Processos Estocásticos

Revisão: Valor esperado

Prof. Roberto Wanderley da Nóbrega

roberto.nobrega@ifsc.edu.br

PRE029006
Engenharia de Telecomunicações

Instituto Federal Santa Catarina
Câmpus São José

Definição

Definição de valor esperado

Definição

O **valor esperado** de uma VA é dado por

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x \, p_X(x). \qquad \text{(caso discreto)}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx. \qquad \text{(caso contínuo)}$$

Definição de valor esperado

Definição

O **valor esperado** de uma VA é dado por

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x \, p_X(x). \qquad \text{(caso discreto)}$$

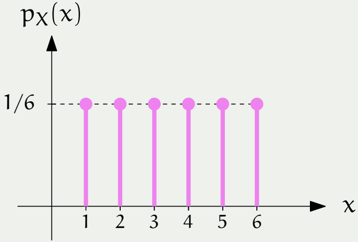
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx. \qquad \text{(caso contínuo)}$$

O valor esperado de X também é chamado de **média** de X. Notação:

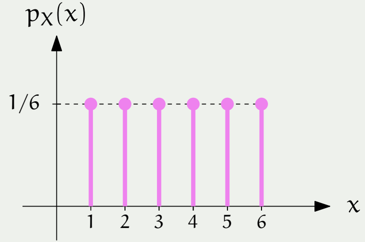
$$\mu_X = E[X].$$

Exemplo: Distribuição uniforme discreta

Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$.



Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$.

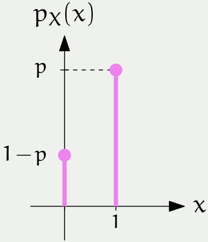


Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x \, p_X(x) = (1) \cdot \frac{1}{6} + (2) \cdot \frac{1}{6} + \cdots + (6) \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

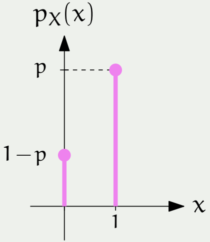
Exemplo: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$.



Exemplo: Distribuição de Bernoulli

Seja $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

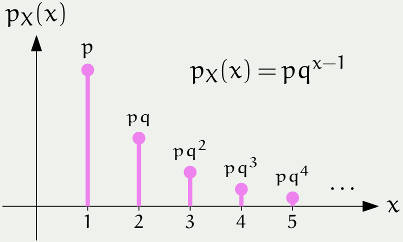


Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x\, p_X(x) = (0)(1-p) + (1)p = p.$$

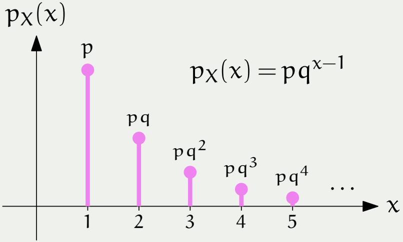
Exemplo: Distribuição geométrica

Seja $X \sim \text{Geometric}(p)$. $\qquad (q = 1 - p)$



Exemplo: Distribuição geométrica

Seja $X \sim \mathrm{Geometric}(p)$. $(q = 1 - p)$

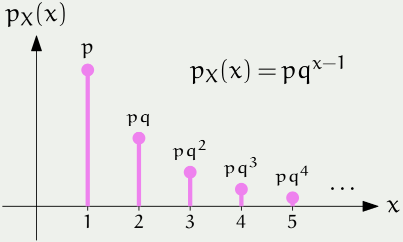


Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x\, p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1}$$

Exemplo: Distribuição geométrica

Seja $X \sim \text{Geometric}(p)$. $\quad (q = 1 - p)$



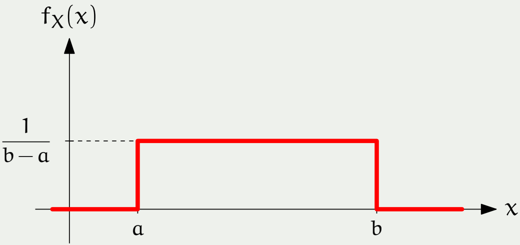
Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \sum_{x \in S_X} x\, p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1}$$

$$= p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^x = p \frac{d}{dq} \sum_{x=1}^{\infty} q^x = p \frac{d}{dq} \frac{q}{1-q} = p \frac{1}{(1-q)^2} = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

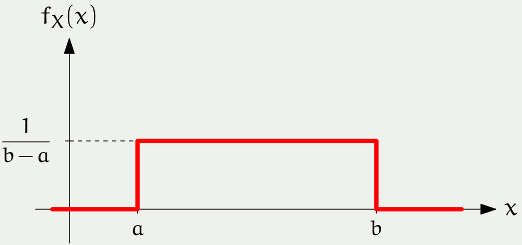
Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

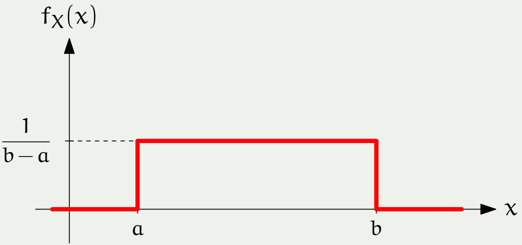
Seja $X \sim \mathrm{Uniform}([a, b])$.



Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx$$

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.



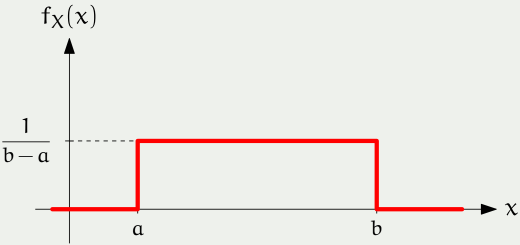
Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \mathrm{Uniform}([a, b])$.



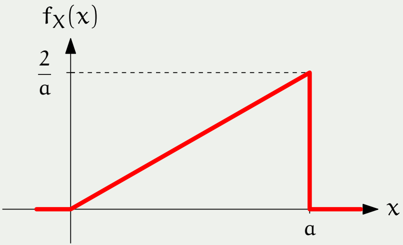
Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx$$

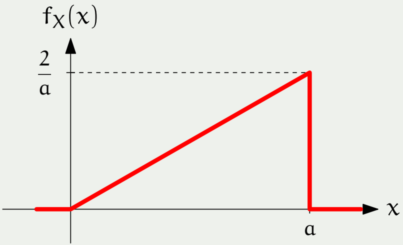
$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Exemplo: Distribuição triangular contínua

Seja $X \sim \mathrm{Triangular}(\mathrm{left}{=}0, \mathrm{right}{=}a, \mathrm{mode}{=}a)$.



Seja $X \sim \mathrm{Triangular}(\mathrm{left}{=}0, \mathrm{right}{=}a, \mathrm{mode}{=}a)$.

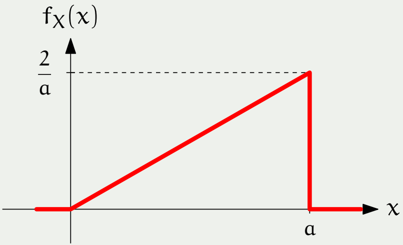


Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^a x\, \frac{2x}{a^2}\, dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2\, dx$$

Exemplo: Distribuição triangular contínua

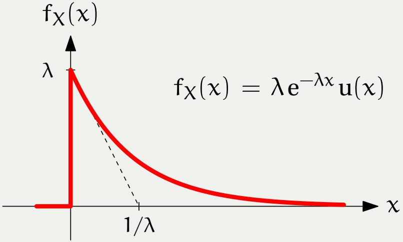
Seja $X \sim \mathrm{Triangular}(\mathrm{left}{=}0, \mathrm{right}{=}a, \mathrm{mode}{=}a)$.



Seu valor esperado é dado por:

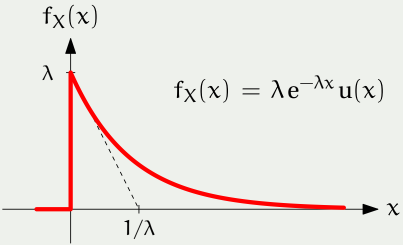
$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^a x\, \frac{2x}{a^2}\, dx = \frac{2}{a^2} \int_0^a x^2\, dx$$
$$= \frac{2}{a^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=a} = \frac{2a}{3}.$$

Seja $X \sim \mathrm{Exponential}(\lambda)$.



Exemplo: Distribuição exponencial

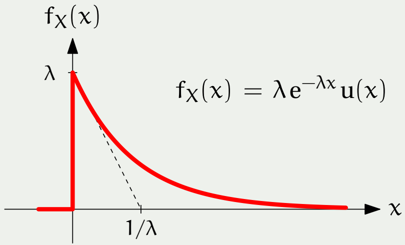
Seja $X \sim \mathrm{Exponential}(\lambda)$.



Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx$$

Seja $X \sim \mathrm{Exponential}(\lambda)$.



