Monitoria de Estrutura de Dados

Univesidade Federal do Ceará

Francisco Alex Sousa Anchieta

Sumário

1 Recursão

Este é um conceito que na maioria das vezes nós, alunos, temos dificuldade de compreender. O que é estranho, uma vez que muitos problemas resolvemos quase que imediato com um versão recursiva, ainda que não sabemos explicar o porquê. Por exemplo, considere o fatorial de um número n, definido por

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$$

Observe que $n! = n \cdot (n-1)!$ e que $(n-1)! = (n-1) \cdot (n-2)!$ e assim por diante. Ou seja, para encontrarmos o fatorial de n, podemos chamar os fatoriais de números menores que n e resolvê-los, multiplicamos o seu resultado, até chegarmos em 1, de forma que obtemos o resultado da operação.

Vemos isso, da mesma forma, na exponenciação, onde k^n pode ser definido como $k^n = k \cdot k^{(n-1)}$, sendo $k^{n-1} = k \cdot k^{(n-2)}$ e assim consecutivamente até chegarmos em k^1 e, como resultado, temos uma multiplicação de n k's.

1.1 E o que é uma Recursão?

Um procedimento é dito recursivo se ele é definido em termos de si mesmo, ou seja, é um método de resolução de problemas que envolve quebrar um problema em subproblemas menores até chegar a um problema pequeno o suficiente para que ele possa ser resolvido trivialmente[1].

Como a recursão é definida a partir de versões de si mesma, devemos observar o momento em que as nossas chamadas deve acabar. Dessa forma, precisamos de um caso base para o nosso problema, ou melhor, uma condição de parada que conclua essa subrotina. Este estado define o ponto final da chamada recursiva, onde a solução é trivial, por isso chamamos de caso base. E para isso precisamos da condição. Para os números fatoriais, por exemplo, temos que o caso base é 1!, e para a exponenciação, k^1.

Agora, vamos exemplificar a recursão. Para isso utilizarei um pseudo-código, escrito em português, que facilitará o entendimento, pois não se limita as regras de uma linguagem. Observe o pseudo-código que encontra o número fatorial de n:

Algoritmo 1 Calcula o Número Fatorial de x com Recursão

```
função FATORIAL(x)
    se x = 1 então
        retorne 1
    senão
        retorne x * FATORIAL(x − 1)
    fim se
fim função
```

Note que a função é, basicamente, um **se** e **senão**. Quando calculamos o fatorial, temos que a condição verifica se a entrada é igual a 1, caso seja, retorna 1 como resultado. Isso ocorre pois sabemos que $1! = 1$, sendo este o último valor calculado e, assim, $1!$ é o caso base e o $x == 1$, a condição de parada. No **senão**, temos uma chamada recursiva que decrementa o valor de entrada x e multiplica essa chamada com o próprio x, isso até chegarmos no caso base.

Importante destacar que um código escrito de forma recursiva podemos escrever o mesmo problema por meio de iterações (o uso laços de repetição), mas isso não quer dizer que seja mais fácies. Normalmente, códigos recursivos são mais legíveis e mais simples de se implementar. Por exemplo, podemos escrever a função anterior de forma iterativa:

Algoritmo 2 Calcula o Número Fatorial de x com Iteração

fat ← 1
para i ← 1 **até** n **faça**
    fat ← fat $*i$
fim para
retorne fat

A forma iterativa do cálculo do número fatorial ainda é simples, porém ainda temos que adicionar uma variável na função. Para evidenciarmos essa diferença veremos a sequência de Fibonacci.

1.2 A recursão na sequência de Fibonacci

A sequência de fibonacci é uma sequência de números inteiros, começando de 1, onde cada termo subsequente corresponde à soma dos dois anteriores. Com isso, temos que os números de fibonacci são os integrantes dessa sequência, sendo:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...$$

Observe que, inicialmente, os valores crescem lentamente, porém, mais adiante, as somas se tornam cada vez maiores, de forma que fique mais complicado computá-las. Por exemplo, temos que $F_{50} = 12586269025$, $F_{55} = 139583862445$ e o $F_{99} = 218922995834555169026$. Veja que para computar F_{99}, utilizar **int** do C, por exemplo, não vai ser possível. Se desejar verificar os valores de fibonacci para valores de n até 100, veja aqui. Se você é mais *hardcore*, veja aqui os 2000 primeiros números de fibonacci.

Podemos representar essa sequência por uma relação de recorrência que seria uma fórmula:

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_n = F_{(n-1)} + F_{(n-2)}$$

Note que essa fórmula possui uma recursão em seu caso geral, de forma que eu precise de resultado anteriores para resolver o atual.

Vamos aplicar o fibonacci em nosso pseudo-código na forma recursiva:

Algoritmo 3 Calcula o Número Fibonacci na posição n com Recursão

função FIBONACCI(n)
  se $n < 2$ **então**
    retorne n
  senão
    retorne FIBONACCI$(n-1)$ + FIBONACCI$(n-2)$
  fim se
fim função

Perceba que essa função é tão simples quanto o do número fatorial, pois temos apenas uma condicional que direciona o que deve ser feito. A condição de parada resolve os dois casos base, onde para $n = 2$, temos que $F_2 = 2 = n$. A chamada recursiva no **senão** é apenas a aplicação da fórmula apresentada anteriormente. Isso evidencia a natureza recursiva desse problema.

Agora, observe a versão iterativa:

Algoritmo 4 Calcula o Número Fibonacci na posição n com Iteração

$j \leftarrow 1$
$i \leftarrow 1$
para k $\leftarrow$ 1 **até** n **faça**
  $t \leftarrow i + j$
  $i \leftarrow j$
  $j \leftarrow t$
fim para
retorne j

Note que a forma iterativa dessa função não é nem um pouco legível quanto a versão recursiva. Nela, se utiliza três variáveis auxiliares para realizar as somas. A variável i representa $F_{(n-2)}$ e j representa $F_{(n-1)}$ no laço de repetição. Quando $k = n$, a funcão retorna j pois, na iteração anterior, $j \leftarrow t = F_{(n-2)} + F_{(n-1)}$.

Além dos números de fibonacci, existe outros problemas que o uso de recursão é evidenciável. Como exemplo, temos estruturas de dados dinâmicas, como as Árvores, e o método de ordenação QuickSort (estes são temas que vão ser estudados nessa disciplina, futuramente). Além disso, quando utilizamos uma linguagem funcional, é mais prático o uso de recursões (para quem faz Ciência da Computação, vai compreender melhor futuramente, para os outros, vale a dica!).

1.3 O seu lado negativo

Ainda que o uso de recursão seja mais legível e a solução, para alguns problemas, seja imediato, devemos ter cautela ao aplicarmos na maioria dos casos. No exemplo anterior, o uso da versão iterativa do Fibonacci é mais eficiente do que a recursiva, de forma que a versão recursiva tem um custo exponencial (inicialmente confie em mim, isso é ruim!) e a iterativa, um custo linear.

Outra desvantagem do uso de recursão é seu alto consumo de memória, uma vez que é necessário armazenar o estado da chamada anterior até que o caso base ocorra. Por isso, devemos ter cuidado ao usar esse recurso em nosso programas. O ideal é implementar a versão iterativa no código final e utilizar a recursiva apenas pra entendimento e legibilidade.

Exercício 1. *O triângulo de Pascal é é um triângulo aritmético infinito onde são dispostos os coeficientes das expansões binominais. Ele disposto da seguinte forma:*

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\cdots
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}
$$

Figura 1 – Representação do triângulo de Pascal

Implemente a função recursiva do triângulo de Pascal.

Exercício 2. *O superfatorial de um inteiro positivo n é dado pelo produto dos n primeiros fatoriais. Ou seja,*

$$sf(n) = \prod_{n}^{k-1} k!$$

.

Implemente uma função recursiva para calcular o superfatorial de n.

Exercício 3. *O Hiperfatorial de um inteiro positivo n é definido por:*

$$sf(n) = \prod_{k=1}^{n} k^k$$

Implemente uma função recursiva que calcula o hiperfatorial

2 Análise de Algoritmos

2.1 O que são Algoritmos?

Os algoritmos fazem parte do nosso dia-a-dia, ainda que não percebemos, sendo de grande importância. Por exemplo, quando compramos um móvel, precisamos realizar a sua montagem e, para tal, é necessário um guia do produto. Caso não houvesse este guia, provavelmente não teremos um móvel útil. No entanto, com o guia em mãos, temos todos os requisitos (ou quase) para efetuarmos a montagem.

Bem, e o que este guia descreve? Ele define os **passos** que deve ser seguidos para a construção ideal do móvel, ou melhor, descreve como deve ser montado e onde cada peça deve ser encaixada. Com isso, temos que o guia é o **algoritmo** que devemos usar para a montagem de um móvel qualquer.

Agora, vamos escrever o passo a passo para realizarmos a travessia de uma rodovia:

1. Olhar para o lado esquerdo
2. Olhar para o lado direito
   a) Se não vem veículos na sua direção, atravesse
   b) Senão, não cruze a rodovia

Obviamente, temos outras formas de realizar essa travessia (poderíamos executar uma verificação depois de olharmos para esquerda e outra ao olharmos para a direita) e, ainda assim, conseguimos satisfazer o nosso objetivo. Dessa maneira, um mesmo problema pode ser resolvidos de diversas formas. Porém, devemos observar se as soluções são aplicáveis e corretas.

Dado exemplos textuais de algoritmos, temos uma ideia de como ele funciona. Dito isso, agora vamos definir o que é um algoritmo na computação. Um algoritmo é uma sequência de passos computacionais que transformam a entrada na saída[2]. Em outras palavras, é uma serie finita de passos que levam à execução de uma tarefa. Quando programamos `print("Hello World")`, estamos ordenando que seja apresentado no console a mensagem *Hello World*.

Desse modo, todas as tarefas executadas pelo computador são baseadas em algoritmos. Isso ocorre porque devemos dizer a ele exatamente o que queremos que ele faça (e ele é bastante obediente!). Portanto, quando o nosso código possui um erro, por exemplo, a culpa sempre é do programador, pois a máquina só faz o que mandamos ela fazer.

2.2 Algoritmo de Euclides

A partir de diante, vamos lidar com um dos exemplos clássicos de algoritmo numérico, o algoritmo de Euclides. Euclides de Alexandria foi um grande matemático da Grécia Antiga e, entre tantos outros estudos, ele desenvolveu um método para calcular o máximo divisor comum (MDC) entre dois números inteiros não nulos. O MDC de dois números inteiros é o maior número inteiro que divide ambos sem deixar resto. O algoritmo utiliza a recursão como sua aliada (Vê Seção 1). Ele utiliza o resto da divisão como entrada para a chamada recursiva, ou seja, MDC(a, b) $\Rightarrow$ MDC(b, r), onde $a, b \in \mathbb{Z}_*$ e $r = a \ mod \ b$. A condição de parada é $b = 0$.

Os passos que devemos seguir são:

1. Calcule $r = a \ mod \ b$
2. Se $r = 0$, o MDC de a e b é a
3. Senão, o MDC de a e b é MDC(b, $a \ mod \ b$)

Por exemplo, considere o MDC(102, 80). Temos:

$$\text{MDC}(102, 80) \Rightarrow \text{MDC}(80, 22), \text{ pois } 102 \text{ mod } 80 = 22 \tag{1}$$
$$\text{MDC}(80, 22) \Rightarrow \text{MDC}(22, 14), \text{ pois } 80 \text{ mod } 22 = 14 \tag{2}$$
$$\text{MDC}(22, 14) \Rightarrow \text{MDC}(14, 8), \text{ pois } 22 \text{ mod } 14 = 8 \tag{3}$$
$$\text{MDC}(14, 8) \Rightarrow \text{MDC}(8, 6), \text{ pois } 14 \text{ mod } 8 = 6 \tag{4}$$
$$\text{MDC}(8, 6) \Rightarrow \text{MDC}(6, 2), \text{ pois } 8 \text{ mod } 6 = 2 \tag{5}$$
$$\text{MDC}(6, 2) \Rightarrow \text{MDC}(2, 0), \text{ pois } 6 \text{ mod } 2 = 0 \tag{6}$$

Como $a = 2$, o MDC(102, 80) = 2.

