

UMA ABORDAGEM HÍBRIDA EXATA-HEURÍSTICA APLICADA AO PROBLEMA DO CICLO MEDIANO SEM RESTRIÇÕES DE CAPACIDADE

Paulo Henrique Sousa de Araujo, Lisieux Marie Marinho dos Santos Andrade, Luiz Alberto do Carmo Viana

Universidade Federal do Ceará - Campus Crateús
Rodovia BR 226, KM 4 - Venâncios. CEP:63708-690. Crateús-CE
paulo.hsa@alu.ufc.br, lisieuxandrade@ufc.br,
luizalberto@crateus.ufc.br

RESUMO

As telecomunicações são atualmente intrínsecas ao cotidiano da maioria das pessoas, sua importância e complexidade geram custos que empresas fornecedoras desse serviço visam sempre minimizar. Uma maneira de reduzir estes custos é definindo a organização das conexões que constituem a rede utilizada. O Problema do Ciclo Mediano sem Restrições de Capacidade (PCMRC) destina-se à otimização da implantação de uma topologia anel-estrela e realiza essa tarefa através da minimização dos custos para construir sua estrutura central (ciclo) e atribuir externamente os demais elementos que não a compõem. Desta forma, o presente trabalho propõe uma abordagem híbrida aplicada ao PCMRC, um algoritmo exato-heurístico composto pelos procedimentos Branch-and-Bound (B&B), Greedy Randomized Adaptative Search Procedure e Iterated Local Search. O objetivo é encontrar uma região de soluções promissoras, usando o B&B, para a realização de uma busca suave pela heurística. Experimentos, executados em 360 casos de testes, apresentaram resultados relevantes para esta nova abordagem.

PALAVRAS CHAVE. Problema do Ciclo Mediado sem Restrição de Capacidade, Abordagem Híbrida, Algoritmo Exato-Heurístico.

Tópicos (Otimização Combinatória, Heurísticas, Teoria dos Grafos)

ABSTRACT

The telecommunication area plays an important role in everyday life for most people, its importance and complexity produce outlays that providers for this kind of service try constantly avoid. One way to reduce this costs is to set the arrangements of the links that integrate the installed network. The Ring Star Problem (RSP) deals with the optimization of a ring-star topology installation, and make it by minimizing the costs of building its central structure (ring) and assigning the remaining elements to this structure. Therefore, this paper brings a hybrid approach to RSP, an exact-heuristic algorithm constituted by Branch-and-Bound (B&B), Greedy Randomized Adaptative Search Procedure and Iterated Local Search procedures. The aim is to find a region with good initial solutions, using B&B, so the heuristic performs a smoother search. Computational experiments, performed on 360 test cases, revealed expressive results to this new approach.

KEYWORDS. The Ring Star Problem. Hybrid Approach. Exact-Heuristic Algorithm.

Paper topics (Combinatorial Optimization. Heuristics. Graph Theory.)

1. Introdução

É cada vez mais difícil imaginar uma realidade sem o fluxo de informações que percorre as redes de telecomunicações, conectando pessoas, empresas e até sistemas independentes da intervenção direta humana. Essas redes se organizam por meio de topologias, isto é, o arranjo das ligações entre suas componentes.

Melhorar a eficiência e a configuração de uma topologia implica em diminuir o custo de se montar uma rede usando tal estrutura. Uma configuração típica de rede dispõe seus usuários como pontas individuais conectadas a uma estrutura central que contém os componentes de transmissão da rede (tais como roteadores e computadores), cuja função é repassar os pacotes de dados por um caminho que leva a um outro cliente destino. Essa estrutura central pode ser organizada como um anel, tendo a estrutura final traços de arranjos em anel e estrela. [Meador, 2008]

Uma topologia assim disposta é chamada de Anel-estrela, e teve em [Labbé et al., 1999] um estudo inicial que produziu um modelo matemático e um algoritmo exato para encontrar a melhor organização de uma rede que a use, buscando minimizar seus custos de operação. Chamado Problema do Ciclo Mediano sem Restrições de Capacidade (PCMRC), o trabalho citado modela o problema de minimização dos custos com uma abordagem de programação mista, linear e inteira. Além disso, o referido trabalho realiza um estudo da estrutura poliédrica do modelo, a partir do qual propõe um algoritmo exato *Branch-and-Cut*.

A primeira abordagem não exata para o PCMRC foi proposta por [Pérez et al., 2003], onde é apresentada uma heurística híbrida nomeada *Variable Neighborhood Tabu Search* (VNTS). Essa heurística mista realiza buscas locais utilizando uma *Tabu Search* (TS) e provoca uma perturbação na solução refinada por TS para executar a busca local em outro ponto do conjunto de soluções.