Seu valor esperado é dado por:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_0^{\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lambda \left[-\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x + 1)}{\lambda^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

1. **Valor esperado de uma constante**

   $$E[c] = c.$$

Propriedades do valor esperado

1. **Valor esperado de uma constante**

   $$\mathrm{E}[c] = c.$$

2. **Homogeneidade**

   $$\mathrm{E}[cX] = c\,\mathrm{E}[X].$$

Propriedades do valor esperado

1. **Valor esperado de uma constante**

   $\mathrm{E}[c] = c.$

2. **Homogeneidade**

   $\mathrm{E}[cX] = c\,\mathrm{E}[X].$

3. **Translação**

   $\mathrm{E}[X + c] = \mathrm{E}[X] + c.$

Propriedades do valor esperado

1. **Valor esperado de uma constante**

   $\mathrm{E}[c] = c.$

2. **Homogeneidade**

   $\mathrm{E}[cX] = c\,\mathrm{E}[X].$

3. **Translação**

   $\mathrm{E}[X + c] = \mathrm{E}[X] + c.$

4. **Aditividade**

   $\mathrm{E}[X + Y] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y].$

Propriedades do valor esperado

1. **Valor esperado de uma constante**

   $$E[c] = c.$$

2. **Homogeneidade**

   $$E[cX] = c\,E[X].$$

3. **Translação**

   $$E[X + c] = E[X] + c.$$

4. **Aditividade**

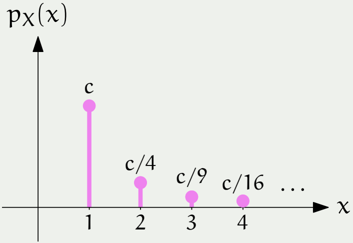
   $$E[X + Y] = E[X] + E[Y].$$

As propriedades 2 e 4 nos dizem que o valor esperado é um **operador linear**.

Nem todas as VAs possuem média

Seja X uma VA discreta com PMF dada por

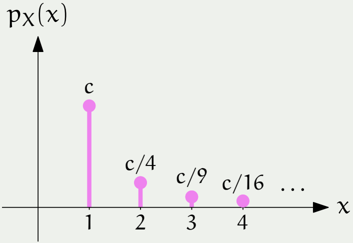
$$p_X(x) = \frac{c}{x^2}, \quad x = 1, 2, \ldots, \qquad \left[c = 6/\pi^2\text{: problema de Basileia}\right]$$



Nem todas as VAs possuem média

Seja X uma VA discreta com PMF dada por

$$p_X(x) = \frac{c}{x^2}, \quad x = 1, 2, \ldots, \qquad \left[c = 6/\pi^2\text{: problema de Basileia}\right]$$



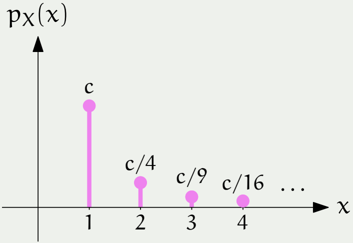
O valor esperado de X é dado por

$$E[X] = \sum_{x \in S_x} x\, p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{c}{x^2} = c \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} =$$

Nem todas as VAs possuem média

Seja X uma VA discreta com PMF dada por

$$p_X(x) = \frac{c}{x^2}, \quad x = 1, 2, \ldots, \qquad \left[c = 6/\pi^2\text{: problema de Basileia}\right]$$

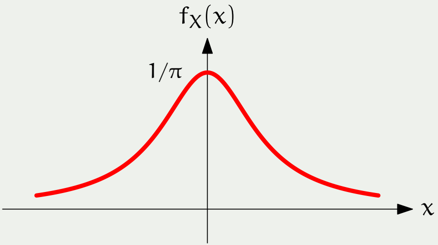


O valor esperado de X é dado por

$$E[X] = \sum_{x \in S_x} x\, p_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{c}{x^2} = c \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = \infty.$$

Seja X uma VA contínua com PDF dada por

$$f_X(x) = \frac{1/\pi}{1 + x^2}. \qquad \text{(Cauchy)}$$



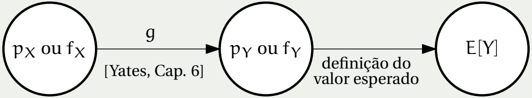
Nesse caso, $\mathrm{E}[X]$ é indefinido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, \mathrm{d}x \text{ não existe.}$$

Valor esperado de função de VA

Seja $Y = g(X)$.

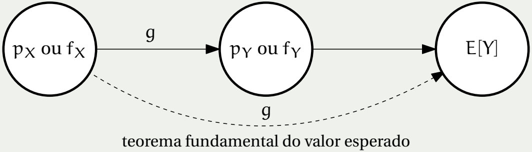
Em princípio, para calcular $E[Y]$ seria necessário primeiro obter p_Y ou f_Y.



Seja $Y = g(X)$.

Em princípio, para calcular $\mathrm{E}[Y]$ seria necessário primeiro obter p_Y ou f_Y.

