

# Sistemas Realimentados - 2023/2

Nome: Luiza Batista Laquini

Data limite para entrega: 28/9 às 6hs

## Trabalho 2 - O método do lugar das raízes

```
I=21; % Seu valor de I
[G1,G3,G4]=ini_t2(I);
datetime('now')
```

```
ans = datetime
      28-Sep-2023 01:26:08
```

**Atividade 1: Esboçar o lugar das raízes de  $1 + KG_1(s) = 0$  para  $K > 0$  e  $K < 0$ . Desenhe à mão, usando as propriedades de construção do LR, digitalize e insira abaixo a figura de forma bem visível. Incluir no esboço:**

- 1.1 Raízes para  $K = 0$  e  $K \rightarrow \infty$ .
- 1.2 Pontos de passagem no eixo imaginário se houver.
- 1.3 As assíntotas e seus ângulos.
- 1.4 Ponto de interseção das assíntotas
- 1.5 Localização dos pontos de raízes múltiplas (encontro de polos)

G1

G1 =

$$\frac{21}{s^3 + 58s^2 + 792s}$$

Continuous-time transfer function.  
Model Properties

Seu meu  $I=21$ ,  $G_1(s) = \frac{21}{s^3 + 58s^2 + 792s}$  } sistema com 3 polos e nenhum zero.

Colocando na forma  $1 + K G_1(s) = 0$

$$1 + K \left( \frac{21}{s^3 + 58s^2 + 792s} \right) = 0$$

\* Elaborar para  $K > 0$  e  $K < 0$ !

(1.1) Raízes para  $K=0$  são os polos de  $G_1(s)$  e raízes para  $K=\infty$  são os zeros de  $G_1(s)$ .

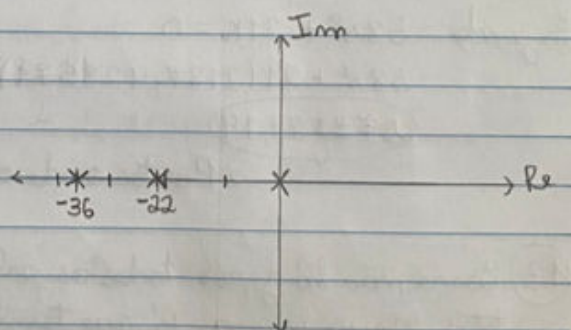
$$s^3 + 58s^2 + 792s = 0$$

$$s(s^2 + 58s + 792) = 0$$

$$s' = 0$$

$$\Delta = 58^2 - 4 \cdot 1 \cdot 792$$

$$\Delta = 196$$



$$s = \frac{-58 \pm 14}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} s'' = -22 \\ s''' = -36 \end{array} \right.$$

↳ Não há zeros, portanto,  $p/K = \infty$   
o LR segue as assíntotas para o infinito.

(1.2) Os pontos de interseção com o eixo imaginário são determinados usando o critério de Routh-Hurwitz

$$1 \pm K G_1(s) = 0$$

$$1 \pm K \left( \frac{21}{s^3 + 58s^2 + 792s} \right) = 0$$

$$\frac{s^3 + 58s^2 + 792s \pm 21K}{s^3 + 58s^2 + 792s} = 0$$

Aplica-se Routh em:  
 $s^3 + 58s^2 + 792s + 21K$  ( $p/K > 0$ )  
ou  $s^3 + 58s^2 + 792s - 21K$  ( $p/K < 0$ )

tilibra

• FAZENDO  $p/K > 0$

$s^3$	1	$-792$
$s^2$	58	$-21K$
$s^1$	$(792 - \frac{21K}{58})$	0
$s^0$	21K	

Queremos que:  $792 - \frac{21K}{58} = 0$

$$\frac{21K}{58} = 792$$

$$K = 2187,428571$$

Fazendo:  $58s^2 + 21K = 0$

$$58s^2 + 21(2187,428571) = 0$$

$$s \approx \pm j 21,14$$

↳ Pontos onde o LR toca o eixo imaginário

• FAZENDO  $p/K < 0$

$s^3$	1	$-792$
$s^2$	58	$-21K$
$s^1$	$(-792 + \frac{21K}{58})$	0
$s^0$	$-21K$	

Temos que:  $-792 + \frac{21K}{58} = 0$

$$\frac{21K}{58} = -792$$

$$K = -2187,428571$$

Fazendo:  $58s^2 - 21K = 0$

$$58s^2 = -45.936$$

↳ Se se fazer a raiz,  $K$  vai assumir valores complexos, portanto, para  $K < 0$  o LR não tem o eixo imaginário.




(1.3) Como não há zeros, todos os polos caminham para as assíntotas. Dessa forma, já que temos 3 polos, teremos 3 assíntotas.

Os ângulos dessas assíntotas são dados por:

$$\theta_i = \frac{(2i+1)180^\circ}{|m-n|} \quad p/K > 0 \quad \therefore \frac{(2i+1)180^\circ}{3} \quad \begin{cases} \theta_0 = 60^\circ \\ \theta_1 = 180^\circ \\ \theta_2 = 300^\circ \end{cases}$$

$$\theta_i = \frac{(2i)180^\circ}{|m-n|} \quad p/K < 0 \quad \therefore \frac{(2i)180^\circ}{3} \quad \begin{cases} \theta_0 = 0^\circ \\ \theta_1 = 120^\circ \\ \theta_2 = 240^\circ \end{cases}$$

 (1.4) Ademais, todas as assíntotas passam pelo mesmo pon-

to sobre o eixo real, dado por:

$$\sigma = \frac{\sum \text{pols de } G_1 - \sum \text{zeros de } G_1}{n-m}$$

$$\sigma = \frac{-36-22}{3}$$

$$\sigma = -19,33$$

(1.5) Os pontos de sela (pontos sobre o eixo real onde há raízes múltiplas) devem satisfazer  $\frac{N(s)}{D(s)} = 0$ , onde a

derivada do quociente nos leva a:

$$\frac{N'(s)D(s) - N(s)D'(s)}{D(s)^2} \left\{ \text{onde } N'(s)D(s) - N(s)D'(s) = 0 \right.$$

Portanto, para  $\frac{21}{s^3 + 58s^2 + 792s}$ , temos:

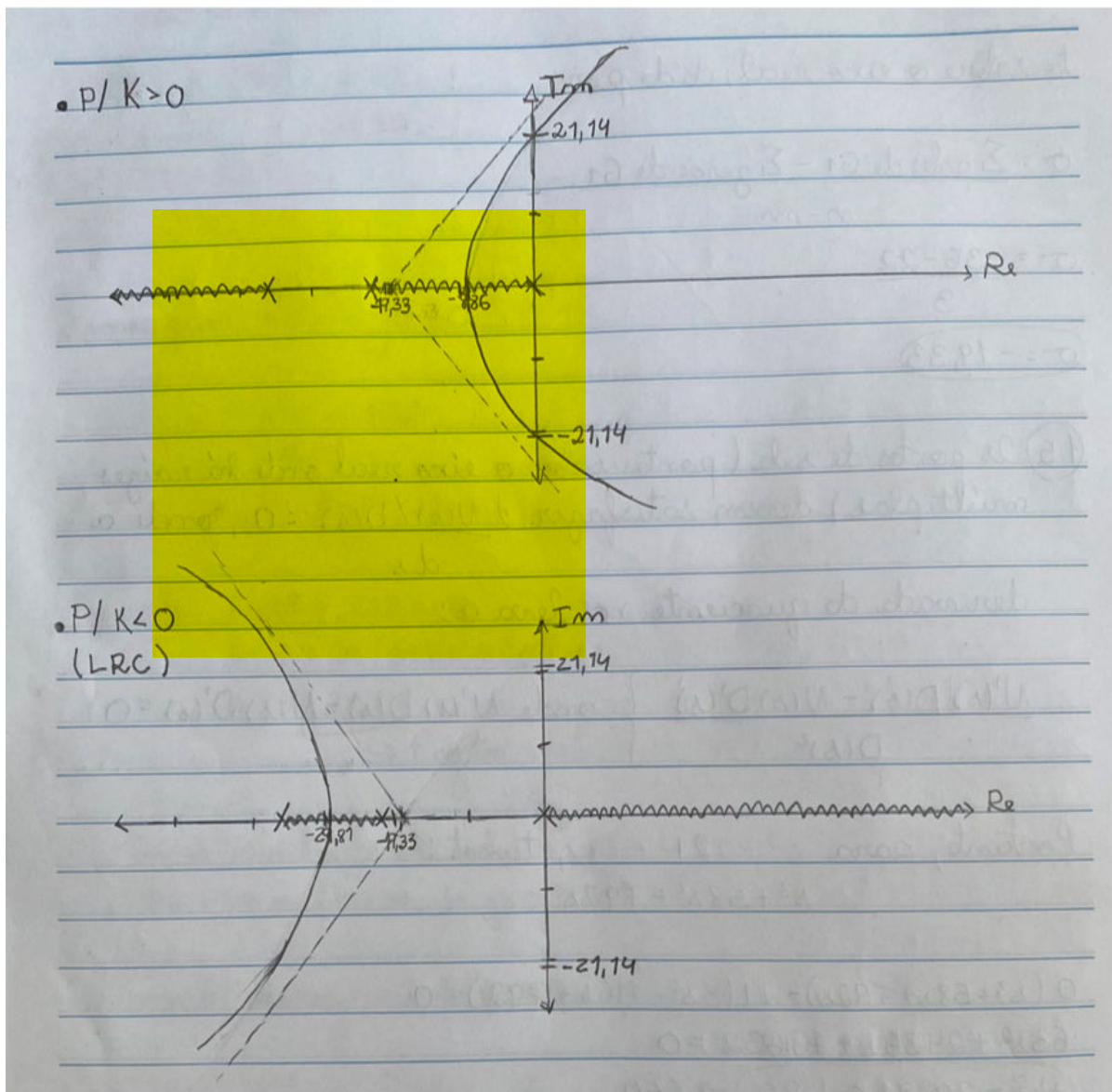
$$0(s^3 + 58s + 792s) - 21(3s^2 + 116s + 792) = 0$$

$$-63s^2 + 2436s + 16632 = 0$$

$$s' \approx -29,81 \in \text{LRC} \rightarrow K < 0$$

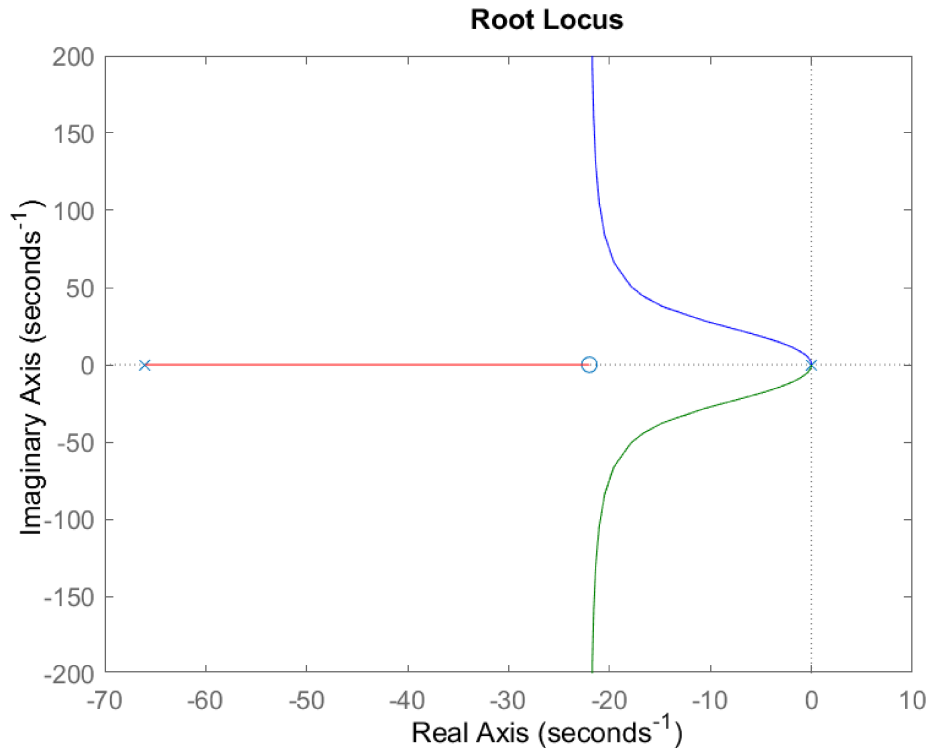
$$s'' \approx -8,86 \in \text{LR} \rightarrow K > 0$$

→ Assim, já podemos esboçar o lugar das raízes para  $K > 0$  e para  $K < 0$  com os parâmetros calculados



**Atividade 2:** Seja o LR de  $1 + KG_2(s) = 0$  mostrado, com  $G_2$  da forma  $G_2(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)\dots}{(s + p_1)(s + p_2)\dots}$ . Responder as perguntas abaixo, obtendo as informações aproximadas da figura:

```
imshow('fig2.png');
```



2.1 Quais são os polos e zeros de  $G_2(s)$ ?

É possível ver na imagem que o sistema possui um zero no eixo real em aproximadamente -22 e 3 polos (pois, de acordo com a regra 2, o número de trajetórias é igual ao número de polos) localizados também no eixo real, sendo dois deles na origem e outro em aproximadamente -66.

2.2 Quais são as raízes quando  $K \rightarrow 0$  e quando  $K \rightarrow \infty$ ?

As raízes quando  $K \rightarrow 0$  são os polos de  $G_2(s)$ . Portanto, são os pontos -66 e 0 sobre o eixo real, sendo que na origem há dois.

Já as raízes quando  $K \rightarrow \infty$  são os zeros de  $G_2(s)$ . Portanto, é o ponto -22 sobre o eixo real e os infinitos que seguem as assíntotas:  $(-22, \pm\infty)$

2.3 Para que valores de  $K > 0$  e  $K < 0$  esse sistema é estável?

O sistema é estável para todos os valores de  $K \geq 0$ , já que, como pode se observar na imagem, o LR está todo no semiplano esquerdo para esses valores. Entretanto, para os valores de  $K < 0$ , o sistema é instável, pois o LR de um dos polos da origem passa a ir para o semiplano direito no eixo real.



