Processos Estocásticos

Processos estocásticos estacionários no sentido amplo

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006
Engenharia de Telecomunicações

Instituto Federal
Santa Catarina
Câmpus
São José

Introdução

Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de t.
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e não dos instantes absolutos.

Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de t.
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e não dos instantes absolutos.

Como consequência, define-se

$$\mu_X \triangleq \mu_X(t) \qquad C_X(\tau) \triangleq C_X(t, t+\tau) \qquad \sigma_X^2 \triangleq C_X(0)$$

Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido amplo (ESA)** se

- A função média $\mu_X(t)$ não depende de t.
- A função autocovariância $C_X(t_1, t_2)$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e não dos instantes absolutos.

Como consequência, define-se

$$\mu_X \triangleq \mu_X(t) \qquad C_X(\tau) \triangleq C_X(t, t+\tau) \qquad \sigma_X^2 \triangleq C_X(0)$$

No caso de tempo discreto, $(t) \to [n]$ e $(\tau) \to [\ell]$.

Propriedades da função autocovariância

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

Propriedades da função autocovariância

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1. **Função par**

   $$C_X(\tau) = C_X(-\tau)$$

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1. **Função par**

   $C_X(\tau) = C_X(-\tau)$

2. **Valor na origem**

   $C_X(0) = \sigma_X^2$

Seja $X(t)$ um processo ESA com função autocovariância $C_X(\tau)$.

1. **Função par**

$$C_X(\tau) = C_X(-\tau)$$

2. **Valor na origem**

$$C_X(0) = \sigma_X^2$$

3. **Faixa de valores** (*desigualdade de Cauchy-Schwarz*)

$$-\sigma_X^2 \leq C_X(\tau) \leq \sigma_X^2$$

Exemplo

Considere um PE $X(t)$ dado por

$$X(t) = B_1 \operatorname{rect}(t - 0{,}5) + B_2 \operatorname{rect}(t - 1{,}5)$$

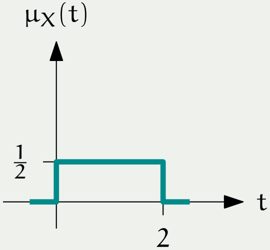
onde $B_1, B_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Uniform}(\{0, 1\})$.

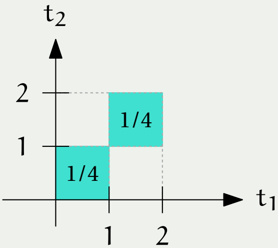
Exemplo revisitado: Sinal representando dois bits

Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = \tfrac{1}{2}[0 \le t < 2] \qquad \text{e} \qquad C_X(t_1, t_2) = \tfrac{1}{4}\Big[\lfloor t_1 \rfloor = \lfloor t_2 \rfloor\Big]$$

Gráficos:

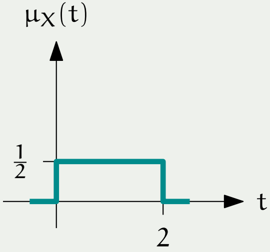


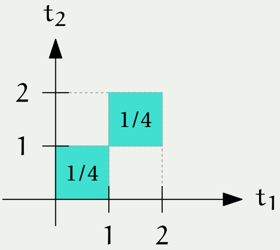


Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = \tfrac{1}{2}[0 \leq t < 2] \qquad \text{e} \qquad C_X(t_1, t_2) = \tfrac{1}{4}\Big[\lfloor t_1 \rfloor = \lfloor t_2 \rfloor\Big]$$

Gráficos:





Portanto, $X(t)$ não é ESA.

Exemplo revisitado: Cosseno com fase aleatória

Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que a, b e f_0 são constantes e $\Theta \sim \mathrm{Uniform}(-\pi, \pi)$.

Exemplo revisitado: Cosseno com fase aleatória

Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = b \qquad \text{e} \qquad C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0(t_2 - t_1))$$

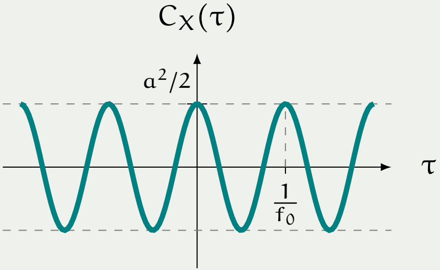
Exemplo revisitado: Cosseno com fase aleatória

Já foi mostrado que

$$\mu_X(t) = b \qquad \text{e} \qquad C_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1))$$

Portanto, $X(t)$ é ESA e podemos escrever

$$\mu_X = b \qquad \text{e} \qquad C_X(\tau) = \frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 \tau)$$



Exemplo

Seja $\mathrm{B}[n] \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Bernoulli}(1/2)$ uma sequência de bits aleatórios. Seja

$$X[n] = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathrm{B}[n] = 0, \\ \pm 1, & \text{alternadamente, se } \mathrm{B}[n] = 1. \end{cases}$$

Exemplo revisitado: Sinalização AMI

Já foi mostrado que

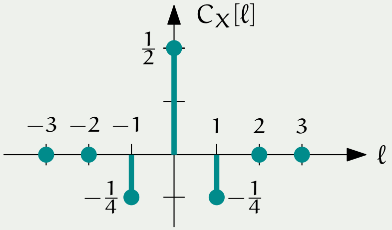
$$\mu_X[n] = 0 \qquad \text{e} \qquad C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Já foi mostrado que

$$\mu_X[n] = 0 \qquad \text{e} \qquad C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} +\frac{1}{2}, & \text{se } n_2 = n_1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } n_2 = n_1 \pm 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto, $X[n]$ é ESA e podemos escrever

$$\mu_X = 0 \qquad \text{e} \qquad C_X[\ell] = \tfrac{1}{2}\delta[\ell] - \tfrac{1}{4}\delta[\ell - 1] - \tfrac{1}{4}\delta[\ell + 1]$$