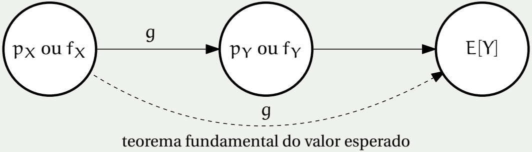
No entanto, o *teorema fundamental do valor esperado* fornece um atalho.



Seja $Y = g(X)$.

Em princípio, para calcular $\mathrm{E}[Y]$ seria necessário primeiro obter p_Y ou f_Y.

No entanto, o *teorema fundamental do valor esperado* fornece um atalho.



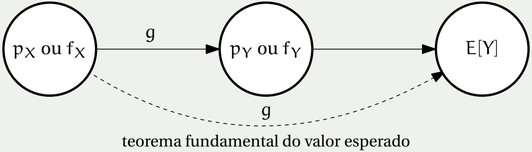
Teorema fundamental do valor esperado

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{x \in S_X} g(x)\, p_X(x). \qquad \text{(caso discreto)}$$

Seja $Y = g(X)$.

Em princípio, para calcular $E[Y]$ seria necessário primeiro obter p_Y ou f_Y.

No entanto, o *teorema fundamental do valor esperado* fornece um atalho.

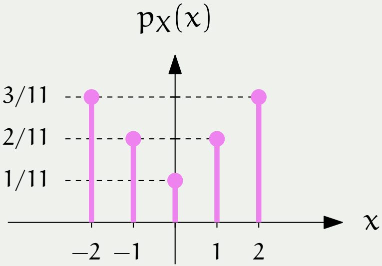


Teorema fundamental do valor esperado

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx. \qquad \text{(caso contínuo)}$$

Exemplo: Caso discreto

Seja X uma VA discreta com PMF dada pela figura.



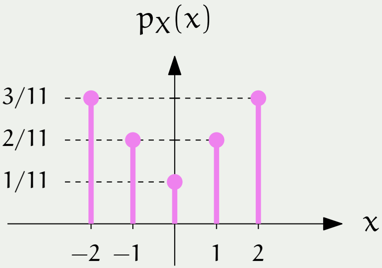
Determine $E[X^2]$.

Exemplo: Caso discreto

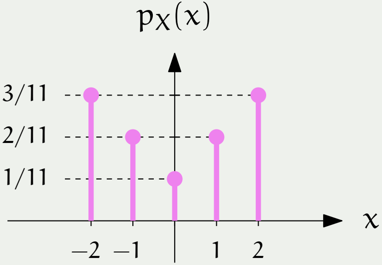
Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $p_X \to p_Y \to E[Y]$.

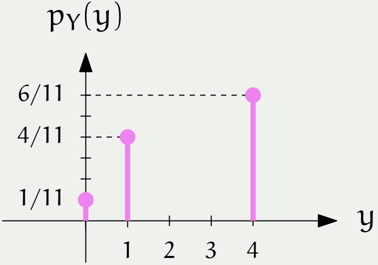
Exemplo: Caso discreto

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $p_X \to p_Y \to \mathrm{E}[Y]$.



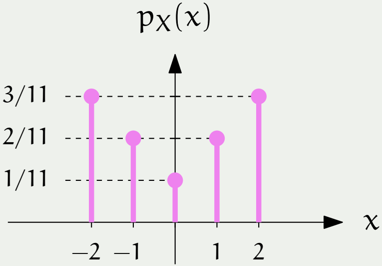
Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $p_X \to \boxed{p_Y \to E[Y]}$.



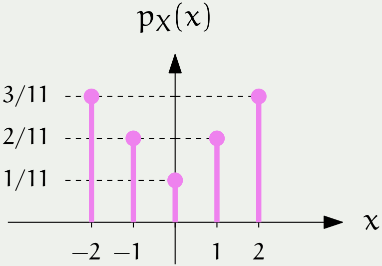


$$E[X^2] = E[Y] = (0)\cdot\frac{1}{11} + (1)\cdot\frac{4}{11} + (4)\cdot\frac{6}{11} = \frac{28}{11}.$$

Solução 2. Usar o teorema fundamental do valor esperado.

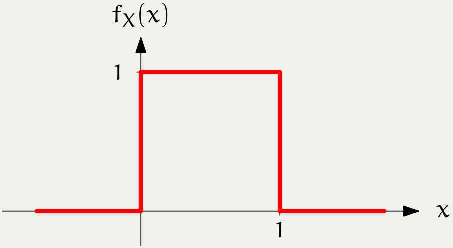


Solução 2. Usar o teorema fundamental do valor esperado.



