Iniciação Científica

De início, convém ressaltar que esse presente trabalho é um resumo dos conteúdos iniciais do estudo da Física Quântica, esse material é interdisciplinar, ou seja, contém álgebra linear, geometria analítica, cálculo 1 e 2, métodos matemáticos aplicados à física 1 e 2, física 1, 2, 3 e 4, termodinâmica, física moderna, estrutura da matéria. Com a supervisão e orientação do Doutor, Professor Sergio d'Almeida Sanchez.

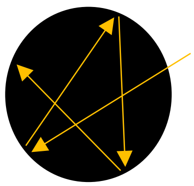
O principal objetivo da construção desse livro é auxiliar os estudantes que estão tendo um primeiro contato com a quântica, mas também mostrar o conflito da Física Clássica com a Física Quântica. Dessa maneira, o material contempla todos os principais conceitos, sempre buscando apresentar do modo mais didático possível e deixando a resolução das contas somente como um complemento das afirmações dos capítulos, a fim de compreender a origem das fórmulas usadas. Outra maneira de assistir os estudantes é disponibilizar a resolução de todos os exercícios do livro Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas dos autores Robert Eisberg e Robert Resnick.

Sumário

1 Radiação e Corpo Negro

Antes de iniciar com a física quântica é importante ter de forma bem clara o conceito dito por Kirchhoff, onde o fluxo de radiação emitida é proporcional ao absorvido. Além disso, lembrar que quando o fluxo de radiação absorvida for igual a emitida, tem-se o equilíbrio químico, e a taxa de energia transmitida por radiação é proporcional a temperatura do corpo negro.

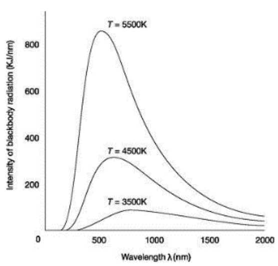
Começando o trabalho de imaginação, a fim de compreender o conteúdo. Em uma tarde ensolarada sua bola de vôlei de praia começa a esvaziar, por essa razão tirasse o pino para enchêla e observasse que, quando o raio de luz entra no orifício uma parte da luz é absorvida, ao passo que o restante da luz é refletida.



A imagem a esquerda representa a bola recebendo infinitas reflexões e absorvendo toda a energia, corroborando com Lavoisier, a energia absorvida é transformada em energia térmica. E esse é, de modo lúdico, a definição de Corpo Negro.

Mais uma atividade imaginação, tendo dois corpos negros A e B, que estejam a mesma temperatura, ou seja equilíbrio térmico. Caso a densidade energia de A seja maior que B ($\mu_A(v,T) > \mu_B(v,T)$), logicamente esperasse um fluxo se emissão térmica de A para B.

Aumentando a temperatura de B ocorre a violação da Segunda Lei da Termodinâmica, porque gera um aumento da temperatura a uma pressão constante e sem a realização de trabalho, mas também vai contra o Princípio da Conservação da Energia. Como consequência, logo, ($\mu_A(v,T) = \mu_B(v,T)$).



A imagem a esquerda representa a análise do experimento de Lummer e Pringsheim em 1899, semelhante aos espectrômetros, o qual aborda radiação espectral de um corpo negro em função da frequência de radiação em algumas temperaturas.

Com o estudo do Corpo Negro, nasceu a Lei de Stefan: diz que a radiação térmica ou radiância ou militância é $R_t = \alpha \mathrm{T}^4$, onde α é chamada de constante de Stefan-Boltzmann com valor de $5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$. Outro resultado do experimento é a Lei do Deslocamento ou Lei de Wein, dada por $\lambda_{max} = \frac{b}{\mathrm{T}}$, b onde é constante de proporcionalidade 2,89776858 e λ_{max} é o comprimento de onda em metros onde a intensidade de radiação eletromagnética é a máxima.