Exemplo

Seja $X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ uma sequência aleatória. Defina

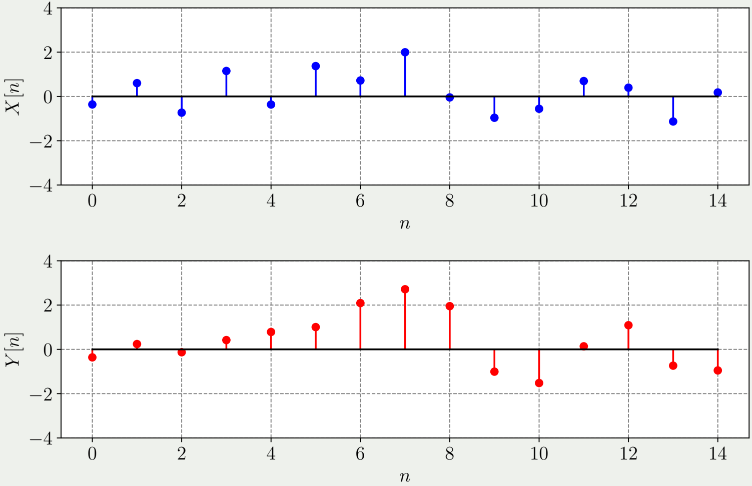
$$Y[n] = X[n] + X[n-1].$$

a. Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$. Conclua que $X[n]$ é ESA.
b. Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$. Conclua que $Y[n]$ também é ESA.

Quando conveniente, usaremos X_n no lugar de $X[n]$.

Exemplo: Filtragem FIR

Exemplo de sequências-amostra:



Exemplo: Filtragem FIR

- a Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

Exemplo: Filtragem FIR

a. Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

a Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

Função média:

$$\mu_X[n] \;=\; E[X_n] \;=\; 0, \quad \forall n$$

a. Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

Função média:

$$\mu_X[n] = E[X_n] = 0, \quad \forall n$$

Função autocovariância:

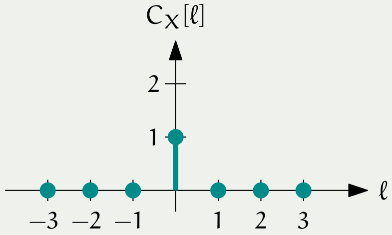
$$C_X[n_1, n_2] = \operatorname{cov}\left[X_{n_1}, X_{n_2}\right] = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

a Determine a função média e a função autocovariância de $X[n]$.

$$X_n = X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

Portanto, $X[n]$ é ESA com:

$$\mu_X = 0 \qquad \text{e} \qquad C_X[\ell] = \delta[\ell]$$



Exemplo: Filtragem FIR

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função média:

$$\mu_Y[n] = E[Y_n]$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função média:

$$\begin{aligned} \mu_Y[n] &= E[Y_n] \\ &= E[X_n + X_{n-1}] \end{aligned}$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função média:

$$\begin{aligned}\mu_Y[n] &= E[Y_n] \\ &= E[X_n + X_{n-1}] \\ &= E[X_n] + E[X_{n-1}]\end{aligned}$$

Exemplo: Filtragem FIR

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função média:

$$\begin{aligned}
\mu_Y[n] &= E[Y_n] \\
&= E[X_n + X_{n-1}] \\
&= E[X_n] + E[X_{n-1}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$C_Y[n_1, n_2] = \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}]$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$C_Y[n_1, n_2] = \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}]$$

$$= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\ \cancel{E[Y_{n_2}]}$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\, \cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1 - 1})(X_{n_2} + X_{n_2 - 1})]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\,\cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\
&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\ \cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\
&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\
&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Função autocovariância:

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\,\cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\
&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\
&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1] \\
&= C_X[\ell] + C_X[\ell-1] + C_X[\ell+1] + C_X[\ell]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

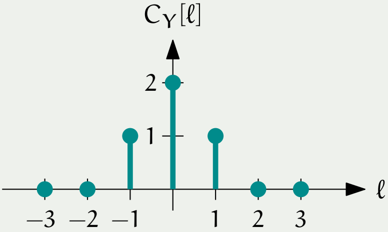
Função autocovariância:

$$
\begin{aligned}
C_Y[n_1, n_2] &= \operatorname{cov}[Y_{n_1}, Y_{n_2}] \\
&= E[Y_{n_1} Y_{n_2}] - \cancel{E[Y_{n_1}]}\ \cancel{E[Y_{n_2}]} \\
&= E[(X_{n_1} + X_{n_1-1})(X_{n_2} + X_{n_2-1})] \\
&= E[X_{n_1} X_{n_2}] + E[X_{n_1} X_{n_2-1}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2}] + E[X_{n_1-1} X_{n_2-1}] \\
&= C_X[n_1, n_2] + C_X[n_1, n_2-1] + C_X[n_1-1, n_2] + C_X[n_1-1, n_2-1] \\
&= C_X[\ell] + C_X[\ell-1] + C_X[\ell+1] + C_X[\ell] \\
&= 2\delta[\ell] + \delta[\ell-1] + \delta[\ell+1]
\end{aligned}
$$

b Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Portanto, $Y[n]$ é ESA com:

$$\mu_Y = 0 \qquad \text{e} \qquad C_Y[\ell] = 2\delta[\ell] + \delta[\ell-1] + \delta[\ell+1]$$



Parênteses

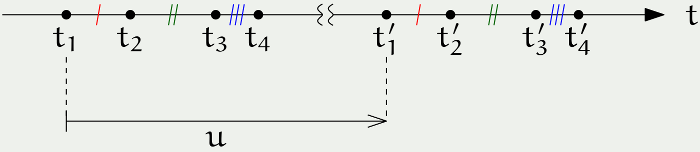
Estacionariedade no sentido estrito

Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido estrito (ESE)** se

$$X(t_1), \ldots, X(t_k) \quad \overset{d}{=} \quad X(t_1 + u), \ldots, X(t_k + u),$$

quaisquer que sejam o inteiro k, os instantes $t_1, \ldots, t_k$, e o lapso u, onde $\overset{d}{=}$ denota *igualdade em distribuição* (mesma PDF, PMF, etc.).