$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{x \in S_X} x^2 p_X(x) \\
&= (-2)^2 \cdot \frac{3}{11} + (-1)^2 \cdot \frac{2}{11} + (0)^2 \cdot \frac{1}{11} + (1)^2 \cdot \frac{2}{11} + (2)^2 \cdot \frac{3}{11} \;=\; \frac{28}{11}.
\end{aligned}
$$

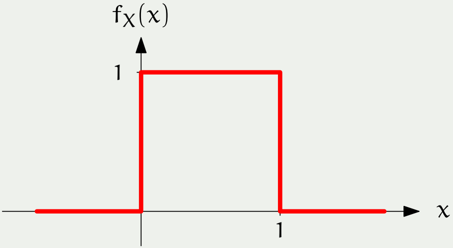
Seja X uma VA contínua distribuída uniformemente no intervalo $[0, 1]$.



Determine $\mathrm{E}[X^2]$.

Exemplo: Caso contínuo

Seja X uma VA contínua distribuída uniformemente no intervalo $[0, 1]$.



Determine $\mathrm{E}[X^2]$.

X^2 é um exemplo de VA com *distribuição beta*.

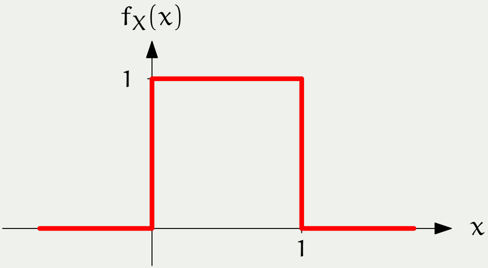
Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to f_Y \to E[Y]$.

Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to f_Y \to E[Y]$.

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to f_Y \to \mathrm{E}[Y]$.



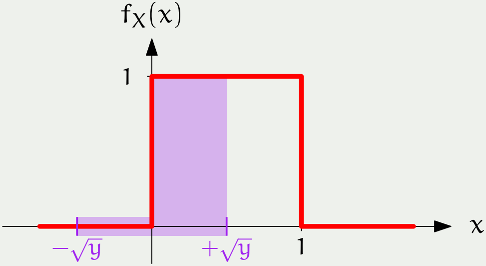
Caso $y < 0$:

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = 0.$$

Caso $y > 1$:

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = 1.$$

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to f_Y \to E[Y]$.

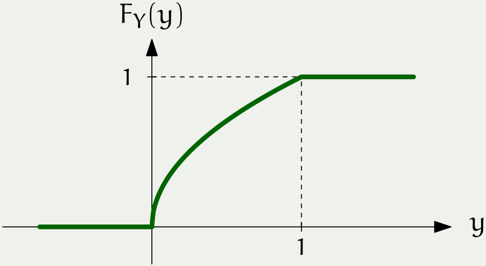


Caso $0 \leq y \leq 1$**:**

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[X^2 \leq y]$$
$$= \Pr[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}] = \int_{-\sqrt{y}}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\sqrt{y}} 1\,dx = \sqrt{y}.$$

Exemplo: Caso contínuo

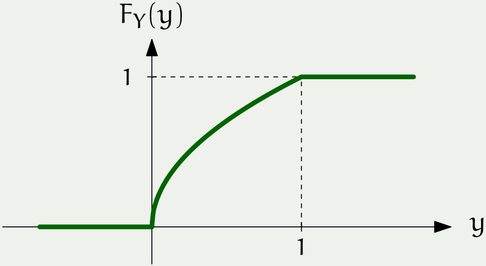
Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to f_Y \to E[Y]$.



Sumário:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to f_Y \to \mathrm{E}[Y]$.

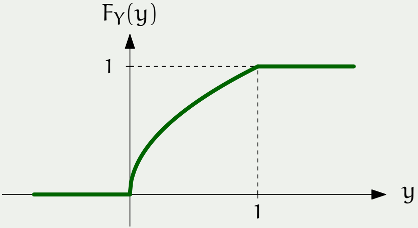


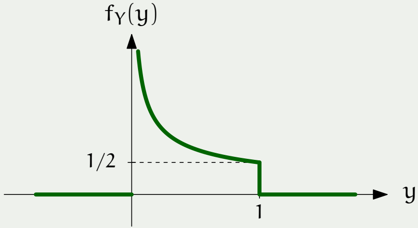
Sumário:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to f_Y \to \mathrm{E}[Y]$.

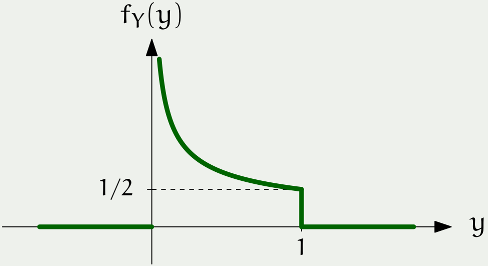




$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \sqrt{y}, & 0 \le y \le 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

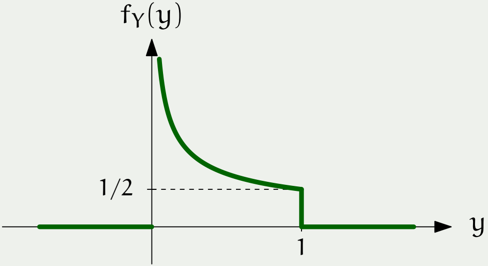
Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to \boxed{f_Y \to E[Y]}$.