Em [Labbé et al., 2004], os autores de [Labbé et al., 1999] retornam ao problema para aprofundar a pesquisa sobre ele. Neste trabalho, são adicionadas mais desigualdades válidas ao modelo para realizar o estudo relacionado a facetas poliédricas, e incrementar o algoritmo exato do trabalho anterior, permitindo experimentos sobre uma maior quantidade de instâncias.

Uma outra abordagem, desenvolvida por [Dias et al., 2006], trata da composição de processos heurísticos e metaheurísticos. É proposta a união da metaheurística *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) com a heurística de busca *Generic Variable Neighborhood Search* (GVNS), que é denotada por GGVNS. Até o presente momento, tal procedimento produziu os melhores resultados experimentais, em se tratando de heurísticas.

Duas outras abordagens exatas foram propostas nos anos seguintes. [Kedad-Sidhoum e Nguyen, 2010] propõem uma reformulação que considera a estrutura central como uma corrente em vez de um ciclo. Restrições que induzem facetas poliédricas também foram incluídas e um algoritmo exato *Branch-and-Cut* foi proposto. Em [Simonetti et al., 2011], o PCMRC foi reduzido ao Problema da Arborescência Mínima de *Steiner* Restringida. Baseada nesse problema, uma nova modelagem foi apresentada, assim como um novo algoritmo *Branch-and-Cut* foi proposto e testado para instâncias de até 200 vértices.

[Calvete et al., 2013] apresentam uma nova formulação para o problema e propõem um algoritmo genético para sua resolução. Neste trabalho, PCMRC teve sua modelagem dividida em dois níveis. No primeiro, o algoritmo genético proposto é utilizado para decidir quais nós estarão na estrutura central (formando um ciclo) e quais serão ligados a ela. Então, o segundo nível utiliza uma heurística para o Problema do Caixeiro Viajante restrito aos nós escolhidos para a estrutura central, e em seguida atribui, de maneira ótima, os demais nós aos do ciclo obtido.

Como prologamento de [Dias et al., 2006], o trabalho de [ANDRADE et al., 2016] mescla o GRASP simples com a heurística *Iterated Local Search* (ILS) e produz melhores resultados em

31 das 210 instâncias, com tamanhos entre 10 e 75 vértices, testadas por [Dias et al., 2006].

O trabalho mais recente que trata de PCMRC é [Chen et al., 2017], em que os autores demonstram que duas soluções específicas são aproximações da ordem de $\sqrt{n-1}$ para o custo da solução ótima de qualquer instância de PCMRC. Além disso, são propostas três heurísticas para o problema.

2. Descrição do Problema

O Problema do Ciclo Mediano sem Restrições de Capacidade (PCMRC) pode ser descrito como a tarefa de particionar, de maneira ótima, o conjunto de vértices de um grafo em dois subconjuntos: o primeiro subconjunto é composto pelos vértices que irão induzir um ciclo no grafo, e deve conter um vértice *raiz*, previamente fixado; o segundo é formado por vértices clientes que devem ser atribuídos, ligados direta e individualmente, a vértices do primeiro subconjunto. Vale destacar que mais de um vértice do segundo subconjunto pode ser atribuído a um mesmo vértice do primeiro. O processo de particionamento deve ter como objetivo a minimização dos custos de montagem do ciclo e de atribuição dos clientes.

Formalmente, o PCMRC pode ser definido da seguinte forma. Seja $G = (V, E \cup A)$ um grafo misto, completo tanto em arestas como em arcos, composto por um conjunto de vértices $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, um conjunto de arestas não direcionadas $E = \{(i, j) : i, j \in V\}$, e um conjunto de arcos direcionados $A = \{[i, j] : i, j \in V\}$. O vértice 1 é definido como a *raiz*. Assumimos $n \geq 6$ com objetivo de excluir instâncias com resolução trivial ou que sejam degeneradas.

As arestas são utilizadas para construir um ciclo mediano na solução, ou seja, um ciclo que não necessariamente é composto por todos os vértices do grafo. Os arcos, por sua vez, definem nesta mesma solução atribuições que são usados para ligar os vértices que não estão no ciclo a nós pertencentes a esta estrutura central. É importante esclarecer que os arcos que possuem duas extremidades iguais – $[i, i]$, com $i \in V$ –, denominados *laços*, também estão presentes em A e têm papel na modelagem descrita na próxima subseção. Além disso, para cada aresta $(i, j) \in E$ é definido um custo $c_{ij} \in \mathbb{R}_+$, e para cada arco $[i, j] \in A$ também é estabelecido um custo $d_{ij} \in \mathbb{R}_+$.

O objetivo do PCMRC é, portanto, minimizar a soma do custo de montagem do ciclo e do custo de atribuição dos demais nós. Estes são calculados, respectivamente, a partir da soma dos custos das arestas e dos arcos presentes em uma solução. Dessa forma, a construção de uma solução consiste em determinar um subconjunto $V' \subseteq V$ que contenha o vértice estabelecido anteriormente como *raiz* e atribuir os vértices $i \in V \setminus V'$ a vértices $j \in V'$.

