INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Transformada Z

Trabalho de Sinais e Sistemas

Curso:	Engenharia de Telecomunicações
Disciplina:	SIS129004 - Sinais e Sistemas
Professora:	Elen Macedo Lobato

Aluna
Luiza Kuze Gomes

3 de março de 2025

1 Sinal

É um sistema linear e invariante no tempo (LIT) descrito por uma equação de diferença de segunda ordem: $y[n] + y[n-1] + 0.21y[n-2] = x[n]$ com condições iniciais $y[-1] = 1$ e $y[-2] = 1$, e sinal de entrada definido por $x[n] = (1 - 0.8^n)u[n]$.

2 Questões e Resolução

a) Determine a expressão da função de transferência do sistema (cálculo)

A função de transferência é independente do sinal de entrada e das condições iniciais, $H[z]$ é definida por:

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]}$$

Aplicamos a Transformada $\mathcal{Z}$ à equação de diferenças:

$$y[n] + y[n-1] + 0.21y[n-2] = x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Y[z] + Y[z]z^{-1} + 0.21Y[z]z^{-2} = X[z]$$

$$Y[z]\left(1 + z^{-1} + 0.21z^{-2}\right) = X[z]$$

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1}{1 + z^{-1} + 0.21z^{-2}} \tag{1}$$

b) Represente graficamente o sistema no plano z. Verifique e justifique a estabilidade do sistema (cálculo e via simulação).

Cálculo

Por meio do cálculo podemos pegar a equação do item anterior e múltiplicar por z^2/z^2, desta maneira podemos reescrever a equação:

$$H[z] = \frac{z^2}{z^2 + z + 0.21} = \frac{z^2}{(z + 0.7)(z + 0.3)} \tag{2}$$

Com isso, já podemos marcar os pólos e zeros. Os dois pólos são -0.3 e -0.7, enquanto há dois zeros na origem.

Simulação

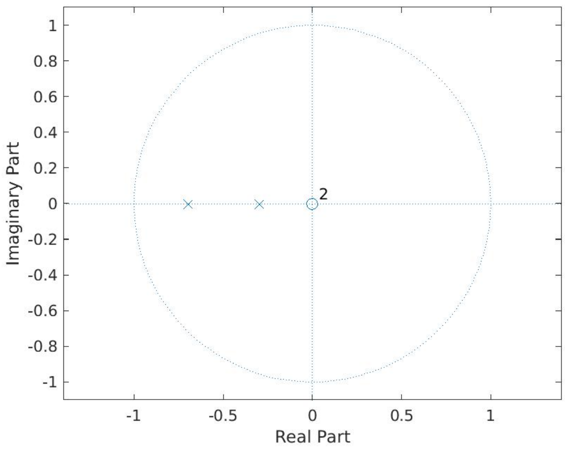
Conforme apresentado na Equação 1, definimos os coeficientes a e b conforme o código MATLAB apresentado na Figura 1. Em seguida, obtemos a representação do sistema no plano z utilizando a função `zplane(b, a)`, conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 1: Código plano Z

```
b = 1;
a = [1 1 0.21];
zplane(b, a)
```

Fonte: Autoria própria

Figura 2: Simulação do plano Z



Fonte: Autoria própria

O sistema é dado como estável uma vez que todos os pólos do sistema estão contidos dentro do círculo unitário.

c) Determine a expressão da resposta ao impulso do sistema (cálculo e via simulação).

Cálculo

A questão nos pergunta qual a saída Y[n] quando X[n] for um impulso σ[n]. Sabemos que Y[z] é dado por:

$$Y[z] = H[z] \cdot X[z]$$

Se X[n] for o impulso, temos que X[z] $= 1$, logo:

$$Y[z] = H[z]$$

Multiplicamos todos os termos da equação abaixo por $\frac{1}{z}$:

$$\frac{H[z]}{z} = \frac{z}{(z+0.7)(z+0.3)} = \frac{A}{z+0.7} + \frac{B}{z+0.3}$$

Agora, calculamos os valores das constantes A e B para as frações parciais:

$$A = \left[(z+0.7)\frac{z}{(z+0.7)(z+0.3)}\right]_{z=-0.7} = \left[\frac{z}{z+0.3}\right]_{z=-0.7} = \frac{-0.7}{-0.7+0.3} = \frac{0.7}{0.4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$B = \left[(z+0.3)\frac{z}{(z+0.7)(z+0.3)}\right]_{z=-0.3} = \left[\frac{z}{z+0.7}\right]_{z=-0.3} = \frac{-0.3}{-0.3+0.7} = \frac{-0.3}{0.4} = -\frac{3}{4} = -0.75$$

Substituindo os valores encontrados, temos:

$$\frac{H[z]}{z} = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z+0.7} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z+0.3}$$

Multiplicando ambos os lados por z:

$$H[z] = \frac{7}{4} \cdot \frac{z}{z+0.7} - \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{z+0.3}$$

Para calcular a resposta ao impulso do sistema, aplicamos a transformada inversa de Z na função de transferência. Assim:

$$H[z] = \frac{7}{4} \cdot \frac{z}{z+0.7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{z+0.3} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} h[n] = \frac{7}{4} \cdot (-0.7)^n u[n] - \frac{3}{4} \cdot (-0.3)^n u[n]$$

Portanto, se h[n] = y[n], a saída $y[n]$ é dada por:

$$y[n] = \frac{7}{4} \cdot (-0.7)^n u[n] - \frac{3}{4} \cdot (-0.3)^n u[n]$$

Simulação

Conforme apresentado no item anterior, utilizamos os coeficientes a e b na função 'residuez(b,a)' para calcular os resíduos da Equação 2, conforme o código MATLAB da Figura 3. O resultado obtido está apresentado na Figura 4.