$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo: Caso contínuo

Solução 1. Seja $Y = X^2$. Etapas: $f_X \to F_Y \to f_Y \to \mathrm{E}[Y]$.



$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

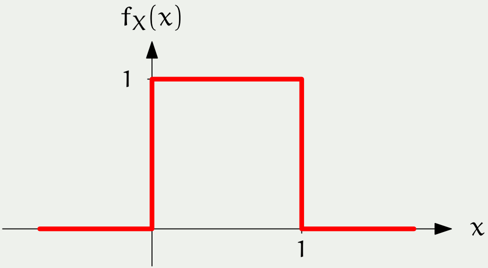
$$\mathrm{E}[X^2] = \mathrm{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y\, \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{1/2}\, dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^{3/2}}{3/2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo: Caso contínuo

Solução 2. Usar o teorema fundamental do valor esperado.

Solução 2. Usar o teorema fundamental do valor esperado.



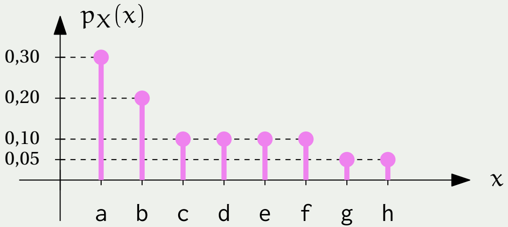
$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f_X(x) \, dx = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Considere a seguinte "fonte de informação", modelada pela VA X:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

X é uma VA "categórica", e não uma VA real.



Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Considere a seguinte "fonte de informação", modelada pela VA X:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	$0{,}3$	$0{,}2$	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}1$	$0{,}05$	$0{,}05$

Um codificador "ingênuo" utilizaria 3 bits para cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\mathrm{Enc}(x)$	000	001	010	011	100	101	110	111

Considere a seguinte “fonte de informação”, modelada pela VA X:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

Um codificador “ingênuo” utilizaria 3 bits para cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\mathrm{Enc}(x)$	000	001	010	011	100	101	110	111

Como alternativa, considere o codificador abaixo:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\mathrm{Enc}(x)$	01	000	111	110	101	100	0011	0010

Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Considere a seguinte "fonte de informação", modelada pela VA X:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05

Um codificador "ingênuo" utilizaria 3 bits para cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\mathrm{Enc}(x)$	000	001	010	011	100	101	110	111

Como alternativa, considere o codificador abaixo:

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$\mathrm{Enc}(x)$	01	000	111	110	101	100	0011	0010

Nesse caso, qual é o comprimento médio da representação binária das letras da fonte?

Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Seja $\ell : S_X \to \mathbb{N}$ a função que retorna o comprimento da representação binária de cada letra da fonte.

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05
$\mathrm{Enc}(x)$	01	000	111	110	101	100	0011	0010
$\ell(x)$	2	3	3	3	3	3	4	4

Exemplo: Compressão de fonte sem perdas

Seja $\ell : S_X \to \mathbb{N}$ a função que retorna o comprimento da representação binária de cada letra da fonte.

x	$\mathtt{a}$	$\mathtt{b}$	$\mathtt{c}$	$\mathtt{d}$	$\mathtt{e}$	$\mathtt{f}$	$\mathtt{g}$	$\mathtt{h}$
$p_X(x)$	0,3	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05
$\mathrm{Enc}(x)$	01	000	111	110	101	100	0011	0010
$\ell(x)$	2	3	3	3	3	3	4	4

Pelo teorema fundamental do valor esperado:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\ell(X)] &= \sum_{x \in S_X} \ell(x)\, p_X(x) \\
&= \ell(\mathtt{a})p_X(\mathtt{a}) + \ell(\mathtt{b})p_X(\mathtt{b}) + \cdots + \ell(\mathtt{h})p_X(\mathtt{h}) \\
&= 2 \cdot 0{,}3 \ + \ 3 \cdot 0{,}2 \ + \ \cdots \ + \ 4 \cdot 0{,}05 \\
&= 2{,}8 \text{ bits.}
\end{aligned}$$

Variância e desvio padrão

Definição

A **variância** de uma variável aleatória X é dada por

$$\sigma_X^2 = \mathrm{var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mu_X)^2].$$

O **desvio padrão** de X é dado por

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}[X]}.$$

A variância é uma medida de *dispersão ao redor da média*.