Essa descrição textual fornece os passos que devemos seguir. Não obstante, podemos escrever em uma forma que o computador possa entender. E não é difícil, porque esta é a forma que damos ordens ao computador. Vamos utilizar as linguagens de programação para resolver esse problema em um computador. Segue o pseudo-código:

Algoritmo 5 Calcula o MDC entre dois inteiros não nulos, pelo método de Euclides

```
função MDC(a, b)
    se b = 0 então
        retorne a
    senão
        retorne MDC(b, a mod b)
    fim se
fim função
```

2.3 O conceito da análise algorítmica

Sabemos o que é um algoritmo e o porque ele é tão importante no nosso estudo. Agora, podemos lidar com sua complexidade e o quanto de recurso ele consome. Essas informações são de extrema importância uma vez que podemos descobrir a sua correção e desempenho.

Ainda que os computadores modernos sejam extremamente rápidos e precisos, eles possuem uma limitações. Por exemplo, ele não consegue representar todos os números inteiros, pois são infinitos, e muito menos os números reais. Por isso, operações que lidam com números reais (como algumas divisões, cálculo de derivadas, etc) precisam de uma atenção melhor.

Como dito anteriormente, conseguimos resolver um problema de várias formas possíveis, porém uma escolha errada pode fazer com que o computador não faça o que se pede em um tempo hábil. Por essa razão, realizarmos a análise de algoritmos é de suma importância, ela tem como função determinar os recursos necessários para executar um dado algoritmo. Dessa forma, dados dois algoritmos para um mesmo problema, a análise permite decidir qual dos dois é mais eficiente

Por exemplo, pouco tempo atrás lidamos com os números de *fibonacci*, e foi apresentado dois algoritmos que realizam a mesma operação: um utilizava a recursão, com um código mais legível; e outro na forma iterativa, um pouco mais difícil de compreender. Foi dito ainda, que a forma iterativa é mais eficiente. Isso ocorre pois cada chamada recursiva chama mais duas em seu escopo, de forma que acumula diversas outras chamadas, que são até redundante. Observe que, na primeira chamada, cria-se outras 2; na segunda, é criado 4; na terceira, 8; e na n-ésima, 2^n chamadas. Sendo assim, temos que a quantidade de operações realizadas no versão recursiva cresce exponencialmente e, com isso, se precisarmos de 10 chamadas, teremos $2^{10} = 1024$ procedimentos para resolver.

Em contrapartida, a versão iterativa possui um crescimento linear. Ela possui um *loop* que realiza 4 operações (uma soma e três atribuições) que são realizadas n-1 vezes, de modo que efetua 4n-4 operações. Com as duas atribuições antes do laço, temos 4n-2 operações. À vista disso, a versão iterativa cresce segundo uma função afim crescente. Adiante, explicaremos o que essas operações significam.

Para realizarmos a análise, precisamos ir além do resultado final do algoritmo, devemos saber o que é seu tempo de execução. Para isso, sempre expressaremos o tempo de execução contando o número de etapas básicas do computador, em função do tamanho da entrada[3]. As operações básicas são as unidade. Dessa forma, atribuições, operações aritméticas básicas, comparações e acesso de elementos em uma estrutura de dados simples são ditos passos básicos. Essas são as unidades de um algoritmo. Observe que o tempo de execução representa uma função, não necessariamente é uma constante, uma vez que nos baseamos na entrada.

Quando lidamos com o fibonacci iterativo, foi dito que ele realiza $4n - 2$ instruções. Esse é o tempo de execução desse algoritmo. Normalmente, usaremos esse custo para representar a complexidade do algoritmo.

No entanto, é importante salientar que o tempo de execução e o espaço de memória depende da máquina que usamos, não adianta realizar uma ordenação de 100.000 números em um computador moderno e no ENIAC (primeiro computador criado) esperando o mesmo número de instruções. Disso, temos que:

> "O tempo gasto por uma dessas etapas [ou seja, as instruções básicas] depende crucialmente do processador e até de detalhes como a estratégia de armazenamento em cache (como resultado, o tempo de execução pode diferir sutilmente de uma execução para a outra). A contabilização dessas minúcias específicas da arquitetura é uma tarefa incrivelmente complexa e produz um resultado não generalista de um computador para o outro. Portanto, faz mais sentido procurar uma caracterização organizada e independente de máquina da eficiência de um algoritmo". Dasgupta, Papadimitriou e Vazirani, 2006 [3].

Além de desconsiderarmos a arquitetura da máquina, podemos simplificar (ainda mais) nossa notação lidando apenas com os termos mais significativos. Por exemplo, em vez de representar 4n-2 como o tempo de execução do fibonacci iterativo, podemos definir $O(n)$, uma vez que o coeficiente 4 e a constante 2, para entradas excessivamente grandes, tornam-se insignificantes. Vamos definir o que significa $O(n)$.

2.4 Notação assintótica

A notação assintótica, na análise de algoritmos, é a forma de representarmos o tempo de execução de um algoritmo. Com ela, estamos preocupados com a maneira como o tempo de execução de um algoritmo aumenta, com o tamanho da entrada no limite, à medida que o tamanho da entrada aumenta indefinitivamente[2]. Isso quer dizer que estamos preocupados com valores grandes de entrada para o processamento do algoritmo, com o intuito de calcular o tempo total de processamento e viabilidade para determinados casos.

Na verdade, a notação assintótica representa classes de funções. Um conjunto de funções estão na mesma classe quando possuem o mesmo termo dominante. Por exemplo, as funções

$$2n^2,\ 5n^2 + 5,\ 8n^2 + 5n + 8,\ \frac{5}{2}n^2 + 1526n,\ 0.5n^2 + \frac{5}{3},\ \sqrt{5}n^2 + 5n$$

estão na mesma classe.

Existem diversas notações que relacionam funções, mas iremos introduzir apenas a notação O (lê-se *big-O*). A notação O incorpora as funções que são limitadas superiormente por uma outra função. Denotamos:

Definição 1. $O(g(n)) = \{f(n) | \exists c, n_0 \in \mathbb{R}_+ : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0\}$

Em outras palavras, existe um número positivo c e um número n_0 tais que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para todo n maior que n_0.

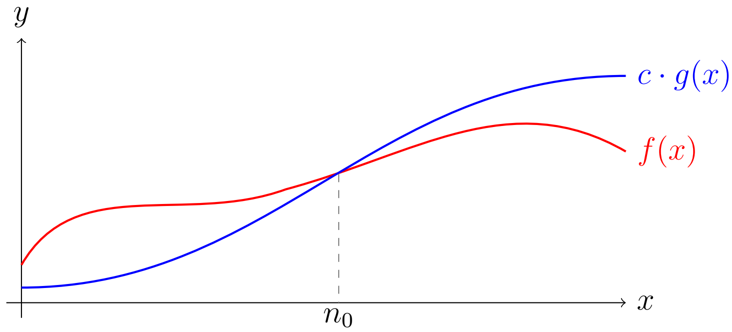


Figura 2 – No ponto n_0, $c \cdot g(x)$ domina $f(x)$, dessa forma $f(x) \in O(g(x))$.

Dessa forma, quando escrevemos $f(n) \in O(g(n))$, dizemos que $f(n)$ é limitada superiormente por $g(n)$, ou que $f(n)$ é dominada por $g(n)$. Dizemos que a notação O fornece limites superiores assintóticos.

Como exemplo, temos que $5n^2 + 7n - 3 \in O(n^2)$, pois $5n^2 + 7n - 3 \leq c \cdot n^2$ quando $c = 6$ e $n_0 = 1$.

Na disciplina de Estrutura de Dados, vamos nos limitar apenas nesse conceito. Na disciplina de Projeto e Análise de Algoritmos, veremos esse assunto mais profundamente (ao menos aos de Ciência da Computação).

Observe que essa análise é puramente matemática, ou seja, independe da linguagem ou máquina, é universal. Em uma análise empírica, a linguagem de programação importa, além da máquina que usamos. Logo, quando comparamos algoritmos rodando todos no mesmo computador, para verificar o mais rápido, estamos fazendo uma análise empírica. Porém, um dos possíveis problemas em se comparar algoritmos empiricamente é que uma implementação pode ser mais otimizada do que a outra, dependendo da linguagem, da máquina, do compilador e do sistema.

Exercício 4. *Em cada um dos itens, verifique se* $f(n) = O(g(n))$.

(a) $f(n) = n \log n$ *e* $g(n) = 10n \log 10n$

(b) $f(n) = 2^n$ *e* $g(n) = 2^{n+1}$

(c) $f(n) = n!$ *e* $g(n) = 2^n$

(d) $f(n) = \sqrt{n}$ *e* $g(n) = n^{\frac{1}{5}}$

3 Listas encadeadas

Quando estávamos estudando os conceitos fundamentais da programação, nos foi apresentado as principais estruturas e operações que as linguagens possuem. Entre esses diversos conceitos, nos foi apresentado uma estrutura de dados básica, que agrupa os dados, de mesmo tipo, organizando-os de forma contínua na memória. Essa estrutura denominamos vetor, ou ainda, de *array*.

Em um vetor v com n posições, os dados são indexados de 0 à $n-1$ e acessamos o valor por meio de sua posição. Se quisermos o valor da k-ésima posição basta acessarmos v[k], que obteríamos o resultado. Dessa forma, temos uma melhor organização dos dados armazenados do nosso código.

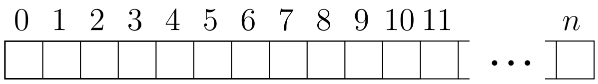


Figura 3 – Estrutura do vetor v na memória

Todavia, existe casos que seu uso não é recomendado. Como os dados são organizados continuamente na memória, o uso de vetores pode causar desperdício. Por exemplo, se criarmos um vetor com 100 posições e usarmos apenas 10, existe outras 90 posições que estão sendo armazenadas inutilmente. Este caso ocorre quando não sabemos a quantidade de dados que precisamos armazenar e acabamos subutilizando-o.

E, relacionado a isso, existe outro problema: quando precisamos de mais posições do que definimos para o vetor. Para resolver isso, devemos alocar mais espaço contínuo à frente. Seria uma solução mas, se este espaço já estar ocupado? Podemos mover todo o vetor para outro espaço na memória que tenha o tamanho que precisamos. Porém, existe outros problemas. Primeiro, todas as vezes que precisarmos alocar mais posições do vetor, teríamos que mover todo o vetor, o que pode ser custoso. E ainda mais: e se não houver mais espaço?

Note que esse problema do uso dos vetores é relativo a forma em que os dados estão sendo armazenados (o que em alguns casos pode ser uma vantagem, uma vez que o acesso dos dados é constante). Devemos então, pensar em uma outra forma de organizar os dados sem eles necessariamente estarem juntos, mas ainda assim interligados. Isso pode parece contraditório, como vamos manter os dados unidos, mas permitir encontre-se separados? Na verdade, eles estão em endereços da memória não obrigatoriamente consecutivos, mas aponta para o seu próximo, por meio de um ponteiro. Dessa forma, podemos localizá-los e mantê-los conexos.

Para ilustrar isso, imagine que estamos na cidade X e queremos ir para a cidade Y. Para isso, pegamos um ônibus intermunicipal que nos leva ao nosso destino. Entre essas duas cidades, existe k paradas para embarque e desembarque de passageiros distribuídas em k cidades, mas entre os dois destinos pode existir mais cidades.

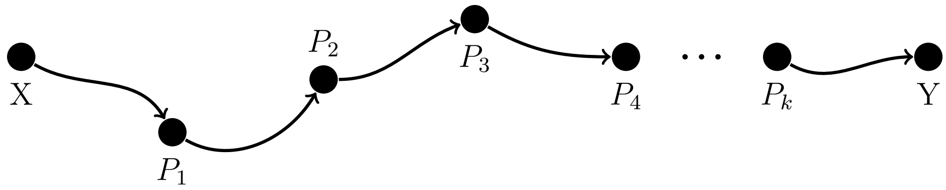


Figura 4 – Rota da cidade X para a cidade Y. Note que devemos passar necessariamente por cada parada para chegarmos ao destino. Ou seja, não podemos pular nenhum ponto.

Como ilustrado na Figura 4, cada ponto possui a rota da parada subsequente, de forma que, de X para Y, passamos por todas as paradas.

Agora, vamos relacionar o nosso exemplo com a solução que buscamos para os vetores. As cidades são as posições na memória, onde cidade vizinhas são os endereços subsequentes. Os pontos de ônibus são as cidades que devemos passar e que temos acesso. Estas cidades são os dados da nossa estrutura.

Dessa forma, podemos definir uma estrutura que armazena o dado propriamente dito e um endereço para o próximo elemento. Esse conjunto dado/endereço chamamos de nó ou célula. Por fim, nomeamos essa estrutura como **lista encadeada**.