Para determinar o custo de montagem de V' , devemos considerar o ciclo de menor custo que seja induzido por seus vértices. Já o processo de atribuição consiste em encontrar, para cada nó $i \in V \setminus V'$, o arco $[i, j]$ de menor custo tal que $j \in V'$. Cada um dos vértices deve ou compor o ciclo mediano ou ser atribuído a outro vértice nele presente, não podendo haver nenhum nó desconexo na solução.

PCMRC tem sua NP-completude demonstrada em [Martín, 2000]. Essa classificação é embasada no fato de que o Problema do Caixeiro Viajante (PCV), um clássico problema de OC, é um caso especial de PCMRC. PCV consiste na tarefa de encontrar um ciclo, dentre aqueles que incluem todos os vértices de um grafo, cuja soma dos custos de suas arestas seja mínima. Dessa forma, caso os custos de atribuição dos arcos de G sejam arbitrariamente altos em uma instância de PCMRC, suas soluções ótimas devem incluir todos os vértices de G no ciclo central V' , transformando a resolução de PCMRC em uma resolução de PCV. Portanto, definidos a estrutura do problema, seus objetivos e sua complexidade, a próxima seção utiliza essas características fundamentais para descrever e delimitar o PCMRC a partir de um modelo matemático.

2.1. Modelo

O modelo apresentado em [Labbé et al., 1999], consolidado em [Labbé et al., 2004] e incrementado por [Dias et al., 2006], é construído com a criação de variáveis binárias para qualquer ligação no grafo, ou seja, uma variável de decisão para cada aresta e cada arco presente na estrutura definida na seção anterior. Essas variáveis terão o papel de definir quais dessas ligações estarão presentes na solução encontrada para as instâncias do problema.

Sendo assim, dado um grafo misto completo G , para cada aresta (i, j) pertencente ao conjunto $E(G)$, é definida uma variável $x_{ij} \in \{0, 1\}$, que assumirá o valor 1 se, e somente se, a aresta (i, j) compuser o ciclo definido na solução final. De forma semelhante, para cada arco $[i, j]$ presente em A com $i \neq j$, a variável $y_{ij} \in \{0, 1\}$ é estabelecida, e y_{ij} terá valor igual a 1 se, e somente se, o vértice i estiver atribuído ao vértice j na solução. As variáveis y_{ii} , relacionadas aos laços $[i, i]$, terão valor 1 se, e somente se, o vértice i estiver no ciclo ao fim da resolução.

Por fim, com o objetivo de abreviar a descrição de algumas restrições do modelo, são estabelecidas duas notações. Denotamos por $\Gamma(i)$ o conjunto de arestas incidentes ao vértice i . Essa definição pode ser usada também com conjuntos de vértices. Dado um subconjunto $S \subset V(G)$, $\Gamma(S)$ representa o conjunto de arestas do grafo que possuem exatamente uma extremidade em S , isto é, $\Gamma(S) = \{(i, j) \in E(G) : |\{i, j\} \cap S| = 1\}$. Essa definição estabelece, então, o conjunto de arestas que ligam S a seu complemento. A próxima notação proposta tem como objetivo determinar, dado um conjunto de arestas, quantas delas fazem parte do ciclo na solução final. Formalmente, seja $E' \subseteq E(G)$, $x(E') = \sum_{(i,j) \in E'} x_{ij}$.

Após esse preâmbulo, pode-se definir o modelo matemático de PCMRC como sendo:

$$\min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij} + \sum_{[i,j] \in A} d_{ij}y_{ij} \quad (1)$$

$$\text{sujeito a} \quad x(\Gamma(i)) = 2y_{ii}, \quad \forall i \in V, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} y_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{1\}, \quad (3)$$

$$x(\Gamma(S)) \geq 2 \sum_{j \in S} y_{ij}, \quad \forall S \subset V : 1 \notin S, i \in S, \quad (4)$$

$$y_{ij} \leq y_{jj}, \quad \forall [i, j] \in A, i \neq j \quad (5)$$

$$y_{11} = 1, \quad (6)$$

$$y_{1j} = 0, \quad \forall j \in V \setminus \{1\}, \quad (7)$$

$$y_{ij} \geq 0, \quad \forall [i, j] \in A, \quad (8)$$

$$y_{jj} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in V \setminus \{1\}, \quad (9)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E \setminus \{1\}, \quad (10)$$

Os somatórios em (1) definem a Função Objetivo (FO) do problema, que visa minimizar os custos de roteamento e de atribuição das ligações do grafo. As equações e inequações (2)-(10) determinam as limitações que desenham o problema sob uma perspectiva matemática.