Definição

Um PE $X(t)$ é dito ser **estacionário no sentido estrito (ESE)** se

$$X(t_1), \ldots, X(t_k) \quad \stackrel{d}{\equiv} \quad X(t_1 + u), \ldots, X(t_k + u),$$

quaisquer que sejam o inteiro k, os instantes $t_1, \ldots, t_k$, e o lapso u, onde $\stackrel{d}{\equiv}$ denota *igualdade em distribuição* (mesma PDF, PMF, etc.).

Equivalentemente:

- A PDF de 1ª ordem $f_{X(t)}(x)$ não depende de t.
- A PDF de 2ª ordem $f_{X(t_1, t_2)}(x_1, x_2)$ depende de t_1 e t_2 apenas através da diferença $\tau = t_2 - t_1$, e não dos instantes absolutos.
- Etc.

Relação entre estacionariedades

Teorema

$$\text{ESE} \implies \text{ESA}$$

Mas a recíproca é falsa!

Contraexemplo

Exemplo: *Processo estocástico do carnaval*

Seja $X[n]$ uma sequência de VAs i.i.d. que assumem o valor 2 com probabilidade $\frac{1}{5}$ e o valor $-\frac{1}{2}$ com probabilidade $\frac{4}{5}$. Seja $Y[n]$ a sequência aleatória

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

a. Mostre que $Y[n]$ não é ESE.
b. Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Contraexemplo

a. Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

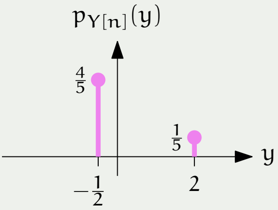
$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

Contraexemplo

a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

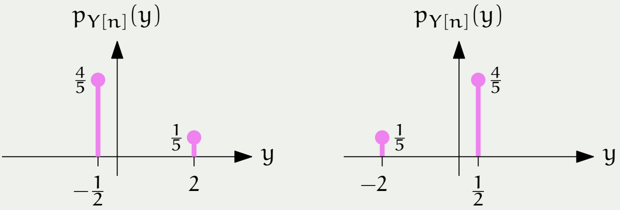
Para n par:



- Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

Para n par: Para n ímpar:

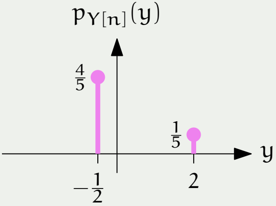


Contraexemplo

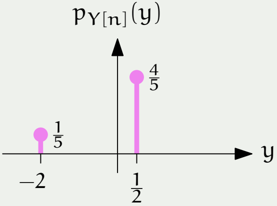
a Mostre que $Y[n]$ não é ESE.

$$Y[n] = (-1)^n X[n]$$

Para n par:



Para n ímpar:



Portanto, a PMF de 1ª ordem de $Y[n]$ *depende* de n.

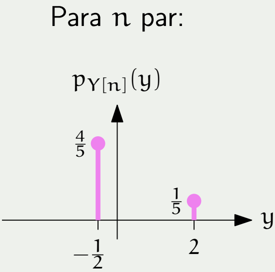
Sendo assim, não pode ser ESE.

Contraexemplo

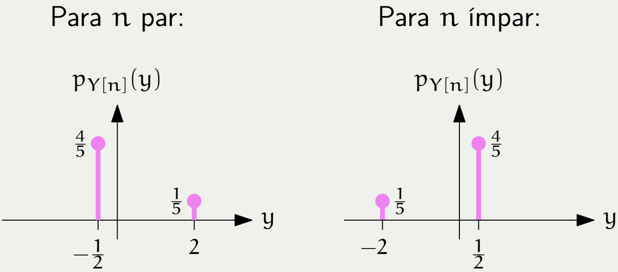
b. Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Contraexemplo

- b Mostre que $Y[n]$ é ESA.



b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

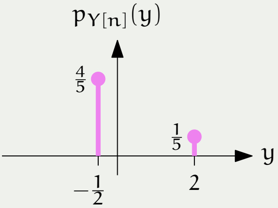


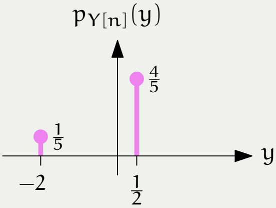
Função média:

$$\mu_Y[n] = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5} + (2)\frac{1}{5}, & n \text{ par} \\ (-2)\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5}, & n \text{ ímpar} \end{cases} = 0, \quad \forall n \quad \checkmark$$

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par: Para n ímpar:



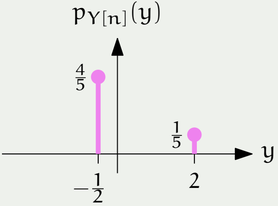


Variância de $Y[n]$:

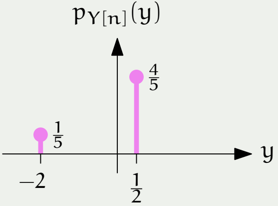
$$\mathrm{var}[Y[n]] \underset{\substack{\downarrow \\ \text{média } 0}}{=} E[Y[n]^2] = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5} + (2)^2 \frac{1}{5}, & n \text{ par} \\ (-2)^2 \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4}{5}, & n \text{ ímpar} \end{cases} = 1, \quad \forall n$$