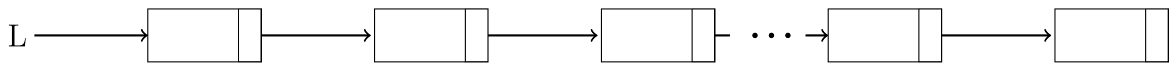


Figura 5 – Ilustração de uma lista encadeada. O endereço da lista é representada por um ponteiro que aponta para o primeiro elemento.

Note que para cada novo elemento inserido na estrutura, alocamos um espaço de memória para armazená-lo. Desta forma, o espaço total de memória gasto pela estrutura é proporcional ao número de elementos nela armazenado[4].

Como dito anteriormente, a lista aponta para o primeiro elemento, o segundo aponta para o terceiro, o terceiro para o quarto e assim por diante. E o último? Ele aponta para alguém? Na teoria, o último elemento não aponta para ninguém, ou melhor, aponta para um endereço nulo. Nas principais linguagens de programação esse valor de endereço é descrito a partir da palavra-chave *NULL*.

3.1 Operações em listas encadeadas

Agora, vamos implementar as principais operações em listas encadeadas. Para isso, vamos utilizar uma lista que armazena caracteres. Será utilizado a linguagem C na implementação, uma vez que a sua notação de *struct* é mais simples e estamos mais familiarizado.

Vamos definir a estrutura **celula**:

```c
struct celula {
   char caracter;
   struct celula *prox;
};

typedef struct celula Celula;
```

Essa estrutura representa a célula da lista, ou seja, cada elemento que pode ser incorporado.

3.1.1 Função de Inicialização

Para inicializarmos a estrutura, devemos criar uma lista vazia. Como a lista aponta para o primeiro elemento e, inicialmente, a lista está vazia, ele apontará para nulo.

```c
Celula *inicializar () {
   return NULL;
}
```

3.1.2 Função de inserção de elemento

Com a lista inicializada, podemos adicionar elementos com a função de inserção. Para isso, é criado uma nó auxiliar para armazenar o novo valor. Esse novo elemento passa a apontar para o primeiro elemento e se torna o endereço da lista. Sendo assim, a inserção é dada apenas no início da lista.

```c
int inserir (Celula **c, char elem) {
   Celula *nw = malloc(sizeof(Celula));
   if(nw == NULL) return 0;

   nw->caracter = elem;
   nw->prox = *c;
   *c = nw;

   return 1;
}
```

Note que a lista a lista retorna um valor do tipo inteiro. Esse retorno é para indicar se a criação a inserção foi realizada com sucesso. Como em C não existe tipo *boolean*, consideramos *TRUE* com 1 e *FALSE* com 0.

E se desejarmos inserir o elemento no meio da lista? Ou no final? Para isso existe outras implementações. Para inserir no final da lista devemos percorrer-la até chegar no último elemento e este deve apontar para o novo elemento criado. Para inserir um elemento na k-ésima posição, devemos percorrer a lista até a posição k definir como seu sucessor o k-ésimo nó, e o próximo do antigo (k-1)-ésimo elemento o nó adicionado. De toda forma, vamos nos focar apenas na implementação que insere no início.

A figura a seguir demonstra como é realizada essa inserção:

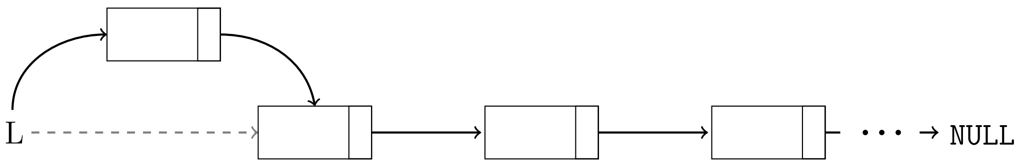


Figura 6 – Inserção de um elemento.

Exercício 5. *Implemente a inserção no final da lista.*

Exercício 6. *Implemente a inserção na k-ésima posição da lista.*

3.1.3 Imprimir lista

Para sabermos que a nossa lista está funcionando, o ideal é imprimirmos na tela os valores da célula. Como opção, podemos acessar cada posição e verificar o seu valor, utilizando *l->prox->caracter*, *l->prox->prox->caracter*, e assim por diante. Bem, mas não seria a forma mais elegante! Em vez disso, a partir de um loop, imprimimos todos os elementos, percorrendo a lista utilizando uma lista auxiliar. Essa lista é apenas uma cópia e percorremos ela até assumir valor *NULL*.

```c
void imprimir(Celula *c) {
    Celula *p = c;
    while (p != NULL) {
        printf("%c\n", p->caracter);
        p = p->prox;
    }
    free(p);
}
```

Exercício 7. *Implemente, ainda que não seja eficiente, a função de imprimir em ordem inverso.*

Exercício 8. *Implemente uma função que imprime a partir do elemento na posição x até o da posição y.*

3.1.4 Função de busca

A busca segue o mesmo príncipio da função **imprimir**. A diferença é que em **imprimir** é percorrido toda a lista, e na função **busca** percorre somente enquanto não acharmos o valor desejado. Caso encontre o valor, retornamos o endereço do nó em questão. Se não encontramos (quando a lista chega no fim), retornamos *NULL*.

```c
Celula* buscar (Celula *c, char valor) {
   Celula *p = c;
   while (p != NULL) {
      if(p->caracter == valor)
         return p;
      p = p->prox;
   }
   free(p);
   return NULL;
}
```

Exercício 9. *Implemente a versão recursiva da busca.*

3.1.5 Função de remoção

A remoção é um pouco mais difícil que as anteriores, uma vez que existe mais casos para tratarmos. Se queremos retirar o primeiro elemento da lista, basta tornar o segundo nó o endereço da lista. Se o elemento que deve ser removido estar em outra posição, vamos precisar do elemento anterior a ele. Isso é necessário porque precisaremos conectar o seu antecessor com o seu sucessor. A figura a seguir ilustra essa operação:

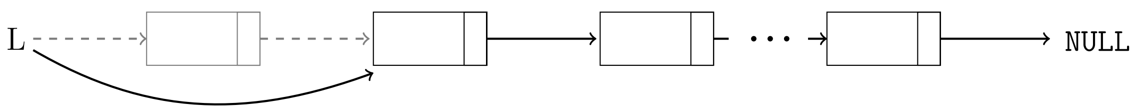


Figura 7 – Remoção do primeiro elemento.

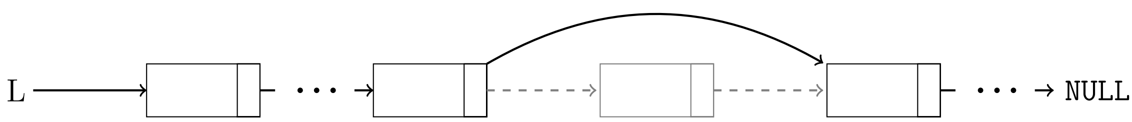


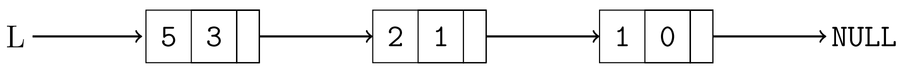
Figura 8 – Remoção do k-ésimo elemento.

Antes disso, precisamos fazer uma busca interna na lista para acharmos a posição que queremos remover e o seu antecessor. O parâmetro da nossa busca é o valor do nó. Caso a busca não encontre nenhuma célula, indica que o elemento não estar na lista e retornamos a lista original. Caso encontre um elemento, aplicamos o caso que a satisfaz, como descrito anteriormente.

```c
int remover(Celula **c, char valor)
{
   Celula *anterior = NULL;
   Celula *p = *c;
   while (p != NULL && p->caracter != valor) {
      anterior = p;
      p = p->prox;
   }

   if (p == NULL)
      return 0;


   if (anterior == NULL)
      *c = p->prox;
   else
      anterior->prox = p->prox;

   free(p);
   free(anterior);

   return 1;
}
```

Exercício 10. *Implemente a versão recursiva da remoção.*

Exercício 11. *Podemos representar um polinômio de qualquer grau em uma estrutura de lista encadeada, onde cada célula contém o coeficiente, o expoente e a referência para o próximo termo. Por exemplo, o polinômio* $5x^3 + 2x + 1$ *teria a seguinte representação:*



(a) *Faça uma função para criar um polinômio, inserindo os elementos em ordem decrescente em relação ao expoente do polinômio (como no exemplo, a última célula será o de expoente 0 e a primeira será o de maior expoente).*

(b) *Faça uma função que receba dois polinômios e crie um terceiro resultante da soma deles.*

3.2 Vantagens e desvantagens das listas encadeadas

Quando utilizamos listas encadeadas, temos a oportunidade de ser mais livre ao adicionar elementos, pois não nos preocupamos com um limite pré-estabelecido. Além disso, a remoção ou a inserção de elementos não interfere os outros elementos. Mas (como tudo na vida), existe alguns pontos negativos.

Ao utilizar uma lista encadeada, criamos uma dependência do nó com seu antecessor. Isso ocorre pois caso um nó em uma posição k qualquer perca, de alguma forma, o endereço do próximo elemento, todos os $k+1$ elementos serão perdidos. Além disso, para acessar o k-ésimo elemento da lista, temos que percorrer $k-1$ elementos para que, enfim, termos o elemento que desejamos. Se uma lista tem 1000 células e buscamos o elemento da célula da posição 900 temos que percorrer 899 células, enquanto que esse acesso no vetor é constante.

Existem variações da lista encadeada que partem do mesmo princípio, como por exemplo, listas circulares e as listas duplamente encadeadas. Essas veremos mais adiante.

3.3 Listas circulares

As listas circulares possuem uma estrutura semelhante ao que foi descrito até então, porém, existe um adicional: o último elemento passa a apontar para o primeiro, criando assim um ciclo.

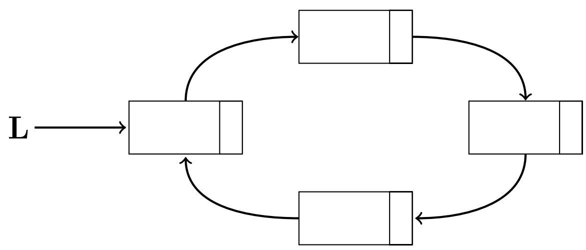


Figura 9 – Representação de uma lista circular.

Para implementarmos as operações em listas circulares partimos das operações já implementadas, realizando modificações.

A *struct* da lista circular é a mesma das listas encadeadas, uma vez que ainda precisamos armazenar o dado e o endereço do próximo nó. Da mesma forma é a inicialização, pois uma lista vazia deve apontar para o *NULL*.

Na inserção, o sucessor do último elemento da lista é o nó recém adicionado (no ciclo, o último nó é o mais distante do endereço da lista). Para inserir, devemos observar dois casos: se for a primeira inserção, ele deve apontar para si mesmo (isso evita de usarmos o *NULL* e nos ajudará nas próximas inserções); e para os outros casos, o sucessor do novo elemento deve apontar para o sucessor do primeiro nó, e, com isso, o primeiro nó passa a ser o último.

Assim como nas listas encadeadas, a inserção vai retornar um inteiro que indique se a inserção foi feita corretamente.

```c
int inserir (Celula **c, char elem) {
    Celula *nw = malloc(sizeof(Celula));
    if(nw == NULL)
        return 0;
    nw->caracter = elem;

    if(*c == NULL) {
        nw->prox = nw;
    } else {
        nw->prox = (*c)->prox;
        (*c)->prox = nw;
    }

    *c = nw;

    return 1;
}
```

Para percorrer a lista, devemos adaptar a condição de parada do laço. Em vez de ser *NULL* o final do percurso, usaremos o primeiro elemento. Quando o laço atingi-lo, já percorremos todo a lista.

```c
void imprimir(Celula *c) {
    Celula *p = c;

    do {
        printf("%c\n", p->caracter);
        p = p->prox;
    } while (p != c);
}
```

Dessa forma, apresentamos a lista da forma em que a função de inserção funciona. Ou seja, se fazermos:

```c
    //...
    Lista *l = inicializar();
    inserir('1', l);
    inserir('8', l);
    inserir('9', l);

    imprimir(l);
    // ...
```

O resultado produzido é 918. Caso seja necessário imprimir na ordem que adicionamos os elementos, devemos implementar a função **imprimir** da seguinte forma:

```c
void imprimir(Celula *c) {
   Celula *p = c->prox;

   do {
      printf("%c", p->caracter);
      p = p->prox;
   } while (p != c);
}
```

Exercício 12. *Implemente a busca e remoção de listas circulares.*

3.4 Listas duplamente encadeadas

A lista duplamente encadeada é uma versão mais completa e complicada da lista encadeada simples. Antes, lidavamos apenas com o sucessor de um elemento, dessa forma, estávamos limitado por uma direção. Nessa nova versão, temos dois ponteiros no nosso nó: um para o próximo elemento e outro para o anterior. A vantagem do seu uso é a liberdade ao percorrer entre os elementos da lista. Uma vez que, na lista encadeada simples, não conseguimos, de forma eficiente, percorrer os elementos em ordem inversa[4]. Com o acesso ao antecessor, facilitamos também a remoção de elemento, pois não seria preciso mais guardar o elemento anterior na busca.