Figura 3: Código da resposta ao impulso

```
b = 1;
a = [1 1 0.21];
[r p k] = residuez(b,a)
```

Fonte: Autoria própria

Figura 4: Simulação do resíduos

```
b =

     1


a =

    1.0000    1.0000    0.2100


r =

    1.7500
   -0.7500


p =

   -0.7000
   -0.3000


k =

     []
```

Fonte: Autoria própria

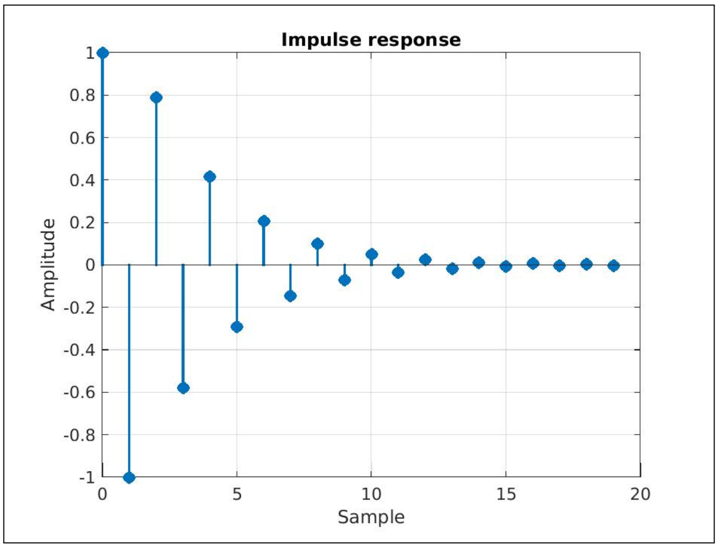
d) Represente graficamente a resposta ao impulso do sistema.

Figura 5: Código resíduos

```
% coeficientes do sistema
b = 1;
a = [1 1 0.21];

% numero de amostras
n = 20;

% resposta ao impulso
h = impz(b, a, n);

% plot
stem(0:n-1, h, 'filled', '
LineWidth', 1.5);
xlabel('Sample');
ylabel('Amplitude');
title('Impulse response');
grid on;

```

Fonte: Autoria própria

Figura 6: Simulação da resposta ao impulso



Fonte: Autoria própria

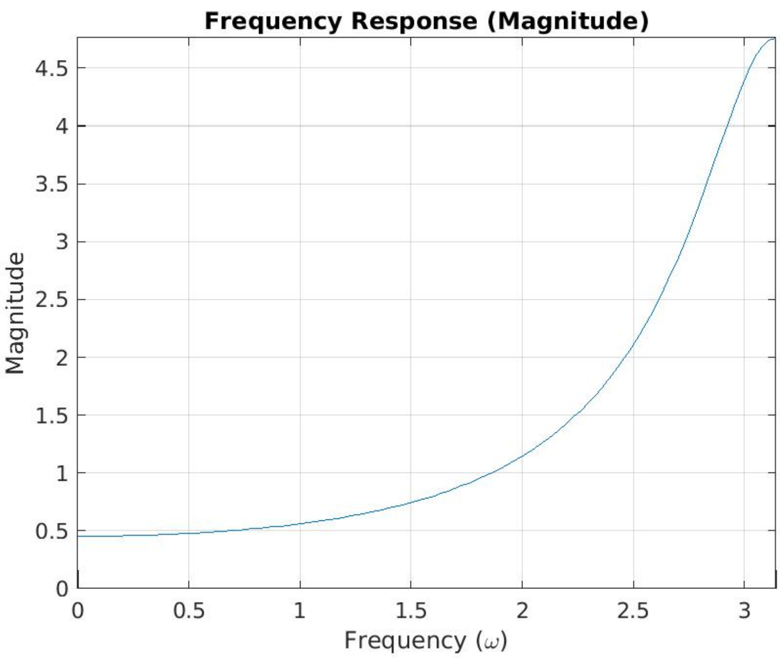
e) Determine a expressão da resposta em frequência do sistema.

Como a função de transferência já foi obtida na Equação 1, a resposta é imediata.

$$H[z] = \frac{1}{1 + z^{-1} + 0.21z^{-2}} = H[\Omega]_{z=e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 + e^{-j\Omega} + 0.21e^{-2j\Omega}}$$

