Universidade Federal do Paraná
Setor: Tecnologia
Departamento: Engenharia Química

Balanço diferencial de massa

Profª. Dra. Alessandra Cristina Pedro

Balanços diferenciais

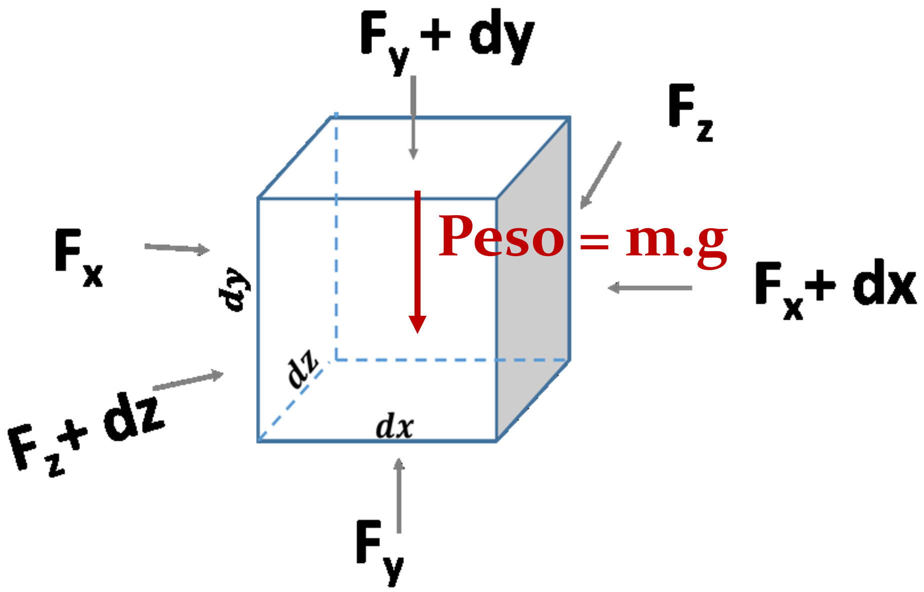
Balanços integrais (balanço global):

Σ (entra no V.C.) $=$ Σ (sai do V.C.)

Equações diferenciais: fornecem um meio de determinar a variação ponto a ponto das propriedades do fluido, ou seja, permitem identificar o que acontece em cada momento.

Uso do balanço diferencial de massa na disciplina: **Equação da estática dos fluídos.**

Relembrando!



Estabelece que:

- P = P (x, y, z);
- A lei da variação da pressão ao longo de todo fluido é representada por uma **equação diferencial**;
- No repouso $\sum F = 0$.

Relembrando!

Em um fluido em repouso a P é constante nas direções x e z:

$$\frac{dP}{dx}dxdydz = 0 \qquad \frac{dP}{dz}dxdydz = 0$$

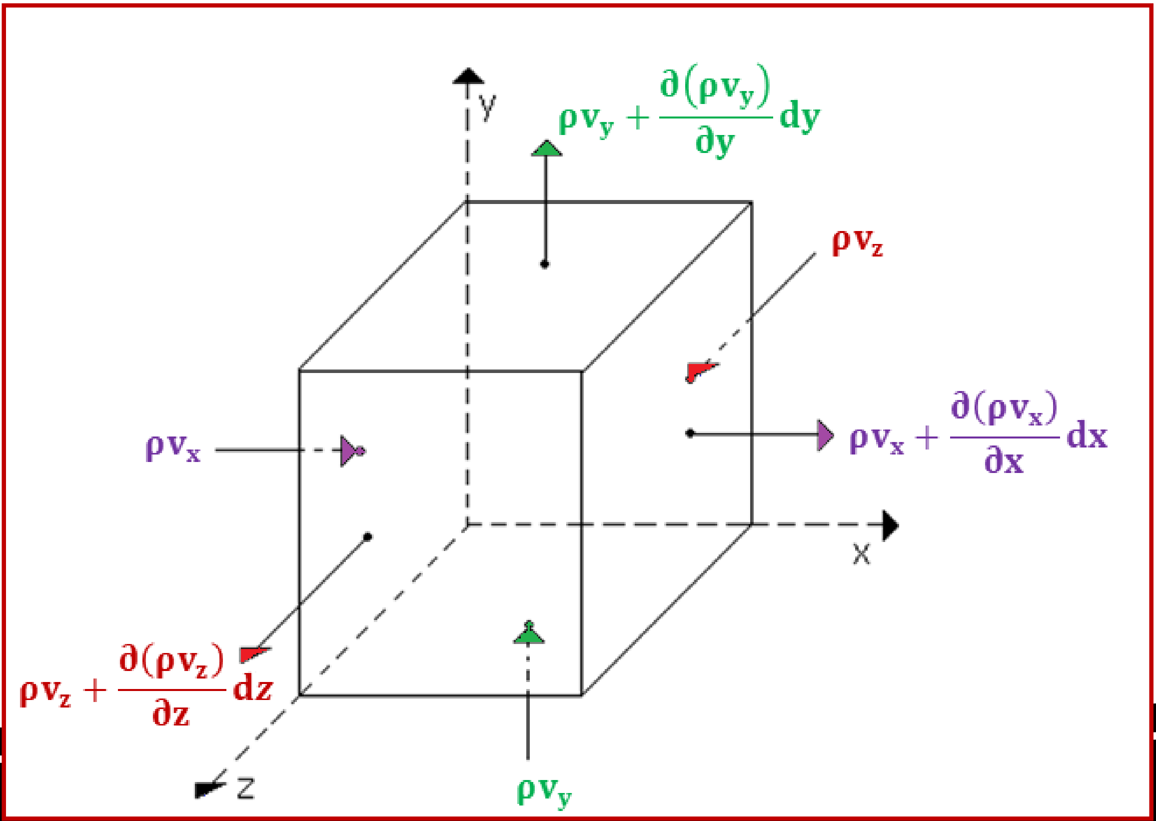
Na direção y a pressão sofre influência do campo gravitacional:

$$\cancel{\frac{dP}{dx}} + \cancel{\frac{dP}{dz}} + \frac{dP}{dy} + \rho g = 0 \qquad \frac{dP}{dy} + \rho g = 0 \qquad \boxed{\frac{dP}{dy} = -\rho g}$$

Equação básica da estática dos

Balanço diferencial de massa

Adotar um V.C. infinitesimal, no interior do fluido, de lados dx, dy, dz:



- **Taxa de massa** (ρvA) entrando/saindo por todas as faces do cubo;
- A flecha indica em qual área a taxa de massa está entrando (**entra = sai + variação da taxa de massa no V.C.**);

Podemos desenvolver o balanço isoladamente em cada direção, para então somar os totais obtidos.

Balanço diferencial de massa

$$\color{#0070C0}{\textbf{(taxa de massa)}_{\textbf{sai}} - \textbf{(taxa de massa)}_{\textbf{entra}}} + \textbf{taxa de acúmulo de massa} = \mathbf{0}$$

Eixo x

$$(\text{taxa líquida de massa})_x = \left(\cancel{\rho v_x} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dx\right)dydz - \cancel{\rho v_x}dydz = \boxed{\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dxdydz}$$

Eixo y

$$(\text{taxa líquida de massa})_y = \left(\cancel{\rho v_y} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dy\right)dxdz - \cancel{\rho v_y}dxdz = \boxed{\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}dxdydz}$$

Eixo z

$$(\text{taxa líquida de massa})_z = \left(\cancel{\rho v_z} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}dz\right)dxdy - \cancel{\rho v_z}dxdy = \boxed{\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}dxdydz}$$

Balanço diferencial de massa

$$(\text{taxa de massa})_{\text{sai}} - (\text{taxa de massa})_{\text{entra}} + \text{taxa de acúmulo de massa} = 0$$

Taxa líquida de massa no V.C.:

$$\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) dxdydz$$

Volume total do V.C.

