Primeiro bloco de exércicios - Algebra Linear

Luiz Augusto Dembicki Fernandes

03/12/2022

1 Provar que a associatividade da adição de vetores é teorema em R^2 usual.

Definindo que $u \coloneqq (a, b)$, $v \coloneqq (c, d)$ e $w \coloneqq (e, f)$, partimos de: $(u+v)+w$, realizamos as somas pela definição de adição de vetores em $\mathbf{R^2}$:

Aplicando a definição

$$(u+v)+w = ((a, b)+(c, d))+(e, f)$$

Somando $u+v$ e em seguida $(u+v)+w$

$$\rightarrow ((a+c),(b+d))+(e, f) = ((a+c)+e,(b+d)+f)$$

Utilizando-se que nos reais a adição é associativa

$$\rightarrow ((a+c)+e,(b+d)+f) = ((c+e)+a,(d+f)+b)$$

Que por definição de adição de matrizes

$$\rightarrow ((c+e)+a,(d+f)+b) = ((c+e),(d+f))+(a, b)$$

$\therefore ((c+e),(d+f))+(a, b) = ((c, d)+(e, f))+(a, b)$, Por adição de vetores,

Que é igual ao ponto de partida

$$((c, d)+(e, f))+(a, b) = ((a+c),(b+d))+(e, f)$$

Usando a definição dos vetores
$\therefore (u+v)+w = u+(v+w)$

2 Escolher um axioma qualquer de espaço vetorial real e provar que ele é teorema em P_2 usual.

V8: Se u pertence a V , então existe v pertencente a V tal que $u + v = \overline{0}$;

Seja $\mathcal{P}_2 : < P_2, \mathbb{R}, +, \cdot, \bigcirc >$

Sendo p e q funções polinomiais reais de grau menor ou igual a 2, $+$ é então definido como $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$.

$\bigcirc$ é a função $g(x) = 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$.

Definindo:

$$p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta \mid \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{R}$$

e $q(x) = \pi x^2 + \varpi x + \xi \mid \pi \in \mathbb{R}, \varpi \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}$

Devido a definição de adição em $\mathcal{P}_2$:

$(p + q)(x) = p(x) + q(x)$, Substituindo $p(x)$ e $q(x)$

$$p(x) + q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \delta + \pi x^2 + \varpi x + \xi$$

Por distributividade da multiplicação de reais

$$\rightarrow \alpha x^2 + \beta x + \delta + \pi x^2 + \varpi x + \xi = (\alpha + \pi)x^2 + (\beta + \varpi)x + (\delta + \xi)$$

Como reais, existem inversos aditivos para cada elemento, possibilitando as

seguintes expressões: $\alpha + \pi = 0, \beta + \varpi = 0, \delta + \xi = 0$

$$\rightarrow \alpha = -\pi, \beta = -\varpi, \delta = -\xi$$

Que então para este caso particular

$$\rightarrow (\alpha + \pi)x^2 + (\beta + \varpi)x + (\delta + \xi) = (0)x^2 + (0)x + (0)$$

Assim para todo x real a função retornará 0, o que equivale ao vetor nulo do espaço: $(0)x^2 + (0)x + (0) = \bigcirc$

Portanto, tais que $\alpha = -\pi, \beta = -\varpi, \delta = -\xi$
Existe $p(x) + q(x) = \bigcirc$;

3 Provar que qualquer reta que passa pela origem de R^2 define subespaço de R^2 usual.

4 $< \mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot, (0,0,0) >$ Usual

- **Dar exemplo de um conjunto x de vetores que gera o espaço mas é L.D.**
- **Dar exemplo de conjunto y de vetores L.I. que não gera o espaço.**