Universidade Federal do Paraná
Setor: Tecnologia
Departamento: Engenharia Química

Balanço diferencial de momento – Navier Stokes

Profª. Dra. Alessandra Cristina Pedro

Relembrando! BDM

$$\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)=\boldsymbol{\nabla}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.(\rho.\vec{v})+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$$

Equação da continuidade na forma diferencial em coordenadas cartesianas

Divergente

Balanço diferencial de momento

Equações de Navier-Stokes

Σ (forças que agem sobre o V.C) = taxa líquida de momento linear no V.C. + taxa temporal de variação de momento linear dentro do V.C.

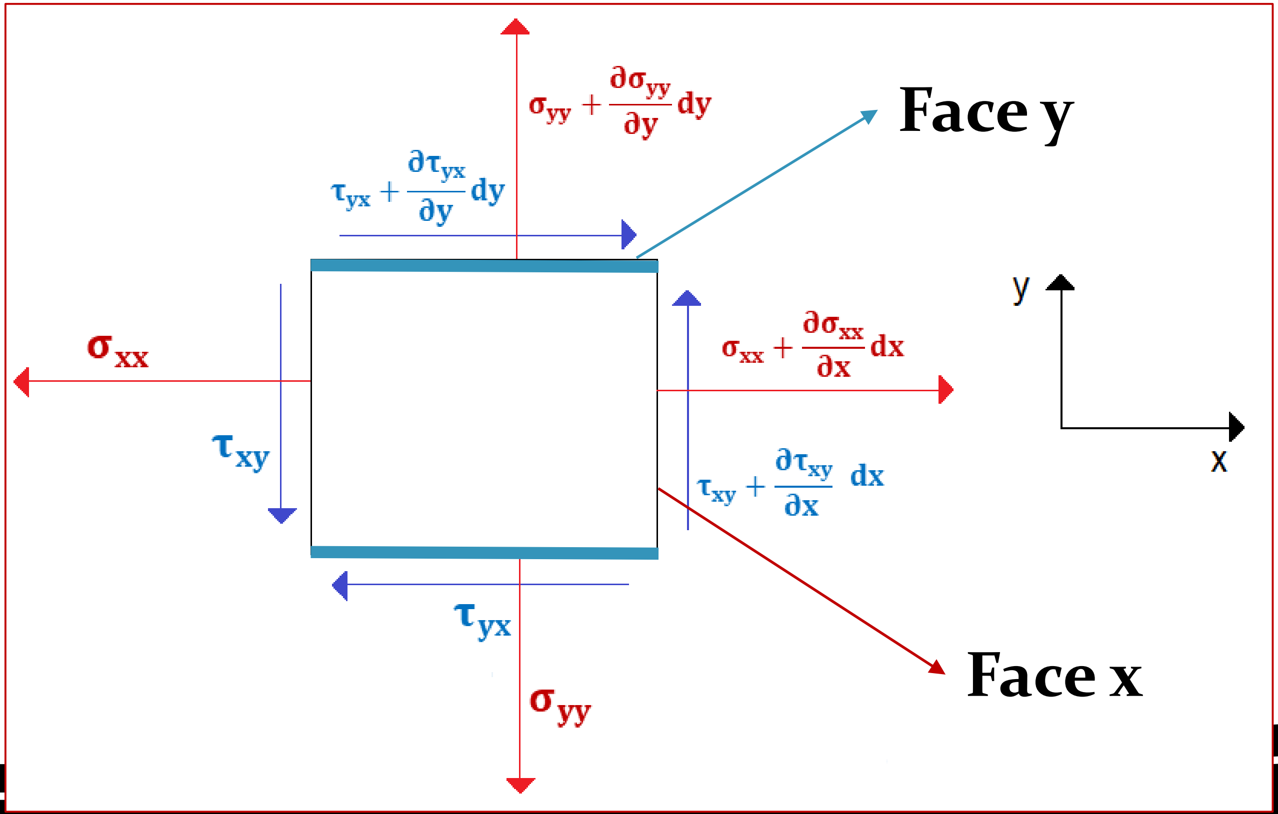
Σ (forças que agem sobre o V.C) = **termo 1**

taxa líquida de momento linear no V.C. = **termo 2**

taxa temporal de variação de momento linear dentro do V.C. = **termo 3**

Balanço diferencial de momento

TERMO 1: Σ (forças que agem sobre o V.C)



