



**Universidade Federal do Paraná**  
Setor: Tecnologia  
Departamento: Engenharia Química

# Análise dimensional

Prof<sup>ª</sup>. Dra. Alessandra Cristina Pedro




# Análise dimensional

O estudo experimental de um fenômeno, com a utilização de grupos adimensionais, reduz drasticamente o número de experimentos necessários:

**Teorema dos Pi de Buckingham.**



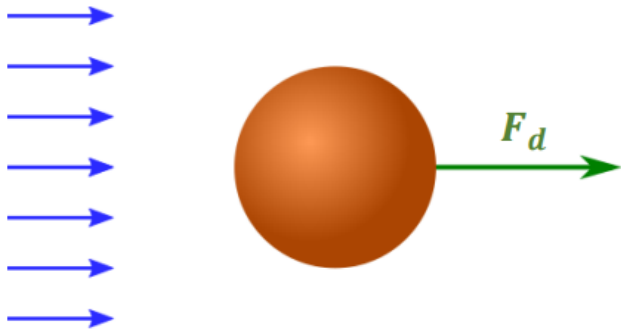
A representação por meio de gráficos e modelos matemáticos também é bastante simplificada ao usar grupos adimensionais.



# Análise dimensional

## Exemplo:

Estudo da força de arraste exercida por um fluido sobre uma esfera estacionária



Parâmetros que influenciam  $F_d$ :

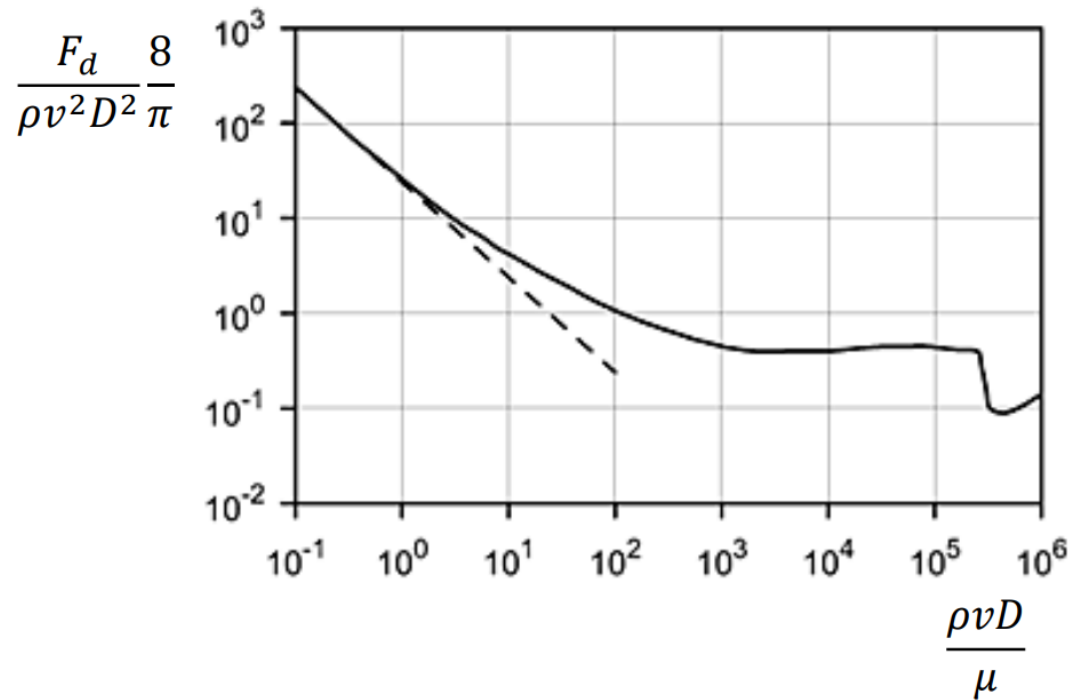
- Tamanho da esfera ( $D$ );
- Velocidade do fluido ( $v$ );
- Densidade do fluido ( $\rho$ );
- Viscosidade do fluido ( $\mu$ );
- Rugosidade da superfície ( $e$ ).