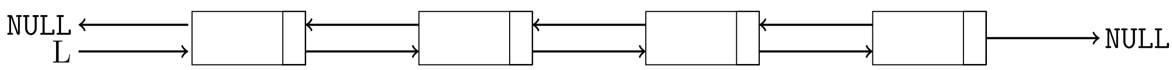


Figura 10 – Representação de uma lista duplamente encadeada.

Na estrutura da lista duplamente encadeada adicionamos mais um ponteiro.

```c
struct celula {
   char caracter;
   struct celula *prox;
   struct celula *ant;
};

typedef struct celula Celula;
```

Para inserirmos um valor, devemos adaptar a lista encadeada simples, adicionando o ponteiro do nó anterior. Como a inserção é feita no ínicio da lista, o endereço anterior é sempre *NULL* (se ele é o primeiro, não existe um antecessor). Além disso, devemos verificar se a lista é vazia.

```c
int inserir (Celula **c, char elem) {
   Celula *nw = malloc(sizeof(Celula));
   if(nw == NULL)
      return 0;

   nw->caracter = elem;
   nw->prox = *c;
   nw->prox = NULL;

   if(*c != NULL)
      (*c)->ant = nw;

   *c = nw;

   return 1;
}
```

Para percorrer a lista basta usarmos a mesma implementação da lista encadeada. Mas, se quisermos percorrer na ordem inversa, precisamos ir ao final da lista e usar o ponteiro *ant* para voltar:

```c
void imprimirR(Celula *c) {
   Celula *p = c;

   while(p->prox != NULL)
      p = p->prox;

   while (p != NULL) {
      printf("%c\n", p->caracter);
      p = p->ant;
   }
   free(p);
}
```

Exercício 13. *Implemente a função de busca e de remoção da lista duplamente encadeada.*

Exercício 14. *Implemente as operações básicas (inserção, remoção e busca) da lista circular duplamente encadeada (a junção das duas últimas listas estudadas).*

3.5 DESAFIO: Implementação da BIGINT

Uma boa forma de exercitar um tópico de estudo é aplicá-lo como solução para um outro problema. Dessa forma, temos uma visão diferente daquilo que foi aprendido.

A estrutura **BIGINT** é uma representação de números a partir de caracteres em uma lista, onde os caracteres permitidos são os dígitos '0' à '9' e '-', que vem antes dos números negativos. Dessa forma, um número é a concatenação de caracteres organizados em uma lista. Por exemplo, para 1589 temos a lista:

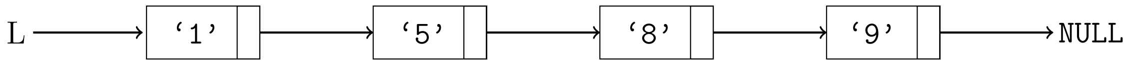


Figura 11 – Representação dos números no BIGINT em uma lista encadeada simples.

A partir disso, podemos implementar várias operações básicas, como soma e multiplicação. Mas, como implementar tais operações lidando com uma lista de caracteres? Para isso, devemos aplicar as operações aos dígitos individualmente, convertendo-o para inteiro.

Por exemplo, para realizarmos a soma, precisamos converter o último dígito das duas listas para inteiro, somá-los e converter o resultado para *char*, e isso para todo os algarismos. Vale salientar que devemos considerar todos os casos de uma soma de números. Por exemplo, quando um número possuir mais dígito do que o outro ou quando devemos levar a soma para o próximo algarismo.

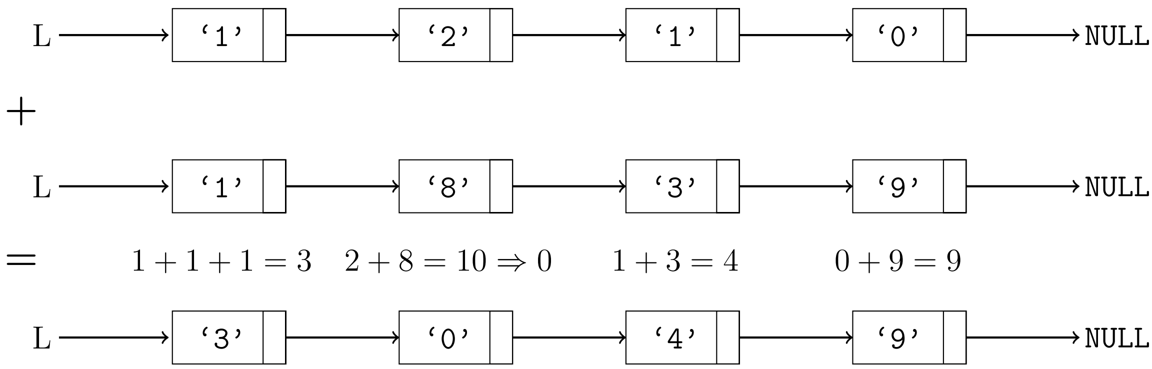


Figura 12 – Representação da soma de dois números que representam um número.

Dado essa breve explicação do problema, vamos construir as funções das operações e da estrutura. Porém, essa parte será o nosso desafio. Implemente as operações de soma, multiplicação e exponeciação. Utilize a estrutura de lista que desejar.

Com essa atividade, temos um exemplo de como utilizar as listas em um problema que vai além das operações básicas de listas.

4 Pilha

As pilhas são estrutura de dados onde o último elemento a ser inserido será o primeiro a ser removido. Essas estruturas são denominadas LIFO (*last-in, first-out*). Note que essa estrutura coloca uma restrição em suas operações. Na pilha, só temos acesso ao último elemento adicionado e, dessa forma, para acessarmos outros elementos, devemos retirar os adicionados após ele. Por exemplo, em uma pilha com 5 elementos, para acessarmos o terceiro, devemos retirar o quinto e depois o quarto.

Podemos exemplificar essa estrutura com uma pilha de livros. A adição de livros é sempre feita no topo, colocando um em cima do outro. A remoção é da mesma forma. Para acessar um livro que esteja no meio da pilha, removemos todos os acima dele. Se tentarmos adicionar, remover ou acessar livros que não sejam no topo, provavelmente, eles irão cair. Logo, se quisermos alcançar um livro na pilha que não esteja no topo, deve-se remover todos os livros superiores a ele, independente do objetivo.

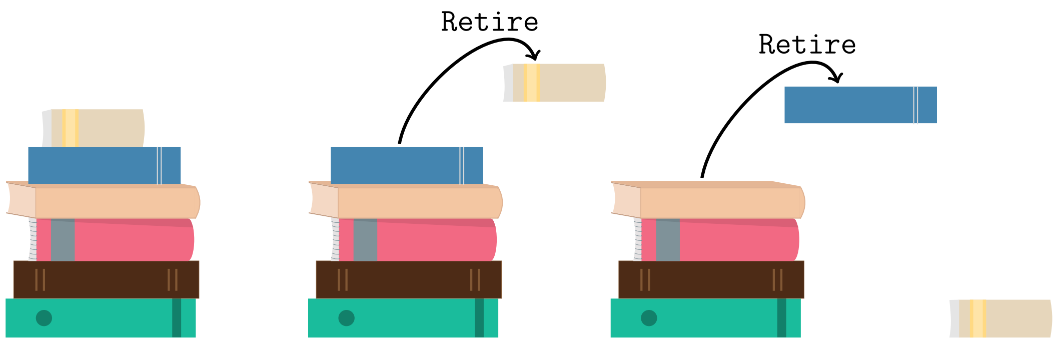


Figura 13 – Para alcançarmos o quarto livro dessa pilha, devemos retirar o sexto e quinto. Só depois disso, podemos fazer o que quisermos com o livro. Fonte: Autor.

Semelhantemente, a estrutura de pilha realiza operações apenas no topo. Por causa disso, essa estrutura é bastante simples de implementar e é muito utilizada em diversas aplicações, como por exemplo, no recurso de avançar/voltar em páginas de navegadores web e o refazer/desfazer de alguns editores.

4.1 Implementação da pilha e suas operações

Com o conceito definido, podemos partir para a implementação de algumas operações. Iremos implementar a nossa pilha a partir de um vetor e de uma lista encadeada. Usualmente a inserção é denominada *push* e a remoção *pop*.

4.1.1 Implementação com um array

O uso de array é extremamente simples e sua construção é quase que imediata. O que precisamos na estrutura é de um array, o topo do array e o tamanho máximo de elementos

```
struct pilha {
    int total;
    int topo;
```

```c
    char *caracter;
};

typedef struct pilha Pilha;
```

Na inicialização, além da pilha, devemos alocar memória para o array a partir do argumento passado. Além disso o topo do array, para representar que a pilha está vazia, é -1.

```c
Pilha* inicializar (int tot) {
    Pilha* aux = malloc(sizeof(Pilha));
    aux->caracter = malloc(sizeof(char)*tot);

    aux->topo = -1;
    aux->total = tot;

    return aux;
}
```

A inserção de elemento é dado em um espaço livre, enquanto houver, no array. Devemos verificar se o array está cheio. Se estiver cheio, retornamos 0 indicando que não foi inserido nenhum elemento, caso não esteja, inserimos e retornamos o valor 1.

```c
int push (Pilha *p, char valor) {
    if(p->topo == p->total - 1) {
        return 0; // Overflow
    }

    p->topo++;
    p->caracter[p->topo] = valor;
    return 1;
}
```

A remoção é feita no último elemento adicionado do array. Basta decrementar a variável topo, desconsiderando o elemento.

```c
char pop (Pilha *p) {
    if(p->topo == -1) {
        return -1; // UnderFlow
    }
    return p->caracter[p->topo--];
}
```

Como retornamos o caracter removido, para percorrer a pilha basta realizarmos um série de remoções.

E é simplesmente isso! Se quisermos tornar nossa implementação ainda mais simples, as operações de *pop* e *push* podem ser desenvolvidas no escopo da função principal, sem utilizar estruturas ou funções. A pilha será um array.

```c
int main() {
    char pilha[5]; // considere k=5, apenas para exemplificar
    int t = 0;

    pilha[t++] = 'a';
    pilha[t++] = 'b';
    pilha[t++] = 'c';
    pilha[t++] = 'd';

    t--;

    return 0;
}
```

A váriavel t é o indicador do topo da pilha. Dessa forma, basta incrementar o t para adicionar elementos e decrementá-lo para remover.

Exercício 15. *Desenvolva a função* ***PULL****, que, basicamente, altera o elemento posicionado no topo da pilha.*

Exercício 16. *Desenvolva uma função para inverter a posicão dos elementos de uma pilha.*

Exercício 17. *Faça uma função que receba uma pilha e retorne a quantidade de elementos.*

4.1.2 Implementação com um lista

O uso de uma lista encadeada para implementar uma pilha é dada quando não conhecemos o número de elementos que precisamos armazenar[4]. A estrutura para os nós da pilha é semelhante ao das listas até então estudadas.

A inserção (*push*) na pilha é dada sempre no ínicio da lista (da mesma forma que foi apresentado anteriormente, na seção 3.1.2). Dessa forma, o endereço da lista sempre aponta para o último elemento adicionado. A remoção do elemento é bastante simples: como removemos apenas o último adicionado, basta mudar o endereço da lista para o segundo nó.