Tensão normal
Tensão de cisalhamento
Força gravitacional

$\boldsymbol{\sigma_{ij}}$ **= tensão normal**

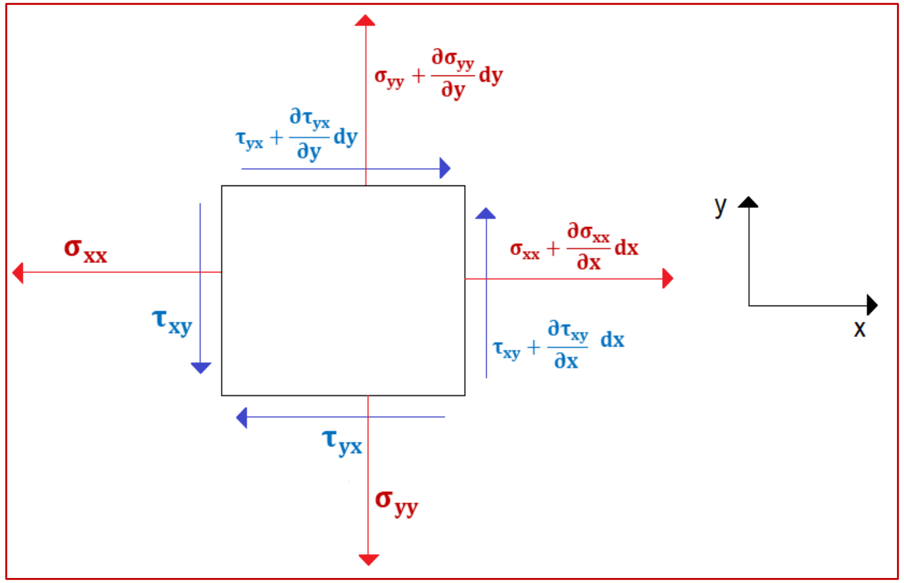
i = j = face

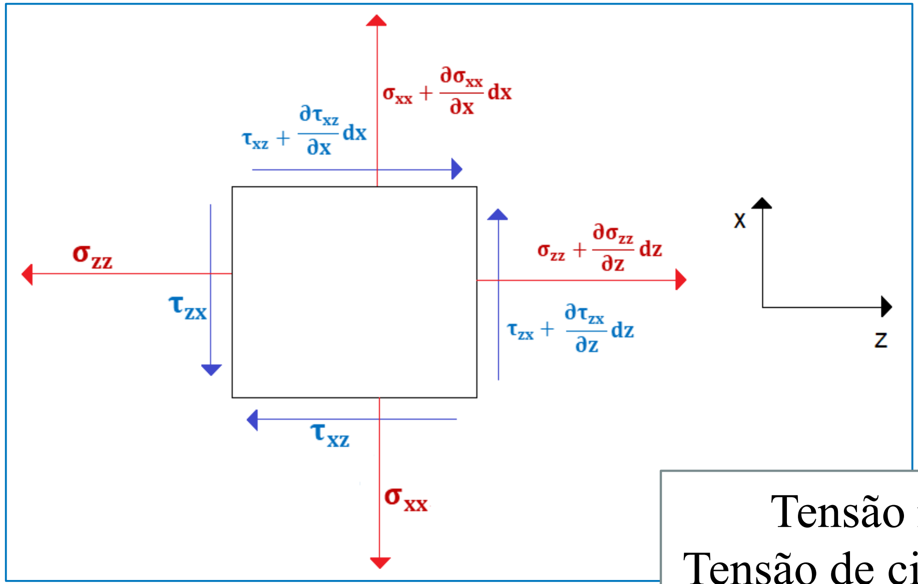
$\boldsymbol{\tau_{ij}}$ **= tensão de cisalhamento**

i = face sobre a qual a componente age
j = direção na qual a componente age

Balanço diferencial de momento

Componente x





Tensão normal
Tensão de cisalhamento
Força gravitacional

$ij = xx$ $\qquad$ $ij = yx$ $\qquad$ $ij = zx$

$$\sum F_x = \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\mathbf{dx}\right) - \sigma_{xx}\right] dydz + \left[\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathbf{dy}\right) - \tau_{yx}\right] dxdz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathbf{dz}\right) - \tau_{zx}\right] dxdy + \boldsymbol{\rho g_x dxdydz}$$

Balanço diferencial de momento

Componente x

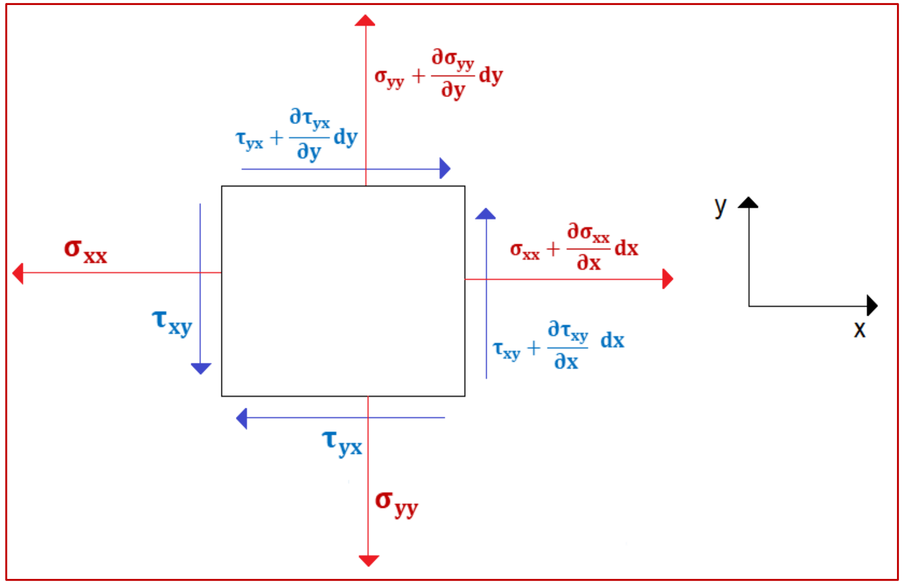
$$\sum F_x = \left[\left(\cancel{\sigma_{xx}} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx\right) - \cancel{\sigma_{xx}}\right]dydz + \left[\left(\cancel{\tau_{yx}} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right) - \cancel{\tau_{yx}}\right]dxdz + \left[\left(\cancel{\tau_{zx}} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right) - \cancel{\tau_{zx}}\right]dxdy + \rho g_x dxdydz$$