Acúmulo da taxa de massa no V.C:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = dxdydz\,\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Balanço diferencial de massa

Substituindo os termos na Equação da Conservação da Massa:

$$\textbf{(taxa de massa)}_{\textbf{sai}} - \textbf{(taxa de massa)}_{\textbf{entra}} + \textbf{taxa de acúmulo de massa} = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) dxdydz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = 0$$

Sendo $dxdydz \neq 0$:

$$\boxed{\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Equação da continuidade na forma diferencial em coordenadas cartesianas

Balanço diferencial de massa

$$\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)=\boldsymbol{\nabla}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.(\rho.\vec{v})+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

Equação da continuidade na forma diferencial em coordenadas cartesianas

Divergente = variação da taxa mássica

Balanço diferencial de massa

Em coordenadas cartesianas (2ª forma de representação, abrindo a derivada como o produto da derivada):

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+v_x\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+v_y\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)+v_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)}+\boxed{v_x\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)+v_y\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)+v_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)}+\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}}=0$$

$\nabla.\vec{v}$

Divergente do vetor velocidade

$$\underbrace{\text{Variação convectiva} + \text{Variação local}}_{}$$

Derivada substantiva $= \frac{D\rho}{Dt}$

$$\rho.\nabla.\vec{v}+\frac{D\rho}{Dt}=0$$

Equação da continuidade na forma diferencial em coordenadas cartesianas

Balanço diferencial de massa

Caso particular:

$$\rho . \nabla . \vec{v} + \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Escoamento incompressível e regime permanente

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

$$\nabla . \vec{v} = 0$$

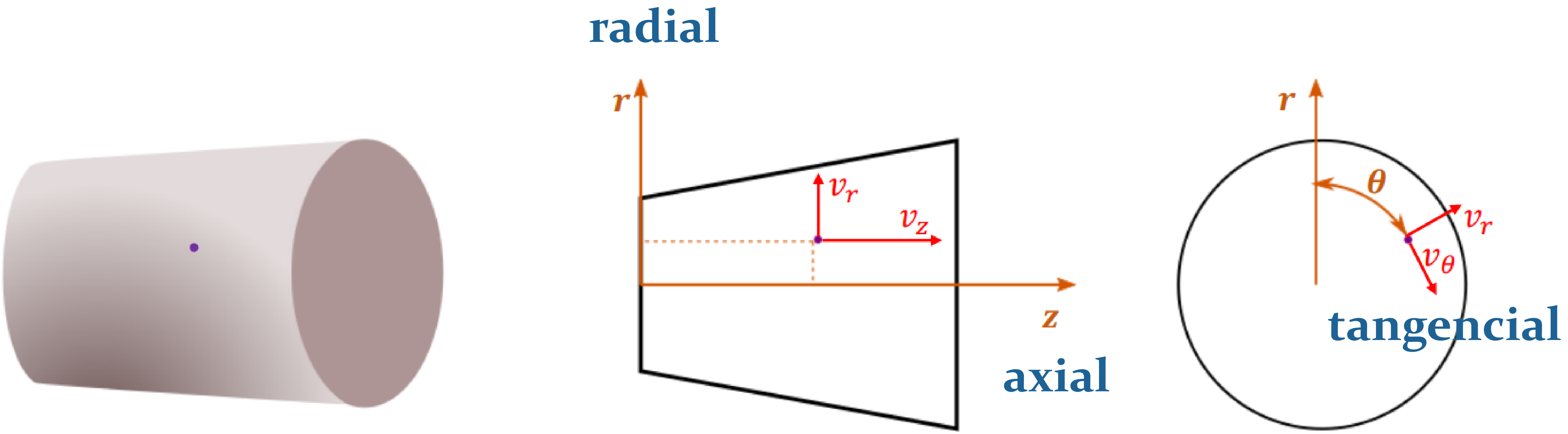
$$\rho . \boldsymbol{\nabla} . \vec{\mathbf{v}} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} . \vec{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

No escoamento incompressível o divergente do vetor velocidade é igual a zero.