A implementação das operações básicas é dada por:

```c
struct pilha {
    char caracter;
```

```c
    struct pilha *prox;
};

typedef struct pilha Pilha;

Pilha* inicializar() {
    return NULL;
}

int push( Pilha **p, char valor) {
    Pilha *nw = malloc(sizeof(Pilha));
    if(nw == NULL)
        return 0;

    nw->caracter = valor;
    nw->prox = *p;
    *p = nw;

    return 1;
}

char pop(Pilha** p) {
    if(*p == NULL) {
        return -1; // Underflow
    }

    Pilha *aux = *p;
    *p = (*p)->prox;
    char removido = aux->caracter;

    free(aux);
    return removido;
}
```

Exercício 18. *Implemente a função **PULL** para uma pilha em lista encadeadas.*

Exercício 19. *Desenvolva uma função que receba uma pilha e divida ela na metade em duas pilhas, sem modificar a ordem dos itens*

Exercício 20. *Desenvolva uma função que receba duas pilhas e coloque a segunda no topo da primeira, sem alterar a ordem dos elementos e deixando a segunda pilha vazia.*

Exercício 21. *Desenvolva uma função que receba duas pilhas e junte os elementos em uma única lista, intercalando os elementos.*

Observe que essas implementações não são as únicas. Por exemplo, na função *pop*, o ideal seria retornar o valor retirado do topo. Dessa forma, não precisamos consultar o topo antes de deletar o elemento, ao percorrer a pilha.

4.2 DESAFIO: Balanceamento de Parênteses

Uma aplicação das pilhas é utilizá-la para o balanceamento de parênteses, ou seja, para verificar se, em uma dada string, para cada abertura de parêntese existe um fechamento.

Por exemplo, a string `(a(-),al)` estar com parênteses balanceados, mas `(akd,))(` está desbalanceado.

Com o uso de pilha, esse problema é facilmente resolvido. Quando achamos uma abertura, empilhamos; ao achar o fechamento correspondente, desempilhamos. Se repetirmos esse procedimento até o final da entrada, e se a entrada estiver balanceada, a nossa pilha deverá estar vazia no final. E é só isso! Implemente essa operações e adicione esse mesmo balanceamento para colchetes e chaves.

5 Filas

As filas (queue) são estruturas de dados onde os primeiros a serem inseridos serão os primeiros a serem removidos. Essa estrutura é nomeada FIFO (*first in, first out*). Semelhante a pilha, as operações de inserção e remoção de elementos na fila possuem restrições. A adição de elemento é semelhante ao da pilha é realizado no fim da estrutura e a remoção, é a partir do primeiro elemento adicionado, em contrapartida ao da pilha, que é no último.

Note que podemos fazer uma relação dessa estrutura de uma fila real. Imagine uma fila de um banco. Nessa situação, aqueles que chegarem primeiro devem ser logo atendidos. Seria bastante injusto se alguém que chegasse muito tempo depois dos outros fosse primeiramente atendido. Da mesma forma, em um *drive-thru* de um *fast-food*: aquele que chegar na frente será atendido primeiro que os outros.

Podemos, ainda, exemplificar o uso de filas a partir de uma rede de compartilhamento de impressora. Com essa rede, podemos realizar impressões em qualquer computador conectado a ela e, dessa forma, podemos reduzir custos. No entanto, existe um problema quando há mais de uma solicitação. Como podemos controlar as solicitações de usuários? E as “simultâneas”? Bem, o ideal é responder o primeiro que fez a solicitação e depois, o segundo e assim por diante. Mas para isso, é necessário um espaço na memória no computador que fique armazenados os arquivos enviados para impressora. Esse espaço na memória é denominado fila de impressão ou *spooler*.

A fila é uma estrutura bastante simples e utilizada na solução de diversos problemas práticos como, por exemplo, nos algoritmos de enfileiramento usados nos roteadores e, como ilustrado anteriormente, no controle de impressão.

Bem, dados os exemplos, vamos para as implementações.

5.1 Representação e implementação da fila

Como nas pilhas, vamos desenvolver duas versões de fila: um, com uso de vetores e outro, com listas encadeadas. Será implementado a operação de inserção (*enqueue*), e a remoção (*dequeue*). Será implementado uma fila que armazena caracteres.

5.1.1 Fila implementada em um array

Para implementarmos uma fila em vetores, precisaremos de três informações: o número total do array, a posição inicial da fila e a posição final. A posição inicial indica onde o elemento que pode ser removido está, e a posição final indica onde será inserido um elemento. A estrutura da fila, com uso de vetores, é definida como:

```c
struct fila {
   int total;
   int inicio;
   int fim;
   char *caracter;
};

typedef struct fila Fila;
```

A inicalização é bastante simples: basta alocarmos memória para a *struct* fila e para o vetor, que armazena os caracteres, com o tamanho passado pelo usuário. Além disso, a variável *inicio* e *fim* serão iguais a zero.

```c
Fila* inicializar (int tot) {
   Fila* aux = malloc(sizeof(Fila));
   aux->caracter = malloc(sizeof(char)*tot);

   aux->inicio = aux->fim = 0;
   aux->total = tot;
   return aux;
}
```

Para exemplificar, suponha que construímos um vetor com oito posições na nossa fila. Vamos representá-la da seguinte forma:

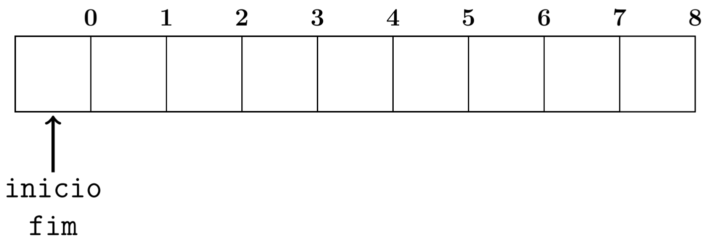


Figura 14 – Estrutura da fila em um vetor.

Observe que *inicio* = *fim* = 0. Isso indica que a fila está vazia e a fila inicia na posição 0. É importante salientar que o ínicio nem sempre estará na posição 0. Isso é evidenciado na remoção.

Quando adicionamos elementos, a variável *fim* será incrementada, de forma que ocupa uma posição vazia onde será inserido um próximo elemento. Com isso, teremos que desperdiçar uma posição do array, mas dessa forma poderemos verificar se a fila está vazia ou cheia.

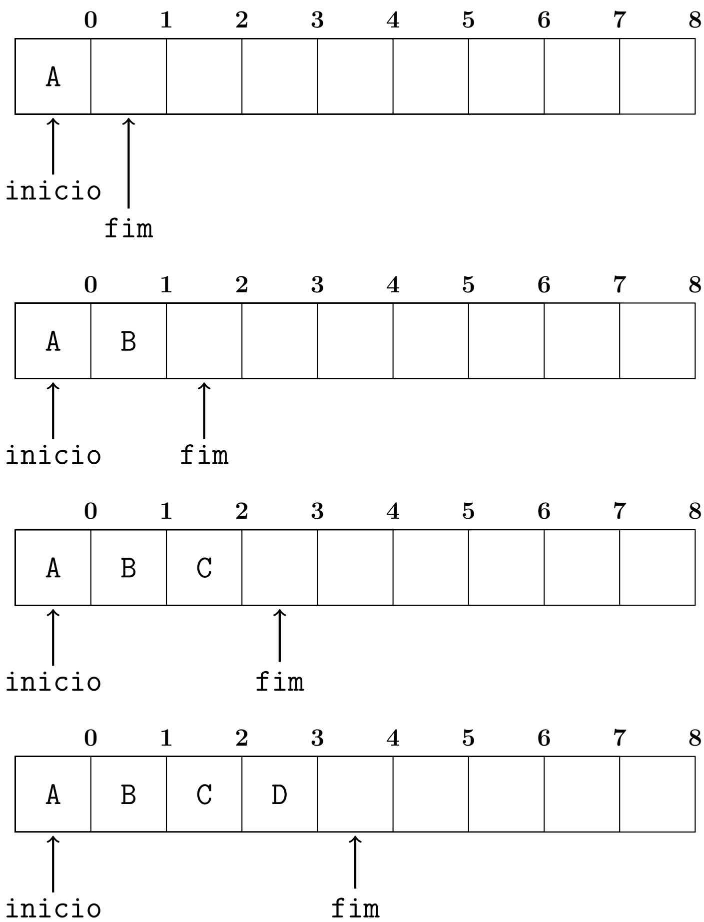


Figura 15 – Adição, em ordem, dos caracteres ‘A’, ‘B’, ‘C’ e ‘D’.

Obviamente, com a adição de elementos, haverá um momento em que *fim* atingirá a última posição do array. Isso significa que a fila está cheia? Não necessariamente, pois devemos nos atentar a remoção. Ao remover, *inicio* será incrementada e, dessa forma, os espaço anteriores ao *inicio* serão desconsiderados.

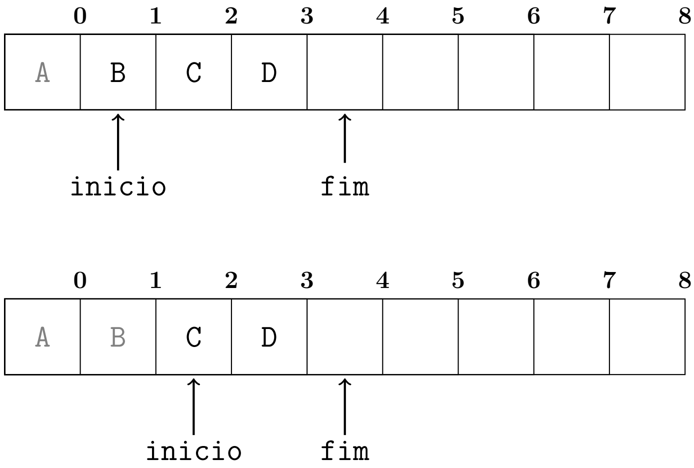


Figura 16 – Remoção dos caracteres ‘A’ e ‘B’.

Note que, no exemplo acima, existem duas posições no ínicio do array que são desconsideradas. Para reaproveitarmos essas posições, poderíamos reorganizar nosso vetor, voltando cada posição, até ocupar os espaços livres. No entanto, isso seria extremamente custoso, uma vez que, em toda remoção, teríamos que realizar a realocação dos elementos.

Existe uma maneira mais simples de resolver isso. Basta utilizar um incremento com o operador módulo, de forma que o vetor seja circular. Isto é, ao chegarmos na última posição do array e incrementarmos, voltamos para o ínicio do vetor. Para isso, em vez de incrementar com $(i+1)$ usaremos $(i+1)\%T$, onde T representa o final do nosso ciclo. Quando $i = T-1$, temos $(T-1+1)\%T = (T)\%T = 0$, voltando ao ínicio.

Agora, vamos implementar a operação *enqueue*. Nela, vamos adicionar o elemento no *fim* e, depois disso, incrementá-lo. Além disso, devemos verificar se a fila já está cheia. Para isso, basta verificarmos se o *inicio* é sucessor do *fim*, uma vez que todas as posições estariam ocupadas (de *inicio* até chegar em *fim*, não tendo mais espaço entre eles).

```c
int enqueue(Fila *f, char valor) {
    int inc = (f->fim + 1) % f->total;
    if(inc == f->inicio)
        return 0;

    f->caracter[f->fim] = valor;
    f->fim = inc;
    return 1;
}
```

Para a operação *dequeue*, devemos incrementar, usando o operador de módulo, o *inicio* e, dessa forma, desconsideramos o elemento mas a frente. Porém, antes disso, precisamos verificar se a fila está vazia. Para isso, devemos certificar se *inicio* é igual a *fim* (como *fim* ocupa um espaço vazio, *inicio* também será vazio e, dessa forma, não temos elemento armazenado). Por fim, retornamos o caracter removido.

```
char dequeue(Fila *f) {
    if(f->inicio == f->fim)
        return -1; // Fila Vazia

    char c = f->caracter[f->inicio];
    f->inicio = (f->inicio + 1) % f->total;;
    return c;
}
```

Caso seja necessário imprimir a fila, respeitando as restrições, devemos realizar várias chamadas de *dequeue*. Porém, para teste, podemos imprimir o vetor utilizando a seguinte função:

```
void imprimir(Fila *f) {
    for (int i = f->inicio; i < f->fim; i = (i+1)%f->total) {
        printf("fila[%i] = %c\n", i, f->caracter[i]);
    }
}
```

Dessa forma, podemos verificar se nossas operações estão corretas, de forma que usamos o incremento com o operador módulo.

Exercício 22. *Desenvolva uma função que inverta a ordem dos elementos, respeitando as restrições da fila.*

5.1.2 Fila implementada em um lista

Agora, vamos implementar uma fila a partir de uma lista encadeada simples que armazene caracteres. Para isso, nossa estrutura deverá guardar o caracter e a posição do próximo nó. Além disso, temos que desenvolver uma estrutura adicional que armazena a posição inicial e final da fila. Essa estrutura facilitará no acesso dessas posições, para a inserção (fim) e remoção (ínicio) de elementos. Poderíamos não implementar essa segunda estrutura, porém, na inserção, teríamos que percorrer toda a lista, o que seria custoso.

