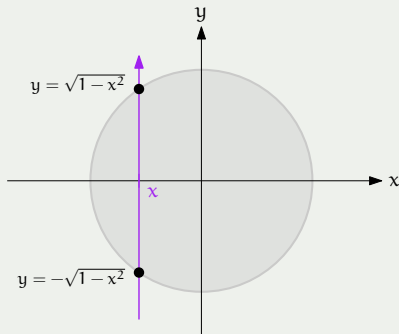
1 Caso $x < -1$ ou $x > 1$:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0 dy = 0$$



Já foi visto que a PDF conjunta é dada por $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}[x^2 + y^2 \leq 1]$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$



1 Caso $x < -1$ ou $x > 1$:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0 dy = 0$$

2 Caso $-1 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$



Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



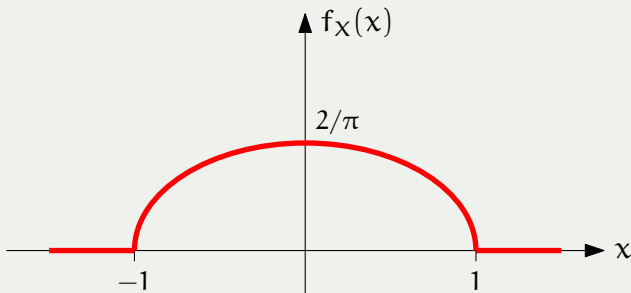
Portanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} [-1 \leq x \leq 1]$$



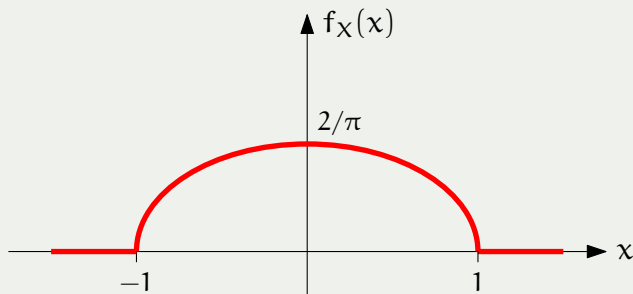
Portanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} [-1 \leq x \leq 1]$$



Portanto:

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} [-1 \leq x \leq 1]$$



Analogamente:

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$



Independência

Definição

Duas VAs X e Y são ditas ser **(estatisticamente) independentes** se

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \quad (\text{caso discreto})$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (\text{caso geral})$$



Definição

Duas VAs X e Y são ditas ser **(estatisticamente) independentes** se

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) p_Y(y) \quad (\text{caso discreto})$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (\text{caso geral})$$



A conjunta se fatora no produto das marginais.



Exemplo 1

Exemplo

Sejam $U \sim \text{DiscreteUniform}(0, 2)$ e $V \sim \text{Binomial}(n=2, p=\frac{1}{2})$ duas VAs independentes.

- a Determine as PMFs marginais de U e de V .
- b Determine a PMF conjunta de U e V .

Sejam $X = U + V$ e $Y = UV$.

- c Determine a PMF conjunta de X e Y .
- d Determine as PMFs marginais de X e de Y .



Exemplo 1

- a Determine as PMFs marginais de U e de V .



Exemplo 1

a Determine as PMFs marginais de U e de V .

$$U \sim \text{DiscreteUniform}(0, 2) \quad V \sim \text{Binomial}(n=2, p=\frac{1}{2})$$

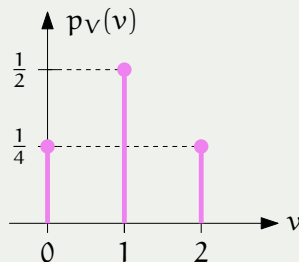
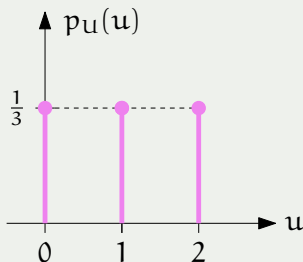


Exemplo 1

a Determine as PMFs marginais de U e de V .

$$U \sim \text{DiscreteUniform}(0, 2)$$

$$V \sim \text{Binomial}(n=2, p=\frac{1}{2})$$



Exemplo 1

- b** Determine a PMF conjunta de U e V .



Exemplo 1

b Determine a PMF conjunta de U e V .

$$U \text{ e } V \text{ independentes} \implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u) p_V(v).$$



Exemplo 1

b Determine a PMF conjunta de U e V .