2.4 Obtenha os valores de K para os quais o par de polos complexos tem amortecimento  $\zeta \geq 0.707$ ?

$$\zeta = \cos\beta$$

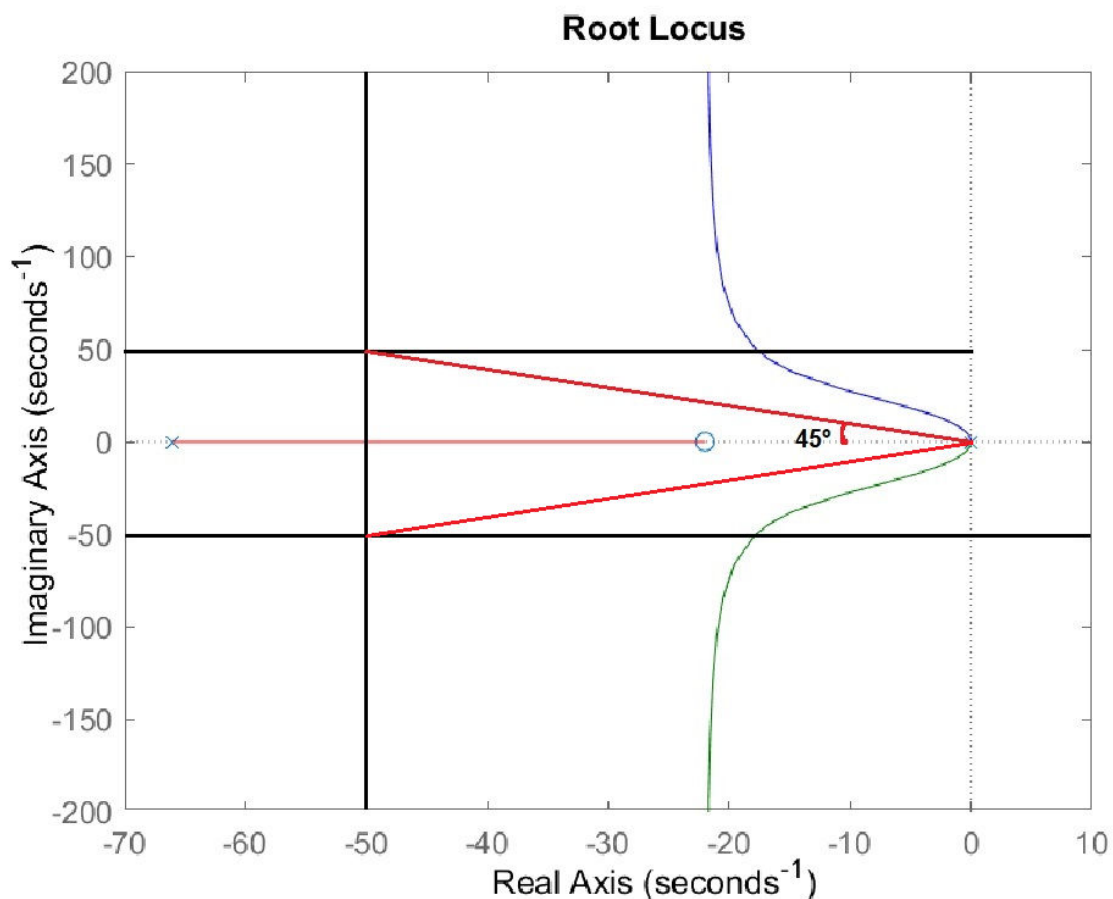
$$0.707 = \cos\beta$$

$$\beta = \cos^{-1}(0.707)$$

$$\beta = 45^\circ$$

O valor de amortecimento  $\zeta \geq 0.707$  corresponde aos pontos dentro da área interna delimitada pelas retas de  $45^\circ$  traçadas para o semiplano esquerdo a partir da origem.

Tomei os pontos -50 do eixo real e  $\pm 50j$  do eixo imaginário para garantir que minha reta possuía  $45^\circ$  e, após traçá-la concluí que não há valores de  $K > 0$  para os quais o par de polos complexos tem tal amortecimento, pois, apesar de para o polo mais à esquerda qualquer valor de K ser satisfatório, para o par de polos na região dominante, não há pontos de intersecção da reta de  $45^\circ$  (em vermelho) com o lugar das raízes, exceto por  $K=0$ :



Para  $K < 0$  o LR fica todo no eixo real tal que, para os polos dominantes, um vai para infinito positivo e o outro encontra o zero. Com esse polo que vai para infinito positivo no eixo real o sistema se torna instável. Assim, também não há valores de  $K < 0$  que satisfaçam o amortecimento de 0.707.

2.5 Obtenha os valores de K para os quais o tempo de estabelecimento atende  $t_s \leq \frac{8}{I}$ .

Sendo  $I = 21$ ;  $t_s \leq 0,38$ .

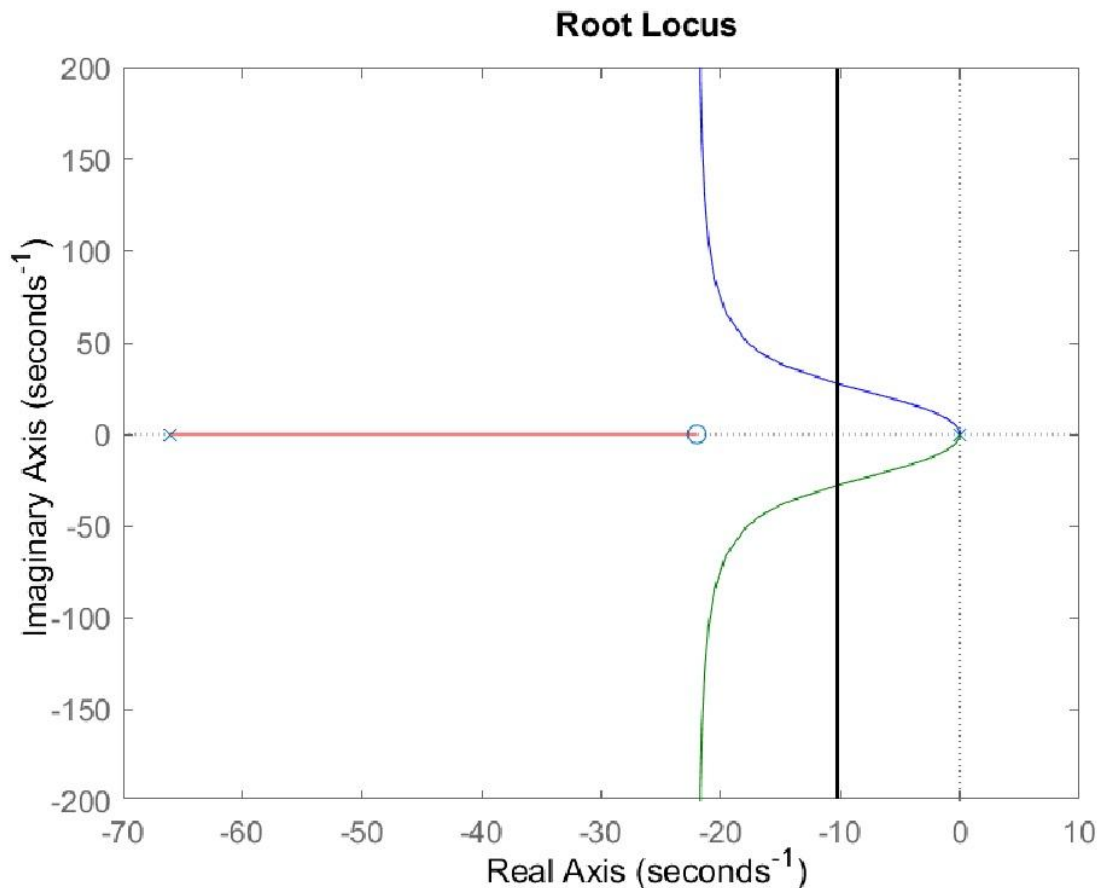
Sabemos que  $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$ , onde  $\zeta \omega_n$  é a parte real.

