Primeiro bloco de exércicios - Álgebra Linear

Luiz Augusto Dembicki Fernandes

03/12/2022

1 Provar que a associatividade da adição de vetores é teorema em R^2 usual.

Definindo que $u \coloneqq (a, b)$, $v \coloneqq (c, d)$ e $w \coloneqq (e, f)$, partimos de: $(u + v) + w$, realizamos as somas pela definição de adição de vetores em R²:

Aplicando a definição

$$(u + v) + w = ((a, b) + (c, d)) + (e, f)$$

Somando $u + v$ e em seguida $(u + v) + w$

$$\rightarrow ((a + c), (b + d)) + (e, f) = ((a + c) + e, (b + d) + f)$$

Utilizando-se que nos reais a adição é associativa

$$\rightarrow ((a + c) + e, (b + d) + f) = ((c + e) + a, (d + f) + b)$$

Que por definição de adição de matrizes

$$\rightarrow ((c + e) + a, (d + f) + b) = ((c + e), (d + f)) + (a, b)$$

$\therefore ((c + e), (d + f)) + (a, b) = ((c, d) + (e, f)) + (a, b)$, Por adição de vetores,

Que é igual ao ponto de partida

$$((c, d) + (e, f)) + (a, b) = ((a + c), (b + d)) + (e, f)$$

Usando a definição dos vetores
$\therefore (u + v) + w = u + (v + w)$

2 Escolher um axioma qualquer de espaço vetorial real e provar que ele é teorema em P_2 usual.

V8: Se u pertence a V , então existe v pertencente a V tal que $u + v = \overline{0}$;

Seja $\mathcal{P}_2 : \langle P_2, \mathbb{R}, +, \cdot, \bigcirc \rangle$

Sendo p e q funções polinomiais reais de grau menor ou igual a 2, $+$ é então definido como $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$.

$\bigcirc$ é a função $g(x) = 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$.

Definindo:

$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}$

e $q(x) = \pi x^2 + \varpi x + \xi \mid \pi \in \mathbb{R}, \varpi \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$

Devido a definição de adição em $\mathcal{P}_2$:

$(p + q)(x) = p(x) + q(x)$, Substituindo $p(x)$ e $q(x)$

$$p(x) + q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta + \pi x^2 + \varpi x + \xi$$

Por distributividade da multiplicação de reais

$$\rightarrow \alpha x^2 + \beta x + \delta + \pi x^2 + \varpi x + \xi = (\alpha + \pi)x^2 + (\beta + \varpi)x + (\delta + \xi)$$

Como reais, existem inversos aditivos para cada elemento, possibilitando as seguintes expressões: $\alpha + \pi = 0, \beta + \varpi = 0, \delta + \xi = 0$

$$\rightarrow \alpha = -\pi, \beta = -\varpi, \delta = -\xi$$

Que então para este caso particular

$$\rightarrow (\alpha + \pi)x^2 + (\beta + \varpi)x + (\delta + \xi) = (0)x^2 + (0)x + (0)$$

Assim para todo x real a função retornará 0, o que equivale ao vetor nulo do espaço: $(0)x^2 + (0)x + (0) = \bigcirc$

Portanto, tais que $\alpha = -\pi, \beta = -\varpi, \delta = -\xi$

Existe $p(x) + q(x) = \bigcirc$;

3 Provar que qualquer reta que passa pela origem de R^2 define subespaço de R^2 usual.

Utilizando o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ usual:

$$\mathcal{V} = \langle \mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot, (0,0) \rangle$$

Onde $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,é uma função tal que

$$+((a,b),(c,d)) = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,é uma função tal que $\cdot(\alpha,(a,b)) = \alpha \cdot (a,b) = (\alpha a, \alpha b)$

Definindo:

$$\mathcal{R} = \langle r, \mathbb{R}, \oplus, \odot, (0,0) \rangle$$

Tal que $r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid$

$$ax + by = 0 \land a \in \mathbb{R} \land b \in \mathbb{R} \land ((a = 0 \to b \neq 0) \lor (b = 0 \to a \neq 0))\}$$[1]

Onde $\oplus : r \times r \to \mathbb{R}^2$ é restrição de $+$
e $\odot : \mathbb{R} \times r \to \mathbb{R}^2$ é restrição de $\cdot$