U e V independentes $\implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u) p_V(v)$.

$p_{U,V}(u,v)$				
	$v = 0$	$v = 1$	$v = 2$	$p_U(u)$
$u = 0$				$1/3$
$u = 1$				$1/3$
$u = 2$				$1/3$
$p_V(v)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1



Exemplo 1

b Determine a PMF conjunta de U e V .

U e V independentes $\implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u) p_V(v)$.

$p_{U,V}(u,v)$				
	$v = 0$	$v = 1$	$v = 2$	$p_U(u)$
$u = 0$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$u = 1$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$u = 2$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$p_V(v)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1



Exemplo 1

b Determine a PMF conjunta de U e V .

U e V independentes $\implies p_{U,V}(u,v) = p_U(u) p_V(v)$.

$p_{U,V}(u,v)$				
	$v = 0$	$v = 1$	$v = 2$	$p_U(u)$
$u = 0$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$u = 1$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$u = 2$	$1/12$	$1/6$	$1/12$	$1/3$
$p_V(v)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1



As linhas/colunas são múltiplas umas das outras.



Exemplo 1

- c Determine a PMF conjunta de X e Y .



Exemplo 1

c Determine a PMF conjunta de X e Y .

u	V	X	Y	Pr
0	0	0	0	$1/12$
0	1	1	0	$2/12$
0	2	2	0	$1/12$
1	0	1	0	$1/12$
1	1	2	1	$2/12$
1	2	3	2	$1/12$
2	0	2	0	$1/12$
2	1	3	2	$2/12$
2	2	4	4	$1/12$



Exemplo 1

c Determine a PMF conjunta de X e Y .

u	v	X	Y	Pr
0	0	0	0	1/12
0	1	1	0	2/12
0	2	2	0	1/12
1	0	1	0	1/12
1	1	2	1	2/12
1	2	3	2	1/12
2	0	2	0	1/12
2	1	3	2	2/12
2	2	4	4	1/12

$p_{X,Y}(x,y)$				
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 4$
$x = 0$	1/12	0	0	0
$x = 1$	3/12	0	0	0
$x = 2$	2/12	2/12	0	0
$x = 3$	0	0	3/12	0
$x = 4$	0	0	0	1/12



Exemplo 1

- d Determine as PMFs marginais de X e de Y .



Exemplo 1

d Determine as PMFs marginais de X e de Y .

$p_{X,Y}(x,y)$					$p_X(x)$
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 4$	
$x = 0$	1/12	0	0	0	
$x = 1$	3/12	0	0	0	
$x = 2$	2/12	2/12	0	0	
$x = 3$	0	0	3/12	0	
$x = 4$	0	0	0	1/12	
$p_Y(y)$					



Exemplo 1

d Determine as PMFs marginais de X e de Y .

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 4$	$p_X(x)$
$x = 0$	1/12	0	0	0	1/12
$x = 1$	3/12	0	0	0	3/12
$x = 2$	2/12	2/12	0	0	4/12
$x = 3$	0	0	3/12	0	3/12
$x = 4$	0	0	0	1/12	1/12
$p_Y(y)$	6/12	2/12	3/12	1/12	



Exemplo 1

d Determine as PMFs marginais de X e de Y .

$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 4$	$p_X(x)$
$x = 0$	1/12	0	0	0	1/12
$x = 1$	3/12	0	0	0	3/12
$x = 2$	2/12	2/12	0	0	4/12
$x = 3$	0	0	3/12	0	3/12
$x = 4$	0	0	0	1/12	1/12
$p_Y(y)$	6/12	2/12	3/12	1/12	1



Exemplo 1

- d Determine as PMFs marginais de X e de Y .

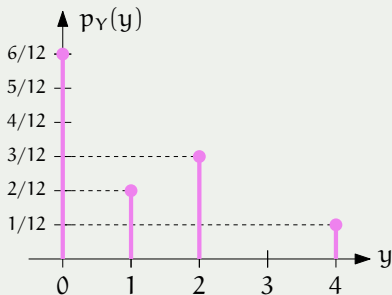
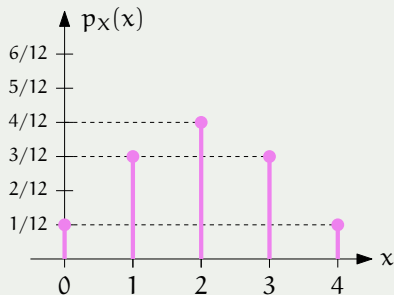
$p_{X,Y}(x,y)$					
	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$	$y = 4$	$p_X(x)$
$x = 0$	1/12	0	0	0	1/12
$x = 1$	3/12	0	0	0	3/12
$x = 2$	2/12	2/12	0	0	4/12
$x = 3$	0	0	3/12	0	3/12
$x = 4$	0	0	0	1/12	1/12
$p_Y(y)$	6/12	2/12	3/12	1/12	1

X e Y são dependentes.



