Estudo Dirigido - Teoria dos Jogos Algorítmica

LUIZ EDUARDO CARTOLANO *, RAFAEL C. S. SCHOUERY *

*Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas-SP, Brasil

***Keywords* –**

I. INTRODUÇÃO

A Teoria dos Jogos Algorítmica é uma área na interseção entre teoria dos jogos e ciência da computação, com o objetivo de entender e projetar algoritmos em ambientes estratégicos. Ela visa modelar situações nas quais múltiplas partes interagem ou afetam seus resultados entre si.

O objetivo do relatório em questão é apresentar os conteúdos estudados durante o semestre na disciplina de Estudo Dirigido (MC032) do Instituto de Computação da Unicamp.

Para guiar o estudo serão usados livros e artigos da área. Que serão informados aqui com o passar do tempo. Para dar início aos estudos usaremos o livro [1], a fim de introduzir o aluno aos conceitos iniciais e também mais avançados da área.

II. CONCEITOS INICIAIS SOBRE TEORIA DOS JOGOS

A fim de explicar os conceitos iniciais estudados, buscaremos associar e exemplificar as definições usando situações de jogos clássicos apresentados, como o *Dilema do Prisioneiro*, *Jogo da Poluição*, *Jogo do Roteamento*, entre outros.

A. Jogo

No *Dilema do Prisioneiro*, dois prisioneiros estão em julgamento por um crime. Cada jogador tem a possibilidade de confessar ou não o crime.

Se analisarmos atentamente a descrição do *Dilema do Prisioneiro*, encontramos todas as características necessárias para caracterizar um jogo. Temos um conjunto de dois jogadores (prisioneiros um e dois) e também possuímos um conjunto de estratégias possíveis para cada jogador (confessar ou permanecer em silêncio).

Ou seja, de maneira informal, podemos dizer que um jogo é caracterizado por um conjunto de jogadores, no qual cada jogador tem um conjunto de possíveis ações (estratégias) que podem ser tomadas, com diferentes probabilidades.

De maneira mais formal, a definição de um jogo pode ser feita da seguinte maneira:

Definição 2.1. Definimos como jogo a família de três conjuntos: um conjunto de n jogadores $P = 1, 2, ..., n$; uma família de n conjuntos de estratégias possíveis $S = S_1, S_2, ..., S_n$, na qual S_i é o conjunto de estratégias possíveis do jogador i, para todo $i \in P$; e um conjunto de funções $U = u_1, u_2, ..., u_n$, no qual u_i é uma função $S \rightarrow R$ que define a utilidade do jogador i de acordo com todas as estratégias escolhidas, em que $S = S_1 \times S_2 ... \times S_n$.

B. Como Representar um Jogo

Cada possível estratégia tomada por um jogador costuma ter sequências no jogo, voltemos ao *Dilema do Prisioneiro*. Se ambos os jogadores permanecerem em silêncio, cumprem uma pena curta, de dois anos. Caso apenas um deles confesse, o que confessou cumpre uma pena de apenas um ano, enquanto o outro passa os próximos cinco anos preso. Por fim, se ambos confessarem, cumprem juntos quatro anos de prisão. Essa situação pode ser vista na Matriz I.

O *Dilema do Prisioneiro* pode ser representado como foi feito na Matriz I, a essa forma dá-se o nome de *forma explícita*. Esta, é uma maneira super útil e eficiente para representar os jogos, especialmente em situações nas quais existem dois jogadores.

A *forma explícita* contudo, costuma ser bem restritiva e pouco utilizável quando tratamos de jogos com mais de dois jogadores, ou quando cada jogador possui muitas estratégias possíveis de adotar.

Seguindo a lógica do *Dilema do Prisioneiro*, imaginem que, ao invés de dois prisioneiros no julgamento, existisse um número arbitrário n deles, cada um com duas estratégias possíveis. Nessa situação, haveriam 2^n vetores de estratégias possíveis, e a *forma explícita* de representação torna-se inimaginável. Além de extremamente ineficiente, é claro.

Outra situação na qual a *forma explícita* deixa de ser uma opção pode ser vista em jogos como os de roteamento. Imagine uma situação que descreva n jogadores compartilhando uma mesma banda de internet. E a ação tomada por cada jogador é escolher a quantidade de banda (em porcentagem) que ele irá utilizar. Ou seja, qualquer valor $x \in [0, 1]$ é uma estratégia possível, logo, temos um conjunto infinito de estratégias.