Balanço diferencial de massa

Em coordenadas cilíndricas



Balanço diferencial de massa

Em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Equação da continuidade na forma diferencial em coordenadas cilíndricas

Caso particular:

Escoamento incompressível e regime permanente

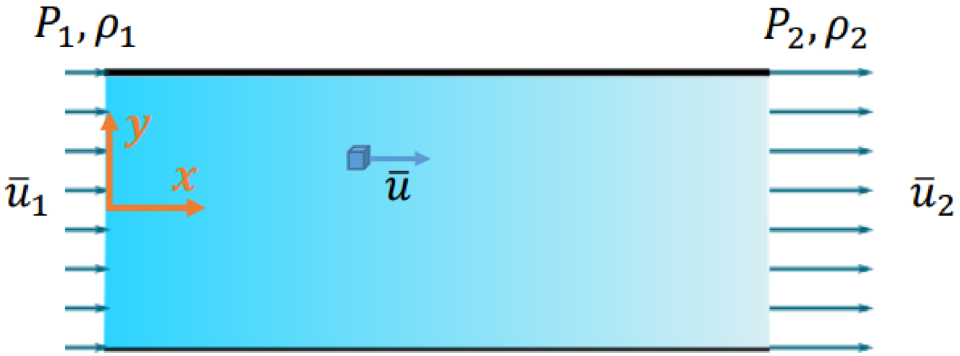
$$\nabla . \vec{v} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z} = 0}$$

EXERCÍCIOS – Balanço diferencial de massa

Exercício 1

Considere o escoamento permanente e compressível através de uma tubulação de seção constante, com **perfil plano de velocidades**. Mostrar que o produto da densidade vezes a velocidade no sentido do escoamento é constante.



$$\boxed{\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Resolução

Regime permanente

$$\boxed{\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}}\right) + \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = 0}$$

Velocidade média *x*

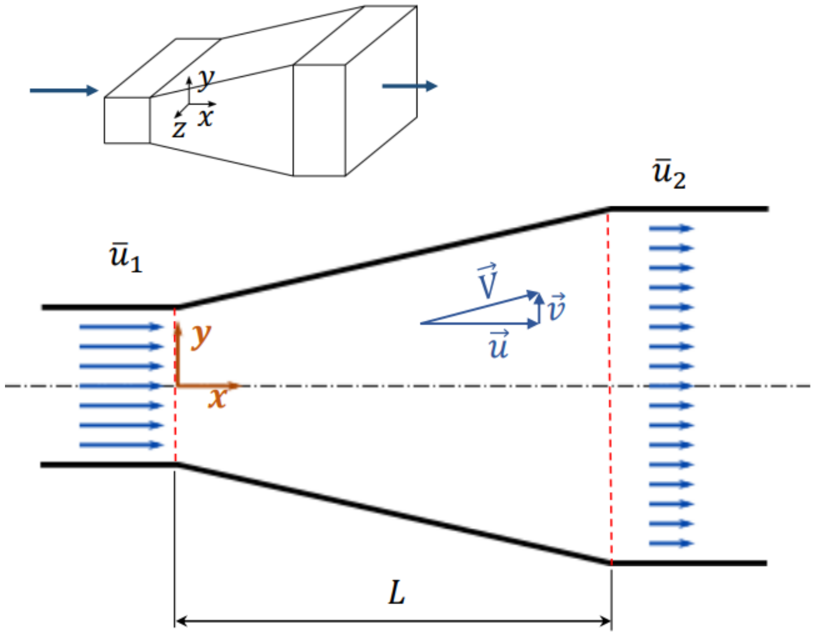
$$\frac{d(\rho v_x)}{dx} = 0$$

$$\boldsymbol{\rho v_x = \text{constante}}$$

Logo, $\boldsymbol{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$

Exercício 2

Obter o campo de velocidades para a expansão abaixo, considerando regime permanente, fluido incompressível e **perfil plano de velocidades**.