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



Para n ímpar:

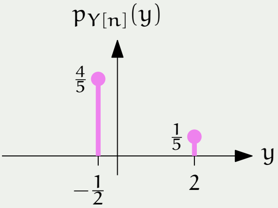


Função autocovariância:

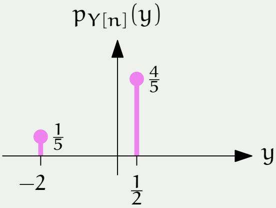
$$C_Y[n_1, n_2] = \begin{cases} \mathrm{var}[Y[n]], & n_1 = n_2 = n \\ \mathrm{cov}[Y[n_1], Y[n_2]], & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



Para n ímpar:

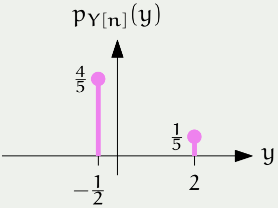


Função autocovariância:

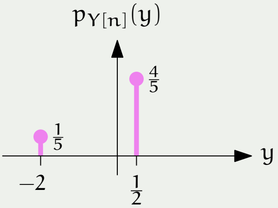
$$C_Y[n_1, n_2] = \begin{cases} 1, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases} \quad \checkmark$$

b Mostre que $Y[n]$ é ESA.

Para n par:



Para n ímpar:



Portanto, $Y[n]$ é ESA com:

$$\mu_Y = 0 \qquad \text{e} \qquad C_Y[\ell] = \delta[\ell]$$

Análise no domínio da frequência

Seja $x(t)$ um sinal *determinístico*.

Definição

A **transformada de Fourier** de $x(t)$ é dada por

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

A **transformada de Fourier inversa** de $\hat{x}(f)$ é dada por

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{x}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(f) e^{j2\pi f t}\, df$$

J.-B. Joseph Fourier (1768–1830)

Diz-se que $x(t)$ e $\hat{x}(f)$ são **pares transformados de Fourier**.

Densidade espectral de potência

Seja $x(t)$ um sinal *determinístico*.

Definição

A **densidade espectral de potência** de $x(t)$ é definida por

$$S_x(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |\hat{x}_T(f)|^2,$$

onde $\hat{x}_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$ e $x_T(t)$ é uma versão de $x(t)$ truncada ao intervalo $[-T/2, T/2]$.

Seja $X(t)$ um *processo estocástico ESA*.

Definição

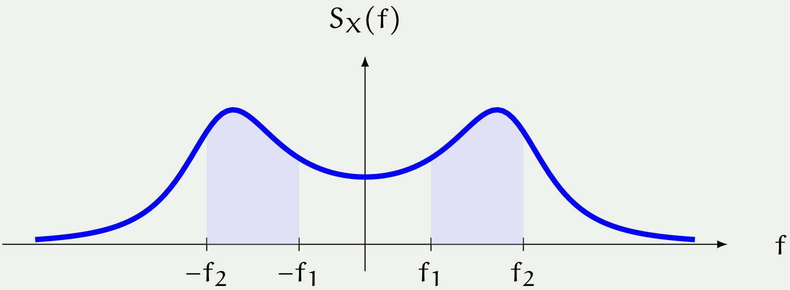
A **densidade espectral de potência** de $X(t)$ é definida por

$$S_X(f) = \lim_{T \to \infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{T}|\hat{X}_T(f)|^2\right],$$

onde $\hat{X}_T(f) = \mathcal{F}\{X_T(t)\}$ e $X_T(t)$ é uma versão de $X(t)$ truncada ao intervalo $[-T/2, T/2]$.

A densidade espectral de potência é tal que a potência de $X(t)$ na faixa de frequência $[f_1, f_2]$ é dada por

$$P_X^{[f_1, f_2]} = 2 \int_{f_1}^{f_2} S_X(f)\, df$$



Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1. **Função real**

   $\mathrm{Im}\{S_X(f)\} = 0$

Propriedades da densidade espectral de potência

Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1. **Função real**

   $$\mathrm{Im}\{S_X(f)\} = 0$$

2. **Função par**

   $$S_X(f) = S_X(-f)$$

Seja $X(t)$ um processo ESA com densidade espectral de potência $S_X(f)$.

1. **Função real**

   $$\operatorname{Im}\{S_X(f)\} = 0$$

2. **Função par**

   $$S_X(f) = S_X(-f)$$

3. **Função não-negativa**

   $$S_X(f) \geq 0$$

Teorema de Wiener–Khinchin

Seja $X(t)$ um processo estocástico ESA.

Teorema

$$S_X(f) = \mathcal{F}_\tau\{C_X(\tau) + \mu_X^2\}$$

ou

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} - \mu_X^2$$

Ou seja, as funções autocovariância e densidade espectral de potência são pares transformados de Fourier, a menos de um termo constante.

Potência média de um PE ESA

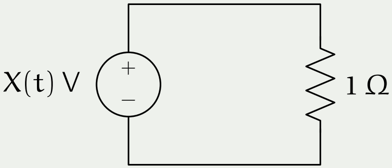
Seja $X(t)$ um processo estocástico (real) ESA.

Definição

A **potência média** de $X(t)$, denotada por P_X, é definida por

$$P_X = E\left[X^2(t)\right].$$

Note que P_X é uma constante, pois $X(t)$ é ESA.



Obs: A palavra *média* é no sentido probabilístico, e não temporal.

