Processos Estocásticos

Revisão: Variáveis aleatórias

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006
Engenharia de Telecomunicações

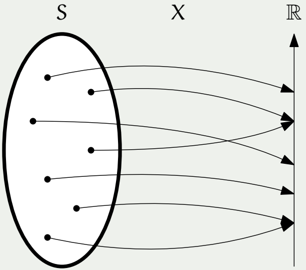
INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Definição

Seja S o espaço amostral de um experimento probabilístico.

Definição

Uma **variável aleatória (VA)** real é um mapeamento $X : S \to \mathbb{R}$.



A **imagem** de X, denotada por S_X, é chamada de **espaço amostral da VA**.

Símbolo	Significado
X	Variável aleatória.
x	Possível valor assumido por X.
S_X	Imagem ou espaço amostral de X.

Cuidado! Alguns autores (Albuquerque et al., por exemplo) invertem a convenção, utilizando minúsculas para variáveis aleatórias e maiúsculas para os possíveis valores!

Exemplos

Exemplo 1

Experimento	Acoplar um foto-detector em uma fibra óptica e contar o número de fótons que chegam em um intervalo de 1 μs.
Espaço amostral	$S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Variável aleatória	X = número de fótons contado.
Espaço amostral da VA	$S_X = S$.

Nesse caso, a VA X é o próprio resultado do experimento.

Exemplo 2

Experimento	Testar seis CIs e observar se cada CI está operacional (1) ou defeituoso (0).
Espaço amostral	$S = \{000000, 000001, 000010, \ldots, 111111\}$.
Variável aleatória	X = número de CIs operacionais.
Espaço amostral da VA	$S_X = \{0, 1, \ldots, 6\}$.
Variável aleatória	Y = lucro obtido, sabendo que o custo de fabricação é \$1 e que o preço de venda é \$3.
Espaço amostral da VA	$S_Y = \{-6, -3, 0, 3, 6, 9, 12\}$.

Aqui, a variável aleatória X é uma função do resultado do experimento e a variável aleatória Y é uma função de X.

Exemplos

- N = Número de mensagens de WhatsApp recebidas durante esta aula.
- T = Tempo decorrido até receber a próxima mensagem de WhatsApp.

Definição

Uma variável aleatória X é dita ser:

- **discreta**, se seu espaço amostral é um *conjunto enumerável*:

$$S_X = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

- **contínua**, se seu espaço amostral é um *intervalo* ou uma *união de intervalos* reais e se $\Pr[X = x] = 0, \forall x \in S_X$.

Variáveis aleatórias discretas e função massa de probabilidade

Definição

A **função massa de probabilidade (PMF)** de uma VA discreta X é dada por

$$p_X(x) = \Pr[X = x], \quad \forall x \in S_X.$$

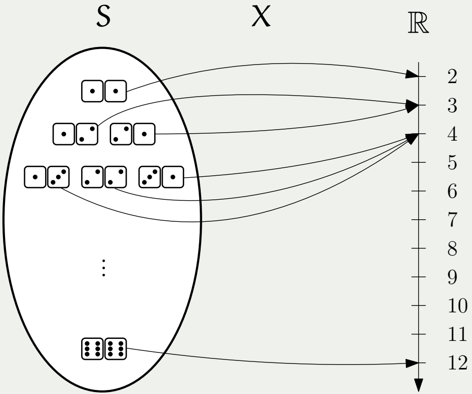
A PMF especifica completamente uma VA discreta.

Proposição:

$$\Pr[X \in A] = \sum_{x \in A} p_X(x).$$

Exemplo: Soma de dois dados

Dois dados honestos são lançados. Seja X a soma dos valores obtidos.



O **espaço amostral** de X é dado por $S_X = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}$.

Exemplo: Soma de dois dados

Dois dados honestos são lançados. Seja X a soma dos valores obtidos.