O estrutura do nó e da fila são definidos como:

```
struct celula {
    char caracter;
    struct celula *prox;
```

```c
};

typedef struct celula Celula;

struct fila {
   Celula *inicio;
   Celula *fim;
}

typedef struct fila Fila;
```

Podemos representar essas estruturas da seguinte forma:

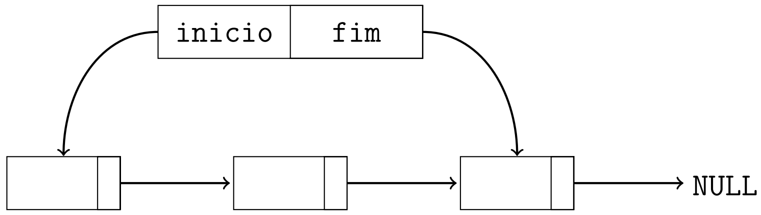


Figura 17 – Representação da lista celula e da estrutura fila.

Para inicializar a estrutura, devemos alocar memória para a fila e definir os ponteiros *inicio* e *fim* como nulo, pois a fila está vazia.

```c
Fila *inicializar() {
   Fila *f = malloc(sizeof(Fila));

   f->inicio = f->fim = NULL;
   return f;
}
```

A inserção de elementos (enqueue) é dada com a adição do elemento no final da lista. Como temos o endereço do último elemento, essa operação fica mais simples.

```c
int enqueue(Fila *f, char valor) {
   Celula *aux = malloc(sizeof(Celula));
   if(aux == NULL)
      return 0;

   aux->caracter = valor;
   aux->prox = NULL;

   if(f->fim != NULL)
      f->fim->prox = aux;

```

```c
    f->fim = aux;

    if (f->inicio == NULL)
        f->inicio = f->fim;
    return 1;
}
```

Nessa operação, devemos criar uma nova célula que armazena o valor que desejamos inserir. O endereço do próximo desse novo nó deve ser NULL, uma vez que representa o último elemento adicionado. Verificamos se já existe um elemento na fila e, caso exista, o último elemento anterior terá o *prox* o novo nó adicionado. Dessa forma, o novo *fim* será o nó criado. Caso a fila esteja vazia, e adicionado o elemento (sendo este o primeiro), o *inicio* deve apontar também para este elemento (ele será o ínicio e fim).

A operação dequeue é uma versão simplificada da remoção das listas encadeadas. Nela, não precisamos percorrer a lista em busca do elemento adicionado. Basta remover o primeiro nó e mudar o endereço do *inicio* para o segundo. Mas precisamos ainda realizar algumas verificações.

```c
char dequeue(Fila *f) {
    if (f->inicio == NULL)
        return -1;

    char v = f->inicio->caracter;

    Celula *lixo = f->inicio;

    f->inicio = f->inicio->prox;
    if (f->inicio == NULL)
        f->fim = NULL;

    free(lixo);
    return v;
}
```

Inicialmente, devemos verificar se a lista está vazia, caso *inicio* não aponte para nenhum elemento, não foi adicionado elemento (temos o mesmo efeito para o *fim*). Além disso, verificamos se, após a remoção do nó, o *inicio* aponta para *NULL* e, caso aponte, definimos *fim* também como nulo, de forma que a fila seja vazia. Retornando o caracter removido podemos percorrer a fila realizando remoções consecutivas.

Exercício 23. *Respeitando as restrições das filas, faça uma função que receba uma fila e retorne a quantidade de itens da fila.*

Exercício 24. *Desenvolva uma função que receba duas filas e coloque a segunda no final da primeira fila, sem alterar a ordem dos elementos e deixando a segunda pilha vazia.*

Exercício 25. *Desenvolva uma função que receba uma fila e divida ela na metade em duas filas, sem modificar a ordem dos itens.*

6 Árvores

Uma árvore é uma estrutura de dados que organiza seus elementos de maneira hierárquica, ou seja, existe um elemento "superior" e um "inferior"'. Por exemplo, sua organização, de certa forma, é semelhante ao modo que uma empresa é estruturada: o chefe está no topo, logo abaixo estão os gerentes e, após esses, os seus subordinados.

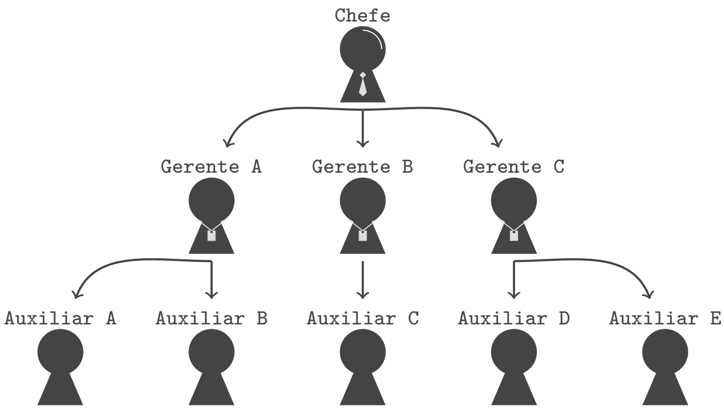


Figura 18 – Representação da hierarquia organizacional de uma empresa. Fonte: Autor.

Ao contrário das estruturas estudadas anteriormente, as árvores não são organizadas sequencialmente, ou seja, não possui um elemento "anterior" e um "sucessor". Geralmente, a terminologia utilizada vem das árvores genealógicas, onde utiliza-se os termos "pai" e "filho" para descrever os relacionamentos entre os nós[5].

6.1 Definição e representação de uma árvore

Uma árvore é um conjunto de diversos nós. Com exceção do elemento do topo, cada nó da árvore possui um ***pai*** e zero ou mais ***filhos***. O ***pai*** de um nó k, que não esteja no topo, é o elemento superior que se liga com uma subconjunto de elementos da árvore que o k está incluido. Os filhos de k, caso tenha, é o subconjunto em que o k faz ligação. Esse subconjunto é dita uma subárvore. O elemento do topo não possui um pai, sendo o ponto de partida da árvore e, devido isso, ele é dito a ***raiz***. O elemento que não possui ***filhos*** é nomeado como ***folha***.

Formalmente, definirmos uma árvore T como um conjunto de nós tal que[6]:

- $T = \emptyset$, ou seja, T não possui elementos, sendo dita vazia;

- ou existe o nó raiz, sendo o restante um conjunto vazio, ou ainda, $m \geq 0$ conjuntos disjuntos não vazios, as subárvores de r, cada qual sendo uma árvore.

Podemos representar graficamente uma árvore a partir da representação hierárquica, de forma que a raiz esteja no topo e as subárvores abaixo:

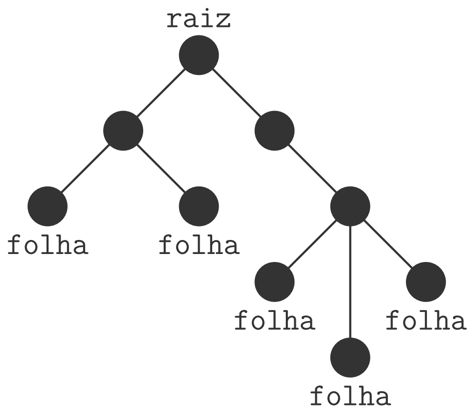


Figura 19 – Representação hierárquica de uma árvore.

Note que podemos relacionar sua estrutura com uma árvore invertida, ainda que, nesse exemplo, não tenha uma grande semelhança. Porém, é mais intuitivo relacionar a árvore com a definição de grafos. Este tema será elucidado futuramente.

Ademais, podemos representar uma árvore de outras formas. Com diagrama de inclusão, onde representamos os nós como círculos e seus filhos são incluidos internamente nesse círculo. Essa representação é a mais próxima da definição da árvore [6].

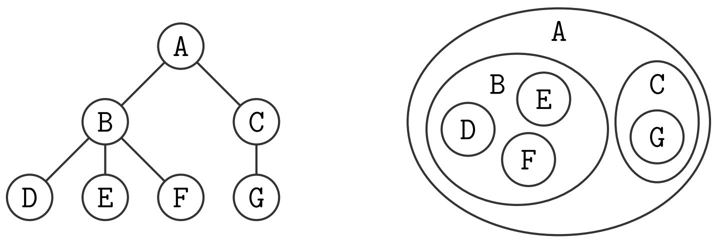


Figura 20 – À esquerda, representação hierárquica e, à direita, representação equivalente pelo o diagrama de inclusão

Uma outra representação, é por meio de aninhamento, onde representamoas a relação do pai e filho por meio de parênteses. Com isso, podemos representar a árvore da figura 20 da seguinte forma: (A(B(D, E, F)), C(G)). Esse modelo será útil na implementação do desafio (seção 6.7).

6.2 Propriedades de uma árvore

Devido sua forma de organizar os dados, as árvores possui diversas propriedades. Com isso, podemos inferir conceitos que são bastantes úteis na sua definição.

6.2.1 Grau dos nós da árvore e ordem

O grau de uma árvore representa a quantidade de ligações que um determinado nó possui, ou seja, o total de filhos desse nó.

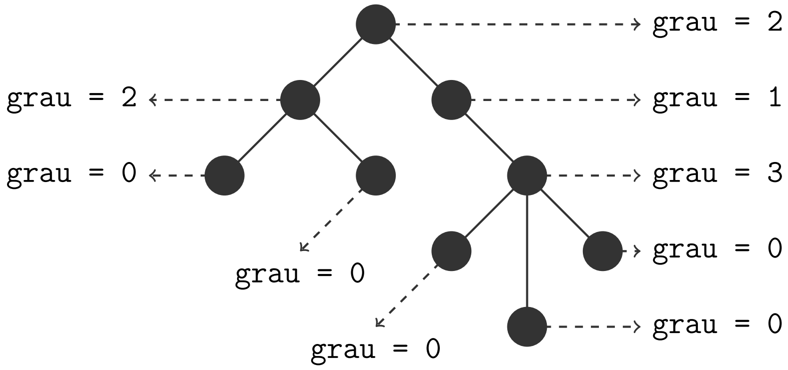


Figura 21 – Indicação do grau de todos os nós de uma árvore.

Podemos relacionar essa estrutura como uma árvore real, mas invertida. Observe que um nó de grau 0 é sempre uma folha.

Com o conceito de grau definido, podemos descrever o que é a ordem de uma árvore. A ordem é o número de maior grau de uma árvore. Na figura 21, a ordem é 3, uma vez que este é seu grau máximo.

6.2.2 Profundidade de um nó

A profundidade (ou altura) de um nó reflete a sua distância à raiz, contados os nós entre eles.

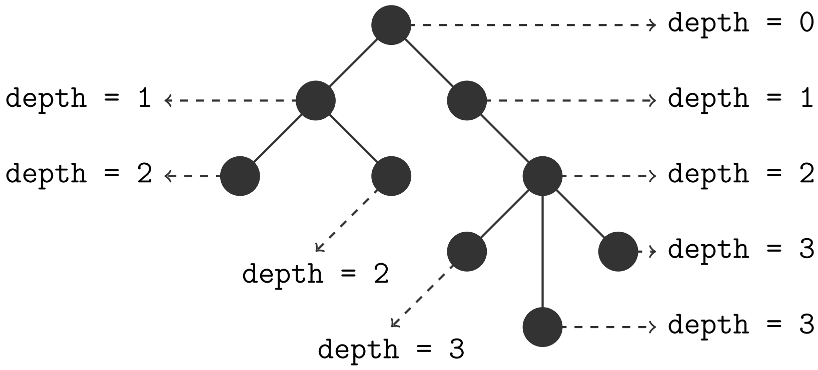


Figura 22 – Indicação da profundidade (*depth*) de todos os nós de uma árvore.

Note que a raiz terá profundidade 0. Os elementos sucessores à raiz possui profundidade 1, e os seu sucessores, profundidade 2 e assim por diante.

6.2.3 Nível e altura de uma árvore

O nível de uma árvore é o conjunto de nós que possui a mesma profundidade. Os nós desse conjunto são ditos irmãos.