A gaussiana gerada pela curva de emissão da radiação térmica de um corpo negro não possuía uma lei que a explicasse seu comportamento, até que no início do século XX. Rayleigh e Jeans, sabendo que em baixas frequências (inversamente proporcional ao comprimento de onda (λ)) a quantidade de energia por unidade de volume (u) cresce vertiginosamente e misteriosamente chega ao máximo e decresce também rapidamente. Utilizando a análise dimensional da radiação de cavidade, essa dupla desenvolveu a fórmula para a radiação de Corpo Negro, $\rho_{\mathrm{T}}(v)dv = \frac{8\pi v^2 k\mathrm{T}}{c^3} dv$, todavia apenas funciona para baixas frequências e não gera o pico da curva, porque o limite da função quando a frequência tende ao infinito "explode".

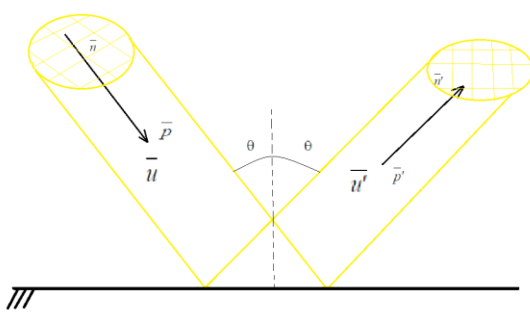
Portanto, a teoria clássica falha em altas frequências, e esse comportamento na física é conhecido como Catástrofe do Ultravioleta, além disso a integral dessa onda não converge com a Lei de Stefan-Boltzmann.

Ainda no estudo do gráfico de emissão, Wien conseguiu deduzir a fórmula que compreende a parte final da curva, demostra o comportamento em altas frequências, de modo que dialoga com a lei de Stefan-Boltzmann.

Planck, por fim, através dos dados obtidos pelos pesquisadores anteriores conseguiu explicar toda a curva. Inclusive, outro feito incrível de Planck, foi entender que no estudo da energia média ($\bar{\varepsilon}$), tem que se usar termos discretos e não termos contínuos, como prova matemática do fato supracitado ao trocar a integral pelo somatório o cientista postula que $\varepsilon = hv$, onde h é igual a 6,63$\cdot 10^{-34} J$.

1.1.1 Contas - Luz produz força

O radiômetro é um aparelho, constituído por hélices em formato de pá, que apresenta a intensidade da radiação da luz através de sua movimentação pela luz incidida. Em outras palavras, a luz exerce força, assim como pressão.



Para inaugurar as contas e explicar de forma matemática a Pressão de Radiação, um anteparo que reflete tudo é atingido por um raio de luz.

$$E = mc^2 \rightarrow E = pc, \text{ logo } p = \frac{E}{c} \; (p = \text{momentum})$$

$$p = \frac{\overline{u}}{c} \cdot \Delta V \cdot n \text{ e } p' = \frac{\overline{u'}}{c} \cdot \Delta V \cdot n'$$

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow \frac{\frac{\overline{u}}{c} \cdot \Delta V \cdot n - \cdot \frac{\overline{u'}}{c} \cdot \Delta V \cdot n'}{\Delta t}$$

$$\Delta V = A \cdot c \cdot \Delta t \cdot \cos(\theta)$$

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow \frac{A \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\overline{u} \cdot n - \overline{u'} \cdot n'\right)}{\Delta t}$$

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow A \cdot \overline{u} \cdot \cos(\theta)\,(n - n')$$

$$\overline{F} = 2A \cdot \cos^2(\theta) \cdot \overline{u}$$

A pressão da radiação (P_{rad}) é igual a força dividida pela área, 2 $\cos(\theta) \cdot \overline{u}$. O resultado é somente correspondente a um feixe de luz, em apenas um ângulo.