Teorema

A potência média pode ser calculada no *domínio do tempo* por

$$P_X = C_X(0) + \mu_X^2$$

ou no *domínio da frequência* por

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df.$$

A fórmula no domínio do tempo é comumente escrita como

$$P_X = \underbrace{\sigma_X^2}_{\text{potência AC}} + \underbrace{\mu_X^2}_{\text{potência DC}}.$$

Potência média de um PE ESA

Demonstração: *(fórmula no domínio do tempo)*

Tem-se que

$$\begin{aligned} P_X &= \mathrm{E}\left[X^2(t)\right] \\ &= \operatorname{var}\left[X(t)\right] + \mu_X^2 \\ &= \operatorname{cov}\left[X(t), X(t)\right] + \mu_X^2 \\ &= C_X(0) + \mu_X^2. \end{aligned}$$

Potência média de um PE ESA

Demonstração: *(fórmula no domínio da frequência)*

Do teorema de Wiener–Khinchin e da definição da transformada inversa,

$$C_X(\tau) + \mu_X^2 = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} \, df.$$

Substituindo $\tau = 0$, deduz-se que

$$C_X(0) + \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \, df.$$

O resultado segue da fórmula no domínio do tempo. $\square$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que a, b e f_0 são constantes e $\Theta \sim \mathrm{Uniform}(-\pi, \pi)$.

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Exemplo

Considere o PE dado por

$$X(t) = a\cos(2\pi f_0 t - \Theta) + b,$$

em que a, b e f_0 são constantes e $\Theta \sim \mathrm{Uniform}(-\pi, \pi)$.

Já foi visto:

- **Média**: $\mu_X = b$
- **Função autocovariância**: $C_X(\tau) = \frac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0 \tau)$

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$S_X(f)$$

Exemplo: Cosseno com fase aleatória

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$S_X(f) = \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\}$$

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$
\begin{aligned}
S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\
&= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0 \tau) + b^2\right\}
\end{aligned}
$$

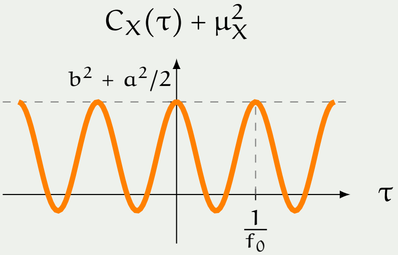
Exemplo: Cosseno com fase aleatória

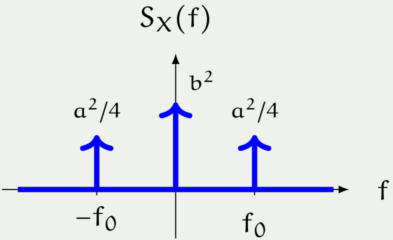
Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + b^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}a^2\delta(f + f_0) + \frac{1}{4}a^2\delta(f - f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$

Assim, a **densidade espectral de potência** é

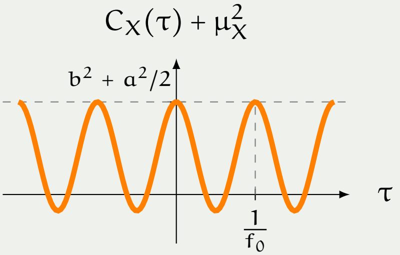
$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}a^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + b^2\right\} \\ &= \tfrac{1}{4}a^2\delta(f + f_0) + \tfrac{1}{4}a^2\delta(f - f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$

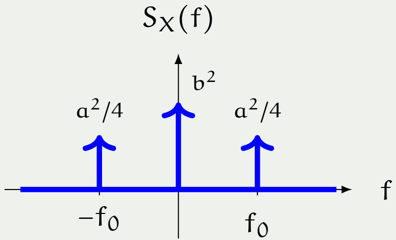




Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0\tau) + b^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}a^2\delta(f+f_0) + \frac{1}{4}a^2\delta(f-f_0) + b^2\delta(f). \end{aligned}$$

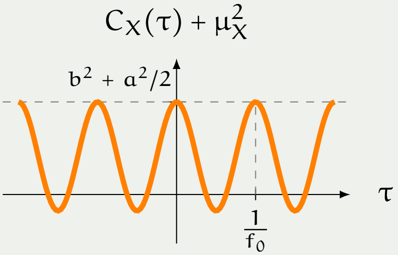


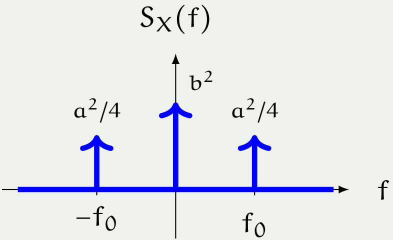


E a **potência média** é

Assim, a **densidade espectral de potência** é

$$
\begin{aligned}
S_X(f) &= \mathcal{F}\left\{C_X(\tau) + \mu_X^2\right\} \\
&= \mathcal{F}\left\{\tfrac{1}{2}a^2\cos(2\pi f_0\tau) + b^2\right\} \\
&= \tfrac{1}{4}a^2\delta(f+f_0) + \tfrac{1}{4}a^2\delta(f-f_0) + b^2\delta(f).
\end{aligned}
$$





E a **potência média** é $P_X = \frac{1}{2}a^2 + b^2$.

Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).

Exemplo: Ruído branco

Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).
- O ruído branco é apenas um modelo matemático que não existe na natureza.

Exemplo: Ruído branco

Definição

Um processo ESA é dito ser **ruído branco** se sua densidade espectral de potência é constante.

- O nome se dá em (uma vaga) analogia com a *luz branca*, que é composta de múltiplas as cores (frequências no espectro).
- O ruído branco é apenas um modelo matemático que não existe na natureza.
- É empregado quando o ruído é suficientemente plano na banda de interesse.