As restrições (2) estabelecem que o grau de um vértice deve ser 2 caso ele esteja no ciclo, $y_{ii} = 1$, ou 0 caso contrário. Sendo essa regra válida pelo fato de que $x(\delta(i))$ conta o número de arestas do ciclo que incidem sobre i .

As restrições (3) definem que todo vértice ou está no ciclo, $y_{ii} = 1$, ou deve estar atribuído a outro vértice, $y_{ij} = 1$. Note que não há possibilidade de que um vértice possua essas duas características simultaneamente.

As restrições (4) visam impor que qualquer subconjunto $S \subset V \setminus \{1\}$, caso contenha pelo menos um vértice pertencente ao ciclo, esteja conectado ao seu complemento por no mínimo duas arestas do ciclo da solução. Com isso, essas restrições também limitam o número de ciclos na solução a apenas um.

A combinação de (2), (7), (6) e (10) garante que o ciclo terá o vértice *raiz* em sua composição. A restrição (7) delimita que o mesmo não deve ser atribuído a nenhum outro nó do grafo. (3), (8) e (5) juntas garantem que vértices não presentes no ciclo só possam ser atribuídos a vértices presentes no ciclo. Essa garantia é alcançada pois a variável que define se uma atribuição pertencerá à solução está limitada pela variável do laço que determina se o vértice que recebe essa atribuição pertencerá ao ciclo.

As restrições (10) e (9) definem a integralidade de parte das variáveis de decisão do problema. (8) define uma relaxação nas variáveis de decisão referentes às atribuições de vértices ao ciclo. A modelagem apresentada e descrita acima enquadra PCMRC como um problema de programação linear inteira mista. Isso porque algumas de suas variáveis de decisão só podem assumir valores inteiros, como x_{ij} e y_{ii} em (10) e (9) respectivamente, enquanto outras podem assumir valor real como y_{ij} em (8).

3. Uma abordagem híbrida

Como visto na seção 1, o PCMRC foi abordado de diferentes formas, algumas delas utilizam algoritmos exatos para resolver o problema e localizar a solução com melhor custo. Outras abordagens fazem uso de procedimentos heurísticos que optam por não garantir o encontro de uma solução ótima para diminuir consideravelmente o tempo gasto na busca por soluções viáveis ao problema.

Desta forma, o presente trabalho adota o uso de dois métodos: um heurístico (GRASP-ILS, uma composição dos métodos *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* e *Iterated Local Search*) e outro exato (*Branch-and-Bound* - B&B). O B&B realiza relaxações nas variáveis inteiras de um problema, estabelecendo limites lineares superiores e inferiores com uso de programação linear, objetivando, assim, estreitar as possibilidades de soluções inteiras até que exista apenas uma restante entre esses limites.

Já o GRASP-ILS, proposto por [ANDRADE et al., 2016], realiza sua execução em duas fases: construção e busca-local. Na primeira, correspondente a construção do procedimento GRASP, uma solução é dada a partir de um processo de "gulosidade" que por meio de um parâmetro $\alpha \in [0, 1]$ define a proporção de aleatoriedade da solução esperada; na segunda fase, um processo de iteração, no espaço de vizinhança da solução construída, é realizado por meio do mecanismo de perturbação da heurística ILS. O procedimento torna-se interessante por mesclar a iteratividade do método GRASP com a potencialidade do procedimento de perturbação do ILS.

A abordagem adotada pelo presente trabalho consiste, assim sendo, na hibridização exata-heurística entre os métodos apresentados anteriormente, B&B e GRASP. Conforme estrutura:

Algorithm 1 Hibridização exata-heurística

```
1: procedure HIBRIDO(instancia, gap, alfa)  
2:   solucaoInicial  $\leftarrow$  B&B(instancia, gap)  
3:   solucaoFinal  $\leftarrow$  GRASP – ILS(instancia, solucaoInicial, alfa)  
4:   return solucaoFinal  
5: end procedure
```

Composto por duas etapas, a primeira executa o B&B sobre a entrada até o processo de execução ser interrompido respeitando o limite aproximativo entre a solução inteira e a solução ótima para a instância recebida. E a segunda etapa que promove a continuidade do processo, utilizando como solução inicial para heurística GRASP-ILS aquela fornecida pela etapa anterior. O objetivo é explorar a solução obtida pelo B&B, propondo o uso deste processo exato como meio de determinar uma região promissora para a busca heurística.

4. Experimentos e Resultados

O algoritmo exato proposto foi implementado em linguagem Python® versão 2.7. Os experimentos foram executados com o *solver* da IBM – *International Business Machines* –, CPLEX® V12.4, dentro do *software* voltado para matemática SageMath versão 8.1. A heurística utilizada na segunda fase da hibridização proposta foi implementada em C++. Os experimentos foram realizados utilizando apenas uma *thread* em uma máquina com processador Intel® Pentium G4560 de 3.50GHz e 4 núcleos de processamento, 16GB de memória RAM com frequência de 2409Mhz e sistema operacional Linux Ubuntu.