Portanto, se desejamos que  $t_s \leq 0,38$ , fazemos:

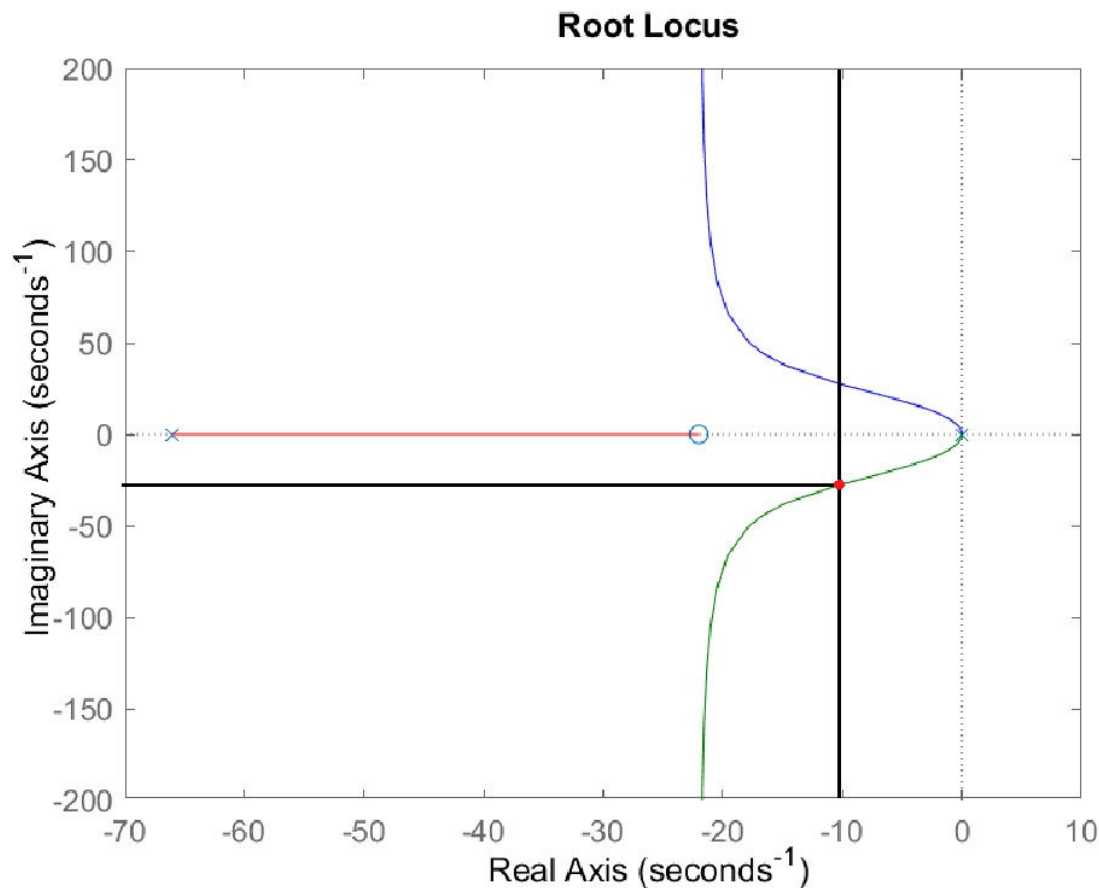
$$\frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 0,38$$

$$\zeta \omega_n \geq 10,53$$

Assim, os valores de K para os quais o tempo de estabelecimento atende ao pedido são todos os valores no LR à esquerda da reta em 10,53:



Para estimar esses valores de K, pegaremos o ponto onde a reta imediatamente toca o LR e substituiremos na equação de G2. Já sabemos que a parte real é de 10,53 e, se traçarmos a direção correspondente no eixo imaginário, obtemos aproximadamente o valor de -28j, conforme a imagem abaixo:



Bastaria substituir  $s = (10.53, \pm 28j)$  em  $G_2(s)$  para encontrar o valor de  $K$  que satisfaz a FT. entretanto não temos  $G_2(s)$ . Assim, vamos obtê-la com as informações que já temos e mais alguns cálculos:

Como já afirmamos na questão 2.1: o sistema possui um zero no eixo real em aproximadamente -22 e 3 polos, também no eixo real, sendo dois deles na origem e outro em aproximadamente -66. Sendo assim, trata-se de

uma FT de 3ª ordem que, seguindo o formato  $G_2(s) = \frac{(s + z_1)(s + z_2)\dots}{(s + p_1)(s + p_2)\dots}$  fornecido, é:

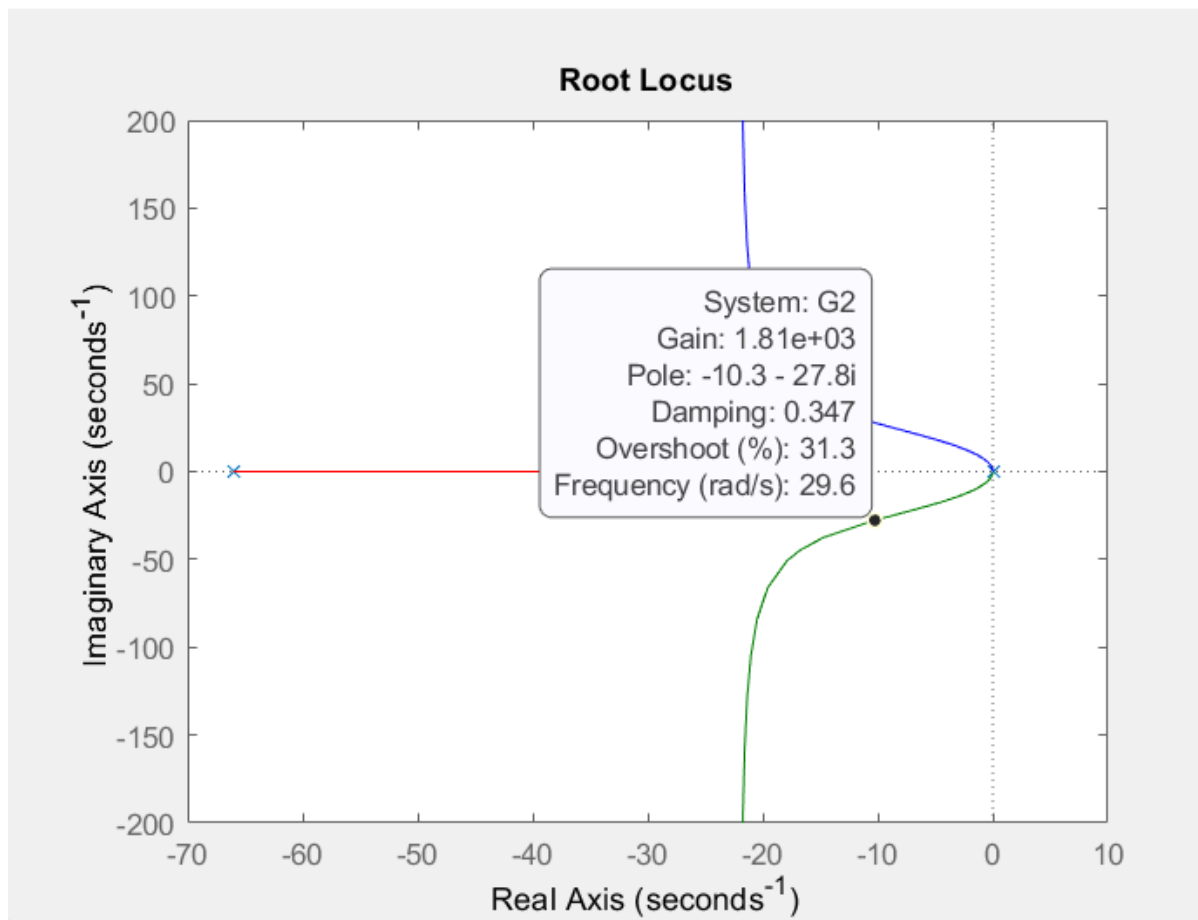
$$G_2(s) = \frac{(s + 22)}{s^2(s + 66)}$$

onde  $1 + KG_2(s) = 0$

$$\text{então } 1 + K \frac{(s + 22)}{s^2(s + 66)} = 0$$

```
G2 = tf([1,22],[1 66 0 0]);
```

Fazendo 'rlocus' para a  $G_2$  montada e clicando no ponto  $s = (10.53, \pm 28j)$ :



Portanto,  $t_s \leq 0,38$  é atendido para  $K \geq 1.81e+03$ , aproximadamente.