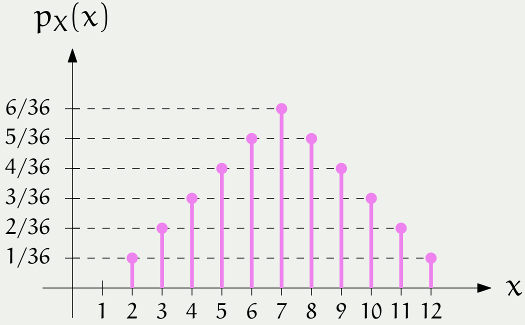
A **PMF** de X é dada por

$$
\begin{aligned}
p_X(2) &= \Pr[X = 2] = \Pr\left[\text{⚀⚀}\right] = \frac{1}{36} \\
p_X(3) &= \Pr[X = 3] = \Pr\left[\text{⚀⚁} \cup \text{⚁⚀}\right] = \frac{2}{36} \\
p_X(4) &= \Pr[X = 4] = \Pr\left[\text{⚀⚂} \cup \text{⚁⚁} \cup \text{⚂⚀}\right] = \frac{3}{36} \\
&\vdots \\
p_X(12) &= \Pr[X = 12] = \Pr\left[\text{⚅⚅}\right] = \frac{1}{36}
\end{aligned}
$$

Exemplo: Soma de dois dados

Dois dados honestos são lançados. Seja X a soma dos valores obtidos.

A **PMF** de X é dada por

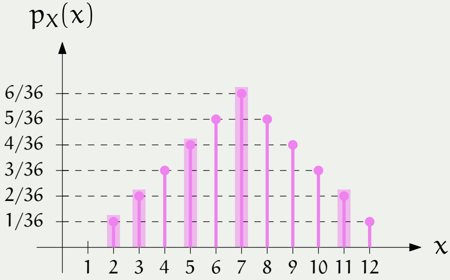


Exemplo: Soma de dois dados

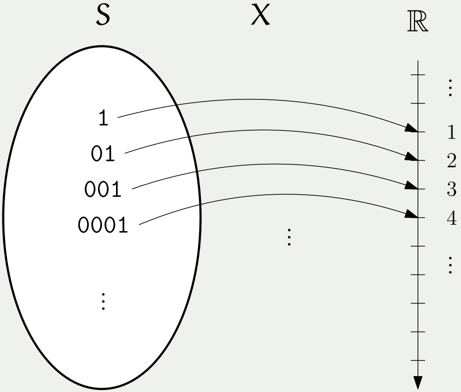
Dois dados honestos são lançados. Seja X a soma dos valores obtidos.

Se P é o conjunto dos números primos, então

$$\Pr[X \in P] = \underbrace{p_X(2)}_{1/36} + \underbrace{p_X(3)}_{2/36} + \underbrace{p_X(5)}_{4/36} + \underbrace{p_X(7)}_{6/36} + \underbrace{p_X(11)}_{2/36} \approx 41{,}67\,\%.$$



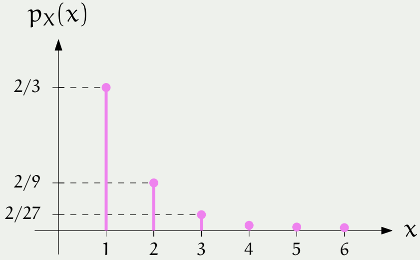
Considere um enlace de comunicação digital cuja probabilidade de sucesso (1) na recepção de um pacote é de $2/3$; em caso de falha (0) na recepção, é solicitado o reenvio do pacote. Seja X o número necessário de transmissões para que um pacote seja recebido corretamente.



Exemplo: Enlace de comunicação digital

Considere um enlace de comunicação digital cuja probabilidade de sucesso (1) na recepção de um pacote é de $2/3$; em caso de falha (0) na recepção, é solicitado o reenvio do pacote. Seja X o número necessário de transmissões para que um pacote seja recebido corretamente.

