Segundo bloco de exércicios - Álgebra Linear

Luiz Augusto Dembicki Fernandes

19/02/2023

1 Dados espaços vetoriais: $\langle V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V, \overrightarrow{0}_V \rangle$ e $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \overrightarrow{0}_W \rangle$ Transformação de $\mathcal{T} : V \to W \quad | \quad v \mapsto \mathcal{T}(v)$ Provar que a $\mathfrak{Im}(\mathcal{T})$ é subsespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \overrightarrow{0}_W \rangle$

A definição de imagem da transformada:

$$\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) = \{w \in W | \exists v (v \in V \land \mathcal{T}(v) = w)\}$$

O espaço advindo da transformada em questão:

$$\langle \mathfrak{Im}(\mathcal{T}),\ \mathbb{R},\ \oplus,\ \odot, \bigcirc \rangle$$

Para que seja subsespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \overrightarrow{0}_W \rangle$:

1. $\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \subseteq W$

   Por definição de $\mathfrak{Im}(\mathcal{T})$:

   $$\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) = \{w \in W | \exists v (v \in V \land \mathcal{T}(v) = w)\} \implies \mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \subseteq W$$

2. $\bigcirc \in W$

   Partindo do teorema de que um vetor multiplicado pelo escalar nulo é igual ao vetor nulo do mesmo espaço:

   $$0 \cdot_V v = \overrightarrow{0}_V \tag{1}$$

   Portanto:

   $$\mathcal{T}(\overrightarrow{0}_V) = \mathcal{T}(0 \cdot_V v)$$

E da definição de transformação linear:

$$\to \mathcal{T}(0 \cdot_V v) = 0 \cdot_W \mathcal{T}(v)$$

Então utilizando de 1, no espaço vetorial de W:

$$0 \cdot_W \mathcal{T}(v) = \overrightarrow{0}_W \implies \bigcirc = \overrightarrow{0}_W$$

$$\implies \bigcirc \in W$$

3. $\oplus$ é restrição de $+_W$

   Definindo:

   $$w_1 \in \mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \wedge w_2 \in \mathfrak{Im}(\mathcal{T})$$

   $$v_1 \in V \wedge w_1 \in W \mid \mathcal{T}(v_1) = w_1$$

   $$v_2 \in V \wedge w_2 \in W \mid \mathcal{T}(v_2) = w_2$$

   Então, utilizando da definição de transformação linear:

   $$\mathcal{T}(v_1 +_V v_2) = \mathcal{T}(v_1) +_W \mathcal{T}(v_2) = w_1 +_W w_2$$

   Assim $\oplus$ é restrição de $+_W$

4. $\odot$ é restrição de $\cdot_W$

   Dado um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, e os vetores explicitados no item anterior. Usando a definição de transformação linear:

   $$\mathcal{T}(\alpha \cdot_V v_1) = \alpha \cdot_W \mathcal{T}(v_1) = \alpha \cdot_W w_1$$

   Portanto $\odot$ é restrição de $\cdot_W$

Com isso $\langle \mathfrak{Im}(\mathcal{T}),\ \mathbb{R},\ \oplus,\ \odot, \bigcirc \rangle$ é subsespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \overrightarrow{0}_W \rangle$

2 Seja $\langle C^0([2,-2]),\ \mathbb{R},\ +, \cdot,\ 0 \rangle$ um espaço vetorial real munido de produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx$$

Demonstre o cálculo de distância entre as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = 1$, ou seja $d(2x,\ 1)$, pertencentes ao espaço vetorial descrito anteriormente.

Definindo a função distância(d):

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle (u-v),(u-v)\rangle}$$

Utilizando as funções desejadas na definição:

$$d(f,g) = \sqrt{\langle (f-g),(f-g)\rangle} = \sqrt{\langle (2x-1),(2x-1)\rangle}$$

Aplicando o produto interno:

$$d(f,g) = \sqrt{\int_{-2}^{2} (2x-1)(2x-1)dx} = \sqrt{\int_{-2}^{2} 4x^2 - 4x + 1 \; dx}$$

Resolvendo a integral:

$$d(f,g) = \sqrt{\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x \; \Big|_{-2}^{2}}$$

Avaliando os limites de integração:

$$d(f,g) = \sqrt{\frac{76}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{57}$$

3 $\langle M_{3\times 2}, \mathbb{R}, +, \cdot, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$ Exibir um produto interno e dois vetores ortogonais entre si para esse mesmo produto interno

Definindo um produto interno no espaço vetorial apresentado no enunciado:

$$\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle = a\cdot g + b\cdot h + c\cdot i + d\cdot j + e\cdot k + f\cdot l$$

Para que seja produto interno:

1. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

$$\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle = a\cdot g + b\cdot h + c\cdot i + d\cdot j + e\cdot k + f\cdot l$$

$$\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \rangle = g \cdot a + h \cdot g + i \cdot c + j \cdot d + k \cdot e + l \cdot f$$

Portanto por comutatividade da multiplicação de reais

$$\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \rangle = a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l$$

E assim:

$$\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle$$

2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

$$\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a+g & b+h \\ c+i & d+j \\ e+k & f+l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \rangle$$

Realizando o produto interno:

$$\langle \begin{pmatrix} a+g & b+h \\ c+i & d+j \\ e+k & f+l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \rangle = (a+g) \cdot m + (b+h) \cdot n + (c+i) \cdot o + (d+j) \cdot p + (e+k) \cdot q + (f+l) \cdot r$$

Por distributividade da multiplicação de reais:

$$\rightarrow am + gm + bn + hn + co + io + dp + jp + eq + kq + fr + lr$$

Por associatividade da soma de reais:

$$\rightarrow (am + bn + co + dp + eq + fr) + (gm + hn + io + jp + kq + lr)$$

$$= \langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \rangle + \langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \rangle$$

3. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

$$\langle \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \\ \alpha \cdot e & \alpha \cdot f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle$$

Aplicando o produto interno:

$$\langle \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \\ \alpha \cdot e & \alpha \cdot f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle = \alpha \cdot a \cdot g + \alpha \cdot b \cdot h + \alpha \cdot c \cdot i + \alpha \cdot d \cdot j + \alpha \cdot e \cdot k + \alpha \cdot f \cdot l$$

Por distributividade de reais:

$$\rightarrow \alpha \cdot (a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l)$$

$$= \alpha \cdot \langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle$$

4. $\langle u, u \rangle > 0$ se u não é o vetor nulo

$$\langle \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \rangle = a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d + e \cdot e + f \cdot f$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$$

Se a, b, c, d, e e f são números reais não nulos, então obrigatoriamente serão positivos quando elevados ao quadrado.

Definição de ortogonalidade de vetores:

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Dois vetores ortogonais entre si no produto interno e espaço utilizado:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 20 & 0 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Testando se são ortogonais, aplicando na definição estabelecida de produto interno:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 20 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 30 \cdot 0 + 0 \cdot 16$$

Portanto:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = 0$$