Vale lembrar que para  $K < 0$  o sistema é instável, como afirmado anteriormente.

**Atividade 3: Seja a FT de primeira ordem com tempo morto  $G_3(s)$ . Discretize esta FT obtendo  $G_3(z)$  com tempo de amostragem igual a 1/5 do tempo morto, faça o LR discreto e responda as perguntas abaixo:**

G3

G3 =

$$\exp(-9s) * \frac{10}{36s + 1}$$

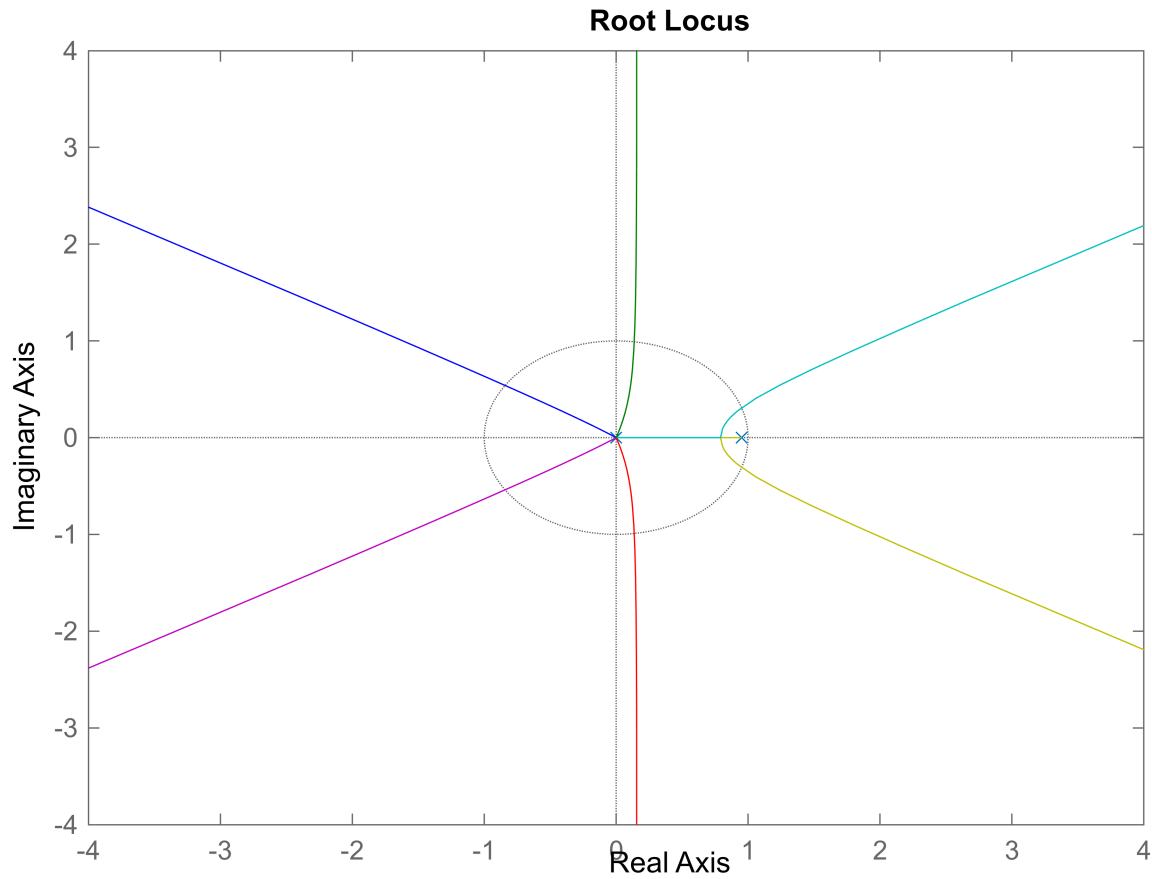
Continuous-time transfer function.  
Model Properties

Como o tempo morto é de 9s, para discretizar a FT chamamos a função 'c2d' passando o tempo de amostragem de 1.8s para atender à especificação.

```
G3d = c2d(G3, 1.8); % contínuo para discreto
```

Agora, para se obter o LR chamamos a função 'rlocus'.





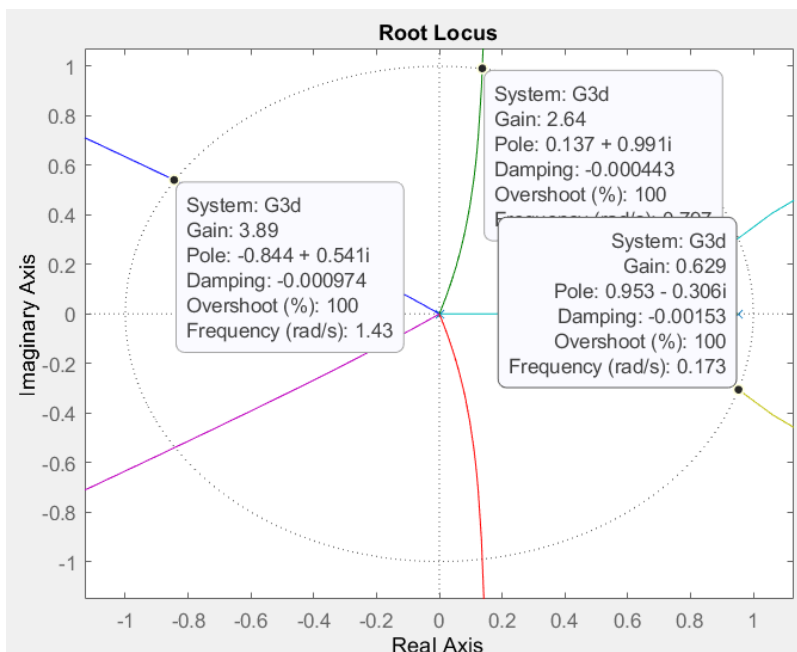
3.1 Identifique os polos e zeros de  $G_3(z)$ .

Não há zeros em  $G_3(z)$  e há 6 polos, todos sobre o eixo real, sendo 4 deles na origem e 2 deles em +1.