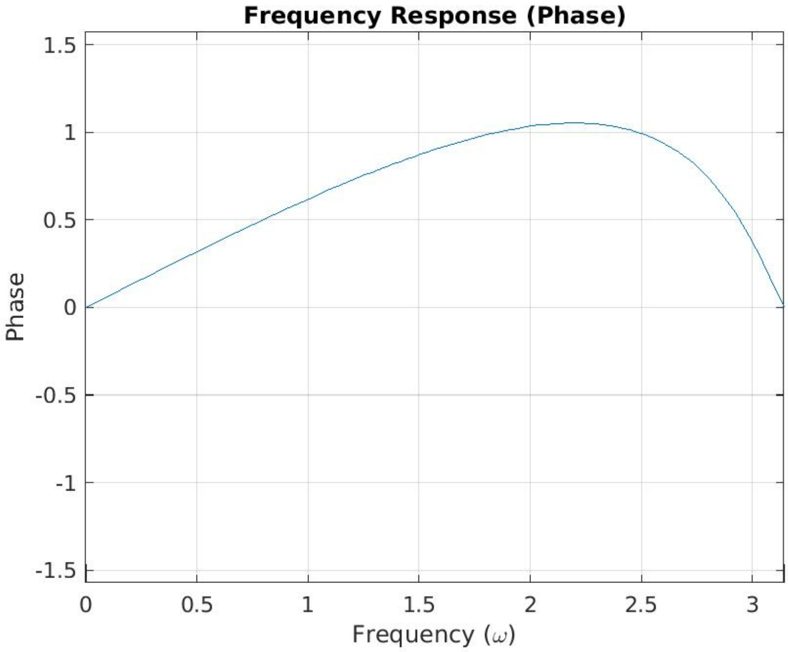
f) Represente graficamente a resposta em frequência do sistema (módulo e fase).

Figura 7: Simulação da resposta em frequência (módulo



Fonte: Autoria própria

Figura 8: Simulação da resposta em frequência (fase)



Fonte: Autoria própria

Figura 9: Código da resposta em frequência

```
% coeficientes
a = [1, 1, 0.21];
b = [1];

% vetor de frequências de 0 a "pi" com passo de "pi/100":
w = 0:pi/100:pi;

% resposta em frequência do sistema (módulo e fase):
[H, w] = freqz(b, a, w);

% plot do módulo da resposta em frequência:
figure(1);
plot(w, abs(H));
grid on;
xlabel('Frequency (\omega)');
ylabel('Magnitude');
title('Frequency Response (Magnitude)');
axis([min(w) max(w) 0 max(abs(H))]);

% Plot da fase da resposta em frequência:
figure(2);
plot(w, angle(H));
grid on;
xlabel('Frequency (\omega)');
ylabel('Phase');
title('Frequency Response (Phase)');
axis([min(w) max(w) -pi/2 pi/2]);
```

Fonte: Autoria própria

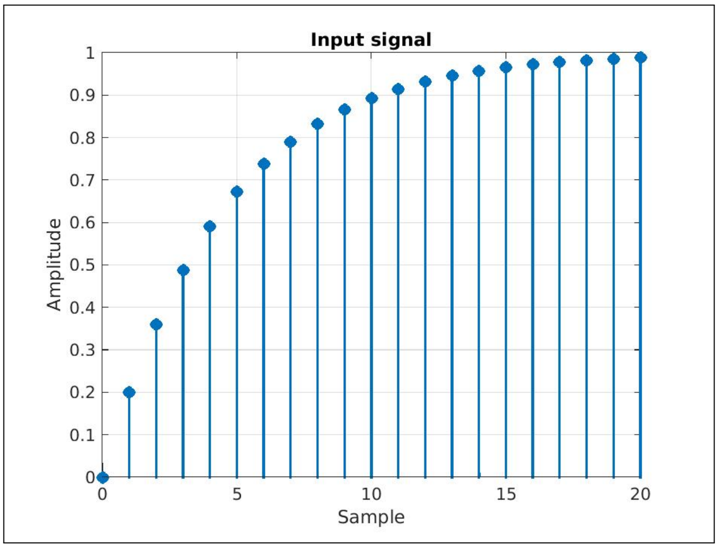
g) Represente graficamente o sinal de entrada.

Figura 10: Código do sinal de entrada

```matlab
% criando um vetor com n positicoes:
n = 20;
vec = 0:n;

% criando o sinal de entrada :
x = (1 - 0.8.^vec);

% plot do sinal de entrada
figure(1);
stem(vec, x, 'filled', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Sample');
ylabel('Amplitude');
title('Input signal');
grid on;

```

Fonte: Autoria própria

Figura 11: Simulação do sinal de entrada



Fonte: Autoria própria

h) Determine a transformada z do sinal de entrada (via tabela/propriedades/definição e via simulação).

Definição

Da transformada Z, temos a definição pela Equação 3:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} \tag{3}$$

Substituindo $x[n] = (1 - 0.8^n)u[n]$, onde $u[n]$ é a função degrau unitário, a soma se restringe a $n \geq 0$, pois $u[n] = 0$ para $n < 0$. Assim, temos:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 0.8^n) z^{-n}$$

Separando os termos:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} (0.8^n z^{-n})$$

Cada um desses somatórios é uma soma de uma progressão geométrica infinita. Usamos a fórmula da soma infinita de uma PG:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{a}{1-r}, \quad \text{para } |r| < 1. \tag{4}$$

Aplicando a fórmula ao primeiro termo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \quad \text{para } |z| > 1.$$

E ao segundo termo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(0.8z^{-1})^n = \frac{1}{1-0.8z^{-1}} = \frac{z}{z-0.8}, \quad \text{para } |0.8z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > 0.8.$$

Portanto, a Transformada Z é:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.8}$$