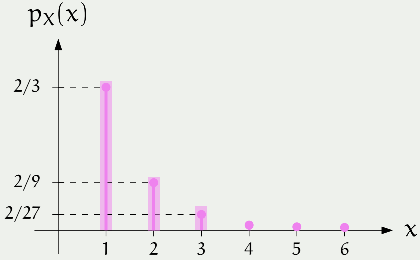
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}, & x = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Exemplo: Enlace de comunicação digital

Considere um enlace de comunicação digital cuja probabilidade de sucesso (1) na recepção de um pacote é de $2/3$; em caso de falha (0) na recepção, é solicitado o reenvio do pacote. Seja X o número necessário de transmissões para que um pacote seja recebido corretamente.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}, & x = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



A probabilidade de o pacote ser recebido em 3 transmissões ou menos é:

$$\Pr[X \leq 3] = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 2/3 + 2/9 + 2/27 \approx 96{,}30\,\%.$$

Propriedades da PMF

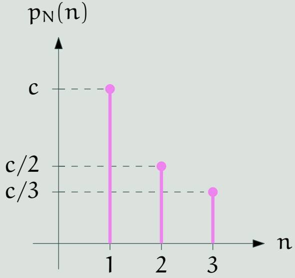
1. $0 \leq p_X(x) \leq 1, \forall x \in S_X.$
2. $\displaystyle\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1.$

Exemplo

Seja N uma VA discreta com PMF dada por

$$p_N(n) = \begin{cases} c/n, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c?



Propriedades da PMF

1. $0 \leq p_X(x) \leq 1, \forall x \in S_X.$
2. $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1.$

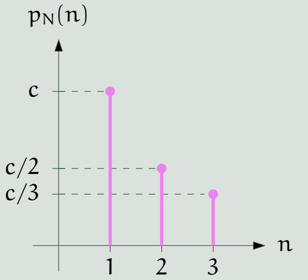
Exemplo

Seja N uma VA discreta com PMF dada por

$$p_N(n) = \begin{cases} c/n, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c?

$$c + c/2 + c/3 = 1 \implies c = 6/11$$



Propriedades da PMF

1. $0 \leq p_X(x) \leq 1, \forall x \in S_X.$
2. $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1.$

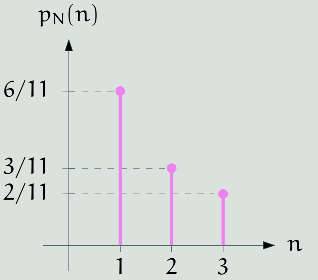
Exemplo

Seja N uma VA discreta com PMF dada por

$$p_N(n) = \begin{cases} c/n, & n = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c?

$$c + c/2 + c/3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = 6/11$$



Variáveis aleatórias contínuas e função densidade de probabilidade

Definição

A **PMF** de uma VA discreta X é dada por

$$p_X(x) = \Pr[X = x], \quad \forall x \in S_X.$$

Para VAs contínuas, $\Pr[X = x] = 0$ para todo $x \in S_X$!

Como contornar o problema? Ideia: se inspirar na seguinte propriedade:

$$\Pr[X \in A] = \sum_{x \in A} p_X(x).$$

Definição da PDF

Definição

A **função densidade de probabilidade (PDF)** de uma VA contínua X, denotada por f_X, é tal que

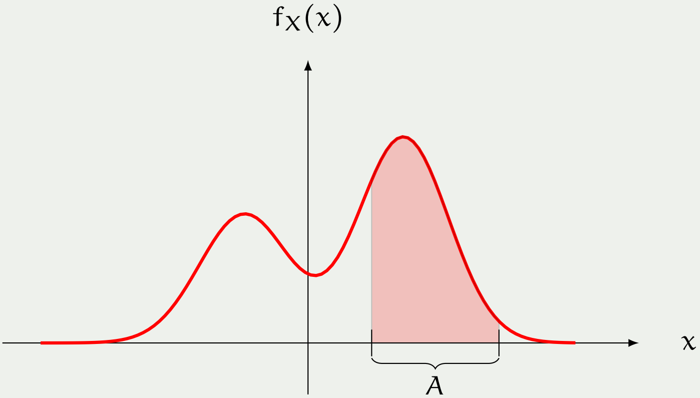
$$\Pr[X \in A] = \int_{x \in A} f_X(x)\,dx,$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

A PDF especifica completamente a VA.