Nos experimentos foram utilizadas instâncias com 50, 75 e 100 vértices pertencentes à classe definida (de forma aleatória) em [Labbé et al., 1999] e [Labbé et al., 2004]. Esta classe tem como formato **EUC2D** (distâncias euclidianas) para definir os pesos das ligações do grafo misto.

Os custos de ciclo e de atribuição foram definidos usando essas distâncias e um valor $\beta \in \{3, 5, 7, 9\}$ que diferencia os valores atribuídos para cada custo. Sendo G o grafo misto completo de uma instância qualquer de PCMRC e l_{ij} a distância euclidiana entre os vértices i e j pertencentes a $V(G)$, o custo de ciclo c_{ij} , para a aresta $(i, j) \in E(G)$, é definido por $c_{ij} = \beta \cdot l_{ij}$, ao passo que o custo de atribuição d_{ij} , para o arco $[i, j] \in A(G)$, é indicado por $d_{ij} = (10 - \beta) \cdot l_{ij}$.

Para instâncias de grande porte torna-se necessária a separação das restrições (4), que acabam por produzir conjuntos de restrições com tamanho exponencial. Essa separação foi realizada com algoritmos mestre e escravo utilizando o recurso de *LazyConstraint callback* do CPLEX para adicionar aquelas que sejam violadas. O procedimento escravo encontra a restrição que é mais infringida e o mestre a inclui para reotimização.

A primeira etapa da hibridização consiste nessa abordagem para o B&B que se encerra antes de resolver a instância do problema por completo. Para que isso ocorra foi necessário estabelecer um valor de *GAP* padrão em sua execução. Este valor foi obtido durante uma bateria de testes com o GRASP-ILS simples, implementado por [ANDRADE et al., 2016], e calculado como a média aritmética, em porcentagem, das diferenças entre os custos das soluções produzidas por cada construção e por cada refinamento após tal construção. O valor auferido foi de 34.66%. Então, quando a solução inteira corrente atingia, em determinado momento do B&B, uma diferença de 34.66% para o ótimo, a execução se encerrava e fornecia essa solução corrente como solução inicial para a segunda etapa da hibridização. Este *GAP* foi utilizado nos testes de todas as instâncias, com exceção de uma, instância denominada *f.100* com $\beta = 9$, que provocou um estouro de memória e o *GAP* escolhido para sua execução foi de 40%, adotado a partir de uma observação dos *logs* de execução do algoritmo exato.

Em relação à etapa da abordagem que usa o procedimento GRASP-ILS, os valores de $\alpha \in [0, 1]$ utilizados nos experimentos foram $\{0.1, 0.5, 0.9\}$, definindo uma execução mais gulosa, 0.1, equilibrada entre gulosa e aleatória, 0.5, e mais aleatória, 0.9. Para cada instância foi aplicado a combinação dos valores de β e os 3 valores de α .

Para as execuções do procedimento GRASP-ILS, foram utilizados os mesmos valores de número máximo de iterações estabelecidos por [ANDRADE et al., 2016], definidos empiricamente, 70, 55 e 80 respectivamente para as instâncias de 50, 75 e 100 vértices. Outros dois valores máximos a estabelecer estão relacionados a ILS particularmente. O primeiro define o número máximo de iterações que a busca local executará: 20 para instâncias de 50 vértices e 15 para o restante. O segundo valor limitante diz respeito à quantidade máxima permitida de tentativas de melhora em uma vizinhança, restringindo-se a 15 para instâncias de tamanho 50 e 10 para as instâncias restantes.

4.1. Análise dos Resultados

A análise dos resultados obtidos centra-se na qualidade das soluções produzidas pelos métodos GRASP-ILS e pela hibridização exata-heurística proposta neste trabalho. Nas Tabelas 1, 2 e 3, são apresentados os valores das funções objetivo (FO) para os experimentos realizados com os parâmetros β e α aplicados às instâncias de 50, 75 e 100 nós, que são consideradas instâncias de pequeno, médio e grande porte.

Os resultados dos experimentos para as instâncias de 50 nós, conforme destacado na Tabela 1, revelam ganho em 53 dos 120 casos de testes, com percentual de 47,5% para os experimentos com o uso do parâmetro $\alpha = 0.1$, contra 42,5% para os demais α aplicados. Os mesmos experimentos revelam a paridade das FO para 32 casos de testes. Contudo, o desempenho da hibridização exata-heurística proposta neste trabalho ganha mais destaque com os resultados obtidos para as instâncias seguintes.