Para obter uma fração única, colocamos no mesmo denominador:

$$X(z) = \frac{z(z-0.8) - z(z-1)}{(z-1)(z-0.8)}$$

$$X(z) = \frac{z^2 - 0.8z - z^2 + z}{(z-1)(z-0.8)}$$

$$X(z) = \frac{0.2z}{(z-1)(z-0.8)}$$

Portanto, a Transformada Z de $\mathsf{x[n]} = (1 - \mathsf{0.8^n})\mathsf{u[n]}$ é:

$$X(z) = \frac{0.2z}{(z-1)(z-0.8)}, \quad \text{para } |z| > 0.8.$$

Propriedades

Sabemos das seguintes propriedades da Transformada Z:

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-1} \tag{5}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{z-a} \tag{6}$$

Agora, aplicamos essas propriedades para calcular a Transformada Z de $\mathsf{x[n]} = (1 - \mathsf{0.8^n})\mathsf{u[n]}$.

$$X(z) = \mathcal{Z}\{(1-0.8^n)u[n]\}$$

Separando os termos:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{u[n]\} - \mathcal{Z}\{a^n u[n]\}$$

Usando as propriedades conhecidas da Equação 5 e Equação 6:

$$X(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.8}$$

Colocando no mesmo denominador:

$$X(z) = \frac{z(z-0.8) - z(z-1)}{(z-1)(z-0.8)}$$

$$X(z) = \frac{z^2 - 0.8z - z^2 + z}{(z-1)(z-0.8)}$$

$$X(z) = \frac{(1-0.8)z}{(z-1)(z-0.8)}$$

Portanto, a Transformada Z final é:

$$X(z) = \frac{0.2z}{(z-1)(z-0.8)} \tag{7}$$

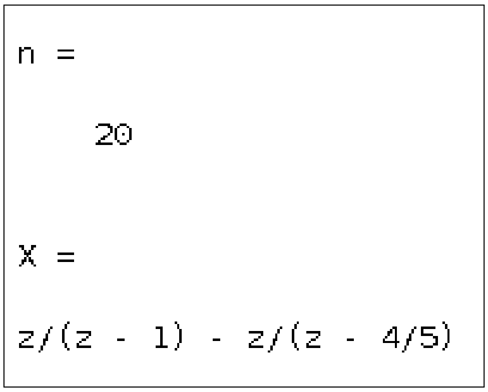
Simulação

Figura 12: Código da transformada Z do sinal de entrada

```
% numero de pontos do plot
n = 20

% calcula transformada Z
syms n
X = simplify(ztrans(1-0.8^n))
```

Fonte: Autoria própria

Figura 13: Saída do código da transformada Z do sinal de entrada


n =

20

X =

z/(z - 1) - z/(z - 4/5)

Fonte: Autoria própria

i) Represente o sinal de entrada no plano z.

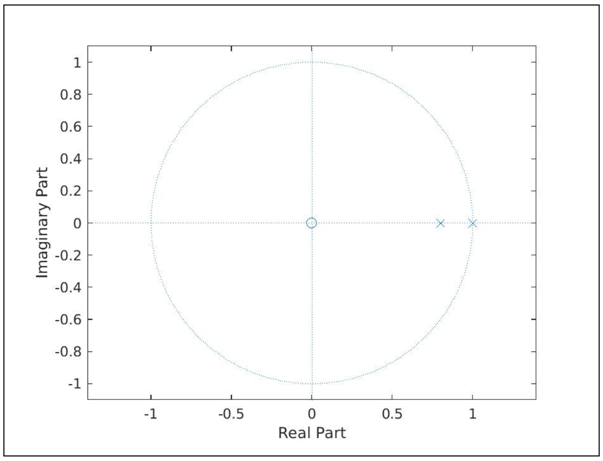
Do item anterior, sabemos que há pólos em 0,8 e 1, além de um zero na origem.

Figura 14: Código plano Z (entrada)

```
% coeficientes
b = [0 0.2] % 0.2*z
a = poly([1 0.8])  % (z - 1)*(z - 0.8)
% plot no plano z
zplane(b, a)
```

Fonte: Autoria própria

Figura 15: Simulação plano Z (entrada)



Fonte: Autoria própria

j) Determine a TZ da resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais nulas. Represente-a no plano z.

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \left(\frac{z^2}{(z+0.3)(z+0.7)}\right)\left(\frac{0.2z}{(z-1)(z-0.8)}\right)$$

$$Y(z) = \frac{0.2z^3}{(z+0.3)(z+0.7)(z-1)(z-0.8)} \tag{8}$$

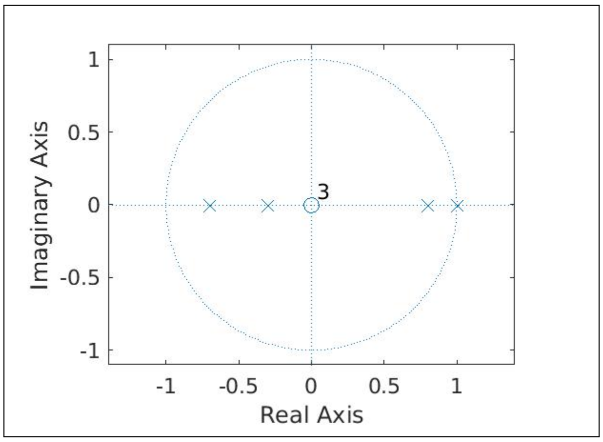
Com auxílio do MATLAB, podemos visualizar os pólos e zeros no plano Z, conforme a Figura 17 e a Figura 16.