Exemplo 1

d) Determine as PMFs marginais de X e de Y.



Exemplo

Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta dada por

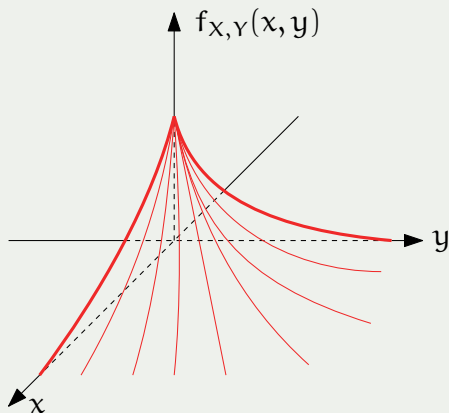
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x, y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

- a** Determine as PDFs marginais de X e de Y .
- b** São X e Y dependentes ou independentes?



Exemplo 2

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0]$$



Exemplo 2

- a Determine as PDFs marginais de X e de Y .



Exemplo 2

- a** Determine as PDFs marginais de X e de Y .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$



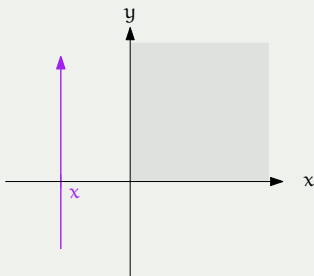
Exemplo 2

- a Determine as PDFs marginais de X e de Y .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

■ Caso $x < 0$:

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=\infty} 0 dy = 0$$

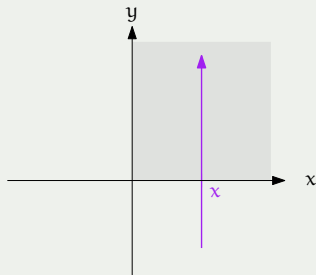


Exemplo 2

a Determine as PDFs marginais de X e de Y .

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

■ Caso $x \geq 0$:



$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{y=-\infty}^{y=0} 0 dy + \int_{y=0}^{y=\infty} e^{-(x+y)} dy \\ &= e^{-x} \int_{y=0}^{y=\infty} e^{-y} dy \\ &= e^{-x} \left[-e^{-y} \right]_{y=0}^{y=\infty} \\ &= e^{-x} [-0 - (-1)] = e^{-x} \end{aligned}$$



Exemplo 2

Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } X \sim \text{Exponential}(1)]$$



Exemplo 2

Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } X \sim \text{Exponential}(1)]$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } Y \sim \text{Exponential}(1)]$$



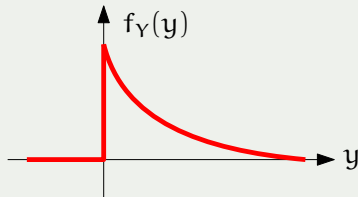
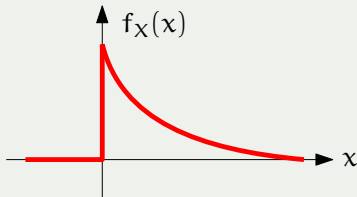
Exemplo 2

Portanto:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } X \sim \text{Exponential}(1)]$$

Analogamente:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad [\text{ou seja, } Y \sim \text{Exponential}(1)]$$



Exemplo 2

b São X e Y dependentes ou independentes?



b São X e Y dependentes ou independentes?

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0]$$



b São X e Y dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\ &= e^{-x} e^{-y} [x \geq 0] [y \geq 0]\end{aligned}$$



b São X e Y dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)}[x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\&= e^{-x}e^{-y}[x \geq 0][y \geq 0] \\&= e^{-x}[x \geq 0]e^{-y}[y \geq 0]\end{aligned}$$



b São X e Y dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\&= e^{-x} e^{-y} [x \geq 0] [y \geq 0] \\&= e^{-x} [x \geq 0] e^{-y} [y \geq 0] \\&= f_X(x) f_Y(y)\end{aligned}$$



b São X e Y dependentes ou independentes?