Sejam elementos de r : (m,n) e (p,q)
Então por definição:

$$am + bn = 0$$

$$ap + bq = 0$$

Por igualdade

$$\Rightarrow am + bn + ap + bq = 0$$

Por distributividade da multiplicação de reais

$$\Leftrightarrow a(m+p) + b(n+q) = 0$$

Assim se encaixa na definição de r a soma dos elementos

$$\Rightarrow (m+p, n+q) \in r$$

E por definição de $\oplus$

$$(m+p) \oplus (n+q) = (m+p, n+q)$$

Assim a operação $\oplus$ é fechada em r, e por definição de $\odot$

[1] *após $ax + by = 0$, a condição é que a e b são reais e não podem ser simultaneamente nulos*

$$\alpha \odot (p, q) = (\alpha p, \alpha q)$$

Como o elemento acima pertence a r por definição de $\odot$

$$\Rightarrow a\alpha p + b\alpha q = 0$$

Assim o elemento pertence a r

$$\Rightarrow (\alpha p, \alpha q) \in r$$

O elemento $(0, 0)$ respeita a definição

$$a(0) + b(0) = 0$$

E portanto pertence a r

$$(0, 0) \in r$$

Assim $r \subseteq \mathbb{R}^2$, e ambos contém o mesmo vetor nulo e as funções da quintupla ordenada de $\mathcal{R}$ são restrições respectivas de $\mathbb{R}^2$ usual, assim $\mathcal{R}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

4 $\langle \mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot, (0, 0, 0) \rangle$ Usual

- **Dar exemplo de um conjunto x de vetores que gera o espaço mas é L.D.**
- **Dar exemplo de conjunto y de vetores L.I. que não gera o espaço.**

Utilizando as definições:

$$\sum_{n=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = \bar{0}$$

É linearmente independente se, e somente se, a equação acima admite solução única, onde α_i são escalares, v_i são vetores de um conjunto pertencente ao espaço vetorial em análise, e $\bar{0}$ é o vetor nulo de tal interpretação.

Um Conjunto de vetores de um mesmo espaço vetorial gera tal espaço vetorial em análise se, e somente se, todo vetor pertencente a tal possa ser obtido por combinação linear de tal conjunto.

Seja $x = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (6, 6, 6)\}$

Por definição

$$\alpha_1 \cdot (1, 0, 0) + \alpha_2 \cdot (0, 1, 0) + \alpha_3 \cdot (0, 0, 1) + \alpha_4 \cdot (6, 6, 6) = (0, 0, 0)$$

Existem mais do que uma solução para o acima:

$$\alpha_1 = 6; \alpha_2 = 6; \alpha_3 = 6; \alpha_4 = -1$$

$$\alpha_1 = -6; \alpha_2 = -6; \alpha_3 = -6; \alpha_4 = 1$$

Assim o conjunto é linearmente dependente

Para a condição de geração do espaço vetorial, um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ usual

(a, b, c)

$$\alpha_1 = (a-6); \alpha_2 = (b-6); \alpha_3 = (c-6); \alpha_4 = 1$$

$$\alpha_1 \cdot (1,0,0) + \alpha_2 \cdot (0,1,0) + \alpha_3 \cdot (0,0,1) + \alpha_4 \cdot (6,6,6) = (a,b,c)$$

Substituindo e efetuando as multiplicações entre escalares e vetores

$$(a-6) \cdot (1,0,0) + (b-6) \cdot (0,1,0) + (c-6) \cdot (0,0,1) + 1 \cdot (6,6,6) =$$

$$((a-6),0,0) + (0,(b-6),0) + (0,0,(c-6)) + (6,6,6)$$

Realizando a soma entre vetores

$$\rightarrow ((a-6)+6, (b-6)+6, (c-6)+6)$$

Por associatividade de reais

$$\rightarrow ((6-6)+a, (6-6)+b, (6-6)+c) = ((0)+a, (0)+b, (0)+c)$$

$$\Rightarrow (a,b,c) = (a,b,c)$$

Seja $y = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

Por definição

$$\alpha_1 \cdot (1,0,0) + \alpha_2 \cdot (0,1,0) = (0,0,0)$$

Existe uma única solução para o acima:

Por multiplicação de escalares reais por vetores reais

$$\alpha_1 \cdot (1,0,0) + \alpha_2 \cdot (0,1,0) = (\alpha_1 \cdot 1, \alpha_2 \cdot 1, 0)$$

Já que 1 é neutro multiplicativo

$$\rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, 0) = (0,0,0)$$

A equação acima implica que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$, a única solução real

Assim o conjunto é linearmente independente

Para a condição de geração do espaço vetorial, um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$ usual

(a, b, c)

$$\alpha_1 \cdot (1, 0, 0) + \alpha_2 \cdot (0, 1, 0) = (a, b, c)$$

Efetuando as multiplicações entre escalares reais e vetores reais, e como 1 é neutro multiplicativo

$$\rightarrow (\alpha_1 1, 0, 0) + (0, \alpha_2 1, 0) = (\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0)$$

Realizando a soma entre vetores

$$\rightarrow (\alpha_1, 0, 0) + (0, \alpha_2, 0) = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$$

Para a igualdade abaixo

$$(\alpha_1, \alpha_2, 0) = (a, b, c)$$

Implica que $c = 0$, qual em $\mathbb{R}^3$ assume qualquer valor $\mathbb{R}$, que acarreta que o conjunto y não gera $\mathbb{R}^3$.