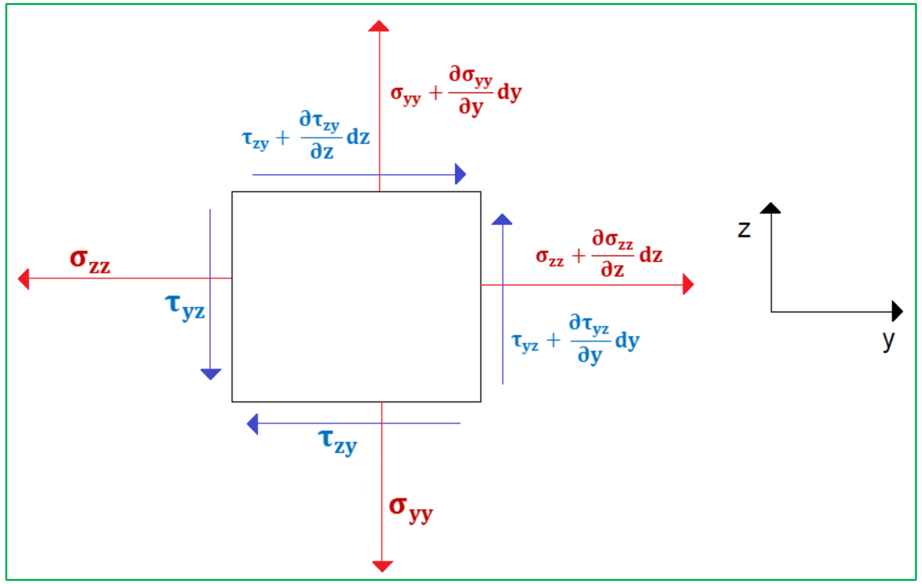
Rearranjando a equação, temos:

$$\sum F_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x\right)dxdydz$$

Balanço diferencial de momento

Componente y

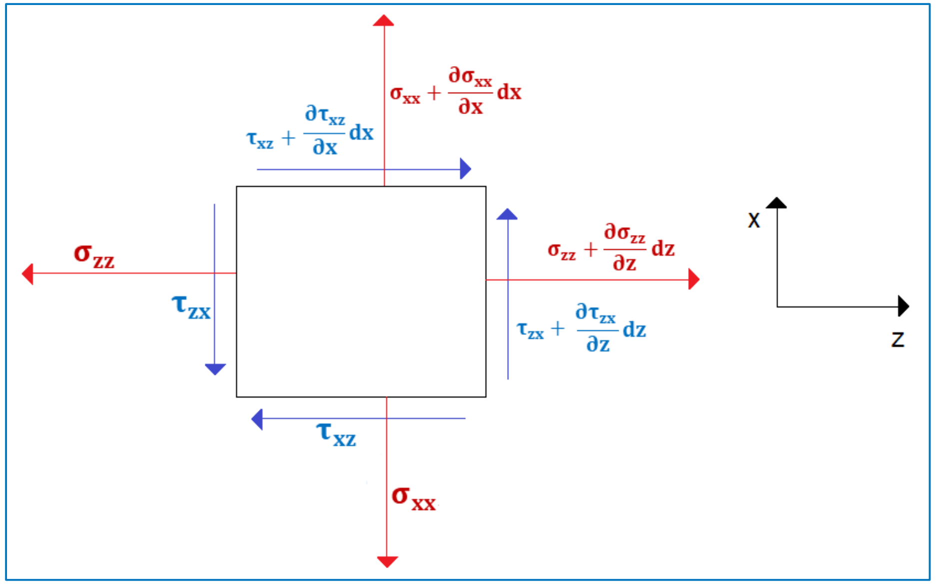


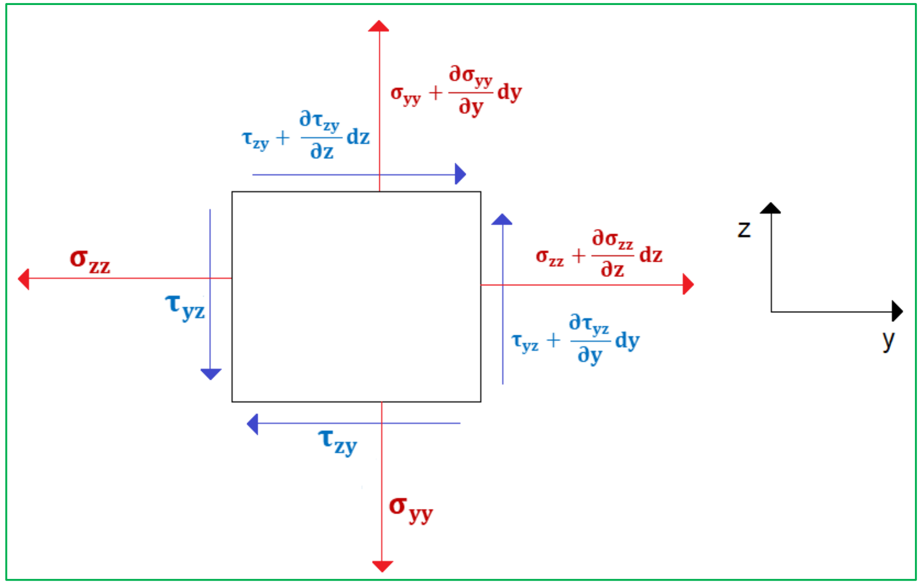


$$\sum F_y = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y\right) dxdydz$$

Balanço diferencial de momento

Componente z





$$\sum F_z = \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho g_z \right) dxdydz$$