A Tabela 2 expõe o desempenho superior da hibridização proposta em 76 dos 120 casos de testes para instâncias de 75 nós, correspondendo a 63,3% de ganho, ou seja, melhoria na FO obtida quando comparada aos valores do procedimento GRASP-ILS. Em confronto com as instâncias de 50 nós, os resultados presentes na Tabela 2 demonstram uma diminuição de paridade das FO para 21 casos, assim como revela a potencialidade do método a medida em que eleva-se o número de nós trabalhados. Esta característica é melhor destacada na análise dos experimentos para instâncias de 100 nós.

Os experimentos para instâncias de 100 nós revelam um melhor desempenho do procedimento híbrido, conforme destacado na Tabela 3, com ganho em 91 dos 120 casos de testes, tendo igualdade de desempenho em apenas 2 casos. Os ganhos computacionais são equilibrados quando analisados a aplicação do parâmetro α : 31, 31 e 29, respectivamente, para os α 0,1, 0,5 e 0,9.

Um conjunto de 360 casos de testes foram executados para instâncias de 50, 75 e 100 nós. Experimentos computacionais revelaram, conforme Figura 1, que para 220 casos (61%) o desempenho da hibridização exata-heurística apresentou resultados melhores para a FO.

O comportamento da hibridização exata-heurística é destacado em instâncias de maior porte, visto que para instâncias de 50 nós foram obtidos 53 ganhos, para instâncias de 75 nós 76 ganhos e para instâncias de 100 nós 91 ganhos. Demonstrando que independente do fator de gulosidade do procedimento GRASP-ILS, o uso da estratégia exata promove o encontro de um espaço de busca promissor para o procedimento heurístico. Com respeito ao ganho exercido pelo procedimento heurístico sobre as soluções fornecidas pelo exato, em média tais soluções foram otimizadas em 11,80%. No entanto, os resultados com relação à análise de tempo para o procedimento híbrido, como são usadas técnicas exatas, apresentou um gasto médio superior de 1489 segundos.

Tabela 1: Desempenho dos métodos GRASP-ILS e a proposta Híbrida para instâncias de 50 nós.

Instância	β	Guloso ($\alpha = 0.1$)		Mediano ($\alpha = 0.5$)		Aleatório ($\alpha = 0.9$)	
		GRASP-ILS	Híbrido	GRASP-ILS	Híbrido	GRASP-ILS	Híbrido
f50_1	3	18090	18090	18021	18216	18021	18216
	5	28270	28210	28360	28100	28200	28225
	7	30387	30020	30410	30020	30425	30020
	9	22942	22942	22942	22942	22942	22942
f50_2	3	18703	18591	18703	18591	18703	18591
	5	28580	28580	28545	28580	28580	28580
	7	30655	31089	31093	31133	31188	31194
	9	22081	22081	22081	22081	22081	22081
f50_3	3	17788	17788	17784	17788	17691	17788
	5	28560	28535	28535	28535	28565	28535
	7	32404	32390	32585	32441	32717	32370
	9	22295	22295	22295	22295	22295	22295
f50_4	3	15507	15507	15495	15507	15453	15507
	5	24870	24765	24800	24765	24785	24735
	7	29038	28830	28941	28893	28932	28959
	9	20778	20778	20778	20778	20778	20778
f50_5	3	17561	17561	17544	17561	17529	17561
	5	27210	26950	26970	26950	27025	26950
	7	29835	29365	29513	29268	29539	29268
	9	23585	23585	23585	23585	23585	23585
f50_6	3	16646	16626	16646	16626	16626	16626
	5	26225	26225	26225	26350	26255	26270
	7	30179	29958	29996	29926	29996	29994
	9	20709	20709	20709	20709	20709	20709
f50_7	3	17256	17217	17217	17217	17241	17217
	5	26250	26260	26350	26170	26360	26095
	7	30481	29901	30265	29901	30074	29901
	9	22127	22127	22127	22127	22127	22127
f50_8	3	16762	16762	16762	16762	16740	16762
	5	27215	27665	27325	27535	27215	27745
	7	32910	32996	32847	32754	33066	32847
	9	26564	26564	26564	26564	26564	26564
f50_9	3	17326	16903	16903	16903	16893	16903
	5	27100	26900	27145	26900	26990	26900
	7	29710	29261	29443	29375	29753	29261
	9	22282	22282	22282	22282	22282	22352
f50_10	3	18041	17934	18062	17934	17967	17934
	5	27920	27890	27915	27890	27925	27890
	7	28847	28651	28651	28651	28841	28651
	9	21715	21825	21715	21715	21715	21715

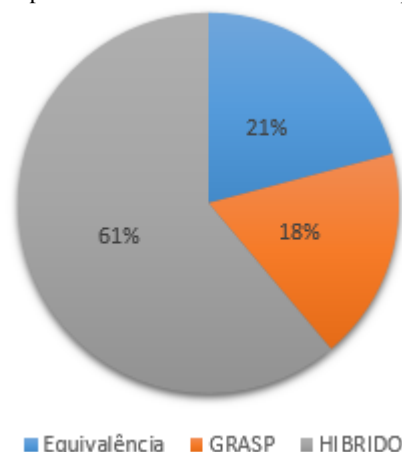
Tabela 2: Desempenho dos métodos GRASP-ILS e a proposta Híbrida para instâncias de 75 nós.

