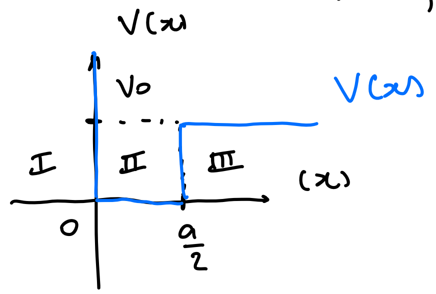
1) (a) $V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < a/2 \\ V_0, & x > a/2 \end{cases}$ $\quad a, V_0 > 0$



(b) Se $E < V_0$,

em I: $\psi(x) = 0$

em II: $\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

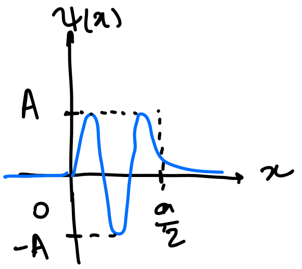
com $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

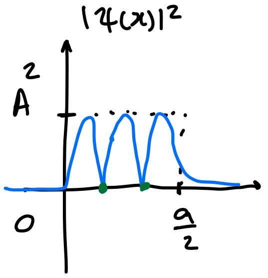
em III: $\psi(x) = A e^{-k'x}$

com $k' = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

(c) A continuidade de ψ e ψ' em $x = \frac{a}{2}$ devem resultar em uma relação entre k e k', o que limita quais valores de E são fisicamente possíveis, portanto, há quantização de energia.

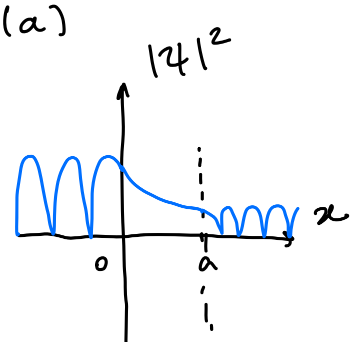
(d) Num estado excitado, observando as condições de continuidade,





Entre $0 < x < a/2$, há posições em que $|\psi(x)|^2 = 0$, indicadas no gráfico (há regiões proibidas)

2) (a)



para um t fixo

antes da barreira, a partícula age como partícula livre, dentro da barreira, como $E < V_0$, a função de onda tem um decréscimo exponencial e, após a barreira, a partícula age como partícula livre, com a mesma frequência, mas amplitude reduzida.

(b) $E = \frac{V_0}{2} \Rightarrow \epsilon = \frac{E}{V_0} = \frac{1}{2}$ e $4\epsilon(1-\epsilon) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

Se $\eta \gg 1$, $\theta = \sqrt{\eta(1-\epsilon)} = \sqrt{2\eta} \gg 1$

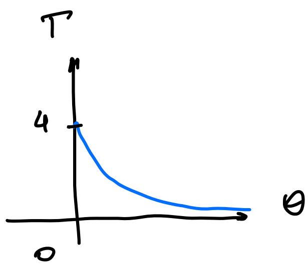
e $\sinh^2\theta = (\sinh\theta)^2 \simeq \left(\frac{e^\theta}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta}}{4} = \frac{e^{2\sqrt{2\eta}}}{4}$

portanto $T \simeq \left(1 + \frac{e^{2\sqrt{2\eta}}}{4}\right)^{-1} \underset{(e^{\sqrt{\eta}} \gg 1)}{\simeq} \left(\frac{e^{2\sqrt{2\eta}}}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{e^{2\sqrt{2\eta}}}$

Isto é, T decai exponencialmente com a $\sqrt{\eta}$.

Na mecânica clássica $\hbar \to 0$, portanto $\eta = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2} \to +\infty$ e $T \to 0$, portanto, no limite clássico, não há probabilidade de a partícula tunelar e ser encontrada após a barreira.

Como $T(\theta) \simeq \frac{4}{e^{2\theta}}$ nesse regime, então



Obs: a aproximação é ruim p/ θ pequeno.

3) (a) $V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ +\infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$

pela equação de Schrödinger independente do tempo, em $0 < x < a$, com condições de fronteira $\psi(a) = \psi(0) = 0$ pois $\psi(x) = 0$ se $V(x) = +\infty$, isto é, se $x < 0$ ou $x > a$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + 0 \cdot \psi = E \cdot \psi$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

i) $E = 0 \Rightarrow \psi'' = 0 \therefore \psi = Ax + B$

$\psi(0) = B = 0 \therefore B = 0$

$\psi(a) = aA = 0 \therefore A = 0 \Rightarrow \psi = 0$

solução trivial apenas, $E = 0$ não convém

ii) $E < 0$: seja $k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \psi'' = k^2\psi$

$\Rightarrow \psi(x) = A\cosh(kx) + B\sinh(kx)$

$\psi(0) = 0 = A\cosh(0) + B\sinh(0) = A \therefore A = 0$

$\psi(a) = B\sinh(ka) = 0 \therefore B = 0$

$\Rightarrow \psi(x) = 0$ e $E < 0$ não convém

iii) $E > 0$: seja $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, então $\psi'' = -k^2\psi$

e $\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

$\psi(0) = B = 0 \quad \therefore \quad B = 0$

$\psi(a) = 0 = A\sin(ka) \Rightarrow ka = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$

$$K = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow k^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow E_n = n^2 \cdot \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

são as auto-energias relativas às auto-funções

$$\psi_n(x) = \begin{cases} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & 0 \leq x \leq a \\ 0, & 0 \leq x \text{ ou } x \geq a \end{cases}$$

normalizando ψ_n: $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 \, dx = \int_0^a |A_n|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$

fórmula dada

$$= |A_n|^2 \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow |A_n|^2 = \frac{2}{a} \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

e as auto-funções normalizadas são

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), & 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} ; \quad n = 1, 2, \dots$$

(b) no estado ψ_n,

$$\bar{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \cdot \left(-i\hbar \frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right) dx = -i\hbar \int_0^a \frac{2}{a} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot$$

$$\frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{-i\hbar n\pi}{a} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

fórmula
$$= -\frac{2i\hbar n\pi}{a^2} \cdot 0 = 0$$
dada

$$\overline{p^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \cdot \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_n(x)\right) dx = -\hbar^2 \cdot \frac{2}{a} \cdot \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

fórmula

$$\cdot \left(-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \frac{2\hbar^2}{a} \cdot \frac{n^2\pi^2}{a^2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2}$$

e a incerteza do momento é

$$\Delta p = \sqrt{\overline{p^2} - \overline{p}^2} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{a^2} - 0^2} = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

Embora o momento médio seja zero, como a incerteza do momento é $\neq 0$, não podemos ter o momento nulo. Além disso, como a partícula está confinada na caixa, temos uma incerteza finita na posição e, se o momento fosse nulo, a incerteza do momento seria nula e o princípio da incerteza seria violado.