Balanço diferencial de momento

Componente x

$$\sum F_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x\right) dxdydz$$

Componente y

$$\sum F_y = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y\right) dxdydz$$

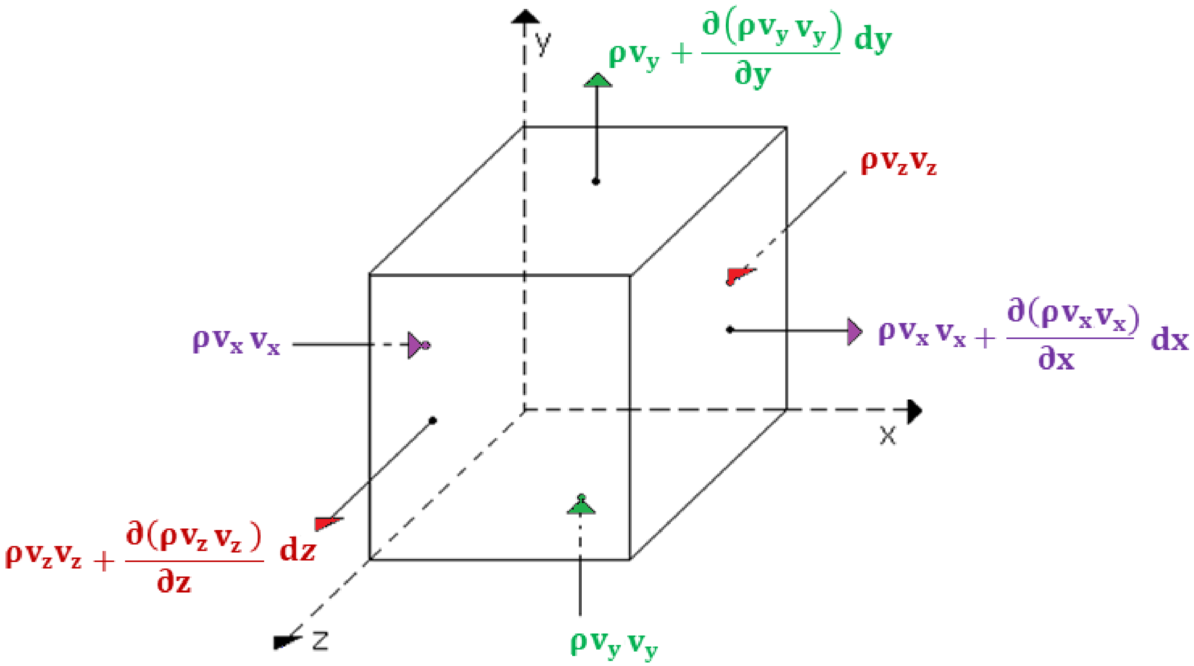
Termo 1

Componente z

$$\sum F_z = \left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \rho g_z\right) dxdydz$$

Balanço diferencial de momento

TERMO 2: taxa líquida de momento linear no V.C.



Balanço diferencial de momento

$$(\textbf{taxa de ML})_{\textbf{sai}} - (\textbf{taxa de ML})_{\textbf{entra}} + \textbf{taxa de acúmulo de ML} = \mathbf{0}$$

Eixo x

$$(\text{taxa de ML})_x = \left(\cancel{\rho v_x v_x} + \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x}dx\right)dydz - \cancel{\rho v_x v_x}dydz = \boxed{\frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x}dxdydz}$$

Eixo y

$$(\text{taxa de ML})_y = \left(\cancel{\rho v_y v_y} + \frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y}dy\right)dxdz - \cancel{\rho v_y v_y}dxdz = \boxed{\frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y}dxdydz}$$

Eixo z

$$(\text{taxa de ML})_z = \left(\cancel{\rho v_z v_z} + \frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}dz\right)dxdy - \cancel{\rho v_z v_z}dxdy = \boxed{\frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}dxdydz}$$

Balanço diferencial de momento

Diferenciando a equação e utilizando a equação da continuidade:

$$\boxed{\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right)+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0}$$

Equação da continuidade diferencial

$$\textbf{Taxa líquida de ML} = \frac{\partial(\rho v_x v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z v_z)}{\partial z}$$

$$\boxed{\text{Taxa líquida de ML} = -\vec{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\left[v_x\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right]}$$

Termo 2

Balanço diferencial de momento

TERMO 3: taxa temporal de variação de momento linear **dentro do V.C.**

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} = \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

Termo 3

Acúmulo

Balanço diferencial de momento

Componente x

$$\sum F_x = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x\right) dxdydz$$

Termo 1

$$\text{Taxa líquida de ML} = \cancel{-\vec{v}\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho\left[v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right]$$

Termo 2

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t}$$

Termo 3

Balanço diferencial de momento

Substituindo os termos 1, 2 e 3 em:

termo 1 **termo 2**

Σ (forças que agem sobre o V.C) = taxa líquida de momento linear no V.C. + taxa temporal de variação de momento linear dentro do V.C.

termo 3

Balanço diferencial de momento

Componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=\rho g_x+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

Componente y

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\rho g_y+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

Componente z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\rho g_z+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

Balanço diferencial de momento

Relações de Stokes da viscosidade:

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)}$$

$$\boxed{\sigma_{xx} = \mu\left(2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla.\vec{v}\right) - P}$$

$$\boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)}$$

$$\boxed{\sigma_{yy} = \mu\left(2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla.\vec{v}\right) - P}$$

$$\boxed{\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)}$$

$$\boxed{\sigma_{zz} = \mu\left(2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla.\vec{v}\right) - P}$$