Figura 16: Código plano Z admitindo condições iniciais

```
% coeficientes
a = poly([-0.3, -0.7, 1, 0.8])
b = [0 0.2];

% plot no plano Z
zplane(b, a);
xlabel('Real Axis');
ylabel('Imaginary Axis');

```

Fonte: Autoria própria

Figura 17: Simulação plano Z admitindo condições iniciais



Fonte: Autoria própria

k) Determine a expressão da resposta do sistema ao sinal de entrada.

Utilizamos a Equação 8 do item anterior e expandimos em frações parciais:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{A}{(z+0.3)} + \frac{B}{(z+0.7)} + \frac{C}{(z-1)} + \frac{D}{(z-0.8)}$$

Cálculo de A

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{0.2z^2}{((z+0.7)(z-1)(z-0.8)}\right]_{z=-0.3} \\ &= \frac{0.2\cdot(-0.3)^2}{(-0.3+0.7)(-0.3-1)(-0.3-0.8)} \\ &= \frac{0.018}{(0.4)(-1.3)(-1.1)} \\ &= \frac{9}{286} \approx 0.03146 \end{aligned}$$

Cálculo de B

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{0.2z^2}{(z+0.3)(z-1)(z-0.8)}\right]_{z=-0.7} \\ &= \frac{0.2\cdot(-0.7)^2}{(-0.7+0.3)(-0.7-1)(-0.7+-0.8)} \\ &= \frac{0.098}{(-0.4)(-1.7)(-1.5)} \\ &= \frac{-49}{510} \approx -0.09607 \end{aligned}$$

Cálculo de C

$$
\begin{aligned}
C &= \left[\frac{0.2z^2}{(z+0.3)(z+0.7)(z-0.8)}\right]_{z=1} \\
&= \frac{0.2\cdot(1)^2}{(1+0.3)(1+0.7)(1-0.8)} \\
&= \frac{0.2}{(1.3)(1.7)(0.2)} \\
&= \frac{100}{221} \approx 0.45248
\end{aligned}
$$

Cálculo de D

$$
\begin{aligned}
C &= \left[\frac{0.2z^2}{(z+0.3)(z+0.7)(z-1)}\right]_{z=0.8} \\
&= \frac{0.2\cdot(0.8)^2}{(0.8+0.3)(0.8+0.7)(0.8-1)} \\
&= \frac{0.128}{(1.1)(1.5)(-0.2)} \\
&= \frac{-64}{165} \approx -0.38787
\end{aligned}
$$

Substituindo os resultados:

$$
\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.03146}{(z+0.3)} - \frac{0.09607}{(z+0.7)} + \frac{0.45248}{(z-1)} - \frac{0.38787}{(z-0.8)}
$$

Passando o z multiplicando:

$$
Y(z) = 0.03146\frac{z}{(z+0.3)} - 0.09607\frac{z}{(z+0.7)} + 0.45248\frac{z}{(z-1)} - 0.38787\frac{z}{(z-0.8)}
$$

Multiplicando por z^{-1}:

$$
Y(z) = 0.03146\frac{1}{(1+0.3z^{-1})} - 0.09607\frac{1}{(1+0.7z^{-1})} + 0.45248\frac{1}{(1-z^{-1})} - 0.38787\frac{1}{(1-0.8z^{-1})}
$$

Fazendo a transformada:

$$
y[n] = 0.03146\cdot(-0.3)^n\mu[n] - 0.09607\cdot(-0.7)^n\mu[n] + 0.45248\cdot\mu[n] - 0.38787\cdot(0.8)^n\mu[n]
$$

Podemos confirmar os valores dos coeficientes obtidos por meio de simulação, conforme a Figura 18 e a Figura 19.

Figura 18: Código dos resíduos

```
format long

 a = poly([-0.3, -0.7, 1, 0.8])
 b = [0 0.2];

 % frações parciais
 [r, p, k] = residuez(b, a)

```

Fonte: Autoria própria

Figura 19: Saída do código dos resíduos

```
r =

   0.452488687782804
  -0.387878787878787
  -0.096078431372549
   0.031468531468532


p =

   1.000000000000000
   0.800000000000000
  -0.700000000000000
  -0.300000000000000


k =

     []
```

Fonte: Autoria própria

l) Identifique a componente homogênea e a componente particular na expressão da resposta do sistema.

A resposta particular corresponde aos polos do sinal de entrada $\mathrm{x}[\mathrm{n}] = (1 - 0.8^{\mathrm{n}})\mathrm{u}[\mathrm{n}]$, e a resposta homogênea, aos polos do sistema.

$$y[n] = 0.03146 \cdot (-0.3)^n u[n] - 0.09607 \cdot (-0.7)^n u[n] + 0.45248 \cdot (1^n) u[n] - 0.38787 \cdot (0.8)^n u[n]$$

$$y[n] = \underbrace{0.03146 \cdot (-0.3)^{\mathrm{n}}\mathrm{u}[\mathrm{n}] - 0.09607 \cdot (-0.7)^{\mathrm{n}}\mathrm{u}[\mathrm{n}]}_{\text{Componente homogênea}} + \underbrace{0.45248 \cdot (1^{\mathrm{n}})\mathrm{u}[\mathrm{n}] - 0.38787 \cdot (0.8)^{\mathrm{n}}\mathrm{u}[\mathrm{n}]}_{\text{Componente particular}}$$

m) Identifique a componente transitória e a componente estacionária na expressão da resposta do sistema.