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= e^{-(x+y)} [x \geq 0 \wedge y \geq 0] \\&= e^{-x} e^{-y} [x \geq 0] [y \geq 0] \\&= e^{-x} [x \geq 0] e^{-y} [y \geq 0] \\&= f_X(x) f_Y(y)\end{aligned}$$

Portanto, X e Y são independentes.



Distribuição condicional

Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.



Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PMF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se $p_Y(y) \neq 0$.



Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PMF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$p_X(x | Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se $p_Y(y) \neq 0$.



Como X se distribui sabendo que $Y = y$.



Sejam X e Y duas VAs discretas definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PMF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$p_X(x \mid Y = y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)},$$

definida apenas se $p_Y(y) \neq 0$.

Notações alternativas

$$p_X(x \mid Y = y) = p_{X|Y=y}(x) = p_{X|Y}(x \mid y)$$



Exemplo

Exemplo

Considere o exemplo anterior (urna com 2R, 1G, 1B). Lembre-se que X é o nº de bolas R e Y é o nº de bolas G, após retiradas duas bolas. Foi visto que a PMF conjunta de X e Y é dada por:

$p_{X,Y}(x,y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

Determine as PMFs condicionais de Y dado $X = x$, para $x \in \{0, 1, 2\}$.



Exemplo

$$p_Y(y \mid X = x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}$$

$p_{X,Y}(x, y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

	$y = 0$	$y = 1$



Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 0) = \frac{p_{X,Y}(0, y)}{p_X(0)}$$

$p_{X,Y}(x, y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

	$y = 0$	$y = 1$
$p_Y(y \mid X = 0)$	0	1



Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 1) = \frac{p_{X,Y}(1, y)}{p_X(1)}$$

$p_{X,Y}(x, y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

	$y = 0$	$y = 1$
$p_Y(y \mid X = 0)$	0	1
$p_Y(y \mid X = 1)$	1/2	1/2



Exemplo

$$p_Y(y \mid X = 2) = \frac{p_{X,Y}(2, y)}{p_X(2)}$$

$p_{X,Y}(x, y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

	$y = 0$	$y = 1$
$p_Y(y \mid X = 0)$	0	1
$p_Y(y \mid X = 1)$	1/2	1/2
$p_Y(y \mid X = 2)$	1	0



Exemplo

$$p_Y(y \mid X = x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)}$$

$p_{X,Y}(x, y)$			
	$y = 0$	$y = 1$	$p_X(x)$
$x = 0$	0	1/6	1/6
$x = 1$	1/3	1/3	2/3
$x = 2$	1/6	0	1/6
$p_Y(y)$	1/2	1/2	1

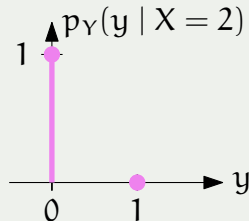
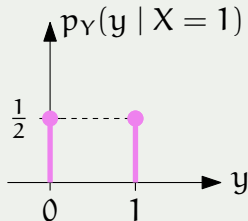
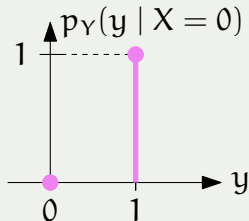
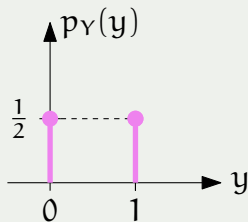
	$y = 0$	$y = 1$
$p_Y(y \mid X = 0)$	0	1
$p_Y(y \mid X = 1)$	1/2	1/2
$p_Y(y \mid X = 2)$	1	0



Basta **normalizar** as linhas (ou as colunas).



Exemplo



Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.



Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PDF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

definida apenas se $f_Y(y) \neq 0$.



Sejam X e Y duas VAs definidas no mesmo experimento probabilístico.

Definição

A **PDF condicional** de X dado $Y = y$ é definida por

$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

definida apenas se $f_Y(y) \neq 0$.

Notações alternativas

$$f_X(x \mid Y = y) = f_{X|Y=y}(x) = f_{X|Y}(x \mid y)$$



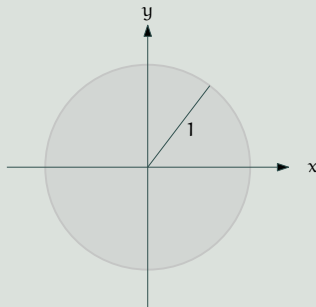


Corresponde a **cortes** (normalizados) na PDF conjunta.