Exemplo: Ruído branco

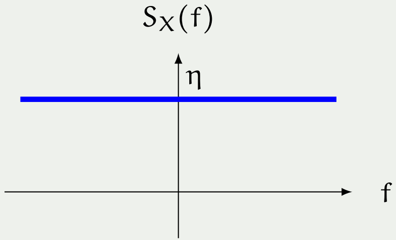
Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.

Exemplo: Ruído branco

Exemplo

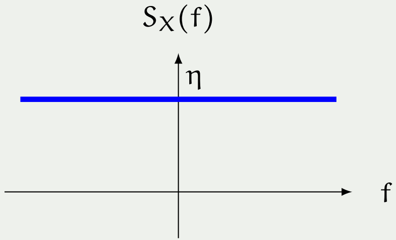
Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.

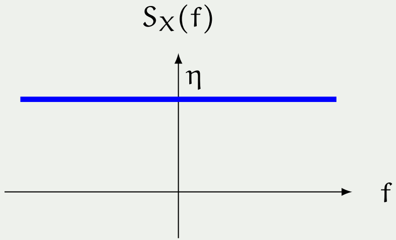
A **função autocovariância** é $C_X(\tau)$ =



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.

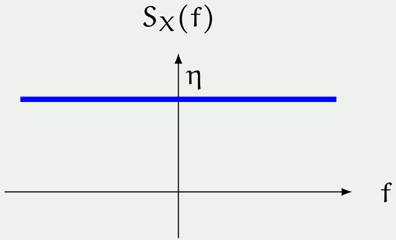
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) \ = \ \mathcal{F}^{-1}\left\{S_X(f)\right\} \ =$



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.

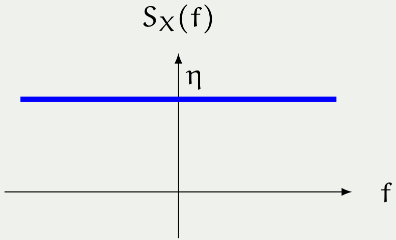
A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} =$



Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.

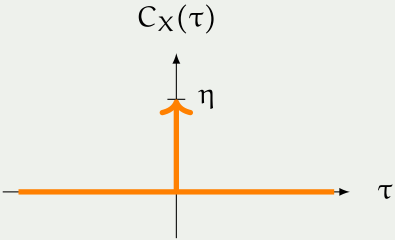


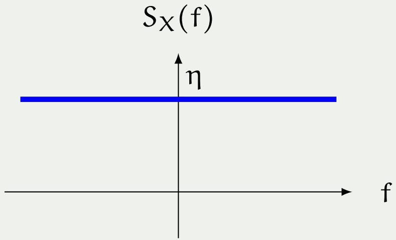
Exemplo: Ruído branco

Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.

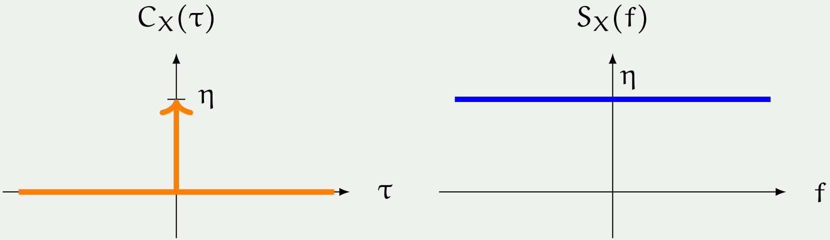




Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.



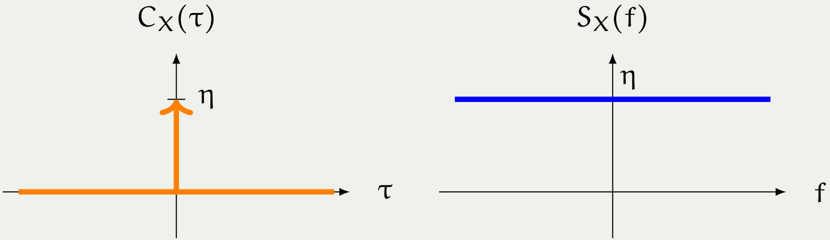
A **potência média** do ruído branco é

Exemplo: Ruído branco

Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η.

A **função autocovariância** é $C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\eta\} = \eta\delta(\tau)$.



A **potência média** do ruído branco é $P_X = \infty$.

Exemplo

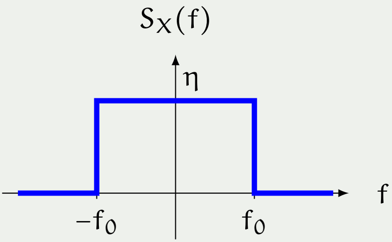
Seja $X(t)$ um processo ESA de média 0 e densidade espectral de potência

$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo

Seja $X(t)$ um processo ESA de média 0 e densidade espectral de potência

$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

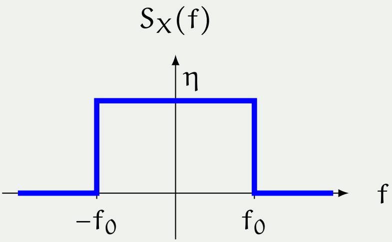


$S_X(f) =$

Exemplo

Seja $X(t)$ um processo ESA de média 0 e densidade espectral de potência

$$S_X(f) = \begin{cases} \eta, & |f| \leq f_0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$S_X(f) = \eta \,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)$$

Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau)$$

Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left\{S_X(f)\right\}$$

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\}$$

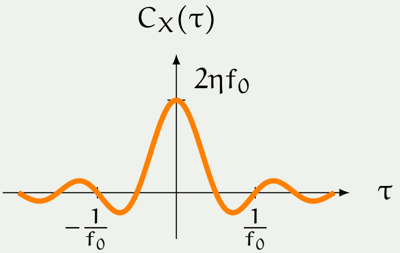
Exemplo: Ruído branco limitado em frequência