A componente transitória corresponde aos polos existentes dentro do círculo unitário, enquanto a componente estacionária está associada aos polos sobre o círculo unitário da Figura 17.

$$y[n] = 0.03146 \cdot (-0.3)^n u[n] - 0.09607 \cdot (-0.7)^n u[n] + 0.45248 \cdot (1^n) u[n] - 0.38787 \cdot (0.8)^n u[n]$$

$$y[n] = \underbrace{0.03146 \cdot (-0.3)^{n} u[n] - 0.09607 \cdot (-0.7)^{n} u[n]}_{\text{Componente transitória}} \quad \underbrace{+0.45248 \cdot (1^{n}) u[n]}_{\text{Componente estacionária}} \quad \underbrace{-0.38787 \cdot (0.8)^{n} u[n]}_{\text{Componente transitória}}$$

n) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada.

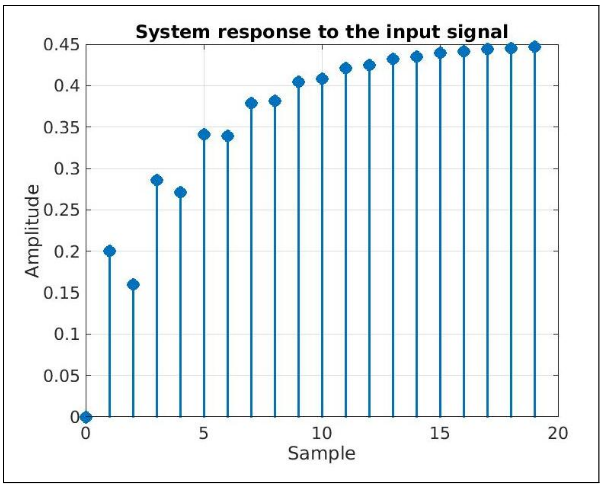
Conforme ilustrado na Figura 20 e na Figura 21, a resposta do sistema ao sinal de entrada foi obtida por meio de simulação e representada graficamente.

Figura 20: Código da resposta do sistema ao sinal de entrada

```
% n posicoes no plot
n = 20;
vec = 0:(n-1);

% criando sinal de entrada:
x = 0.03146 * (-0.3).^vec -
0.09607 * (-0.7).^vec + 0.45248 -
 0.38787 * (0.8).^vec;

% plot
stem(vec, x, 'filled', 'LineWidth'
, 1.5);
xlabel('Sample');
ylabel('Amplitude');
title('System response to the
input signal');
grid on;
```

Fonte: Autoria própria

Figura 21: Simulação da resposta do sistema ao sinal de entrada



Fonte: Autoria própria

o) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter.

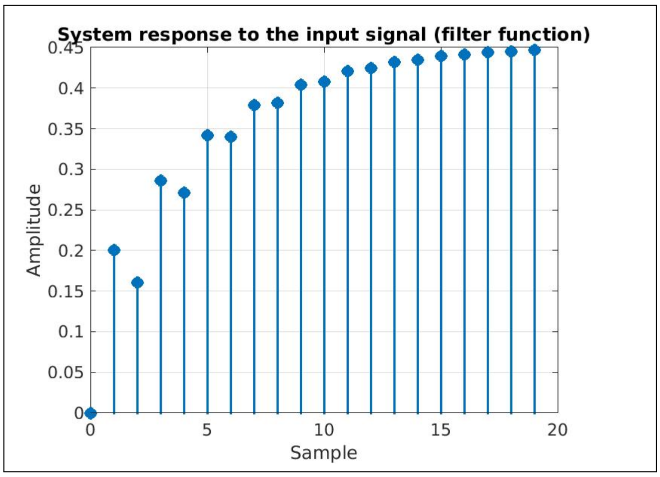
A função ‘filter‘ é utilizada quando não há interesse em obter a expressão analítica da resposta do sistema, mas apenas em esboçar sua resposta a um dado sinal de entrada. Essa função é empregada conforme a Figura 22 e a Figura 23.

Figura 22: Código da resposta do sistema ao sinal de entrada

```matlab
% n posicoes no plot
n = 20;
vec = 0:(n-1);

% H[z]
a = [1 0.21];
b = [1];

% sinal de entrada
x = 1 - 0.8.^vec;

% filtro digital discreto: convolução recursiva
y = filter(b, a, x);

% plot
stem(vec, y, 'filled', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('Sample');
ylabel('Amplitude');
title('System response to the input signal (filter function):');
grid on;

```

Fonte: Autoria própria

Figura 23: Simulação da resposta do sistema ao sinal de entrada



Fonte: Autoria própria

p) Admita agora as condições iniciais não nulas. Determine o sinal $x_{ci}[n]$ que, colocado na entrada do sistema com condições iniciais nulas, provoca uma resposta equivalente à existência das condições iniciais.