Caso particular: $$\Pr[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

PDF: Ilustração



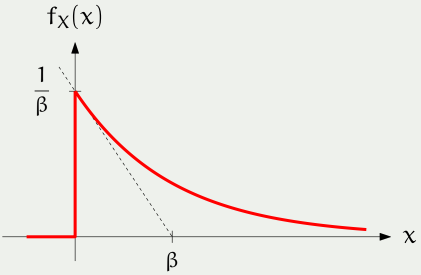
$$\Pr[X \in A] = \int_{x \in A} f_X(x)\, dx$$

Exemplo: Comunicação sem fio

Um modelo bastante empregado em comunicações sem-fio considera que a potência do sinal recebido é uma VA X com PDF

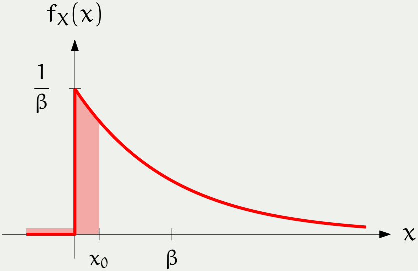
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\, u(x),$$

onde β é a potência média recebida.



Exemplo: Comunicação sem fio

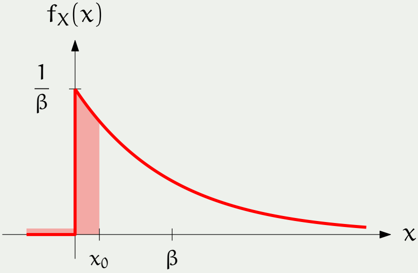
Supondo que a potência média recebida seja de $\beta = 100\,\text{mW}$, determine a probabilidade de que a potência recebida esteja abaixo de $x_0 = 10\,\text{mW}$.



$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\, u(x)$$

Exemplo: Comunicação sem fio

Supondo que a potência média recebida seja de $\beta = 100\,\text{mW}$, determine a probabilidade de que a potência recebida esteja abaixo de $x_0 = 10\,\text{mW}$.

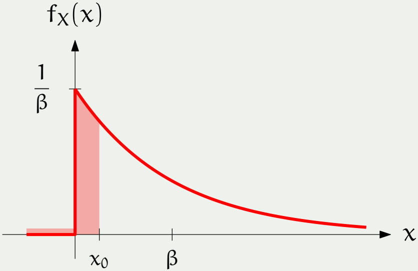


$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\, u(x)$$

$$\begin{aligned}\Pr[X \leq x_0] &= \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x)\,dx = \int_0^{x_0} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\,dx \\ &= \left[-e^{-x/\beta}\right]_{x=0}^{x=x_0} = 1 - e^{-x_0/\beta}.\end{aligned}$$

Exemplo: Comunicação sem fio

Supondo que a potência média recebida seja de $\beta = 100\,\text{mW}$, determine a probabilidade de que a potência recebida esteja abaixo de $x_0 = 10\,\text{mW}$.



$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}\, u(x)$$

$$\Pr[X \leq x_0] = 1 - e^{-x_0/\beta} = 1 - e^{-0,1} \approx 9{,}52\,\%.$$

Propriedades da PDF

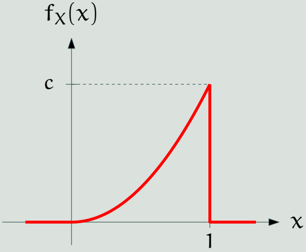
1. $f_X(x) \geq 0, \forall x \in S_X.$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1.$

Exemplo

Seja X uma VA contínua com PDF dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c?



Propriedades da PDF

1. $f_X(x) \geq 0, \forall x \in S_X$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.

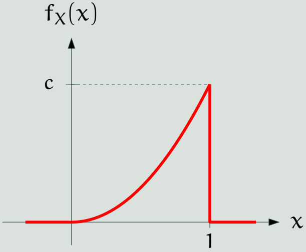
Exemplo

Seja X uma VA contínua com PDF dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_0^1 cx^2\, dx = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{c}{3}.$$



Propriedades da PDF

1. $f_X(x) \geq 0, \forall x \in S_X.$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$

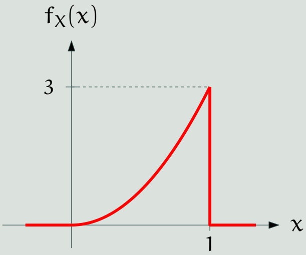
Exemplo

Seja X uma VA contínua com PDF dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

onde c é uma constante. Qual o valor de c?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{c}{3} = 1 \quad \Longrightarrow \quad c = 3.$$



Função de distribuição cumulativa

Definição da CDF

A CDF é válida para **todos** os tipos de VAs.