Balanço diferencial de momento

Substituindo as relações de viscosidade de Stokes na Eq. diferencial de momento, temos **(coordenadas cartesianas)**:

Componente x

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=\rho g_x+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\sigma_{xx}=\mu\left(2\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\nabla.\vec{v}\right)-P$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla.\vec{v})$$

Balanço diferencial de momento

Componente y

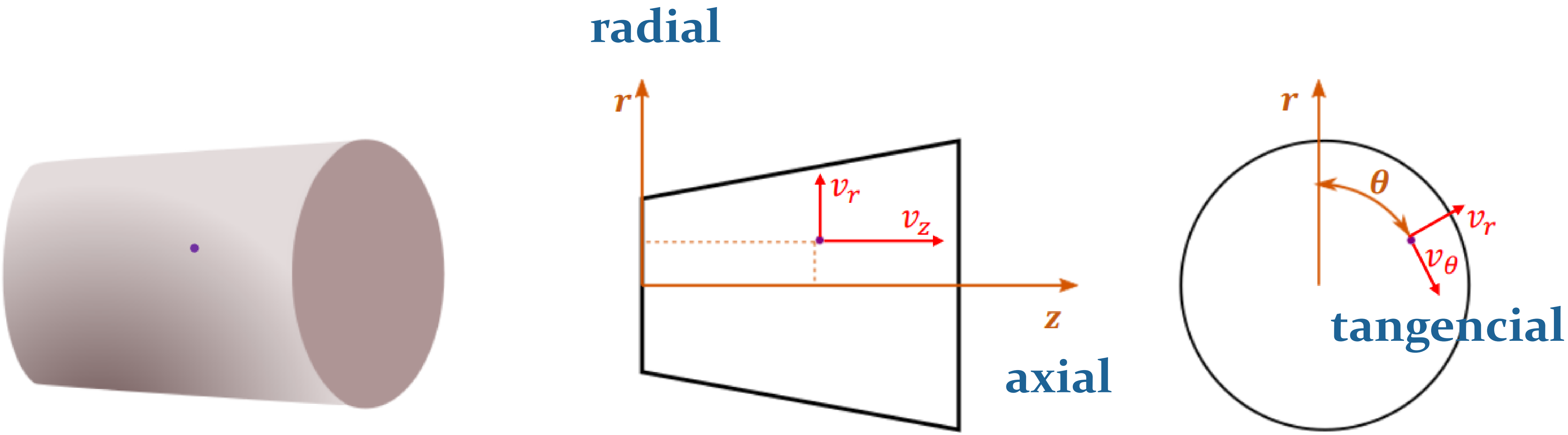
$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_y}{\partial t}\right)=\rho g_y-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla.\vec{v})$$

Componente z

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial t}\right)=\rho g_z-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla.\vec{v})$$

Balanço diferencial de momento

Coordenadas cilíndricas



Balanço diferencial de momento

Coordenadas cilíndricas

Componente r

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{\partial v_\theta^2}{r}+v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}+\frac{\partial v_r}{\partial t}\right)=\rho g_r-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r.v_r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}\right]+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial r}(\nabla.\vec{v})$$

Componente θ

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_x\frac{\partial v_\theta}{\partial x}+\frac{\partial v_\theta}{\partial t}\right)=\rho g_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r.v_\theta)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2}\right]+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial \theta}(\nabla.\vec{v})$$

Componente x

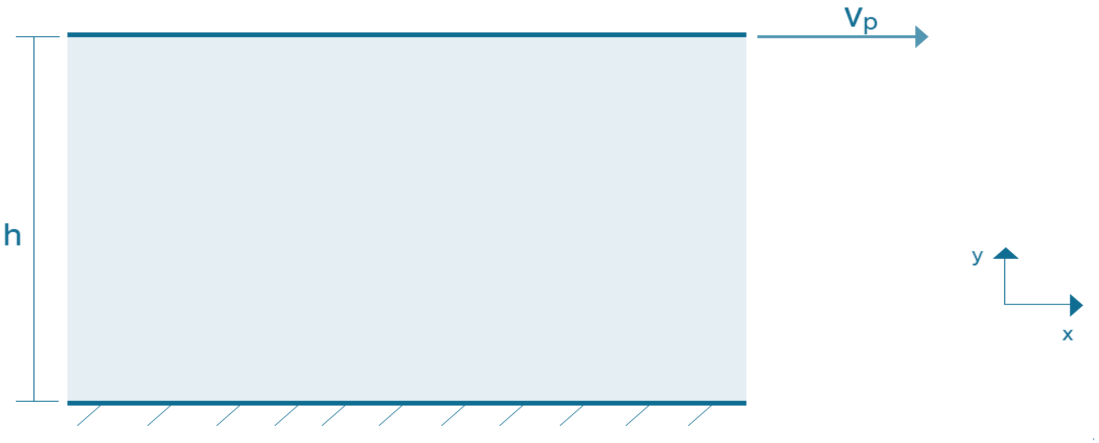
Balanço diferencial de momento

As **equações de Navier-Stokes** são equações diferenciais que descrevem o escoamento de fluidos. São equações a derivadas parciais que permitem determinar os campos de velocidade e de pressão em um escoamento.

EXERCÍCIOS – Balanço diferencial de momento

Exercício 1

1) Determine o perfil de velocidade de um fluido newtoniano que escoa **entre duas placas paralelas**, conforme figura abaixo.