$$\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Resolução

Regime permanente

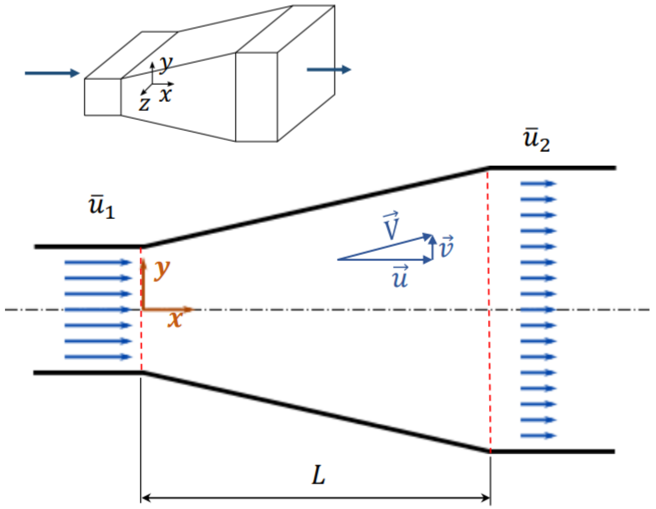
$$\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}}\right) + \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = 0$$

Não há movimento em z

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \longrightarrow \rho\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \rho\frac{\partial(v_y)}{\partial y} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)}{\partial y} = 0}$$

Resolução



Relação entre u (v_x) e x:

Para x = 0 (início da expansão); $v_x = u_1$
Para x = L (final da expansão); $v_x = u_2$

Relação linear: $\dfrac{(u_2 - u_1)}{L - 0} = \dfrac{(u_2 - \mathbf{v_x})}{L - \mathbf{x}}$

$$\boxed{\mathbf{v_x} = u_1 - (u_1 - u_2)\frac{\mathbf{x}}{L}}$$

Satisfaz as condições de expansão!

Resolução

Derivada em relação a x: $\boxed{v_x = u_1 - (u_1 - u_2)\frac{x}{L}}$ $\qquad \frac{d(v_x)}{dx} = \frac{-(u_1 - u_2)}{L}$

Voltando na Eq. diferencial: $\boxed{\frac{\partial(v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_y)}{\partial y} = 0}$ $\qquad \frac{-(u_1 - u_2)}{L} + \frac{d(v_y)}{dy} = 0$

$$\frac{d(v_y)}{dy} = \frac{(u_1 - u_2)}{L}$$

Integrando: $\int d\left(v_y\right) = \int \frac{(u_1 - u_2)}{L}\, dy$ $\qquad \boxed{v_y = \frac{(u_1 - u_2)}{L} y + C_1}$

Resolução

Condições de contorno: **para y = 0 (centro da expansão), v = 0**

$$\boxed{v_y = \frac{(u_1 - u_2)}{L} y + C_1}$$

$$0 = \frac{(u_1 - u_2)}{L} 0 + C_1$$

$$C_1 = 0$$

$$\boxed{\text{Logo, } \mathbf{v_y} = \frac{(u_1 - u_2)}{L} \mathbf{y}}$$

$$\mathbf{v_y} = \boldsymbol{f}(\mathbf{y})$$

Assim, o **campo de velocidades** é dado por:

$$\boxed{v_x = u_1 - (u_1 - u_2)\frac{x}{L} \qquad v_y = \frac{(u_1 - u_2)}{L} y \qquad v_z = 0}$$

Esse resultado é válido para o volume de controle, ou seja, para $0 \leq x \leq L$.