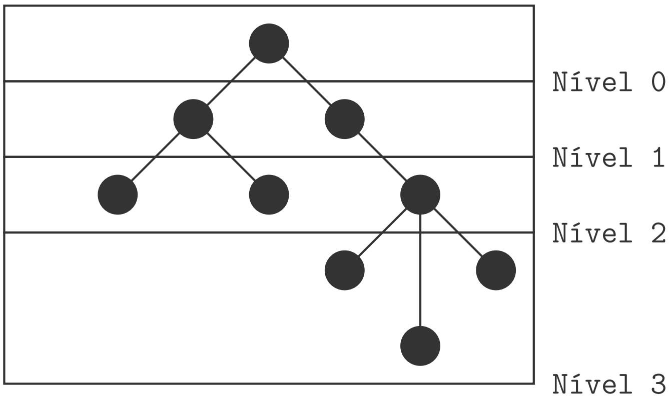


Figura 23 – Representação dos níveis

A altura de uma árvore é o valor do seu último nível.

6.2.4 Árvore cheia e completa

Uma árvore é dita cheia quando todos os nós não folhas possuem dois filhos. Sendo a versão mais frouxa dessa definição, temos a árvore completa, que possui todos os níveis cheios, exceto o último. Observe que toda árvore cheia é completa, mas nem toda árvore completa é cheia.

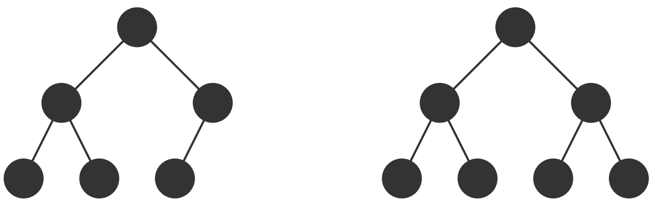


Figura 24 – À esquerda temos uma árvore completa e à direita, uma árvore cheia.

6.2.5 Árvore balanceada

Uma árvore é dita balanceada quando mantém a profundidade de todos os nós em $O(logn)$, ou seja, os nós devem estar bem distribuidos. Existe outras condições de equilibrio dependendo da estrutura implementada (veja a seção 6.6 e compare árvore AVL e árvore rubro-negra, ambas balanceadas).

6.3 Árvore binária

Até então definimos árvore com grau indefinido, ou seja, com zero ou mais filhos. Porém pode ser necessário limitar a ordem da árvore, dependendo da aplicação. As árvores com ordem 2 é a mais conhecida e utilizada. Essa árvore denominamos árvore binária.

Note que, até então, apenas descrevemos conceitos teóricos de uma árvore. Isso significa que não estávamos preocupado com a implementação em si. Doravante, iremos implementar a nossa estrutura de dados e suas operações. Mas antes, é importante destacar alguns conceitos.

A definição da árvore binária é semelhante ao que foi dado anteriormente, porém, limita em dois conjuntos disjuntos, ou melhor, em dois filhos que cada nó pode possuir. Em outras palavras,

> "Uma árvore binária é um conjunto finito de elementos que está vazio ou é particionado em três subconjuntos disjuntos. O primeiro subconjunto contém um único elemento, chamado raiz da árvore. Os outros dois subcon- juntos são em si mesmos árvores binárias, chamadas subárvores esquerda e direita da árvore original. Uma subárvore esquerda ou direita pode estar vazia."Tenenbaum, Langsam e Augenstein, 2004[7].

Representamos uma árvore binária com os mesmos modelos apresentados anteriormente. No entanto, vamos nos limitar a representação hierárquica, pela sua simplicidade e por ser comumente utilizada.. Na figura a seguir, temos um exemplo de árvore binária e outra não binária.

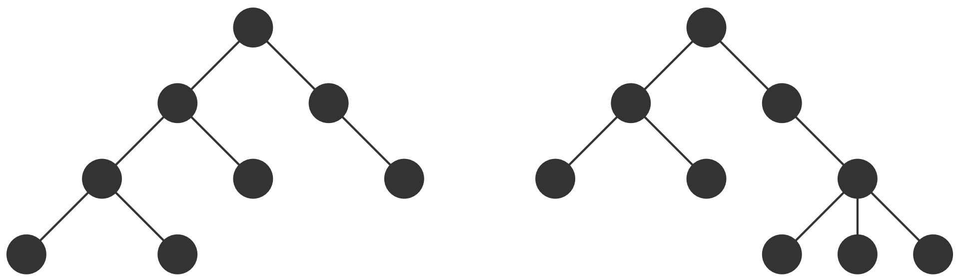


Figura 25 – Exemplo de uma árvore binária (esquerda) e de uma árvore não binária (direita).

Podemos utilizar as árvores binárias para diversas aplicações. Por exemplo, na representação de expressões aritmética contendo operandos e operadores binários (bem, isso vale para árvores de qualquer ordem e,com isso, podemos representar qualquer expressão). Por exemplo, considere a expressão $(5 + 12) \div 15$. Por meio de uma árvore binária temos:

Note que o operador com maior precedência é a mais interno na árvore. Isso é útil ao realizar o percurso (seção 6.4) da árvore, para calcular a expressão. O uso de árvores

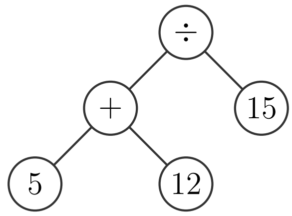


Figura 26 – Representação da expressão $(5 + 12) \div 15$.

para esse fim é mais evidente no processo de análise de um compilador, na construção de uma árvore sintática.

Podemos ainda utilizar esse tipo de dados para construir uma estrutura muito famosa e bastante utilizada: a árvore binária de busca.

6.3.1 Implementando a árvore binária de busca

A árvore binária de busca (ou BST, *binary search tree*) é uma estrutura que estabelece propriedades na organização de seus nós. Para qualquer nó n, a subárvore esquerda armazena os elementos menores que n, enquanto que a subárvore direita armazena os elemenos maiores a n. Note que o valor (ou a chave) armazenado é comparável e, dessa forma, temos uma ordenação de elementos.

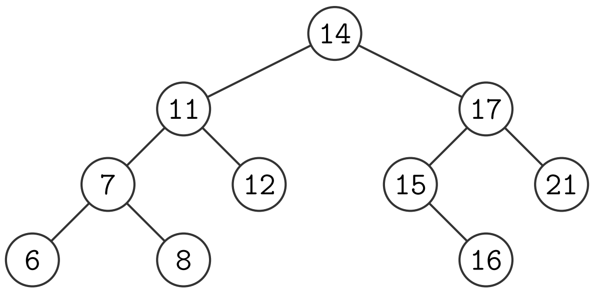


Figura 27 – Representação de uma árvore binária de busca.

Agora, vamos implementar as operações de inserção, remoção e busca de elementos em uma BST. A estrutura da BST é dado por:

```
struct no {
   int valor;
   struct *no dir;
   struct *no esq;
};

typedef struct no No;
```

Na estrutura, armazenamos o dado propriamente dito, além da posição do filho esquerdo, onde armazenamos os elementos menores que o nó, e do filho direito, que armazena os elementos maiores. Como exemplo, iremos construir um BST que armazene inteiros. Para inicializar uma árvore basta denotarmos como *NULL*.

```
No* inicializar() {
   return NULL;
}
```

6.3.1.1 Busca

Essa operação aproveita bem da definição da BST. Utilizaremos a recursão ao nosso favor. A busca inicia-se na raiz e verifica se o valor buscado é o mesmo da raiz. Caso não seja, verifica se é maior ou menor. Caso o valor seja menor, segue pela subárvore esquerda, no contrário, pela subárvore direita. Esse procedimento é repetido recursivamente até encontrar um nó com o valor buscado ou chegar em uma folha.

```
No* buscar(No *arv, int v) {
   if (arv == NULL) return NULL;
   else if (arv->valor == v) return arv;
   else if (arv->valor > v) return busca (r->esq, v);
   else return busca (r->dir, v);
}
```

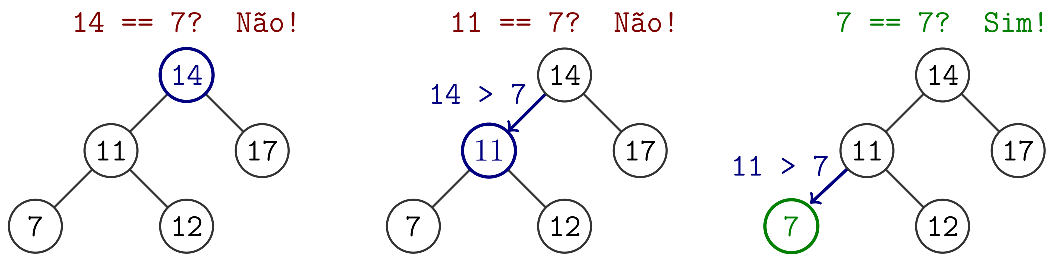


Figura 28 – Processo de busca do elemento 7. Note que a árvore não é nula e, dessa forma, o primeiro condicional é falso.

6.3.1.2 Inserção de Elemento

A inserção utiliza o mesmo conceito da busca. Na verdade, é realizado uma busca, porém o objetivo não é encontrar um valor específico, mas sim uma folha. Encontrado tal folha, alocamos memória para o novo nó e tornamos seu filho.

```
No* inserir(No *arv, int v) {
   if (arv == NULL) {
      arv = malloc (sizeof(No));
      arv->valor = v;
```

```
        arv->esq = arv->dir = NULL;
    } else if (arv->valor > v) arv->esq = inserir(arv->esq, v);
    else arv->dir = inserir(arv->dir,v);
    return arv;
}
```

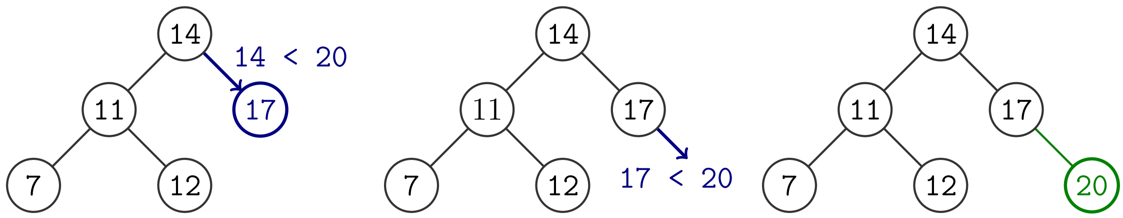


Figura 29 – Processo de inserção do elemento 20.

6.3.1.3 Remoção de Elemento

A remoção, como de costume, é a operação mais complicada de implementar. Nela, devemos observar três casos para excluir o nó.

1. **O nó é uma folha**: Nesse caso, basta removermos o nó da árvore.

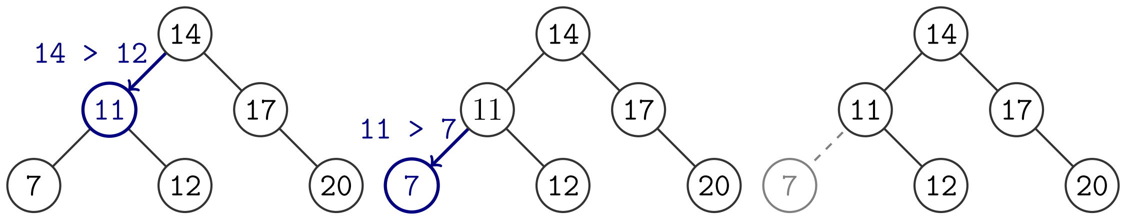


Figura 30 – Processo de remoção do elemento 7.

2. **O nó possui um filho**: Nesse caso, o seu filho tomará o lugar do pai, e este será excluído.

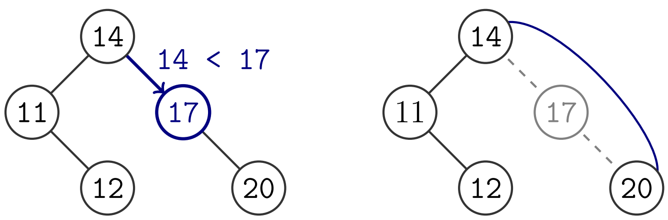


Figura 31 – Processo de remoção do elemento 17.

3. **O nó possui dois filhos**: Nesse caso, devemos encontrar o sucessor ideal para o pai, sendo este excluído. O substituto é o elemento mais a direita da subárvore

esquerda ou o nó mais à esquerda da subárvore direita pois, dessa forma, respeitamos a ordenação da árvore. Será utilizada a primeira opção na implementação.