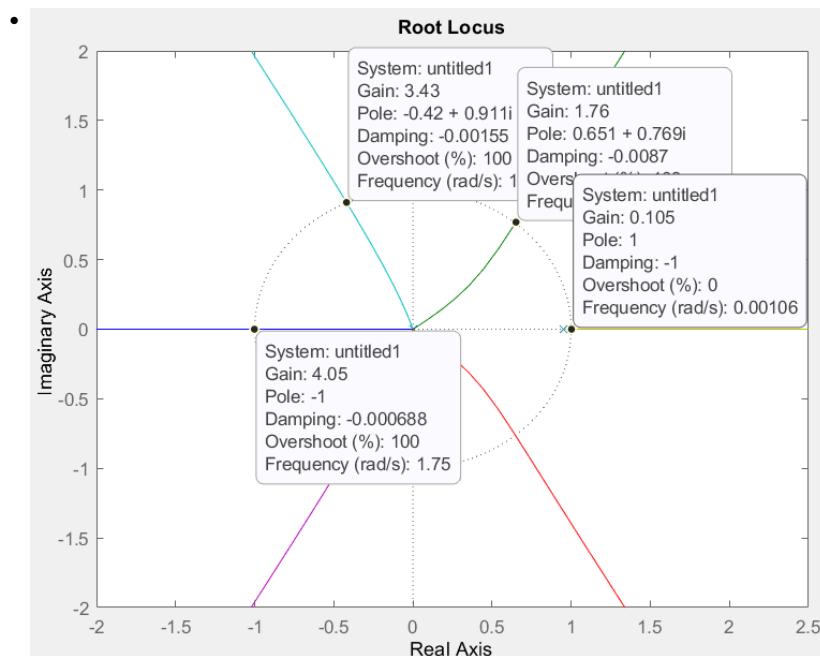
3.2 Obtenha todos os valores de  $K \in [-\infty, \infty]$  para os quais este sistema é estável.

O sistema é estável para os valores de  $K$  que mantêm todos os polos dentro do círculo unitário.

- Quando  $K > 0$ :



- Quando  $K < 0$ :



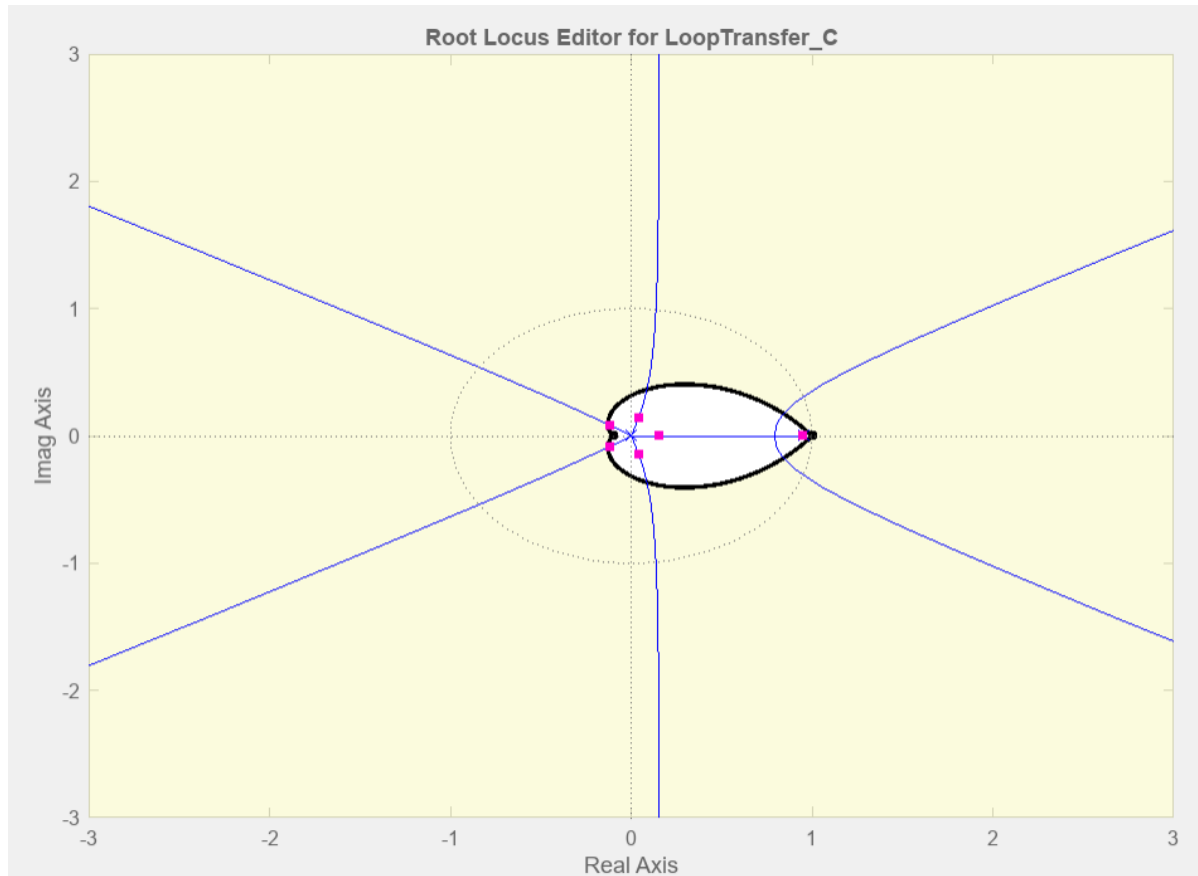
Quando  $K$  é positivo e ultrapassa o valor de aproximadamente 0.63, a dupla de polos mais à direita sai do círculo unitário; E quando  $K$  é negativo e ultrapassa o valor de aproximadamente 0.1, o polo mais à direita sai do círculo unitário. Por isso, o sistema é **estável para  $K \in [-0.1, 0.63]$** .

OBS: Não foram exibidos nas imagens os valores dos ganhos dos 6 polos, pois, com pares conjugados, alguns valores se repetem.

3.3 Para que valores de  $K$  tem-se  $UP \leq 10\%$ ?

```
%rltool(G3d)
```

Executando-se o comando 'rltool' e adicionando um novo 'requerimento de design' obtemos que  $UP \leq 10\%$  para os valores de K que mantêm todos os polos dentro ou nos limites da região em branco na imagem a seguir:



Posicionando o primeiro que alcança a margem, obtemos que  $K = 0.00017583$ .

Repetindo o feito acima para K negativo e posicionando o primeiro polo que chega acima da margem temos que  $K = -1.7716e-05$ .