1.1.2 Contas - Absorção e Reflexão de um Corpo Negro

Ao dizer que a força é $2A \cdot \cos^2(\theta) \cdot \overline{u}$, temos a reflexão total de um Corpo Negro, $2\cos(\theta) \cdot \overline{u}$, por conseguinte a absorção total deve ser equivalente. A radiação é tanto refletida quanto absorvida por vários ângulos, tal fato faz com que seja necessário o uso de um ângulo sólido dado por, $\frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \overline{u}$, (ângulo com vértice no centro de uma esfera, e área medida pelo quadrado do raio da esfera) no estudo da absorção e reflexão total. Buscando a Pressão da Radiação da Absorção em todo o espectro, utilizando Jacobianos:

$$\int dP_{rad} = \int 2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \overline{u} \cdot d\frac{d\Omega}{4\pi} \cdot \overline{u}$$

$$P_{rad} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \overline{u}}{4\pi} \cdot sen(\theta) \cdot d\varphi$$

$$P_{rad} = \frac{\overline{u}}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta) \cdot sen(\theta) \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$P_{rad} = \frac{\overline{u}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \cdot \cos^3(\theta) \cdot d\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi$$

$$P_{rad} = \frac{\overline{u}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{1}{3} \cdot \cos^3(\theta) \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \cos^3(\theta)\right)\right] d\varphi$$

$$P_{rad} = \frac{\overline{u}}{3\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$P_{rad} = \frac{\overline{u}}{3\pi} \cdot 2\pi$$

Descobrindo que a Pressão de Absorção Total são $\overline{u}\frac{2}{3}$, consequente a Pressão de Reflexão Total é $\overline{u}\frac{1}{3}$.

1.1.3 Contas - Entropia

Compreendendo que estamos fazendo uso da pressão da radiação térmica como ferramenta de estudo, ademais corroborando com a interligação da Mecânica Estatística com a Termodinâmica, faz-se de modo possível calcular a entropia do ângulo sólido do tópico acima, quando presente em um sistema de tampa móvel.

Energia Total é o Volume Total em certa Densidade e Temperatura, $U = V_{\overline{u}(\mathrm{T})}$, dessa maneira quando existe variação desse volume também haverá Trabalho.

$dV \to dW = P \cdot dV$ com uma pressão constante

$$dW = \frac{\overline{u}_{(\mathrm{T})}}{3} \cdot dV \ \rightarrow dS$$

$$dS = \frac{dU + dW}{\mathrm{T}}$$

$dU = \overline{u} \cdot dV + V \cdot \frac{d\overline{u}}{d\mathrm{T}} \cdot d\mathrm{T}$ e tem-se $dW = \frac{\overline{u}}{3} \cdot d\mathrm{T}$

$$dS = \frac{\overline{u}}{\mathrm{T}} \cdot dV + \frac{V}{\mathrm{T}} \cdot \frac{d\overline{u}}{d\mathrm{T}} d + \frac{\overline{u}}{3\mathrm{T}} \cdot dV$$

$$dS = \frac{4}{3} \cdot \frac{\overline{u}_{(\mathrm{T})}}{\mathrm{T}} \cdot dV + \frac{V}{\mathrm{T}} \cdot \frac{dW}{d\mathrm{T}} d\mathrm{T}$$

$$dS = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\mathrm{T}} \cdot \frac{d\overline{u}}{\mathrm{T}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{du}{\mathrm{T}^2}$$

$$dS = \frac{1}{3\mathrm{T}} \cdot \frac{d\overline{u}}{\mathrm{T}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\overline{u}}{\mathrm{T}^2}$$

$$dS = \frac{d\overline{u}}{\overline{u}} = \frac{4d\mathrm{T}}{\mathrm{T}^2}$$

$$dS = \int \frac{d\overline{u}}{\overline{u}} = \int \frac{4d\mathrm{T}}{\mathrm{T}^2}$$

$$dS = \ln(\overline{u}) = 4\ln(\mathrm{T}^4 + c)$$

$$dS = \overline{u} = (const)\mathrm{T}^4$$

1.1.4 Contas - Dedução da Lei de Stefan-Boltzmann

Com um sutil detalhe encontramos a famosa Lei criada por Stefan e Boltzmann. Pensando na radiação de cavidade e seu fluxo de radiação, dado por $\phi = \frac{c}{4\pi} \cdot \overline{u}$, multiplicado pelo resultado anterior: $\phi = \frac{c}{4\pi} \cdot (const \cdot \mathrm{T}^4)$.