Componente x

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla.\vec{v})$$

Resolução

$$\rho\left(v_x\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}}+\cancel{v_y}\frac{\partial v_x}{\partial y}+\cancel{v_z}\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial z}}+\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}}\right)=\cancel{\rho g_x}-\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}}+\mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}+\boxed{\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}\right)+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\cancel{(\nabla.\vec{v})}$$

Simplificações:

1) Escoamento linear (organizado apenas na direção x);

2) Regime Permanente;

3) $v_x = v_x(y)$ (a velocidade ocorre em x mas sofre variação com y);

4) Fluido incompressível; (da equação da continuidade o divergente do vetor velocidade para o fluido incompressível é igual a zero)

5) O escoamento ocorre devido ao movimento da placa superior;

6) A placa se encontra na horizontal.

Resolução

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \boldsymbol{\mu \neq 0} \qquad \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) = 0$$

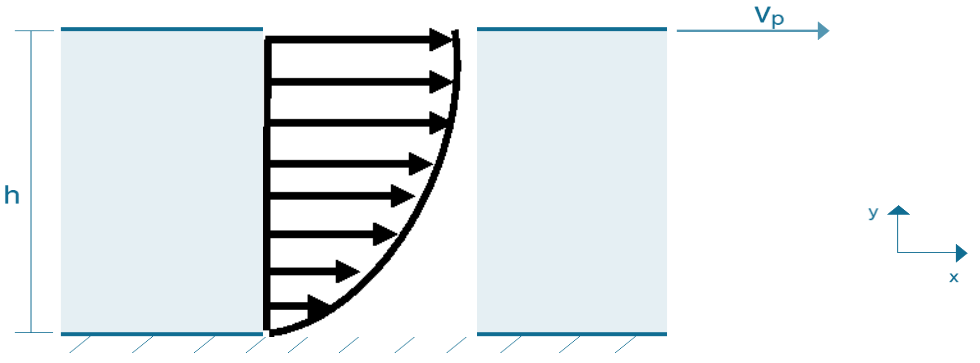
Rearranjando a equação: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0$

$$\partial\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0\partial y \Rightarrow \int \partial\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = 0\int \partial y \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0y + C_1} \Rightarrow$$

$$\int \partial v_x = C_1 \int \partial y \Rightarrow \boxed{v_x = C_1 y + C_2}$$

C_1 e C_2 são constantes de integração determinadas pelas condições de contorno do problema!

Resolução



Condição de contorno 1: quando $y = 0 \rightarrow v_x = 0$

Condição de contorno 2: quando $y = \text{h} \rightarrow v_x = v_p$

$$\boxed{v_x = C_1 y + C_2}$$

Condição de contorno 1:

$$0 = C_1 0 + C_2$$

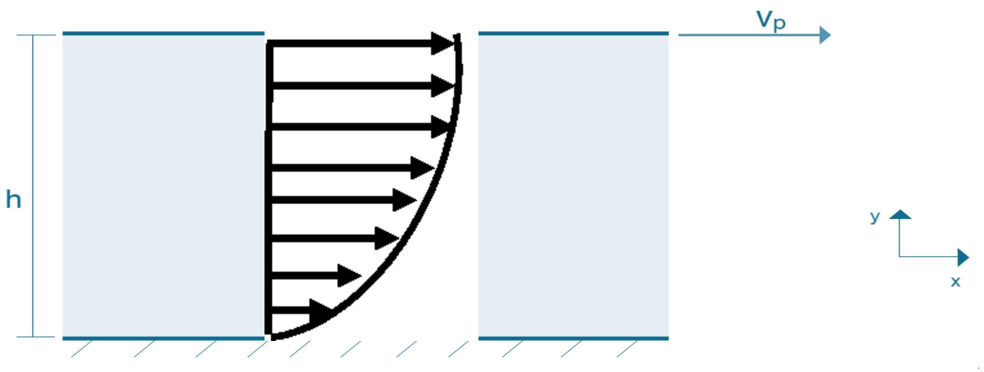
$$C_2 = 0$$

Condição de contorno 2:

$$v_p = C_1 h + 0$$

$$C_1 = \frac{v_p}{h}$$

Resolução



$$\boxed{v_x = C_1 y + C_2}$$

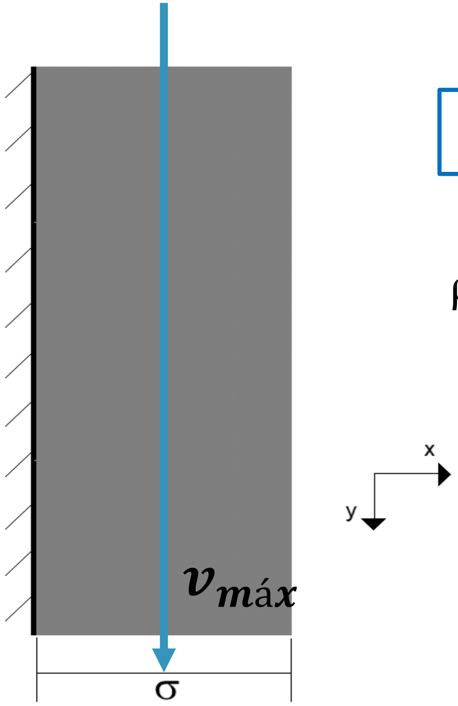
$$C_1 = \frac{v_p}{h} \qquad C_2 = 0$$

Equação que descreve o perfil de velocidades para o problema proposto:

$$\boxed{v_x = \frac{v_p}{h} y}$$

Exercício 2

2) Determine o perfil de velocidade de um fluido newtoniano que escoa em uma **parede plana na vertical**, conforme figura.