Instância	β	Guloso ($\alpha = 0.1$)		Mediano ($\alpha = 0.5$)		Aleatório ($\alpha = 0.9$)	
		GRASP-ILS	Híbrido	GRASP-ILS	Híbrido	GRASP-ILS	Híbrido
f75_1	3	21346	21019	21019	21019	21012	21019
	5	34030	33610	34050	33560	34165	33520
	7	39003	38988	38958	38712	38541	38863
	9	27479	27479	27479	27479	27479	27479
f75_2	3	19468	19486	19468	19486	19437	19486
	5	31125	31145	31220	30810	31560	30900
	7	36816	35432	36288	35088	36025	35224
	9	26974	26972	26972	27006	26974	26972
f75_3	3	21086	20948	20948	20948	20976	20948
	5	34100	33395	34090	33480	33940	33370
	7	38034	37278	37547	37167	37548	37255
	9	27443	27443	27506	27388	27443	27388
f75_4	3	19509	19509	19509	19509	19509	19509
	5	34420	31425	32000	31360	32060	31285
	7	36306	34746	35482	34851	35029	34776
	9	25855	25855	25855	25855	25855	25855
f75_5	3	19288	19299	19050	19299	19050	19299
	5	31260	30040	30035	30000	30295	30085
	7	35342	34135	34730	33889	34453	34006
	9	28917	28772	28845	28772	29031	28772
f75_6	3	20447	20660	20447	20660	20447	20660
	5	33855	33105	32935	33255	33295	33475
	7	37971	37096	37988	37209	37669	37226
	9	25962	25962	25965	25962	25962	25962
f75_7	3	20659	20686	20623	20686	20623	20686
	5	32595	32220	32870	32050	32300	32135
	7	36882	35967	36790	35668	36881	35671
	9	28264	28223	28279	28178	28383	28178
f75_8	3	19161	19161	19161	19161	19161	19161
	5	31470	31060	31150	31050	31195	30995
	7	37743	35801	36951	35782	36166	35615
	9	26559	26598	26543	26578	26543	26543
f75_9	3	19650	19650	19827	19650	19650	19650
	5	32000	31165	31670	30825	31745	30970
	7	35800	34197	34856	34491	34992	34395
	9	25025	25012	24957	24957	25025	24962
f75_10	3	20098	20356	19945	20356	19926	20356
	5	32690	31445	32120	31330	31740	31345
	7	35383	35057	35803	35339	35758	35158
	9	28422	28355	28531	28356	28480	28424

Tabela 3: Desempenho dos métodos GRASP-ILS e a proposta Híbrida para instâncias de 100 nós.

Instância	β	Guloso ($\alpha = 0.1$)		Mediano ($\alpha = 0.5$)		Aleatório ($\alpha = 0.9$)	
		GRASP-ILS	Híbrido	GRASP-ILS	Híbrido	GRASP-ILS	Híbrido
f100_1	3	22951	22969	22951	22969	22951	22969
	5	38975	36920	38435	36880	37795	36880
	7	43982	42483	43480	42199	43470	42263
	9	29843	29552	29842	29561	29976	29546
f100_2	3	23611	23566	23566	23566	23566	23566
	5	39275	38290	39000	38050	39235	38010
	7	44589	42530	44248	42516	43728	42557
	9	31530	31268	31306	31193	31274	31280
f100_3	3	21998	22622	21998	22622	21998	22622
	5	39240	35685	36995	36045	36505	35845
	7	41760	38907	40530	38969	39557	38549
	9	28391	28244	28410	28271	28427	28256
f100_4	3	23917	24013	23863	23935	23863	23935
	5	39780	37440	39475	37625	39050	37440
	7	44648	42991	43606	42652	43558	42609
	9	33938	33629	33767	33729	33742	33641
f100_5	3	22817	23107	22817	23107	22817	23107
	5	37635	36785	37745	36820	37350	36860
	7	42647	41506	42106	41475	41366	41385
	9	33803	33882	33908	33679	33850	33833
f100_6	3	23403	23487	23400	23487	23358	23457
	5	37415	36440	37615	36380	38360	36405
	7	44466	43172	43951	42879	44001	43124
	9	32257	31687	32271	31672	32329	31720
f100_7	3	22750	22865	22745	22865	22745	22865
	5	38815	35885	37090	35880	37100	35865
	7	41363	40075	40748	39843	40583	39943
	9	30041	29926	29943	29922	29982	29926
f100_8	3	24213	24321	24111	24321	24000	24270
	5	39900	37905	39000	37815	38685	37720
	7	44782	43212	44744	43164	44822	43194
	9	31240	30930	31090	30933	31227	30927
f100_9	3	24069	24130	23815	24130	23845	24130
	5	40790	37295	38700	37295	38720	36990
	7	43038	40793	41420	40982	41792	40833
	9	32148	32043	32225	32014	32316	31822
f100_10	3	24480	24045	24120	24045	24051	24045
	5	40470	38350	40185	38350	40495	38340
	7	45015	44046	45091	43980	44873	43748
	9	31737	31555	31732	31534	31744	31536