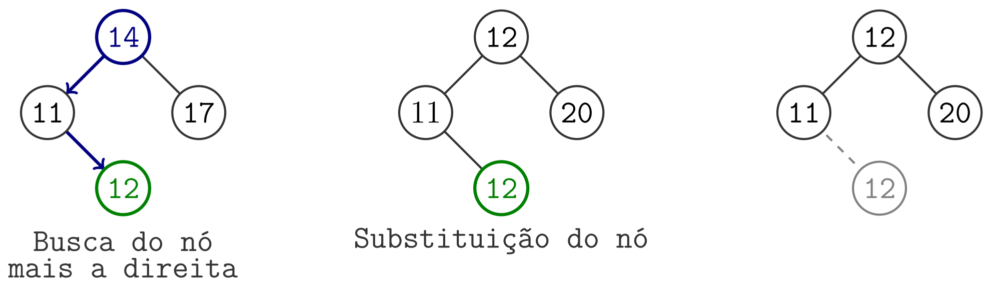


Figura 32 – Processo de inserção do elemento 14.

Inicialmente, na remoção, é realizado uma busca do elemento que desejamos remover. Encontrado tal elemento, verificamos as condições estabelecidas anteriormente e, dependendo da condição satisfeita, a remoção é realizada.

```c
No* retira (No* arv, int v) {
   if (arv == NULL) return NULL;
   else if (arv->valor > v) arv->esq = retira(arv->esq, v);
   else if (arv->valor < v) arv->dir = retira(arv->dir, v);
   else {
      if (arv->esq == NULL) {
         No* t = arv->dir;
         free (arv);
         return t;
      } else if (arv->dir == NULL) {
         No* t = arv->esq;
         free (arv);
         return t;
      } else {
         No* pai = arv;
         No* f = arv->esq;
         while (f->dir != NULL) {
            pai = f;
            f = f->dir;
         }
         arv->valor = f->valor;
         f->valor = v;
         arv->esq = retira(arv->esq,v);
      }
   }

```

```c
    return arv;
}
```

Note que, caso a remoção seja de uma folha, entramos na primeira condicional, retornando o filho direito, que também é vazio. Dessa forma, a primeira condição é satisfeita na da segunda.

6.4 Percurso em árvores binárias

Em algumas situações, precisamos percorrer a árvore, visitando cada nó uma única vez. Por exemplo, quando queremos imprimir os elementos da árvore para teste. Como os dados não são organizados em sequência, podemos realizar várias formas de travessia, dependendo da aplicação, mudando a ordem em que os nós são visitados. Para efeitos práticos, veremos três tipos de percurso.

6.4.1 Percurso pré-ordem

Essa forma de percorrer uma árvore pode ser utilizada para criar uma cópia de uma árvore, pois visita o nó antes que seus filhos. O algoritmo para o percurso pré-ordem é dado por:

1. visita a raiz
2. recursivamente percorre a subárvore esquerda do nó
3. recursivamente percorre a subárvore direita do nó

Em C, podemos desensolver da seguinte forma:

```c
void imprimirEmOrdem(No arv) {
    if (arv == NULL) return;

    printf("%i\n", arv->valor);
    imprimirEmOrdem(arv->esq);
    imprimirEmOrdem(arv->dir);
}
```

6.4.2 Percurso em ordem

Esse tipo de travessia também é conhecido como percurso em ordem simétrica. Em uma BST, esse percurso visita os nós em ordem crescente, podendo ser utilizado para imprimir os nós ordenado. Seu algoritmo é da seguinte forma:

1. recursivamente percorre a subárvore esquerda do nó
2. visita a raiz
3. recursivamente percorre a subárvore direita do nó

Em C, temos:

```
void imprimirEmOrdem(No arv) {
   if (arv == NULL) return;

   imprimirEmOrdem(arv->esq);
   printf("%i\n", arv->valor);
   imprimirEmOrdem(arv->dir);
}
```

6.4.3 Percurso pós-ordem

O percurso pós-ordem é utilizado para realizarmos a exclusão de uma árvore, quando desejamos liberar memória, deletando todos os seus nós. Seu uso é recomendado nessa situação pois, antes de excluir um nó, devemos excluir os seus filhos. O seu algoritmo é definido como:

1. recursivamente percorre a subárvore esquerda do nó
2. recursivamente percorre a subárvore direita do nó
3. visita a raiz

Em C, temos:

```
void imprimirPosOrdem(No arv) {
   if (arv == NULL) return;

   imprimirPosOrdem(arv->esq);
   imprimirPosOrdem(arv->dir);
   printf("%i\n", arv->valor);
}
```

6.5 Árvores Genéricas

Com o uso das árvores binárias, limitamos a quantidade de filhos que um nó pode ter. Para isso, mudamos a definição de árvores inicial. Da mesma forma, poderíamos criar uma árvore que tenha, no máximo, três filhos (como as *tries* ternárias de busca), ou quatro, ou cinco e assim por diante.

Podemos ainda, para ser mais general, construir uma árvore que não possui limitações da quantidade de filhos, seguindo a definição dada na seção 6.1. Esse tipo de árvore é utilizada, por exemplo, em uma árvore de diretórios, onde uma pasta pode possuir diversas sub-pastas, assim como estes, da mesma forma, pode ter suas sub-pastas, e assim por diante, sendo todos sub-pastas da pasta raiz.

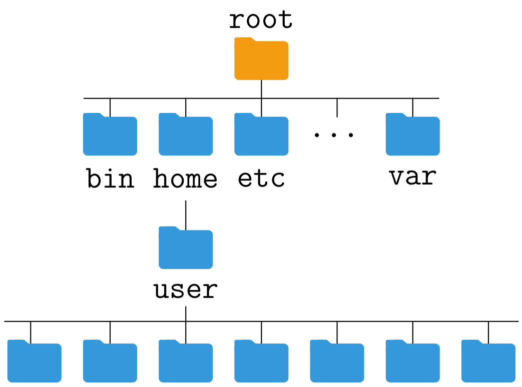


Figura 33 – Representação de uma estrutura de uma árvore de diretórios.

6.6 Outras implementações de árvores

A árvore é um tipo de dado que possui muitas aplicações, uma vez que "admite um tratamento computacional simples e eficiente"[6]. Além disso, é bastante maleável em sua definição, havendo diversas versões de árvores com diferentes propriedades e complexidades. Iremos definir, de forma simplificada, algumas dessas estruturas para fim de conhecimento. Todas elas serão objeto de estudo para a disciplina de Estrutura de Dados Avançada.

6.6.1 Árvore 2-3

Uma árvore 2-3 é uma árvore que permite um ou dois elementos por nó, de forma que o nó com 1 elemento deve ter dois filhos e o nó com 2 elementos possui três filhos. Nessa estrutura, a quantidade de filhos é restrita ao que foi definido por essas propriedades, com exceção, obviamente, das folhas (não possui nenhum filho).

Essa estrutura possui um balanceamento perfeito, ou seja, todas as folhas estão no mesmo nível, ou melhor, todo caminho da raiz até as folhas tem o mesmo tamanho.

6.6.2 Árvore rubro-preta

Uma árvore rubro-negra é uma árvore binária de busca que possui um campo extra em sua estrutura, que armazena sua cor, sendo vermelha ou preta. Além disso, deve seguir as seguintes propriedades[2]:

1. a raiz é preta
2. toda folha é preta
3. se um nó é vermelho, seus filhos são pretos
4. Para cada nó, todos os caminhos desse nó às folhas descendentes contêm o mesmo número de nós pretos

6.6.3 Árvore AVL

Uma árvore AVL é uma árvore binária de busca onde, para todo nó, a profundidade da subárvore esquerda e da subárvore direita diferem no máximo em 1[2]. Ela é bastante utilizada em aplicações em que as buscas são mais frequentes que as inserções.

6.6.4 Árvore B

Uma árvore B é uma árvore de busca m-ária, ou melhor, uma árvore de busca genérica. Ela é utilizada, por exemplo, em banco de dados e sistemas de arquivos. As árvores B são semelhantes às árvores rubro-negra, uma vez que possui uma altura logaritmíca (para toda árvore B com n nós, sua altura é $\log n$), porém permite mais de dois filhos, em contrapartida ao rubro-negra, podendo chegar em centenas ou até milhares[2].

Esse tipo de estrutura possui a vantagem de funcionar bem em memórias secundárias, de forma que realiza uma quantidade ínfima de operações de E/S no disco, comparada à outras estruturas.

6.6.5 *Tries*

As *tries*, também conhecidas como árvores digitais, são árvores utilizadas, normalmente, para armazenar strings. Nessa estrutura, cada nó armazena um caracter, com exceção da raiz, e seus filhos armazenam o próximo caracter de uma string. Tries que permitem r filhos são denominada R-Way Tries. Existem também, a trie ternária de busca, ou TST, que limita os nós à três filhos.

Podemos comparar a *trie* com um autômato finito determinístico, ainda que, usualmente não utilizamos a seta para representar a direção. Essa semelhança é vista quando relacionamos, os nós como os estados do autômato e as ligações como as transições.

Exercício 26. *Em uma árvore binária, qual é o número máximo de nós que pode ser achado nos níveis 3, 4 e 12?*

Exercício 27. *Desenvolva uma função que receba uma árvore e um valor v. A função deve retornar 0 se não existe o valor v na árvore. Caso exista, a função deverá retornar quantas verificações foram realizadas.*

Exercício 28. *Prove, que uma árvore binária T com* $n > 0$ *nós, o número de subárvores vazias é n+1.*

Exercício 29. *Faça uma função que receba uma árvore e retorne a quantidade de nós dela.*

Exercício 30. *Faça uma função que receba uma árvore e retorne a altura dela.*

Exercício 31. *Faça uma função que receba uma árvore e retorne a quantidade de folhas dela.*

Exercício 32. *Desenvolva uma função que receba uma árvore e um valor v. A função deve retornar 0 se não existe o valor v na árvore. Caso exista, a função deverá retornar quantas verificações foram realizadas.*

Exercício 33. *Desenvolva a função de travessia que realiza visita por níveis da árvore. Esse modo de travessia é denominado percurso em largura. (Dica: será necessário utilizar uma fila).*

6.7 DESAFIO: Árvore genealógica

Uma árvore genealógica é uma forma de representar a história de uma família, a partir da descendência de um casal, sendo o patriarca e a matriarca. Devemos construir uma aplicação que receba um arquivo com uma árvore genealógica e, a partir dele, insira os nomes em uma árvore genérica. Para isso, é necessário construir uma estrutura de dados que armazene *strings* e que tenha um número indefinido de filhos (para tal, podemos utilizar uma lista encadeada, ou até mesmo uma árvore), mas, se preferir, pode se limitar o total de filhos que uma pessoa pode ter.

Em relação ao arquivo, ele deve ter uma estrutura que defina os vínculos de cada pessoa. Para isso, pode ser utilizado uma representação com parênteses aninhados (veja a seção 6.1). Mas isso é critério individual. Vale lembrar que é necessário construir uma função que receba o arquivo e "converta" para a estrutura que for construída.

Ademais, é importante construir todas as operações básicas (inserção, remoção, busca e travessia) para a aplicação, além das operações extras, dependendo da forma em que for construída a árvore.

Referências

1 MILLER, B.; RANUM, D. Como pensar como um cientista da computação. 2012. GNU free documentation Licence. Disponível em: <https://panda.ime.usp.br/pensepy/static/pensepy/index.html>. Acesso em: 20 abr. 2020.

2 CORMEN, T. H. et al. Algoritmos: teoria e prática. *Editora Campus*, v. 2, 2002.

3 DASGUPTA, S.; PAPADIMITRIOU, C. H.; VAZIRANI, U. Algorithms. McGraw-Hill, Inc., 2006.

4 CELES, W.; RANGEL, J. L. Caderno didático de estrutura de dados (puc-rio). *Cadernos Pronatec Goiás*, v. 1, n. 1, p. 949–1151, 2018. Disponível em: <http://www.ead.go.gov.br/cadernos/index.php/CDP/article/download/285/210>.

5 GOODRICH, M. T.; TAMASSIA, R. *Estruturas de Dados & Algoritmos em Java*. [S.l.]: Bookman Editora, 2013.

6 SZWARCFITER, J. L.; MARKENZON, L. *Estruturas de Dados e seus Algoritmos*. [S.l.]: Livros Tecnicos e Cientificos, 1994. v. 2.

7 TENENBAUM, A. M.; LANGSAM, Y.; AUGENSTEIN, M. J. *Estruturas de dados usando C*. [S.l.]: Pearson Makron Books, 2004.