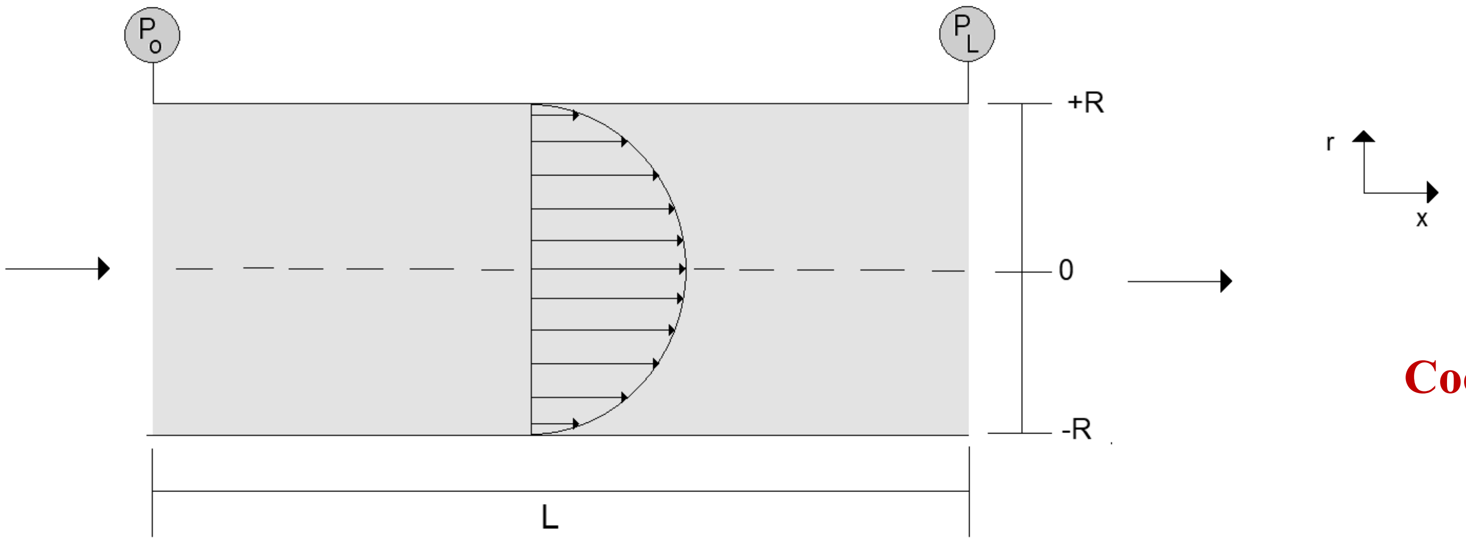
Componente y

$$\rho\left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t}\right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla.\vec{v})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v_y}}{\partial x} = v_{máx}$$

Exercício 3

3) Obter o **perfil de pressão e velocidade** para o escoamento permanente, incompressível, axial e laminar de um fluido newtoniano através de um tubo horizontal quando há diferença de pressão aplicada externamente (escoamento forçado).



Coordenadas Cilíndricas
Componente x

Resolução

$$\rho\left(\cancel{v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}}+\cancel{\frac{v_\theta}{r}}\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial \theta}}+v_x\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}}+\cancel{\frac{\partial v_x}{\partial t}}\right)=\rho\cancel{g_x}-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2}}+\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}}\right]+\frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\cancel{(\nabla\cdot\vec{v})}$$

Simplificações:

1) Escoamento laminar (organizado apenas na direção x);

2) Regime Permanente;

3) $v_x = v_x(r)$ (a velocidade ocorre em x mas sofre variação com r);

4) Fluido incompressível; (da equação da continuidade o divergente do vetor velocidade para o fluido incompressível é igual a zero)

5) A placa se encontra na horizontal.

Resolução

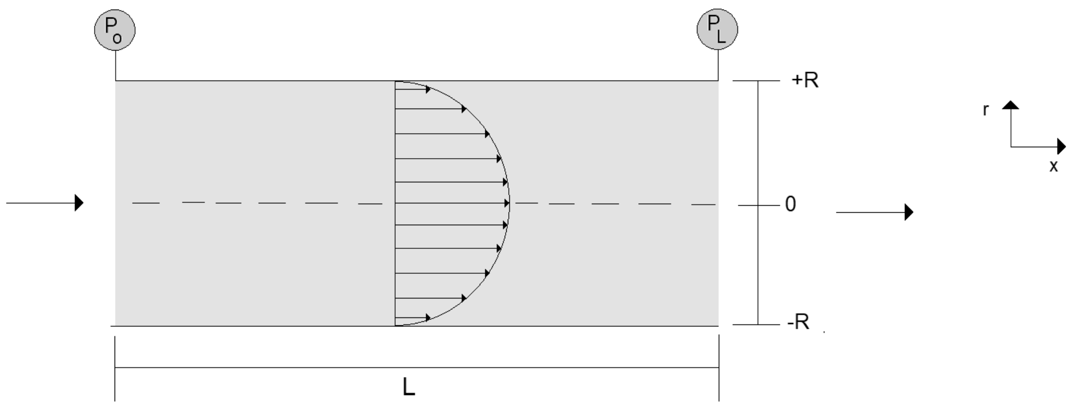
$$-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\right]}_{f(r)} = \boxed{\underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{f(x)} = \boldsymbol{C}\ (\boldsymbol{constante})}$$