Os pesquisadores nomearam esse fluxo como radiância e chamaram de σ o conjunto $\frac{c \cdot (const)}{4\pi}$.

Juntando os termos a Lei se forma, e é $R_{\mathrm{T}} = \sigma \cdot \mathrm{T}^4$

1.1.5 Contas - Dedução da Lei de Rayleigh-Jeans

A densidade espectral, $\overline{u} = \int_0^\infty \quad \overline{u}_{(v,\mathrm{T})} dv$, assim para Rayleigh e Jeans uma integral devia ser a Lei para explicar a curva de emissão ou longo de ∂v. Onde $\overline{u} = \frac{\varepsilon}{(v/uni.\, espectral)}$.

Essa Lei, que respeita a função $(\mathcal{g})$, deve:

- Ser dependente do comprimento (l), porque depende do volume;
- Ser dependente do tempo (t), tendo em vista que depende da frequência;
- Ser dependente da energia (ε), pois estamos trabalhando com um sistema físico;
- Ser dependente da temperatura (T);
- Ser dependente da velocidade da luz (c);
- Ser compatível com a constante de Stefan-Boltzmann (k).

Com $\overline{u} = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{v}{uni.\,espectral}\right)} = \frac{\varepsilon \cdot t}{l^3}$

$\overline{u}$	v	T	c	k
$\frac{\varepsilon \cdot t}{l^3}$	t^{-1}	θ	$\frac{l}{t}$	$\varepsilon \mathrm{T}^{-1}$

$\mathscr{g} = (\overline{u})^a \cdot v^b \cdot \theta^d \cdot c^f \cdot k^g \rightarrow$ $\overline{u}$ é o objetivo fundamental, e não deve ser alterado, portanto $a = 1$

$$\mathscr{g} = \left(\frac{\varepsilon t}{l^3}\right)^1 \cdot t^{-1} \cdot \theta^d \cdot \left(l^f \cdot t^{-f}\right) \cdot \left(\varepsilon^g \cdot \theta^{-g}\right)$$

ε	t	l	θ
$1 + g = 0$	$1 - b - f = 0$	$3 + f = 0$	$d - g = 0$
... Resolvendo o sistema ...			
$g = -1$	$b = -2$	$f = 3$	$d = -1$

$$\mathscr{g} = \overline{u} \cdot v^{-2} \cdot \theta^{-1} \cdot c^3 \cdot k^{-1}$$

$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \frac{\mathscr{g} \cdot v^2 \cdot k \cdot \mathrm{T}}{c^3} \rightarrow$ em uma esfera interceptada por três eixos (x, y, z), são existentes oito partes.

$$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \frac{8\mathscr{g} \cdot v^2 \cdot k \cdot \mathrm{T}}{c^3}$$

1.1.6 Contas - Rayleigh-Jeans e a Equipartição da energia

A densidade espectral é igual ao número de graus de liberdade para a frequência, vezes a energia média de cada grau de liberdade.

Em um cubo que age como um Corpo Negro com lado de comprimento (l), $l = \frac{\lambda}{2} \cdot n_x$ (n_x é o modo), então $\frac{l}{\pi} = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi} \cdot n_x \rightarrow \frac{l}{\pi} = \frac{1}{k_x} n_x$.

$n_x \cdot \pi = k_x \cdot l$ $\quad$ $n_y \cdot \pi = k_y \cdot l$ $\quad$ $n_z \cdot \pi = k_z \cdot l$

Sendo $\overline{k}$ o vetor de onda.

$$\overline{k}^2 = kx^2 + ky^2 + kz^2$$

$$\overline{k}^2 = (nx^2 + ny^2 + nz^2)\frac{\pi^2}{l^2}$$

$$(nx^2 + ny^2 + nz^2) = \frac{k^2 l^2}{\pi^2} \rightarrow k = \frac{2\pi v}{c}$$

$$(nx^2 + ny^2 + nz^2) = \left(\frac{2l}{c}\right)^2 v^2$$

A rede de ondas crescentes dentro da caixa respeita o número de modos $(v,\ v + dv)$, de modo que o desenvolvimento acontece esfericamente. Para entender, pense em uma pedra caindo em um lago e as ondas que se formam esfericamente ao redor do local onde a pedra caiu.