Fórmula alternativa para a variância

Teorema

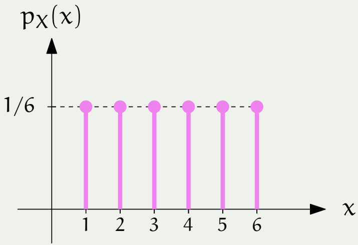
$$\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}[X] &= \mathrm{E}[(X - \mu_X)^2] \\
&= \mathrm{E}[X^2 - 2X\mu_X + \mu_X^2] \\
&= \mathrm{E}[X^2] - 2\underbrace{\mathrm{E}[X]}_{\mu_X}\mu_X + \underbrace{\mathrm{E}[\mu_X^2]}_{\mu_X^2} \\
&= \mathrm{E}[X^2] - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}[X^2] - \mu_X^2. \quad \square
\end{aligned}$$

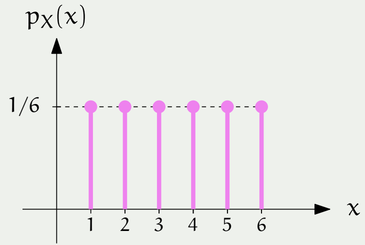
Exemplo: Distribuição uniforme discreta

Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$.



Exemplo: Distribuição uniforme discreta

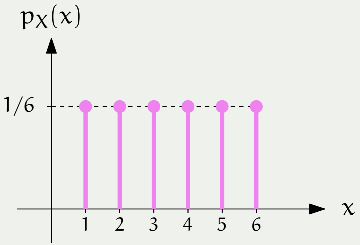
Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$.



Já foi visto que $\mathrm{E}[X] = 3{,}5 = 7/2$.

Exemplo: Distribuição uniforme discreta

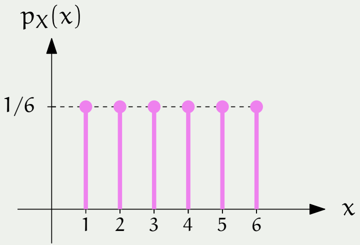
Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$.



Já foi visto que $E[X] = 3{,}5 = 7/2$.

$$E[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 p_X(x) = (1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2)^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + (6)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Seja $X \sim \mathrm{DiscreteUniform}(1, 6)$.



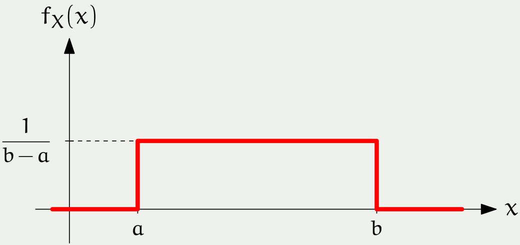
Já foi visto que $\mathrm{E}[X] = 3{,}5 = 7/2$.

$$\mathrm{E}[X^2] = \sum_{x \in S_X} x^2 p_X(x) = (1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2)^2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + (6)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

$$\mathrm{var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

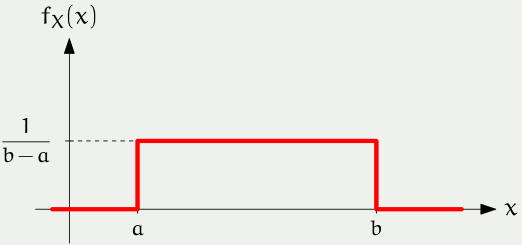
Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \mathrm{Uniform}([a, b])$.



Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \mathrm{Uniform}([a, b])$.

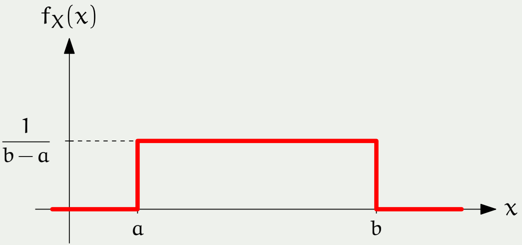


Já foi visto que

$$E[X] = \frac{a+b}{2}.$$

Exemplo: Distribuição uniforme contínua

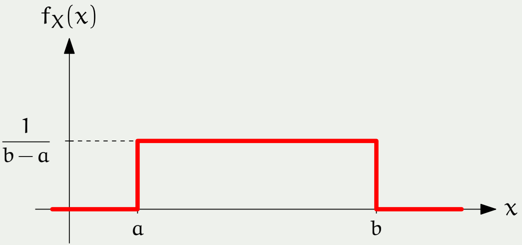
Seja $X \sim \mathrm{Uniform}([a, b])$.



Além disso,

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, dx = \int_a^b x^2\, \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx$$

Seja $X \sim \text{Uniform}([a, b])$.