Figura 1: Desempenho dos procedimentos GRASP-ILS e Híbrido para os 360 casos de testes



5. Conclusão

O presente trabalho apresenta um processo híbrido formado pela união de um método exato (*Branch-and-Bound* - B&B) e outro heurístico (GRASP-ILS, uma composição dos métodos *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* e *Iterated Local Search*), aplicado ao Problema do Ciclo Mediano sem Restrição de Capacidade (PCMRC). Este problema tem por objetivo a construção com custo mínimo de uma rede com topologia anel-estrela. A primeira fase do procedimento proposto corresponde ao B&B que produz soluções inteiras cada vez mais próximas do ótimo e se encerra quando atinge um limite pré-estabelecido para essa proximidade. O encerramento do algoritmo exato propicia o encontro de um espaço de vizinhança favorável para o processo de refinamento realizado pela heurística GRASP-ILS, na segunda fase.

Executados 360 casos de testes com instâncias de 50, 75 e 100 nós de [Labbé et al., 1999] e [Labbé et al., 2004], os experimentos computacionais revelaram desempenho promissor para o procedimento proposto, tendo ganho em 220 casos de testes, quando comparado ao procedimento heurístico proposto por [ANDRADE et al., 2016]. Esse desempenho se revelou mais promissor a medida que as instâncias aumentaram de tamanho. Com relação à análise do tempo computacional, o uso de técnicas exatas fez com que o procedimento híbrido apresentasse um gasto médio superior.

Como atividades futuras, podem ser executados testes utilizando uma versão mais recente do *solver*, o objetivo seria verificar a possibilidade de se alcançar melhores resultados dada esta modificação. Além disso, observa-se a oportunidade da execução de casos de testes para outras classes de instâncias, bem como o uso de outras heurísticas para exploração do espaço de vizinhança fornecido pelo procedimento exato. Pode ser realizado também um estudo em busca de um *GAP* que possibilite uma melhoria no tempo de execução da etapa exata. Este estudo poderia permitir uma análise considerando os tempos de execução juntamente com a qualidade das soluções. Com a adição destas atividades, a eficácia dessa abordagem será reforçada.

Referências

- ANDRADE, L., Cabral, L. d. A. F., Dias, T. C. S., e Pinto, E. R. (2016). Uma abordagem híbrida *grasp-ils* para o problema de projeto de redes com topologia anel-estrela. *TEMA (São Carlos)*, 17(1):21–34.
- Calvete, H. I., Galé, C., e Iranzo, J. A. (2013). An efficient evolutionary algorithm for the ring star problem. *European Journal of Operational Research*, 231(1):22–33.

- Chen, X., Hu, X., Tang, Z., Wang, C., e Zhang, Y. (2017). Algorithms for the ring star problem. In *International Conference on Combinatorial Optimization and Applications*, p. 3–16. Springer.
- Dias, T. C. S., de Sousa Filho, G. F., Macambira, E. M., Lucidio dos Anjos, F. C., e Fampa, M. H. C. (2006). An efficient heuristic for the ring star problem. In *International Workshop on Experimental and Efficient Algorithms*, p. 24–35. Springer.
- Kedad-Sidhoum, S. e Nguyen, V. H. (2010). An exact algorithm for solving the ring star problem. *Optimization*, 59(1):125–140.
- Labbé, M., Laporte, G., Martín, I. R., e González, J. J. S. (1999). The median cycle problem.
- Labbé, M., Laporte, G., Martín, I. R., e Gonzalez, J. J. S. (2004). The ring star problem: Polyhedral analysis and exact algorithm. *Networks*, 43(3):177–189.
- Martín, I. R. (2000). *Cycle location problems*. PhD thesis, Universidad de La Laguna.
- Meador, B. (2008). A survey of computer network topology and analysis examples. *Washington University*.
- Pérez, J. A. M., Moreno-Vega, J. M., e Martin, I. R. (2003). Variable neighborhood tabu search and its application to the median cycle problem. *European Journal of Operational Research*, 151(2): 365–378.
- Simonetti, L., Frota, Y., e de Souza, C. C. (2011). The ring-star problem: A new integer programming formulation and a branch-and-cut algorithm. *Discrete Applied Mathematics*, 159(16): 1901–1914.