$$R^2 = \left(\frac{2 \cdot l}{c}\right)^2 \cdot v^2 \ \rightarrow \ R = \frac{2 \cdot l \cdot v}{c}$$

Assim o número de modos é $dN = \frac{1}{8} \cdot 4\pi R^2 dR \ = 4\pi \cdot \frac{l^3}{c^3 \cdot} \cdot v^2 \cdot dv$

$$dU = 4 \cdot \frac{k \cdot \mathrm{T}}{2} \cdot dN$$

$$dU = 4 \cdot \frac{k \cdot \mathrm{T}}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot l^3}{c^3} \cdot v^2 \cdot dv$$

$$dU = 8\pi \cdot k \cdot \mathrm{T} \cdot \frac{l^3}{c^3} \cdot v^2 \cdot dv$$

$$\frac{dU}{l^3 \cdot dv} = \frac{8\pi \cdot k \cdot \mathrm{T} \cdot l^3 \cdot v^2}{c^3}$$

$$\frac{dU}{\overline{u}} = \frac{8\pi \cdot k \cdot \mathrm{T} \cdot l^3 \cdot v^2}{c^3}$$

1.1.7 Contas - Dedução da Lei Wein ou Lei do Deslocamento

$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \frac{v^2 k\mathrm{T}}{c^3} \cdot g^*(\alpha,\ v\mathrm{T}^n)$ essa é a pensamento proposto por Wein, “se temos o início, agora só falta a continuação da gaussiana”.

$$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \int_0^\infty \quad \overline{u} \cdot dv$$

$$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \frac{k\mathrm{T}}{c^3} \int_0^\infty v^{2\cdot}\, g^*(\alpha,\ v\mathrm{T}^n)$$

$$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \frac{k\mathrm{T}}{c^3} \cdot \int_0^\infty \frac{x^2}{\alpha \cdot \mathrm{T}^{2n}} \cdot g^*(x) \frac{dx}{\alpha \cdot \mathrm{T}^n}$$

$$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \frac{k\mathrm{T}^{1-3n}}{c^3 \cdot \alpha^3} \cdot \int_0^\infty x^2\, g^*(x) dx$$

$$1 - 3n = 4 \ \rightarrow \ n = -1$$

$$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \frac{v^2 \cdot k \cdot \mathrm{T}}{c^3} \cdot g^* \left(\frac{\alpha \cdot v}{\mathrm{T}}\right)$$

$$\overline{u}_{(v,\mathrm{T})} = \frac{v^2 \cdot k \cdot \mathrm{T}}{c^3} \cdot g^* \left(\frac{h \cdot v}{k \cdot \mathrm{T}}\right)$$

$$g^* = (const) \cdot v \cdot e^{-\frac{hv}{k\mathrm{T}}}$$

$$\overline{u}_{(v,\,\mathrm{T})} = e^{(const)} \cdot \frac{k \cdot \mathrm{T} \cdot v^3}{c^3} \cdot e^{-\frac{hv}{k\mathrm{T}}}$$

$$\frac{d\overline{u}}{dv} = \frac{2v \cdot k \cdot \mathrm{T}}{c^3} \cdot g^* + \frac{v^2 \cdot k \cdot \mathrm{T}}{c^3} \cdot g'^* \left(\frac{h \cdot v}{k \cdot \mathrm{T}}\right) \cdot \frac{h}{k \cdot \mathrm{T}}$$

$$\frac{d\overline{u}}{dv} = \frac{v \cdot k \cdot \mathrm{T}}{c^3}\left[2g^* \left(\frac{h \cdot v}{k \cdot \mathrm{T}}\right) + \frac{h \cdot v}{k \cdot \mathrm{T}} g'^* \left(\frac{h \cdot v}{k \cdot \mathrm{T}}\right)\right] = 0$$

$$\frac{v_{max}}{\mathrm{T}}(inicial) = (final)\frac{v_{max}}{\mathrm{T}}$$

1.1.8 Contas – Dedução da Lei de Planck

Buscando um equilíbrio entre a radiação e a matéria, o que resulta no capítulo seguinte onde falarei sobre as propriedades corpusculares, Planck utilizou oscilações e os resultados gerados por Rayleigh e Jeans, e Wien.