Definição

A **função de distribuição cumulativa (CDF)** de uma VA é dada por

$$F_X(x) = \Pr[X \le x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A CDF especifica completamente a VA.

Definição da CDF

A CDF é válida para **todos** os tipos de VAs.

Definição

A **função de distribuição cumulativa (CDF)** de uma VA é dada por

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Caso discreto. CDF $\longleftrightarrow$ PMF:

$$F_X(x) = \sum_{u \leq x} p_X(u) \qquad \text{e} \qquad p_X(x) = F_X(x^+) - F_X(x^-).$$

Definição da CDF

A CDF é válida para **todos** os tipos de VAs.

Definição

A **função de distribuição cumulativa (CDF)** de uma VA é dada por

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

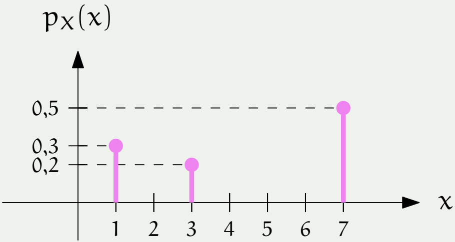
Caso discreto. CDF $\longleftrightarrow$ PMF:

$$F_X(x) = \sum_{u \leq x} p_X(u) \qquad \text{e} \qquad p_X(x) = F_X(x^+) - F_X(x^-).$$

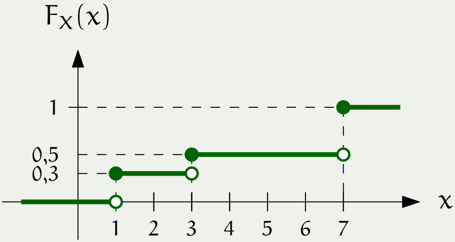
Caso contínuo. CDF $\longleftrightarrow$ PDF:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du \qquad \text{e} \qquad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

Exemplo: Caso discreto

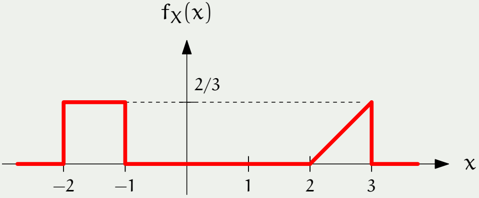


$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}3, & x = 1, \\ 0{,}2, & x = 3, \\ 0{,}5, & x = 7, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

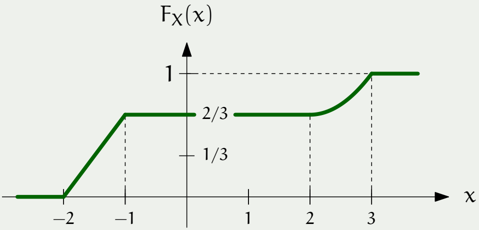


$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 0{,}3, & 1 \leq x < 3, \\ 0{,}5, & 3 \leq x < 7, \\ 1, & x \geq 7. \end{cases}$$

Exemplo: Caso contínuo



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & -2 < x < -1, \\ \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}, & 2 < x < 3, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, & -2 \leq x < -1, \\ \frac{2}{3}, & -1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Propriedades da CDF

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1, \;\forall x \in S_X.$
2. $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(\infty) = 1.$
3. F_X é não-decrescente: $x_1 < x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$
4. Se X é uma VA discreta:

   F_X é uma função constante-por-partes ("escadinha"),
   F_X é uma função contínua-à-direita: $F_X(x) = F_X(x^+).$
5. Se X é uma VA contínua:

   F_X é uma função contínua (no sentido do cálculo).

Exercícios propostos

Yates–Goodman

- 3.2.3.
- 3.3.1.
- 3.3.7.
- 3.4.1.
- 4.2.2.
- 4.3.1.

Esboce sua resposta sempre que possível.

Referências

Referências

Steven M. Kay.
Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®.
Springer, 2006.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
Probability and Stochastic Processes.
Wiley, 3rd edition, 2014.