Para **esfera lisa**, os parâmetros podem ser relacionados pelos seguintes grupos adimensionais:

$$\frac{F_d}{\rho v^2 D^2} = f\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

# Análise dimensional

Os dados experimentais podem ser representados (e modelados) segundo uma única curva:



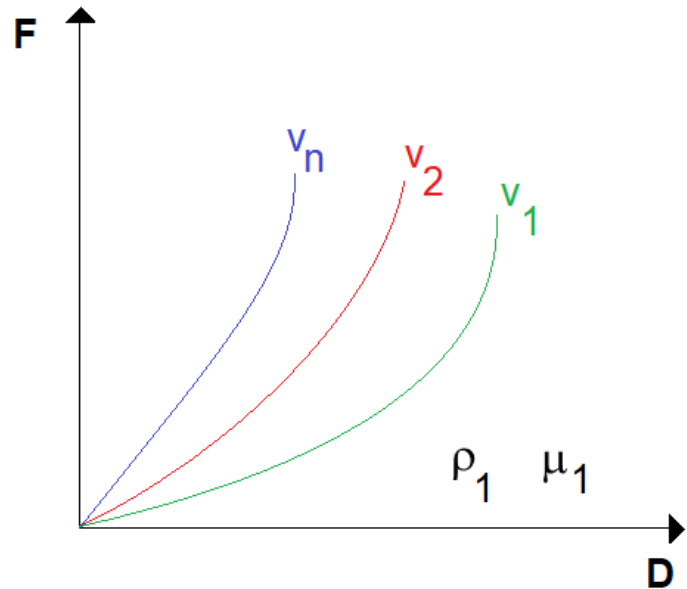
A força de arraste em esferas lisas de qualquer tamanho, em qualquer velocidade de fluido com qualquer combinação de densidade e viscosidade é modelada sob uma única curva.

$$\pi_1 = \frac{F_d}{\rho v^2 D^2}$$

$$\pi_2 = \frac{\rho v D}{\mu}$$

# Análise dimensional

$Fd = f(D, v, \mu, \rho)$  para esfera lisa:



Para que a esfera fique parada é necessário aplicar uma força igual a  $Fd$  em sentido contrário.

A força de arraste é importante na modelagem de estudos de sedimentação ou arraste pneumático.



# Análise dimensional

Como determinar os grupos adimensionais aplicáveis a um determinado problema?

Exemplo de grandezas secundárias expressas em termos de grandezas fundamentais:

## Grandezas fundamentais:

- ✓ comprimento (L);
- ✓ massa (M);
- ✓ tempo (t).

$$\text{velocidade} \equiv \frac{L}{t}$$

$$\text{aceleração} \equiv \frac{L}{t^2}$$

$$\text{pressão} \equiv \frac{M}{Lt^2}$$

$$\text{viscosidade} \equiv \frac{M}{Lt}$$



# Análise dimensional

## Teorema dos $\Pi$ de Buckingham: como obter grupos adimensionais?

- 1) Listar as variáveis (dependente e independentes): o número de variáveis é  $n$ ;
- 2) Escrever as variáveis em termos de grandezas fundamentais: o número de grandezas fundamentais envolvidas é  $r$ ;
- 3) Escolher  $r$  variáveis para compor o núcleo (ou parâmetros repetentes). Não incluir a variável dependente no núcleo. Todas as grandezas fundamentais devem constar no núcleo e 2 variáveis do núcleo não podem ter grandezas fundamentais como potência uma da outra (por exemplo, diâmetro  $\equiv L$  e área  $\equiv L^2$  ).



# Análise dimensional

- 4) Determinar  $n - r$  como o número de grupos adimensionais independentes  $\Pi_1, \Pi_2, \dots$  que se aplicam ao problema;
- 5) Montar o primeiro sistema de equações dimensionais envolvendo o núcleo e uma das variáveis que não são do núcleo e determinar o grupo adimensional  $\Pi_1$ . Cada variável do núcleo é elevada a um expoente  $a, b, c, \dots$ . A grandeza que não é do núcleo tem expoente 1;
- 6) Repetir o passo 5 para os demais grupos adimensionais.

**Observação:** a escolha das variáveis que compõe o núcleo é arbitrária. Uma escolha diferente pode levar a grupos adimensionais diversos.





# EXERCÍCIOS – Análise dimensional