$$x = x_o \cdot \cos(\omega t + \phi) \text{ onde } x_o = \frac{e \cdot E_{o\left(\frac{x}{m}\right)}}{\left[(\omega^2 - \omega_o^2) + \zeta^2 \omega^2\right]^{\frac{1}{2}}},\ \zeta = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{c^3} \cdot \frac{\omega^2}{m}$$

Encontrando a energia média:

$$U_\omega = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot e^2 \cdot E_{o(x)}^2}{2m^2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \zeta^2 \cdot \omega^2}$$

$$U_\omega d\omega = \frac{e^2}{4m} \cdot E_o^2 d\omega \cdot \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \zeta^2 \cdot \omega^2}$$

$$U = \int U_\omega \, d\omega = \int \frac{e^2}{4m} \cdot E_o^2 d\omega \cdot \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \zeta^2 \cdot \omega^2}$$

$$U = \frac{e^2}{4m} \cdot \int_0^\infty E_{o(x)}^2(\omega) \cdot \left(\frac{\omega^2 - \omega_o^2}{(\omega^2 - \omega_o^2)^2 + \zeta^2 \cdot \omega^2}\right) d\omega$$

$$U = \frac{e^2 \cdot E_{o(x)}^2(\omega_o)}{4m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega - \omega_o)^2 + (a \cdot \omega)^2}$$

$$U = \frac{\pi \cdot e^2}{8 \cdot m \cdot a \cdot \omega_o^2} \cdot E_{o(x)}^2(\omega_o)$$

$$3E_{o(x)}^2 = E_o^2 \qquad \overline{u} = \frac{1}{8\pi} \cdot E_o^2 \qquad a = \frac{e^2}{3 \cdot m \cdot c^2}$$

$U_{(\omega_o)} = \frac{\pi^2 \cdot c^3}{\omega_o^2} \cdot \overline{u}_{(\omega_o)}$ onde $\overline{u}_{(\omega_o)} = \frac{\overline{u}(v)}{2\pi}$

$$U_{(v)} = \frac{\pi^2 c^3}{\omega^3} \cdot \frac{\overline{u}(v)}{2\pi}$$

$$U_{(v)} = A \cdot v \cdot e^{-\frac{\alpha \cdot v}{\mathrm{T}}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = -\frac{1}{\alpha \cdot v} \cdot \ln\left(\frac{U}{A \cdot v}\right) \rightarrow \ \frac{d^2 S}{dU} = -\frac{1}{\alpha \cdot v \cdot U}$$

$$U = \frac{c^3}{8\pi \cdot v^2} \cdot \frac{8\pi \cdot v^2}{c^3} \cdot k \cdot \mathrm{T} = k \cdot \mathrm{T}$$

$$\frac{d^2 S}{dU} = -\frac{k}{U^2}$$

Unindo os dois regimes:

$$\frac{d^2 S}{dU} = -\frac{1}{\alpha \cdot v \cdot U + \frac{U^2}{k}}$$

$$\frac{dS}{dU} = \int \frac{d^2 S}{dU^2} \cdot dU = \frac{1}{\alpha \cdot v} \cdot \ln\left(\frac{\frac{U}{\alpha \cdot n \cdot k}}{1 + \frac{U}{\alpha \cdot v \cdot k}}\right)$$

$$U = \frac{c^3}{8\pi \cdot v^2} \cdot \overline{u}_{(v,\mathrm{T})}$$

$$\frac{h \cdot v}{-1 + e^{\frac{h \cdot v}{k \cdot \mathrm{T}}}} = \frac{c^3}{8\pi \cdot v^2} \cdot \overline{u}_{(v,\mathrm{T})}$$

$$\overline{u}(v, \mathrm{T}) = \frac{h \cdot v}{-1 + e^{\frac{h \cdot v}{k \cdot \mathrm{T}}}} \cdot \frac{8\pi \cdot v^2}{c^3}$$

1.2.1 Questões Resolvidas

1. Um corpo negro sempre aparenta ser negro? Explique o termo corpo negro.

   Não. Corpo Negro é um corpo que absorve toda a radiação incidente sobre ele, não transmitindo nem refletindo.