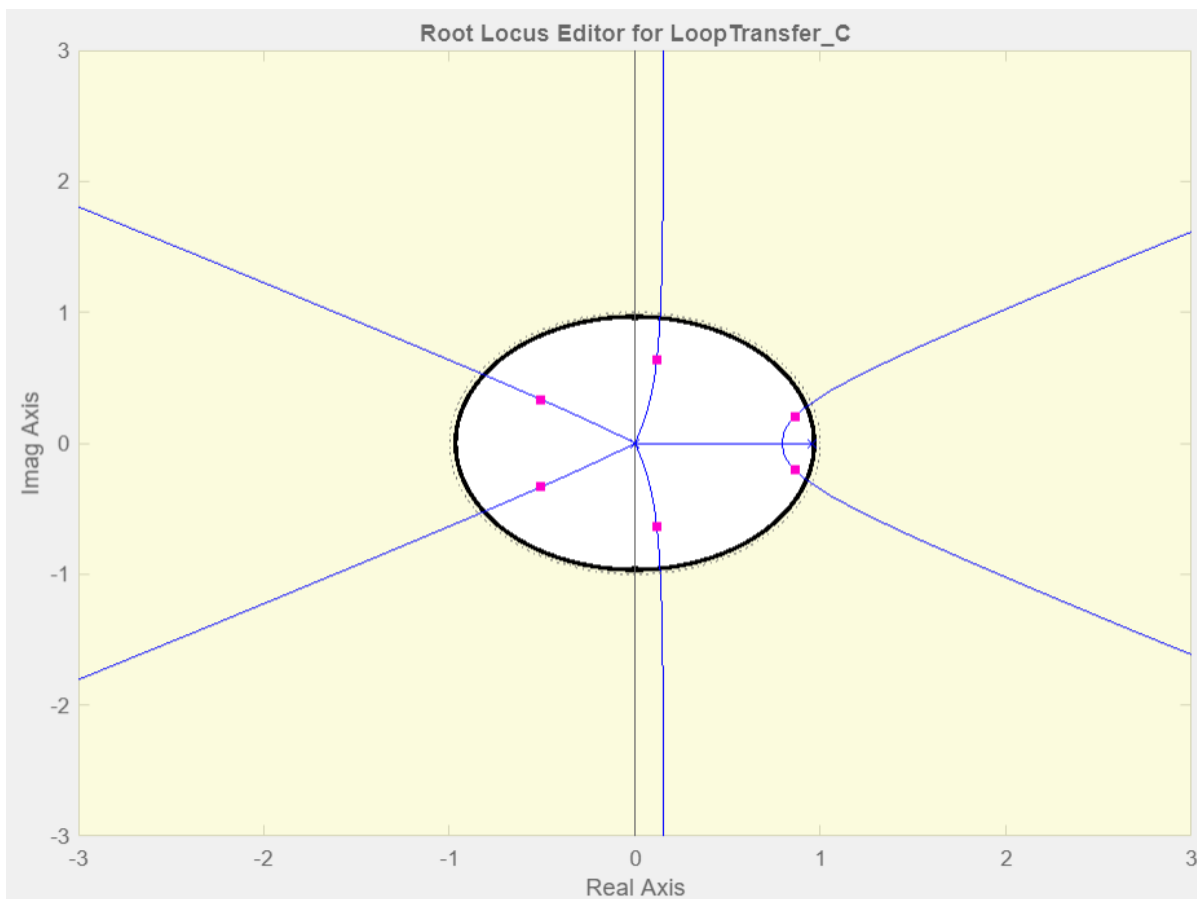
Portanto, para que  $UP \leq 10\%$ , temos que  $-1.7716e-05 < K < 0.00017583$ , aproximadamente.

3.4 Verifique se existem valores de K para os quais  $t_s \leq 10I_s$ .

```
%rltool(G3d)
```

Sendo  $I_s = 21$ , então  $10 \cdot 21 = 210s$

Sim, existem valores de K para os quais  $t_s \leq 210s$ , são os valores que mantêm os polos dentro ou nos limites do círculo branco na imagem a seguir. A imagem foi obtida executando-se o comando 'rltool' e adicionando um novo 'requerimento de design' para o tempo especificado.



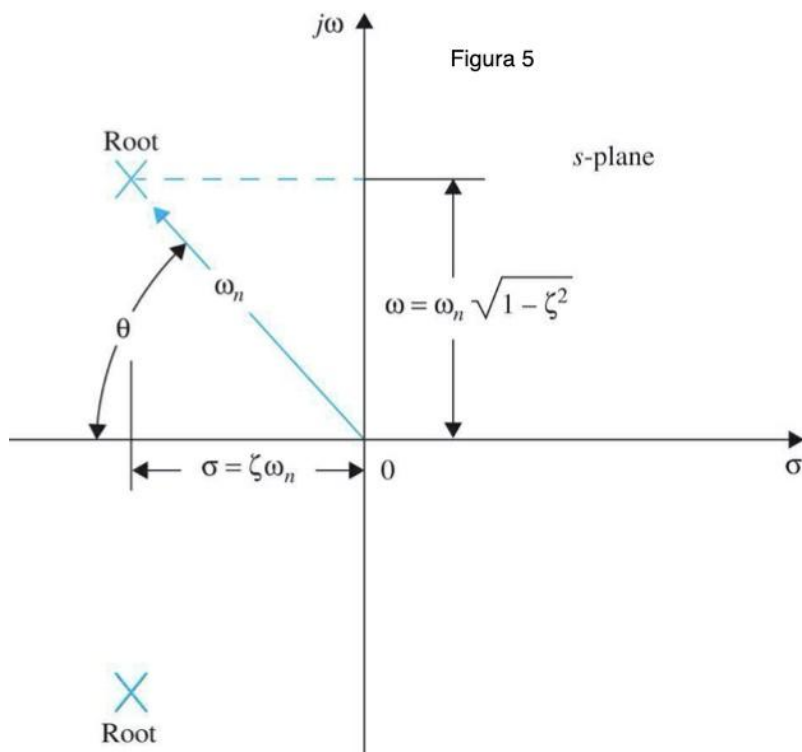
Posicionando o primeiro polo que alcança o limite, obtemos que  $K = 0.49077$

Repetindo o feito acima para  $K$  negativo, o polo mais a direita fica inteiramente fora da região delimitada. Sendo assim, não há valores de  $K$  negativo que satisfazem a especificação.

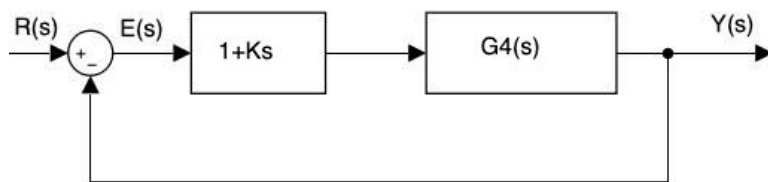
Portanto, para que  $t_s \leq 210s$ , temos que  $0 < K < 0.49077$ , aproximadamente.

Lembrando:  $\zeta = \cos \theta$  ,  $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$ ,  $0 < \zeta < 0.9$ .