Do enunciado da questão, temos que o sinal é definido pela equação de diferenças

$$y[n] + y[n-1] + 0.21\,y[n-2] = x[n],$$

com as condições iniciais

$$y[-1] = 1 \quad \text{e} \quad y[-2] = 1.$$

Além disso, sabemos a relação entre deslocamento no tempo e a transformada Z, conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Relações da Transformada Z para Deslocamento no Tempo

Operação	Transformada Z
$x[n-m]$	$z^{-m}X[z] + z^{-m}\sum_{k=1}^{m} x[-k]z^{k}$
$x[n-1]$	$z^{-1}X[z] + x[-1]$
$x[n-2]$	$z^{-2}X[z] + z^{-1}x[-1] + x[-2]$
$x[n+m]$	$z^{m}X[z] - z^{m}\sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}$
$x[n+1]$	$zX[z] - zx[0]$
$x[n+2]$	$z^{2}X[z] - z^{2}x[0] - zx[1]$

Fonte: Autoria própria

Aplicando a transformada Z na equação do enunciado com auxílio das propriedades da Tabela 1:

$$Y[z] + (y[-1] + z^{-1}Y[z]) + 0.21(y[-2] + z^{-1}y[-1] + z^{-2}Y[z]) = X[z]$$

$$Y[z] + y[-1] + z^{-1}Y[z] + 0.21y[-2] + 0.21z^{-1}y[-1] + 0.21z^{-2}Y[z] = X[z]$$

$$Y[z](1 + z^{-1} + 0.21z^{-2}) = X[z] - y[-1] - 0.21y[-2] - 0.21z^{-1}y[-1]$$

Substituindo as condições iniciais:

$$Y[z](1 + z^{-1} + 0.21z^{-2}) = X[z] - 1 - 0.21 - 0.21z^{-1}$$

Separando em condições iniciais nulas e não nulas:

$$Y[z] = \frac{X[z]}{1 + z^{-1} + 0.21z^{-2}} + \frac{-1,21 - 0,21z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.21z^{-2}}$$

Sendo assim, os valores de $x_{\text{ci}}[z]$ são:

$$x_{\text{ci}}[z] = -1.21 - 0.21z^{-1}$$

Desta forma, obtemos o valor de $x_{\text{ci}}[n]$:

$$x_{\text{ci}}[n] = -1.21\delta[n] - 0.21\delta[n-1]$$

É possível validar os resultador por meio de simulação, conforme a Figura 24 e Figura 25.

Figura 24: Código da resposta do sinal de entrada com função filter

```
% numero de pontos do plot
n = 20

% calcula transformada Z
syms n
X = simplify(ztrans(1-0.8^n))

```

Fonte: Autoria própria

Figura 25: Saída do código do resposta do sinal de entrada

```
y =

   -1.2100   -0.2100
```

Fonte: Autoria própria

q) Determine a TZ da resposta do sistema às condições iniciais.

Obtida imediatamente a partir das expressões acima

$$Y_{ci}[Z] = \frac{-1,21 - 0,21z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.21z^{-2}}$$

r) Determine a expressão da resposta do sistema às condições iniciais.

$$Y_{ci}[Z] = \frac{-1,21 - 0,21z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0,21z^{-2}} = \frac{-1,21 - 0,21z^{-1}}{(1 + 0,3z^{-1})(1 + 0,7z^{-1})} = \frac{A}{(1 + 0,3z^{-1})} + \frac{B}{(1 + 0,7z^{-1})}$$

Cálculo de A:

$$A = \left[\frac{-1,21 - 0,21\left(\frac{1}{z}\right)}{1 + 0,7\left(\frac{1}{z}\right)}\right]_{z=-0.3} = \frac{-1,21 - 0,21\left(\frac{-1}{0.3}\right)}{1 + 0,7\left(\frac{-1}{0.3}\right)} = \frac{0,51}{1,333} = 0,3825$$

Cálculo de B:

$$B = \left[\frac{-1,21 - 0,21\left(\frac{1}{z}\right)}{1 + 0,3\left(\frac{1}{z}\right)}\right]_{z=-0.7} = \frac{-1,21 - 0,21\left(\frac{-1}{0.7}\right)}{1 + 0,3\left(\frac{-1}{0.7}\right)} = \frac{-0,91}{0,57142} = -1,5925$$

Retomando o cálculo:

$$Y_{ci}[z] = \frac{0,3825}{(1 + 0,3z^{-1})} + \frac{-1,5925}{(1 + 0,7z^{-1})}$$

Realizando a transformada Y[z] $\leftrightarrow$ y[n] temos que:

$$y_{ci}[n] = 0,3825(-0,3)^n u[n] - 1,5925(-0,7)^n u[n]$$

É possível validar esses cálculos por meio da simulação no MATLAB, conforme a Figura 26 e a Figura 27.

Figura 26: Código TZ inversa com condições iniciais

```
a = [1, 1, 0.21];
b = [-1.21 -0.21];

% residuos
[r , p, k] = residuez(b, a)

% transformada inversa de Z:
syms z;
iztrans(r(1)/(1 - p(1)*z.^(-1)) + r(2)/(1 -
p(2)*z.^(-1)))
```

Fonte: Autoria própria

Figura 27: Saída do código TZ inversa com condições iniciais

```
r =

   -1.5925
    0.3825


p =

   -0.7000
   -0.3000


k =

     []


ans =

(153*(-3/10)^n)/400 - (637*(-7/10)^n)/400
```

Fonte: Autoria própria

s) Determine a resposta completa do sistema admitindo condições iniciais não nulas.