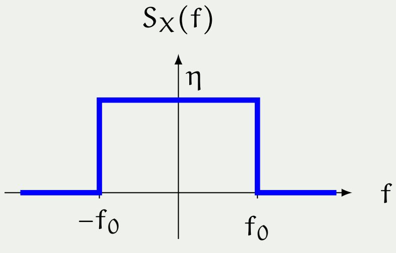
A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0\,\mathrm{sinc}\,(2f_0\tau)\,.$$

A **função autocovariância** é

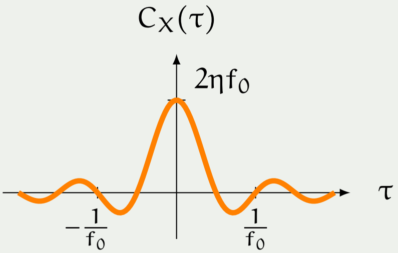
$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0\,\mathrm{sinc}\,(2f_0\tau)\,.$$

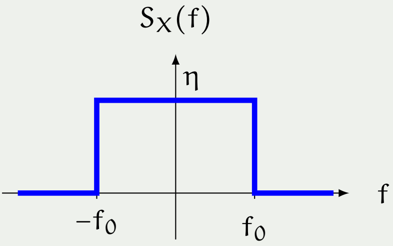




A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$

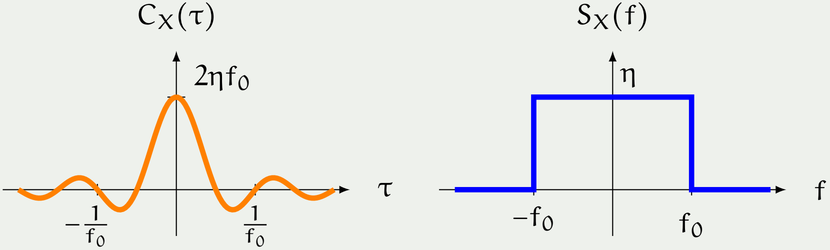




A **potência média** é

A **função autocovariância** é

$$C_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\eta \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2f_0}\right)\right\} = 2\eta f_0 \operatorname{sinc}(2f_0\tau).$$



A **potência média** é $P_X = 2\eta f_0$.

Sistemas LTI vs processos ESA

Definição

Um sistema $\mathcal{H}$ é dito ser **linear e invariante no tempo** (LTI) se as seguintes propriedades são válidas:

1. **Linearidade**:

$$\begin{matrix} x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y_1(t) \\ x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y_2(t) \end{matrix} \implies a x_1(t) + b x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} a y_1(t) + b y_2(t)$$

2. **Invariância no tempo**:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{H}} y(t) \implies x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{H}} y(t - t_0)$$

Teorema

Se um sistema LTI tem em sua entrada um sinal $x(t)$, então sua saída será dada por

$$y(t) = h(t) * x(t),$$

em que $h(t)$ é a **resposta ao impulso** do sistema. Equivalentemente, no domínio da frequência:

$$\hat{y}(f) = \hat{h}(f)\,\hat{x}(f),$$

em que $\hat{h}(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é a **resposta em frequência** do sistema.

Considere a seguinte situação, em que um sistema linear e invariante no tempo $\mathcal{H}$ tem em sua entrada um processo estocástico $X(t)$ estacionário no sentido amplo.

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y(t)$$

$$\begin{array}{ccc} \mu_X & & \mu_Y \\ C_X(\tau) & \begin{array}{c} h(t) \\ \hat{h}(f) \end{array} & C_Y(\tau) \\ S_X(f) & & S_Y(f) \end{array}$$

Teorema

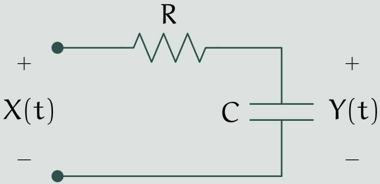
O processo estocástico $Y(t)$ na saída do sistema também é ESA, com

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \hat{h}(0)\,\mu_X, \\ S_Y(f) &= \left|\hat{h}(f)\right|^2 S_X(f). \end{aligned}$$

Exemplo: Circuito RC

Exemplo

Seja $X(t)$ ruído branco de média 0 e densidade espectral de potência η. Determine a média, a densidade espectral de potência, a função autocovariância e a potência média do sinal $Y(t)$ do circuito abaixo.



Solução. Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \qquad S_X(f) = \eta, \qquad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \qquad P_X = \infty.$$

Solução. Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \qquad S_X(f) = \eta, \qquad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \qquad P_X = \infty.$$

Resposta em frequência do sistema:

$$\hat{h}(f) = \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi f C}}{\frac{1}{j2\pi f C} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}.$$

Solução. Parâmetros do processo de entrada:

$$\mu_X = 0, \qquad S_X(f) = \eta, \qquad C_X(\tau) = \eta\delta(\tau), \qquad P_X = \infty.$$

Resposta em frequência do sistema:

$$\hat{h}(f) = \frac{\hat{y}(f)}{\hat{x}(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC}}{\frac{1}{j2\pi fC} + R} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf}.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \hat{h}(0) &= 1, \\ \left|\hat{h}(f)\right|^2 &= \frac{1}{1 + (2\pi RCf)^2}. \end{aligned}$$

Exemplo: Circuito RC

Parâmetros do processo de saída:

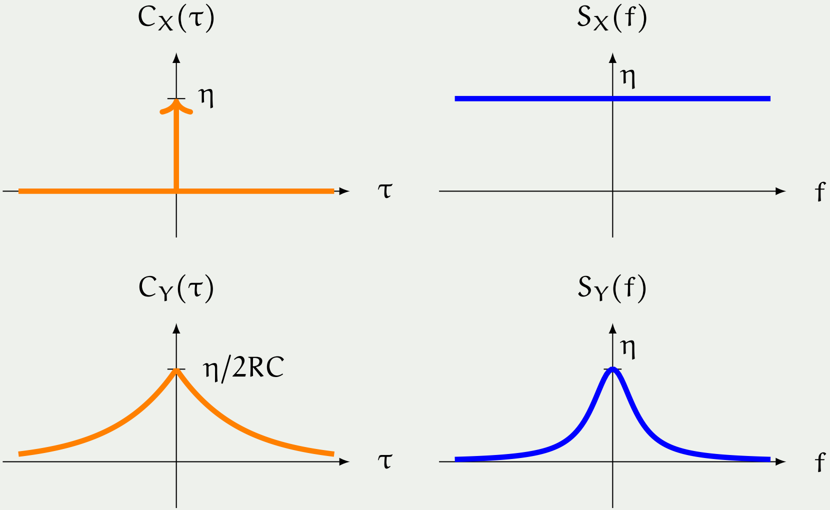
$$\mu_Y = \hat{h}(0)\,\mu_X = 0,$$

$$S_Y(f) = \left|\hat{h}(f)\right|^2 S_X(f) = \frac{\eta}{1 + (2\pi RCf)^2},$$

$$C_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\eta}{1 + (2\pi fRC)^2}\right\} = \frac{\eta}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}},$$

$$P_Y = C_Y(0) + \mu_Y^2 = \frac{\eta}{2RC}.$$

Exemplo: Circuito RC



Exemplo

Seja $X[n] \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ uma sequência aleatória. Defina

$$Y[n] = X[n] + X[n-1].$$

Determine a função média e a função autocovariância de $Y[n]$.

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= \\ C_X[\ell] &= \\ S_X(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \\ S_X(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= 1 + e^{-j2\pi\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \\ C_Y[\ell] &= \\ S_Y(\phi) &= \end{aligned}$$

Solução. Podemos interpretar o problema como segue:

$$X[n] \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow Y[n]$$

$$\begin{aligned} \mu_X &= 0 \\ C_X[\ell] &= \delta[\ell] \\ S_X(\phi) &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h[n] &= \delta[n] + \delta[n-1] \\ \hat{h}(\phi) &= 1 + e^{-j2\pi\phi} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mu_Y &= \ ? \\ C_Y[\ell] &= \ ? \\ S_Y(\phi) &= \ ? \end{aligned}$$

Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi\cdot 0} = 2.$$

Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi\cdot 0} = 2.$$

$$\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 = \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2$$

Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi\cdot 0} = 2.$$

$$\begin{aligned}\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 &= \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2 \\ &= \Big|\underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\mathrm{Re}} - j\underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\mathrm{Im}}\Big|^2\end{aligned}$$

Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi\cdot 0} = 2.$$

$$\begin{aligned}
\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 &= \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2 \\
&= \Big|\underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\mathrm{Re}} - j\underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\mathrm{Im}}\Big|^2 \\
&= [1 + \cos(2\pi\phi)]^2 + \sin^2(2\pi\phi) \\
&= 1 + 2\cos(2\pi\phi) + \underbrace{\cos^2(2\pi\phi) + \sin^2(2\pi\phi)}_{1}
\end{aligned}$$

Tem-se:

$$\hat{h}(0) = 1 + e^{-j2\pi\cdot 0} = 2.$$

$$\begin{aligned}
\left|\hat{h}(\phi)\right|^2 &= \left|1 + e^{-j2\pi\phi}\right|^2 \\
&= \Big|\underbrace{1 + \cos(2\pi\phi)}_{\text{Re}} - j\underbrace{\sin(2\pi\phi)}_{\text{Im}}\Big|^2 \\
&= [1 + \cos(2\pi\phi)]^2 + \sin^2(2\pi\phi) \\
&= 1 + 2\cos(2\pi\phi) + \underbrace{\cos^2(2\pi\phi) + \sin^2(2\pi\phi)}_{1} \\
&= 2 + 2\cos(2\pi\phi).
\end{aligned}$$

Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \hat{h}(0) \underbrace{\mu_X}_{0} = 0,$$

Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \hat{h}(0)\underbrace{\mu_X}_{0} = 0,$$

a **densidade espectral de potência** de $Y[n]$ é

$$S_Y(\phi) = \left|\hat{h}(\phi)\right|^2 \underbrace{S_X(\phi)}_{1} = 2 + 2\cos(2\pi\phi),$$

Exemplo: Filtragem FIR revisitada

Portanto, a **média** de $Y[n]$ é

$$\mu_Y = \hat{h}(0) \underbrace{\mu_X}_{0} = 0,$$

a **densidade espectral de potência** de $Y[n]$ é

$$S_Y(\phi) = \left|\hat{h}(\phi)\right|^2 \underbrace{S_X(\phi)}_{1} = 2 + 2\cos(2\pi\phi),$$

e a **função autocovariância** de $Y[n]$ é

$$\begin{aligned} C_Y[\ell] &= \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(\phi)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{2\} + \mathcal{F}^{-1}\{2\cos(2\pi\phi)\} \\ &= 2\delta[\ell] + \delta[\ell - 1] + \delta[\ell + 1]. \end{aligned}$$

Referências

Referências

José Paulo de Almeida Albuquerque, José Mauro Pedro Fortes, and Weiler Alves Finamore.
Probabilidade, Variáveis Aleatórias e Processos Estocásticos.
Editora Interciência, 2008.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
Probability and Stochastic Processes.
Wiley, 3rd edition, 2014.