2.Cavidades formadas por carvões em brasa parecem mais brilhantes que os próprios carvões. E a temperatura em tais cavidades apreciavelmente maior do que a temperatura da superfície de um carvão incandescente exposto?

As temperaturas devem ser as mesmas. A origem do brilho está na própria definição de Corpo Negro, onde toda a radiação é absorvida e nada se reflete.

3.Se olharmos para o interior de uma cavidade cujas paredes são mantidas a uma temperatura constante, os destalhes do interior não são visíveis. Explique.

Entendendo as pequenas cavidades como um Corpo Negro, por consequência dessa definição, os raios de luz não chegam aos seus olhos e logo não é visível o interior.

4. A relação $R_{\mathrm{T}} = \alpha \mathrm{T}^4$ é exata para corpos negros e vale para todas as temperaturas. Por que essa relação não é usada como base para uma definição de temperatura a, por exemplo, 100°C?

Para responder essa pergunta faz-se necessário relembrar que as unidades de mediadas são dadas a partir de parâmetros da natureza, e $R_{\mathrm{T}} = \alpha \mathrm{T}^4$ é exata para Corpos Negros, no entanto na natureza não existe Corpos Negros ideias, apenas alguns corpos que possuem comportamento próximo ao de um Corpo Negro.

5.Um pedaço de metal brilha com uma cor vermelha brilhante a 1100°K. Nesta mesma temperatura, no entanto, um pedaço de quartzo absolutamente não brilha. Explique. (Sugestão: o quartzo é transparente à luz visível).

Primeiramente, porque um pedaço de metal não é necessariamente um corpo negro, somente deve possuir um comportamento parecido. Dito isso com o objetivo de auxiliar na resolução, tem-se que os dois emitiriam a mesma radiação se fossem Corpos Negros, inclusive, sendo transparente o quartzo ele tanto não é um Corpo Negro quanto não possui comportamento semelhante.

6. Faça uma lista das funções de distribuição usadas normalmente nas ciências sociais (por exemplo, distribuição de famílias em relação à renda). Em cada caso, especifique se a variável cuja distribuição é descrita é discreta ou contínua.

Sinceramente acho essa pergunta um pouco desconectada do conteúdo, a única ligação é com o estudo de Planck no entendimento da gaussiana gerada pela emissão da radiação de Corpo Negro. Agora respondendo à pergunta, OPÇÃO$_1$: distribuição de faixa etária de acordo com a renda. Se construirmos um histograma com a frequência de pessoas com uma renda em um intervalo determinado, obtemos uma distribuição discreta. Se o número de pessoas para suficientemente grande e para conseguir completar os intervalos do histograma em intervalos cada vez menores. obtemos uma distribuição aproximadamente contínua. OPÇÃO$_2$: o voto dado por um eleitor de acordo com sua renda, com o número de candidatos máximos que podem receber o voto do eleitor é limitado, dessa maneira transformando uma distribuição contínua (o voto) em uma distribuição discreta.

7.Em (1-4), que relaciona a radiância espectral com a densidade de energia, que dimensões deveria ter a constante de proporcionalidade?