C. Estratégia Dominante

Para esta seção iremos, novamente, analisar a Matriz I, dessa vez, visando entender qual seria a melhor estratégia para o prisioneiro P_i. Analisando o tempo de prisão ao qual cada jogador seria submetido, a melhor estratégia, para ambos seria permanecer em silêncio. Contudo, essa é uma situação que chamamos de instável, pois, a qualquer momento, o outro prisioneiro poderia resolver diminuir o seu tempo de prisão tomando a atitude de confessar. Portanto, podemos concluir que, a melhor estratégia que pode ser tomada **individualmente** é a de confessar. Além de estável, afinal é impossível que qualquer um dos jogadores diminua o tempo de prisão nesse caso, essa é uma **estratégia dominante**, isto é, a *única* melhor estratégia que pode ser tomada de maneira individual.

De maneira mais formal, a definição de uma estratégia dominante pode ser feita da seguinte maneira:

Definição 2.2. Um jogador i possui uma *estratégia dominante* s_i se, para qualquer situação do jogador, s_i é uma resposta ótima para s_{-i}.

É importante ressaltar que, uma *estratégia dominante* não implica, necessariamente, no melhor custo de *payoff*. Como nos mostra o próprio *Dilema do Prisioneiro*.

1) Desenhando Jogos com Estratégia Dominante: Provavelmente a situação mais comum na qual queremos planejar um jogo é na criação de um leilão. A maneira mais comum para se criar um leilão é aquela na qual vence o jogador que tiver a maior aposta. Nessas situações não existe uma estratégia dominante, afinal, a estratégia de cada jogador depende do que ele sabe ou assume que sabe sobre os outros jogadores.

O *Leilão de Segundo Preço*, ou *Leilão de Vickrey* [2], foi proposto em 1961. O jogo é muito semelhante ao leilão tradicional que conhecemos, mas com uma pequena diferença, o vencedor é o jogador que informar o maior lance, contudo, o valor pago é o do segundo maior lance.

O *Leilão de Segundo Preço*, por sua vez, possui uma estratégia dominante para cada jogador. Essa é reportar o seu valor oficial como aposta, sem medo de ter que pagar mais do que o valor correto do objeto em leilão.

De maneira mais formal, podemos definir o *Leilão de Segundo Preço* como:

Definição 2.3. No Leilão de Segundo Preço, o vencedor é o jogador $i \in P$ tal que $l_i = max\{l_j : j \in P\}$, e o valor a ser pago por i é igual a $p_i = max\{l_j : j \neq i, j \in P\}$.

De onde é possível enunciar o seguinte lema:

Lema1. No Leilão de Segundo Preço, informar $l_i = v_i$ é uma estratégia dominante para todo $i \in P$.

Proof: Para provarmos que o Leilão de Segundo Preço é à prova de estratégias, consideremos dois casos: no qual o jogador i possui v_i acima e abaixo dos valores reais dos demais jogadores.

Quando $v_i > l_j \ \forall j \neq i$, caso $l_i = v_i$, o jogador i vencerá o leilão pagando $p_i = max\{l_j : j \neq i, j \in P\}$. O mesmo resultado aconteceria caso o jogador i informasse $l_i > v_i$.

Por outro lado, caso tivéssemos $l_i < v_i$, outros dois novos cenários surgiriam. O primeiro caso aconteceria se l_i continuasse sendo o maior lance, o que não alteraria os resultados já enunciados. Um resultado novo surge se $l_i < max\{l_j : j \in P\}$, pois nesse caso i não seria o ganhador do leilão, perdendo utilidade.

Agora analisamos o caso em que $v_i < l_j$, neste $\exists j \neq i$, tal que, se $l_i = v_i$, o jogador i não venceria o leilão, não tendo utilidade. Resultado semelhante ao obtido caso o jogador i informasse $l_i < v_i$.

No entanto, se tivéssemos $l_i > v_i$, novos cenários podem surgir. O mais simples dentre eles acontece quando existe $l_j > l_i, i \neq j$, pois nessa situação o jogador i continuaria perdendo o leilão.

Agora, se $l_i = max\{l_j : j \in P\}$, o jogador i seria o vencedor do leilão e, como $p_i > v_i$, teria um prejuízo.

■

D. Equilíbrio de Nash

Quando falamos sobre Teoria de Jogos, uma solução desejada é aquela na qual os jogadores podem, individualmente, atuando apenas baseado em suas convicções maximizar seu próprio ganho. Se ainda tomarmos o *Dilema do Prisioneiro* como exemplo, a estratégia de *confessar*, seria essa solução, afinal, ela garante um resultado estável para o prisioneiro, independentemente do que os outros fizerem.