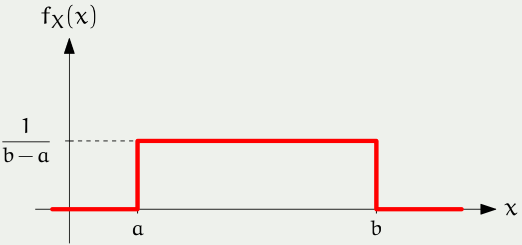


Além disso,

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx$$
$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

Exemplo: Distribuição uniforme contínua

Seja $X \sim \mathrm{Uniform}([a, b])$.

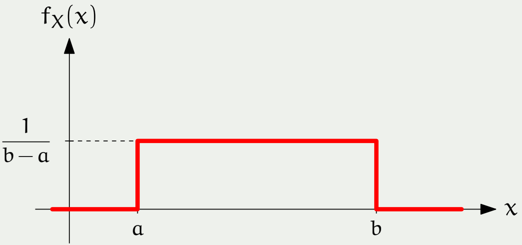


Além disso,

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Seja $X \sim \mathrm{Uniform}([a,b])$.



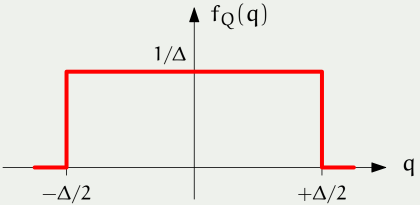
Portanto,

$$\mathrm{var}[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemplo: Ruído de quantização

Uma suposição bastante comum na teoria de quantizadores uniformes é considerar que o ruído de quantização seja uma VA Q com PDF

$$f_Q(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & -\dfrac{\Delta}{2} \leq q \leq \dfrac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$

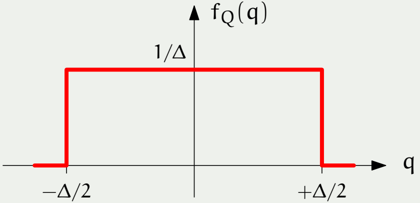


onde Δ é a distância entre os níveis de quantização.

Exemplo: Ruído de quantização

Uma suposição bastante comum na teoria de quantizadores uniformes é considerar que o ruído de quantização seja uma VA Q com PDF

$$f_Q(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & -\dfrac{\Delta}{2} \leq q \leq \dfrac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{c.c.}, \end{cases}$$



onde Δ é a distância entre os níveis de quantização.

Portanto, a variância do ruído de quantização é dada por $\sigma_Q^2 = \Delta^2/12$; esse resultado é útil para calcular a *razão sinal–ruído de quantização*.

Propriedades da variância

1. **Nunca negativa**

   $\mathrm{var}[X] \geq 0.$

Propriedades da variância

1. **Nunca negativa**

   $$\mathrm{var}[X] \geq 0.$$

2. **Variância de uma constante**

   $$\mathrm{var}[c] = 0.$$

Propriedades da variância

1. **Nunca negativa**

   $\mathrm{var}[X] \geq 0.$

2. **Variância de uma constante**

   $\mathrm{var}[c] = 0.$

3. **Multiplicação por constante**

   $\mathrm{var}[cX] = c^2\,\mathrm{var}[X].$

1. **Nunca negativa**

   $$\mathrm{var}[X] \geq 0.$$

2. **Variância de uma constante**

   $$\mathrm{var}[c] = 0.$$

3. **Multiplicação por constante**

   $$\mathrm{var}[cX] = c^2\,\mathrm{var}[X].$$

4. **Translação**

   $$\mathrm{var}[X + c] = \mathrm{var}[X].$$

Propriedades da variância

1. **Nunca negativa**

   $$\mathrm{var}[X] \geq 0.$$

2. **Variância de uma constante**

   $$\mathrm{var}[c] = 0.$$

3. **Multiplicação por constante**

   $$\mathrm{var}[cX] = c^2\,\mathrm{var}[X].$$

4. **Translação**

   $$\mathrm{var}[X + c] = \mathrm{var}[X].$$

5. **Variância da soma**

   $$\mathrm{var}[X + Y] = \mathrm{var}[X] + \mathrm{var}[Y] \; + \; ????.$$

Média e variância de transformação linear afim

Teorema

Seja X uma VA e seja

$$Y = aX + b,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Então,

$$\mu_Y = a\mu_X + b,$$
$$\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2.$$

Exercícios propostos

- 3.3.4.
- 3.5.11.
- 4.4.4.
- 4.4.6.
- 4.4.7.
- 4.5.3.

Esboce sua resposta sempre que possível.

Referências

Referências

Steven M. Kay.
Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB®.
Springer, 2006.

Roy D. Yates and David J. Goodman.
Probability and Stochastic Processes.
Wiley, 3rd edition, 2014.