

Segundo bloco de exercícios - Álgebra Linear

Luiz Augusto Dembicki Fernandes

19/02/2023

1 Dados espaços vetoriais:

$\langle V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V, \vec{0}_V \rangle$ e $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \vec{0}_W \rangle$

Transformação de $\mathcal{T} : V \rightarrow W \mid v \mapsto \mathcal{T}(v)$

Provar que a $\mathfrak{Im}(\mathcal{T})$ é subespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \vec{0}_W \rangle$

A definição de imagem da transformada:

$$\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) = \{w \in W \mid \exists v(v \in V \wedge \mathcal{T}(v) = w)\}$$

O espaço advindo da transformada em questão:

$$\langle \mathfrak{Im}(\mathcal{T}), \mathbb{R}, \oplus, \odot, \bigcirc \rangle$$

Para que seja subespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \vec{0}_W \rangle$:

1. $\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \subseteq W$

Por definição de $\mathfrak{Im}(\mathcal{T})$:

$$\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) = \{w \in W \mid \exists v(v \in V \wedge \mathcal{T}(v) = w)\} \implies \mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \subseteq W$$

2. $\bigcirc \in W$

Partindo do teorema de que um vetor multiplicado pelo escalar nulo é igual ao vetor nulo do mesmo espaço:

$$0 \cdot_V v = \vec{0}_V \tag{1}$$

Portanto:

$$\mathcal{T}(\vec{0}_V) = \mathcal{T}(0 \cdot_V v)$$

E da definição de transformação linear:

$$\rightarrow \mathcal{T}(0 \cdot_V v) = 0 \cdot_W \mathcal{T}(v)$$

Então utilizando de 1, no espaço vetorial de W :

$$\begin{aligned} 0 \cdot_W \mathcal{T}(v) &= \vec{0}_W \implies \bigcirc = \vec{0}_W \\ \implies \bigcirc &\in W \end{aligned}$$

3. \oplus é restrição de $+_W$

Definindo:

$$\begin{aligned} w_1 &\in \mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \wedge w_2 \in \mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \\ v_1 &\in V \wedge w_1 \in W \mid \mathcal{T}(v_1) = w_1 \\ v_2 &\in V \wedge w_2 \in W \mid \mathcal{T}(v_2) = w_2 \end{aligned}$$

Então, utilizando da definição de transformação linear:

$$\mathcal{T}(v_1 +_V v_2) = \mathcal{T}(v_1) +_W \mathcal{T}(v_2) = w_1 +_W w_2$$

Assim \oplus é restrição de $+_W$

4. \odot é restrição de \cdot_W

Dado um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, e os vetores explicitados no item anterior. Usando a definição de transformação linear:

$$\mathcal{T}(\alpha \cdot_V v_1) = \alpha \cdot_W \mathcal{T}(v_1) = \alpha \cdot_W w_1$$

Portanto \odot é restrição de \cdot_W

Com isso $\langle \mathfrak{Im}(\mathcal{T}), \mathbb{R}, \oplus, \odot, \bigcirc \rangle$ é subespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \vec{0}_W \rangle$

2 Seja $\langle C^0([2, -2]), \mathbb{R}, +, \cdot, 0 \rangle$ um espaço vetorial real munido de produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx$$

Demonstre o cálculo de distância entre as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = 1$, ou seja $d(2x, 1)$, pertencentes ao espaço vetorial descrito anteriormente.

Definindo a função distância(d):

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle (u - v), (u - v) \rangle}$$

Utilizando as funções desejadas na definição:

$$d(f, g) = \sqrt{\langle (f - g), (f - g) \rangle} = \sqrt{\langle (2x - 1), (2x - 1) \rangle}$$

Aplicando o produto interno:

$$d(f, g) = \sqrt{\int_{-2}^2 (2x - 1)(2x - 1) dx} = \sqrt{\int_{-2}^2 4x^2 - 4x + 1 dx}$$

Resolvendo a integral:

$$d(f, g) = \sqrt{\left. \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x \right|_{-2}^2}$$

Avaliando os limites de integração:

$$d(f, g) = \sqrt{\frac{76}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{57}$$

3 $\langle M_{3 \times 2}, \mathbb{R}, +, \cdot, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ Exibir um produto interno e dois vetores ortogonais entre si para esse mesmo produto interno

Definindo um produto interno no espaço vetorial apresentado no enunciado:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right\rangle = a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l$$

Para que seja produto interno:

$$1. \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right\rangle = a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \right\rangle = g \cdot a + h \cdot b + i \cdot c + j \cdot d + k \cdot e + l \cdot f$$

Portanto por comutatividade da multiplicação de reais

$$\left\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \right\rangle = a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l$$

E assim:

$$\left\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$2. \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a+g & b+h \\ c+i & d+j \\ e+k & f+l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \right\rangle$$

Realizando o produto interno:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a+g & b+h \\ c+i & d+j \\ e+k & f+l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \right\rangle = (a+g) \cdot m + (b+h) \cdot n + (c+i) \cdot o + (d+j) \cdot p + (e+k) \cdot q + (f+l) \cdot r$$

Por distributividade da multiplicação de reais:

$$\rightarrow am + gm + bn + hn + co + io + dp + jp + eq + kq + fr + lr$$

Por associatividade da soma de reais:

$$\begin{aligned} &\rightarrow (am + bn + co + dp + eq + fr) + (gm + hn + io + jp + kq + lr) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

$$3. \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

$$\left\langle \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \\ \alpha \cdot e & \alpha \cdot f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aplicando o produto interno:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \cdot a & \alpha \cdot b \\ \alpha \cdot c & \alpha \cdot d \\ \alpha \cdot e & \alpha \cdot f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right\rangle = \alpha \cdot a \cdot g + \alpha \cdot b \cdot h + \alpha \cdot c \cdot i + \alpha \cdot d \cdot j + \alpha \cdot e \cdot k + \alpha \cdot f \cdot l$$

Por distributividade de reais:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \alpha \cdot (a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l) \\ &= \alpha \cdot \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

4. $\langle u, u \rangle > 0$ se u não é o vetor nulo

$$\begin{aligned} \left\langle \alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \right\rangle &= a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d + e \cdot e + f \cdot f \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \end{aligned}$$

Se a, b, c, d, e e f são números reais não nulos, então obrigatoriamente serão positivos quando elevados ao quadrado.

Definição de ortogonalidade de vetores:

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Dois vetores ortogonais entre si no produto interno e espaço utilizado:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 20 & 0 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Testando se são ortogonais, aplicando na definição estabelecida de produto interno:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = 10 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 20 \cdot 0 + 0 \cdot 8 + 30 \cdot 0 + 0 \cdot 16$$

Portanto:

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = 0$$