Esse conceito, foi formalmente proposto por John Nash, e recebeu o nome de *Equilíbrio de Nash* [1]. Que é definido como:

Definição 2.4. Um vetor de estratégias $s \in S$ é um equilíbrio de Nash se, para cada jogador $i \in P$, s_i é uma resposta ótima para s_{-i}.

É importante ressaltarmos que nem todos os jogos possuem um *Equilíbrio de Nash*, e que alguns jogos podem possuir mais de um equilíbrio.

Outro ponto super interessante que acompanha o *Equilíbrio de Nash* acontece quando cada jogador assume uma *distribuição de probabilidades* para suas possíveis ações, e as escolhe com base nessas probabilidades. Nesse caso, sempre haverá uma solução de equilíbrio. O que nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1. Todo jogo com um conjunto finito de jogadores e estratégias possui um Equilíbrio de Nash quando jogadores selecionam estratégias com base em um conjunto de probabilidades.

E. Complexidade para Encontrar Equilíbrio

Uma solução *perfeita* para um jogo seria algo que fosse computacionalmente barata e fácil para que os jogadores a encontrem individualmente.

Um fato interessante sobre o problema de encontrar um *Equilíbrio de Nash* está no fato de que a *NP-Completude* [], normalmente usada para estudar a complexidade de problemas, não é a mais indicada nesse caso. Em vez disso, usaremos a *PPAD-Completude* [], e o problema de encontrar um *Equilíbrio de Nash* é *PPAD-Completo*.

F. Jogos de Soma Zero de Dois Jogadores

Um *Jogos de Soma Zero de Dois Jogadores* (*Two-Player Zero-Sum Game* [3], é um jogo no qual a soma das recompensas (*payoffs*) dos dois jogadores é zero seja qual for a estratégia adotada.

A partir do *Teorema 1*, enunciado na Seção II-D, sabemos que o *Equilíbrio de Nash* sempre existe para jogadores com estratégias mistas (baseadas em probabilidades). Com base nisso, é possível provarmos que para jogos como o desta seção, é possível encontrar o *equilíbrio* usando programação linear.

Considerando um par de distribuições de probabilidades dado por $p*$ e $q*$, para o jogador linha e coluna, respectivamente. O valor esperado a ser pago pelo jogador coluna ao jogador linha é dado por $v* = p * \cdot A \cdot q*$.

Sabendo que o Equilíbrio de Nash tem a propriedade de que, mesmo sabendo a estratégia do adversário, não é possível melhorar a recompensa, a estratégia do jogador linha será dada por $p \cdot A$. O jogador coluna tentará minimizar sua perda, portanto, cabe ao jogador linha maximizar esse valor mínimo. O que pode ser feito resolvendo a seguinte programação linear:

$$v_r = max\{v\}$$

$$p \geq 0$$

$$\sum_i p_i = 1$$

$$(pA)_j \geq v \forall j$$

O valor v_r é o valor máximo seguro para o jogador linha. Pelo mesmo argumento, e de maneira similar, a programação linear para o jogador coluna é dada por:

$$v_c = min\{v\}$$

$$q \geq 0$$

$$\sum_j q_j = 1$$

$$(Aq)_i \leq v \forall i$$

Portanto, $v_c = v_r$, de onde podemos concluir que a vitória máxima garantida do jogador da linha é igual à perda mínima garantida do jogador da coluna. O que nos permite enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2. As soluções ideais para o par de programas lineares acima fornecem distribuições de probabilidade que formam um Equilíbrio de Nahs do jogo de soma zero de duas pessoas.

Proof: Sejam p e q soluções ótimas para os dois programas lineares. Sabemos que $v_c = v_r$. Se ambos os jogadores seguirem essa estratégia, então o jogador linha não pode melhorar seu ganho, ao mesmo tempo que o jogador coluna garantidamente não irá perder mais do que v_c. Portanto, o par de estratégias está em equilíbrio. ■

+————–+

References

[1] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V. V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*. USA: Cambridge University Press, 2007. 1, 2

[2] L. M. Ausubel, P. Milgrom *et al.*, "The lovely but lonely vickrey auction," *Combinatorial auctions*, vol. 17, pp. 22–26, 2006. 2

[3] X. Chen and X. Deng, "Settling the complexity of two-player nash equilibrium," in *2006 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'06)*. IEEE, 2006, pp. 261–272. 2

Attachments

Table I
MATRIZ DE CUSTOS DILEMA DO PRISIONEIRO

P1/P2	Confess	Silent
Confess	4/4	1/5
Silent	5/1	2/2