Perfil de pressão:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=C \quad \Rightarrow \quad \int dP = C\int dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{P = Cx + } \boldsymbol{C_1}} \qquad (1)$$

C_1 = constante de integração

Resolução



Condição de contorno 1: $x = 0 \rightarrow P = P_o$

Condição de contorno 2: $x = L \rightarrow P = P_L$

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{Cx} + \boldsymbol{C_1}}$$

Condição de contorno 1:

$$\mathbf{P_o} = \mathrm{C}.\,\mathbf{0} + C_1$$

$$C_1 = \mathrm{P_o}$$

Condição de contorno 2:

$$\mathbf{P_L} = \mathrm{C}.\,\mathbf{L} + \mathrm{P_o}$$

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{P_L} - \mathrm{P_o}}{\mathrm{L}}$$

Resolução

Perfil de pressão:

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{Cx} + C_1}$$

$$C = \frac{P_L - P_o}{L} = \frac{\Delta P}{L}$$

$$C_1 = P_o$$

Equação que descreve o perfil de pressão para o problema proposto:

$$P = \left(\frac{P_L - P_o}{L}\right)x + P_o$$

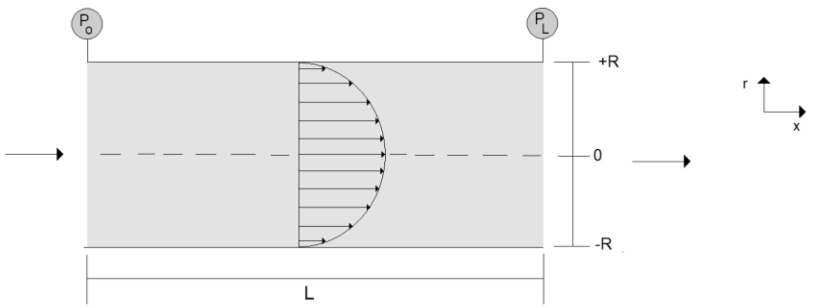
Resolução

Perfil de velocidade:

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right)\right] = C \Rightarrow \int \partial\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = \frac{C}{\mu}\int r\,dr \Rightarrow \boxed{r\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{C}{\mu}\frac{r^2}{2} + C_1}$$

$$\int dv_x = \frac{C}{2\mu}\int r\,dr + C_1\int\frac{dr}{r} \Rightarrow \boxed{\mathbf{v_x} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{4\mu}}\boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{C_1}\,\mathbf{ln\,r} + \boldsymbol{C_2}} \quad (2)$$

Resolução



Condição de contorno 1: r = 0 → $\frac{dv_x}{dr} = v_{máx} = 0$

$$\boxed{r\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{C}{\mu}\frac{r^2}{2} + C_1}$$

$$0\;0 = \frac{C}{\mu}\frac{0^2}{2} + C_1$$

$$C_1 = 0$$

Condição de contorno 2: r = R → $v_x = 0$

$$\boxed{v_x = \frac{C}{4\mu} r^2 + C_1 \ln r + C_2}$$

$$0 = \frac{C}{4\mu}R^2 + 0.\ln R + C_2$$

$$C_2 = -\frac{C}{4\mu}R^2$$

Resolução

Perfil de velocidade:

$$\boxed{\mathbf{v_x} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{4\mu}}\boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{C_1}\,\mathbf{ln\ r} + \boldsymbol{C_2}}$$

$$C = \frac{P_L - P_o}{L} = \frac{\Delta P}{L}$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{C}{4\mu}R^2$$

Substituindo as constantes de integração na Equação de v_x, temos:

$$v_x = \frac{\Delta P.R^2}{4\mu L}\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)$$

Equação que descreve o perfil de velocidade para o problema proposto

Extensão do exercício para perda de carga

Vazão volumétrica:

$$Q = A.v$$

$$v_x = \frac{\Delta P.R^2}{4\mu L}\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{-\Delta P.\pi.R^4}{8\mu L}}$$

ou

$$\boxed{Q = \frac{-\Delta P.\pi.D^4}{128\mu L}}$$

Equação de Hagen Poiseulli

Extensão do exercício para perda de carga

$$\mathbf{Q = A.v}$$

Velocidade média: $$v_X = \frac{Q}{A\,(\pi.R^2)} = \frac{-\Delta P.\pi.R^4}{8\mu L} = -\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\pi.R^4}{8\mu}$$

$$\boxed{Q = \frac{-\Delta P.\pi.R^4}{8\mu L}}$$

$$\boxed{v_X = -\frac{R^2}{8\mu}\frac{\partial P}{\partial x}} \quad ou \quad \boxed{v_X = -\frac{D^2}{32\mu}\frac{\partial P}{\partial x}}$$

$$v_X = \frac{-\Delta P.R^2}{8\mu L} \qquad v_X = \frac{-\Delta P.D^2}{32\mu L}$$

Extensão do exercício para perda de carga

$$f_D = \frac{\frac{-\Delta P}{L}}{\frac{\rho v^2}{2D}}$$

$$v_x = \frac{-\Delta P . R^2}{8\mu L} \quad ou \quad \boxed{v_x = \frac{-\Delta P . D^2}{32\mu L}}$$

Perda de Carga

$$\boxed{h_L = \frac{L}{D}\frac{v^2}{2g} f_D}$$

L = comprimento da tubulação
D = diâmetro da tubulação
v = velocidade do fluido na tubulação
f_D = fator de atrito de Darcy

Equação de Darcy