No item K, obtemos a expressão do sistema com condições iniciais nulas:

$$y[n] = 0.03146 \cdot (-0.3)^n u[n] - 0.09607 \cdot (-0.7)^n u[n] + 0.45248 \cdot (1^n) u[n] - 0.38787 \cdot (0.8)^n u[n]$$

Adicionando a consideração das condições iniciais:

$$y_{completa}[n] = 0.03146 \cdot (-0.3)^n u[n] - 0.09607 \cdot (-0.7)^n u[n] + 0.45248 \cdot (1^n) u[n] - 0.38787 \cdot (0.8)^n u[n]$$

$$+0,3825(-0,3)^n u[n] - 1,5925(-0,7)^n u[n]$$

De forma que:

$$y_{completa}[n] == \underbrace{0.03146 \cdot (-0.3)^n \mathrm{u}[n] - 0.09607 \cdot (-0.7)^n \mathrm{u}[n] + 0.45248 \cdot (1^n) \mathrm{u}[n] - 0.38787 \cdot (0.8)^n \mathrm{u}[n]}_{\text{Condições iniciais nulas}}$$

$$+\underbrace{0.3825(-0.3)^n \mathrm{u}[n] - 1.5925(-0.7)^n \mathrm{u}[n]}_{\text{Condições iniciais}}$$

$$y_{completa}[n] = 0,413(-0,3)^n - 1,688(-0,7)^n + 0,452 - 0,387(-0,8)^n$$

t) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada, admitindo condições iniciais não nulas.

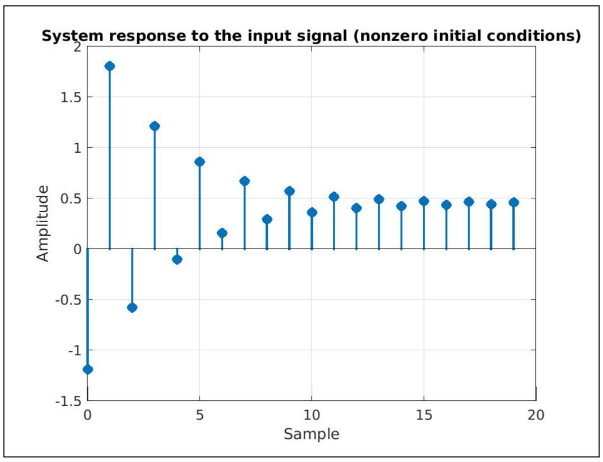
Conforme ilustrado na Figura 28 e na Figura 29, a resposta do sistema ao sinal de entrada foi simulada considerando condições iniciais não nulas.

Figura 28: Código resposta do sistema (condições iniciais não nulas)

```
% vetor de n posicoes
n = 20;
vec = 0:(n-1);

% sinal de entrada
x = 0.413 * (-0.3).^vec -
1.668*(-0.7).^vec + 0.452 - 0.387
 * (-0.8).^vec;

% plot
stem(vec,x,'filled', 'LineWidth',
1.5);
grid on;
xlabel('Sample');
ylabel('Amplitude');
title('System response to the
input signal (nonzero initial
conditions)');

```

Fonte: Autoria própria

Figura 29: Simulação da resposta do sistema (condições iniciais não nulas)



Fonte: Autoria própria

u) Represente a resposta do sistema ao sinal de entrada utilizando a função filter.

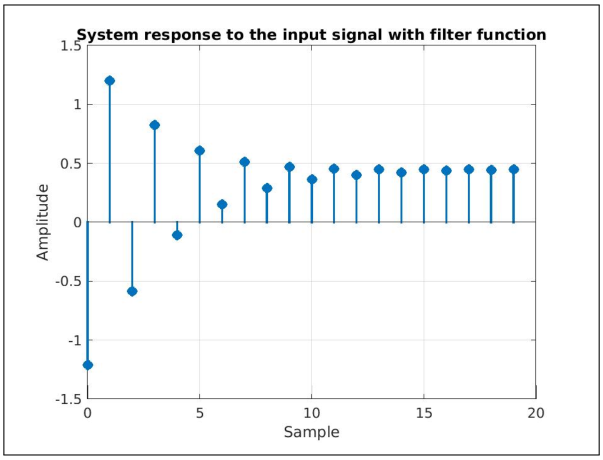
Conforme ilustrado na Figura 30 e na Figura 31, a resposta do sistema ao sinal de entrada foi simulada utilizando a função ‘filter‘.

Figura 30: Código resposta do sistema (função filter)

```
% criando vetor de n posicoes
n = 20;
vec = 0:(n-1);

% vetores de H[z]:
a = [1 1 0.21];
b = [1];
c = [1 1];

% equação do sinal de entrada
x = 1 - 0.8.^(vec);

% função filter
xic = filtic(b, a, c);
y = filter(b, a, x, xic);

% plot
stem(vec, y, 'filled', 'LineWidth'
, 1.5);
xlabel('Sample');
ylabel('Amplitude');
title('System response to the
input signal with filter function
');
grid on;

```

Fonte: Autoria própria

Figura 31: Simulação da resposta do sistema (função filter)



Fonte: Autoria própria