**Atividade 4: Seja o diagrama de blocos mostrado.**



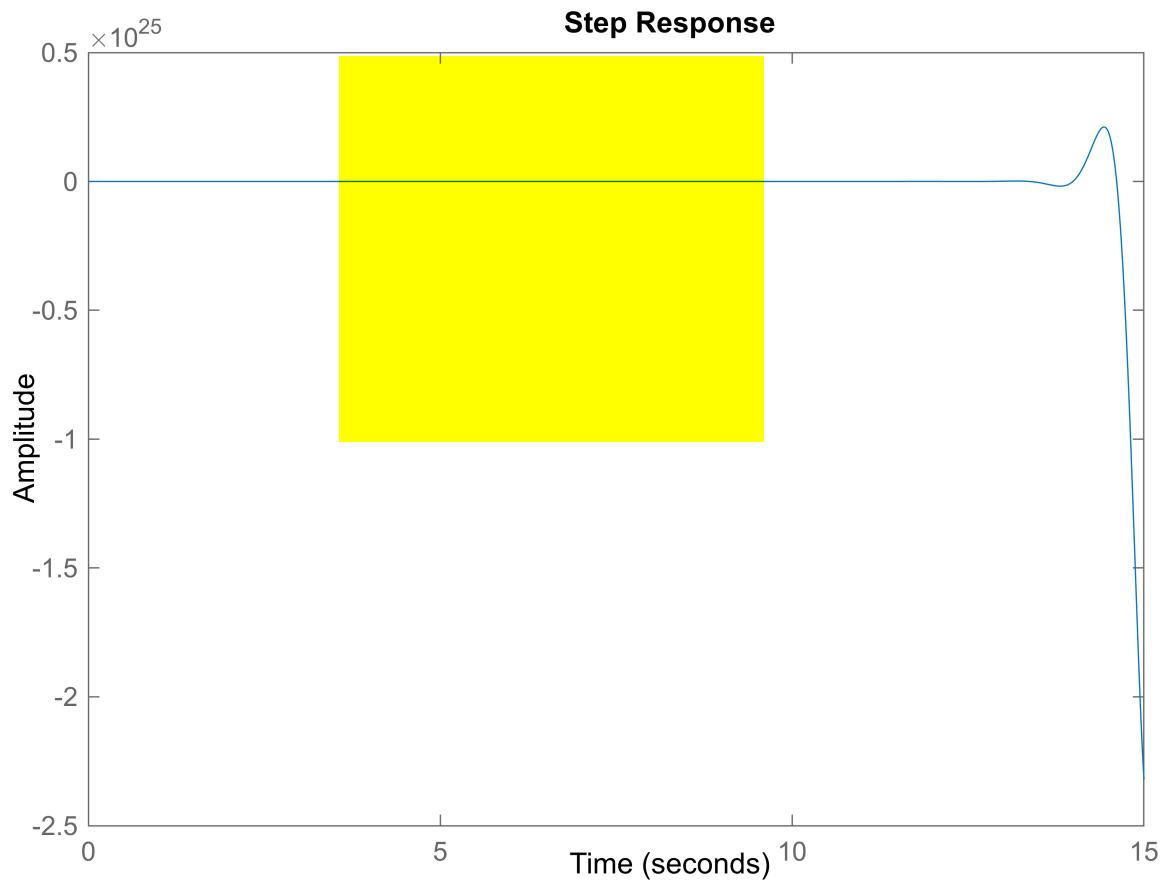
G4

G4 =

$$\frac{2400}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1}$$

Continuous-time transfer function.  
Model Properties

```
M = tf([0.01 1],1);
step(feedback(M*G4, 1))
```



Ao fechar a malha com G4, mesmo com um K muito pequeno, obtemos uma resposta instável.

4.1 Faça o LR e explique o efeito de K sobre os polos de malha fechada.

Primeiro, é necessário transformar o que está no diagrama de blocos para o formato do LR:

Colocando na forma  $1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0$

$$1 + (1 + Ks) G(s) = 0$$

$$1 + (1 + Ks) \frac{2400}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1} = 0$$

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1 + 2400 + 2400Ks = 0$$

$$s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 2401 + 2400Ks = 0$$

$$1 + K \frac{2400s}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 2401}$$

Para obter o LR podemos chamar o comando 'rlocus' passando a função de transferência que foi calculada.

```
G = tf([2400, 0],[1, 4, 6, 4, 2401])
```

G =

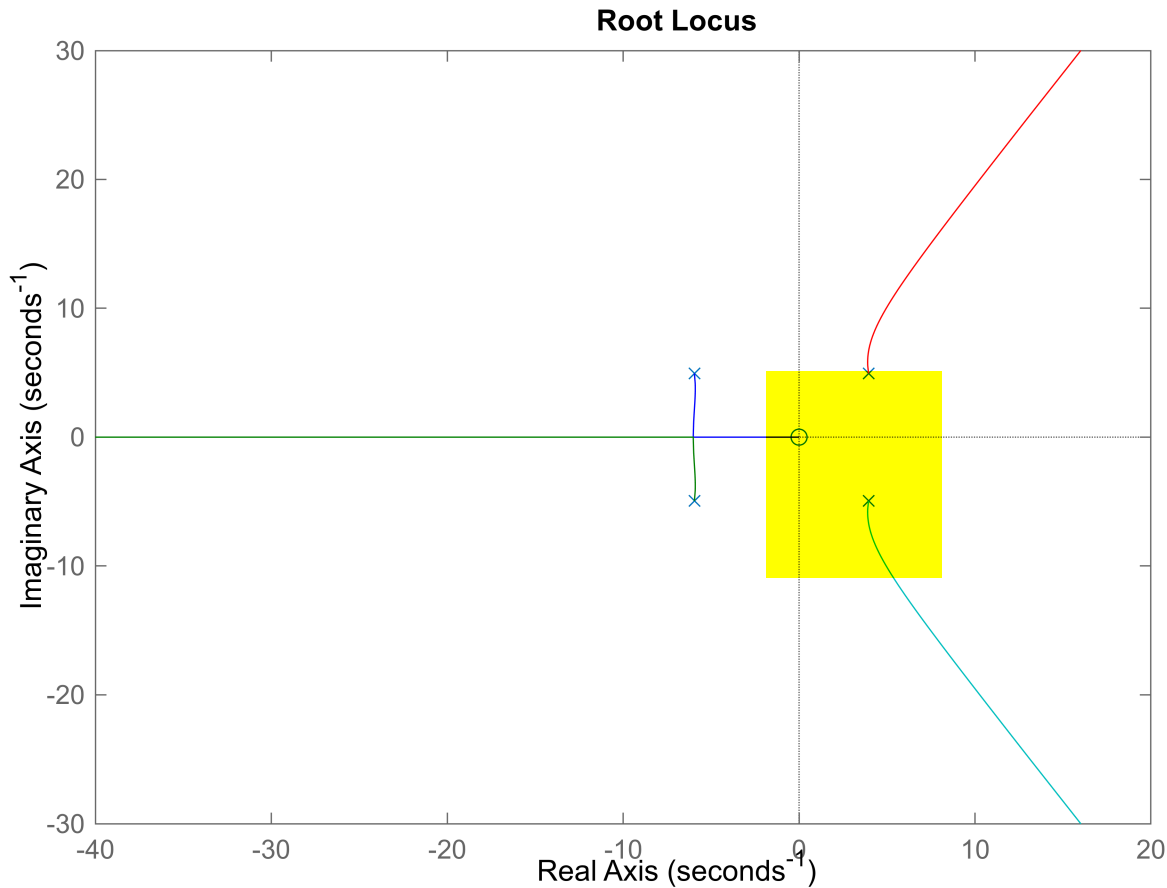
$$\frac{2400 s}{s^4 + 4 s^3 + 6 s^2 + 4 s + 2401}$$

Continuous-time transfer function.  
Model Properties

```
poles_G=pole(G) % instável
```

```
poles_G = 4x1 complex
-5.9492 + 4.9492i
-5.9492 - 4.9492i
3.9492 + 4.9492i
3.9492 - 4.9492i
```

```
rlocus(G)
```



O LR é instável, o que faz sentido, já que foi mostrado que apenas fechando a malha com G4 já gera uma resposta instável, de forma que aquilo que derivar disso será instável também.

O efeito de variar  $K$  sobre os polos de malha fechada é movê-los no LR caminhando "dos polos até os zeros ou assíntotas" de modo que quando  $K=0$  suas localizações são as raízes do denominador (polos) da FT e quando  $K$  tende ao infinito, suas localizações são as raízes do numerador (zeros), ou, quando não há zeros o suficiente, suas localizações são as assíntotas no infinito.

4.2 Obtenha os valores de  $K > 0$  para os quais o sistema é estável.

O sistema possui polos no **semiplano direito, que lá permanecem independentemente do valor de  $K$ . Assim, não existe  $K > 0$  para o qual o sistema é estável.**

4.3 Obtenha um valor de  $K$  tal que  $UP \leq 10\%$  e o tempo de estabelecimento seja o menor possível. Faça uma simulação ao degrau comprovando.

Com um sistema instável, não existe valor de  $K$  tal que  $UP \leq 10\%$ . Não é possível simular.