Exemplo

Sejam X e Y duas VAs com PDF conjunta constante e diferente de zero apenas na área sombreada abaixo.



Determine a PDF condicional de X dado $Y = y$.



Exemplo

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$



$$f_X(x \mid Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$

Caso $y < -1$ ou $y > 1$:

$f_X(x \mid Y = y)$ não está definida!



$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$

Caso $-1 \leq y \leq 1$:

$$f_X(x | Y = y) = \frac{\frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1]}{\frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2}} = \frac{[x^2 + y^2 \leq 1]}{2\sqrt{1 - y^2}}$$



$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$

Caso $-1 \leq y \leq 1$:

$$f_X(x | Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1 - y^2}}, & -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Já foi visto: **GeoGebra** 

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} [x^2 + y^2 \leq 1] \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2} [-1 \leq y \leq 1]$$

Caso $-1 \leq y \leq 1$:

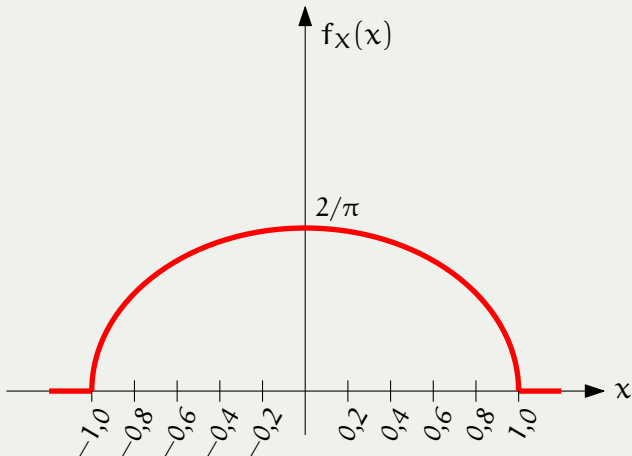
$$f_X(x | Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1 - y^2}}, & -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Conclusão: $(X | Y = y) \sim \text{Uniform}([-\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{1 - y^2}])$.

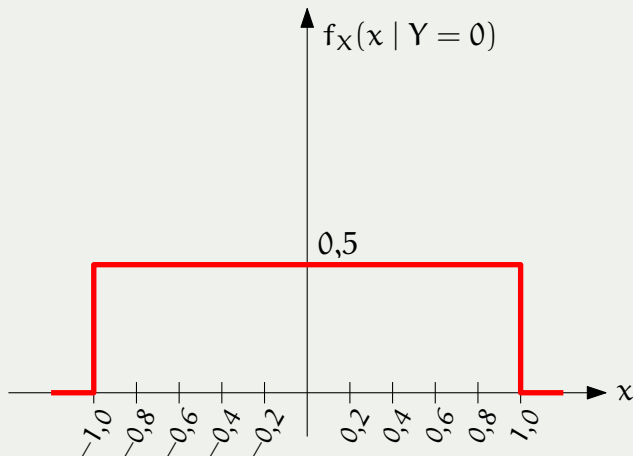


Exemplo

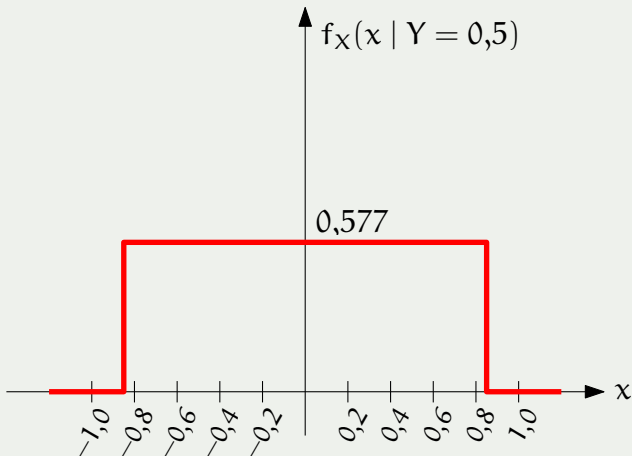
Relembrando a PDF marginal de X :



Exemplos de casos particulares:

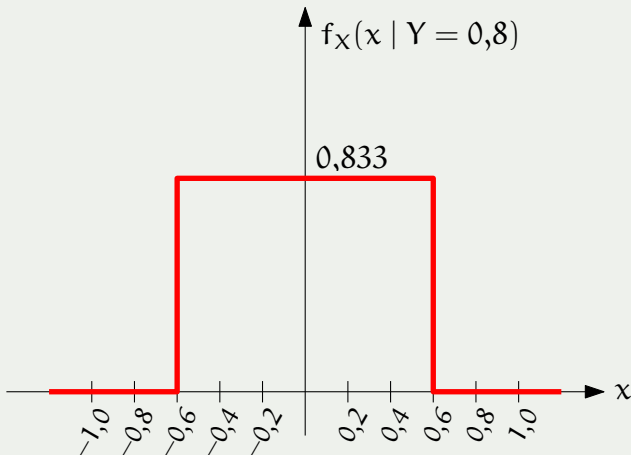


Exemplos de casos particulares:

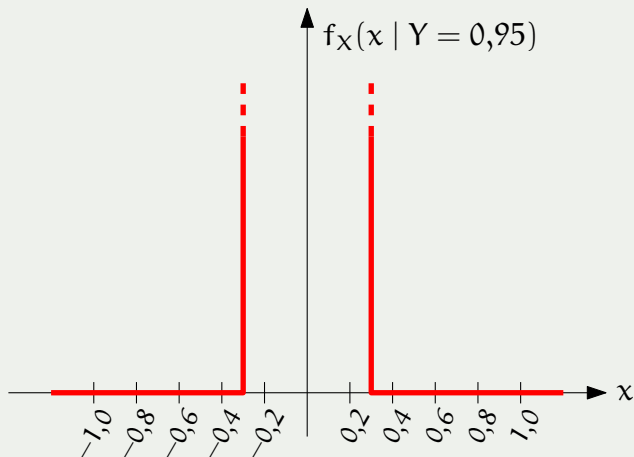


Exemplo

Exemplos de casos particulares:

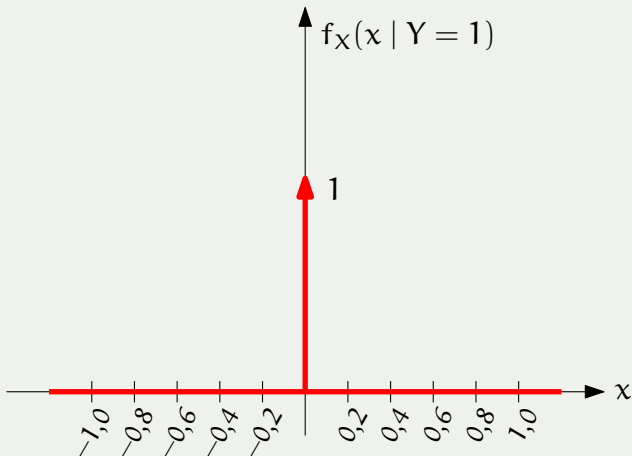


Exemplos de casos particulares:



Exemplo

Exemplos de casos particulares:



Proposição

Para o caso discreto:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff p_{X|Y=y} = p_X \quad \forall y : p_Y(y) \neq 0$$

Para o caso geral:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff f_{X|Y=y} = f_X \quad \forall y : f_Y(y) \neq 0$$



Proposição

Para o caso discreto:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff p_{X|Y=y} = p_X \quad \forall y : p_Y(y) \neq 0$$

Para o caso geral:

$$X \text{ e } Y \text{ são independentes} \iff f_{X|Y=y} = f_X \quad \forall y : f_Y(y) \neq 0$$

Demonstração:

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x). \quad \square$$



Exercícios propostos

- | | | |
|----------|-----------------|-----------|
| ■ 5.2.1. | ■ 5.4.1. | ■ 5.6.3. |
| ■ 5.2.4. | ■ 5.4.2. | ■ 5.6.7. |
| ■ 5.3.1. | ■ 5.5.1, 7.5.6. | ■ 7.4.3. |
| ■ 5.3.4. | ■ 5.5.4, 7.5.7. | ■ 7.4.11. |



Esboce sua resposta sempre que possível.



Referências



JOSÉ PAULO DE ALMEIDA ALBUQUERQUE, JOSÉ MAURO PEDRO FORTES, AND WEILER ALVES FINAMORE.

PROBABILIDADE, VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.

Editora Interciência, 2008.



STEVEN M. KAY.

INTUITIVE PROBABILITY AND RANDOM PROCESSES USING MATLAB®.

Springer, 2006.



ROY D. YATES AND DAVID J. GOODMAN.

PROBABILITY AND STOCHASTIC PROCESSES.

Wiley, 3rd edition, 2014.

