Segundo bloco de exércicios - Álgebra Linear

Luiz Augusto Dembicki Fernandes

19/02/2023

1 Dados espaços vetoriais: $\langle V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V, \overrightarrow{0}_V\rangle$ e $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \overrightarrow{0}_W\rangle$ Transformação de $\mathcal{T} : V \to W \quad | \quad v \mapsto \mathcal{T}(v)$ Provar que a $\mathfrak{Im}(\mathcal{T})$ é subsespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \overrightarrow{0}_W\rangle$

A definição de imagem da transformada:

$$\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) = \{w \in W | \exists v(v \in V \land \mathcal{T}(v) = w)\}$$

O espaço advindo da transformada em questão:

$$\langle \mathfrak{Im}(\mathcal{T}),\ \mathbb{R},\ \oplus,\ \odot, \bigcirc\rangle$$

Para que seja subsespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \overrightarrow{0}_W\rangle$:

1. $\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \subseteq W$

   Por definição de $\mathfrak{Im}(\mathcal{T})$:

   $$\mathfrak{Im}(\mathcal{T}) = \{w \in W | \exists v(v \in V \land \mathcal{T}(v) = w)\} \implies \mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \subseteq W$$

2. $\bigcirc \in W$

   Partindo do teorema de que um vetor multiplicado pelo escalar nulo é igual ao vetor nulo do mesmo espaço:

   $$0 \cdot_V v = \overrightarrow{0}_V \tag{1}$$

   Portanto:

   $$\mathcal{T}(\overrightarrow{0}_V) = \mathcal{T}(0 \cdot_V v)$$

   E da definição de transformação linear:

   $$\to \mathcal{T}(0 \cdot_V v) = 0 \cdot_W \mathcal{T}(v)$$

Então utilizando de 1, no espaço vetorial de W:

$$0 \cdot_W \mathcal{T}(v) = \overrightarrow{0}_W \implies \bigcirc = \overrightarrow{0}_W$$

$$\implies \bigcirc \in W$$

3. $\oplus$ é restrição de $+_W$

   Definindo:

   $$w_1 \in \mathfrak{Im}(\mathcal{T}) \wedge w_2 \in \mathfrak{Im}(\mathcal{T})$$

   $$v_1 \in V \wedge w_1 \in W \mid \mathcal{T}(v_1) = w_1$$
   $$v_2 \in V \wedge w_2 \in W \mid \mathcal{T}(v_2) = w_2$$

   Então, utilizando da definição de transformação linear:

   $$\mathcal{T}(v_1 +_V v_2) = \mathcal{T}(v_1) +_W \mathcal{T}(v_2) = w_1 +_W w_2$$

   Assim $\oplus$ é restrição de $+_W$

4. $\odot$ é restrição de $\cdot_W$

   Dado um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, e os vetores explicitados no item anterior. Usando a definição de transformação linear:

   $$\mathcal{T}(\alpha \cdot_V v_1) = \alpha \cdot_W \mathcal{T}(v_1) = \alpha \cdot_W w_1$$

   Portanto $\odot$ é restrição de $\cdot_W$

Com isso $\langle \mathfrak{Im}(\mathcal{T}),\ \mathbb{R},\ \oplus,\ \odot, \bigcirc\rangle$ é subsespaço de $\langle W, \mathbb{R}, +_W, \cdot_W, \overrightarrow{0}_W\rangle$

2 Seja $\langle C^0([2,-2]),\ \mathbb{R},\ +, \cdot,\ 0\rangle$ um espaço vetorial real munido de produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)dx$$

Demonstre o cálculo de distância entre as funções $f(x) = 2x$ e $g(x) = 1$, ou seja $d(2x,\ 1)$, pertencentes ao espaço vetorial descrito anteriormente.

Definindo a função distância(d):

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle (u - v), (u - v)\rangle}$$

Utilizando as funções desejadas na definição:

$$d(f,g) = \sqrt{\langle (f-g),(f-g)\rangle} = \sqrt{\langle (2x-1),(2x-1)\rangle}$$

Aplicando o produto interno:

$$d(f,g) = \sqrt{\int_{-2}^{2} (2x-1)(2x-1)dx} = \sqrt{\int_{-2}^{2} 4x^2 - 4x + 1\ dx}$$

Resolvendo a integral:

$$d(f,g) = \sqrt{\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x\ \Big|_{-2}^{2}}$$

Avaliando os limites de integração:

$$d(f,g) = \sqrt{\frac{76}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{57}$$

3 $\langle M_{3\times 2}, \mathbb{R}, +, \cdot, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$ Exibir um produto interno e dois vetores ortogonais entre si para esse mesmo produto interno

Definindo um produto interno no espaço vetorial apresentado no enunciado:

$$\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle = a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l$$

Para que seja produto interno:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

$$\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle = a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l$$

$$\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \rangle = g \cdot a + h \cdot g + i \cdot c + j \cdot d + k \cdot e + l \cdot f$$

Portanto por comutatividade da multiplicação de reais

$$\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \rangle = a \cdot g + b \cdot h + c \cdot i + d \cdot j + e \cdot k + f \cdot l$$

E assim:

$$\langle \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{pmatrix} \rangle$$

2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle v, w \rangle$

   fdas

3. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

   FADS

4. $\langle u, u \rangle > 0$ se u não é o vetor nulo