Equação (1-4) $\longrightarrow\ \rho_{\mathrm{T}}(v) \propto R_{\mathrm{T}}(v)$ e transformando em uma igualdade obtém-se

$\rho_{\mathrm{T}}(v) = kR_{\mathrm{T}}(v)$

$[\rho_{\mathrm{T}}(v)][\Delta v] = \frac{[energia]}{[volume]}$ onde $[volume] = L^3$ e $[\Delta v] = \frac{1}{\mathrm{T}}$

$$[R_{\mathrm{T}}(v)][\Delta v] = \frac{[potência]}{[área]} \longrightarrow\ [R_{\mathrm{T}}(v)] \cdot \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{[potência]}{L^2} \longrightarrow\ [R_{\mathrm{T}}(v)] = \frac{[energia]}{L^2}$$

$[\rho_{\mathrm{T}}(v)] = [k][R_{\mathrm{T}}(v)] \longrightarrow\ [k] = \frac{\mathrm{T}}{L} = \left(\frac{L}{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \frac{1}{[velocidade]}$

Com essa resolução matemática entende-se que a constante de proporcionalidade $[k]$ igual ao inverso da velocidade.

8. Qual é a origem da catástrofe do ultravioleta?

No momento em que Rayleigh e Jeans, desenvolveram a fórmula para a radiação de Corpo Negro e esse resultado contraria a teoria clássica, tendo em vista que a física clássica falha em altas frequências, e esse comportamento na física é conhecido como Catástrofe do Ultravioleta

9. A lei da equipartição da energia requer que o calor específico dos gases seja independente da temperatura, o que não está de acordo com a experiência. Vimos que essa lei conduz à lei de radiação de Rayleigh-Jeans, que também não está de acordo com a experiência. Como você pode relacionar nestes dois casos a não validade da lei da equipartição?

De modo objetivo, a Lei da Equipartição é válida se a energia for uma variável contínua.

Entretanto no próximo capítulo veremos que a energia é quantizada e isso facilita na resolução do exercício, por exemplo comparando o seguinte caso, se o Elon Musk perder R$0,50 (representando a Lei da Equipartição na Mecânica Quântica) e um universitário com o dinheiro contado para pagar o restaurante universitário (representando a Lei da Equipartição na Física Quântica) perder a mesma quantia nota-se que no primeiro o dinheiro “pode” ser uma variável contínua, mas no segundo a importância da quantização.

10. Compare as definições e as dimensões da radiância espectral $R_{\mathrm{T}}(v)$, da radiância R_{T} e a densidade de energia $\rho_{\mathrm{T}}(v)$.

Radiância espectral se relaciona com a densidade de energia espectral por uma constante de proporcionalidade que tem dimensão igual ao inverso da velocidade, ou seja, Questão 7. Mas agora adicionado a radiância espectral.

$R_{\mathrm{T}} = \int R_{\mathrm{T}}(v)dv \longrightarrow\ [R_{\mathrm{T}}] = [R_{\mathrm{T}}(v)][\Delta v]$ onde $[R_{\mathrm{T}}(v)] = \frac{Ws}{m^2} = \frac{J}{m^2}$

$\rho_{\mathrm{T}} = \int \rho_{\mathrm{T}}(v)dv \longrightarrow\ [\rho_{\mathrm{T}}] = [\rho_{\mathrm{T}}(v)][\Delta v] = \frac{J}{m^3} = [\rho_{\mathrm{T}}(v)]\frac{1}{s}$

$$[\rho_{\mathrm{T}}(v)] = \frac{Js}{m^3} = [R_{\mathrm{T}}(v)]\frac{s}{m}$$

Em resumo, a radiância total é a integral da radiância espectral na frequência. A densidade de energia espectral é proporcional a radiância espectral, de modo que a densidade de energia total também é proporcional a radiância total.

11. Por que se usa normalmente um pirômetro ótico para temperaturas acima do ponto de fusão do ouro e não abaixo dele? Quais objetos têm tipicamente suas temperaturas medidas dessa forma?

Porque assim o máximo do espectro está mais próximo da faixa de visível. Os principais objetos que têm tipicamente suas temperaturas medidas dessa forma são os Corpos Negros.

12. Há grandezas quantizadas na física clássica? É a energia quantizada na física clássica?

Sim, existem grandezas quantizadas na física clássica, como o comprimento de onda de uma corda ao vibrar e a frequência de vibração de uma corda.

13. Faz sentido falar de quantização da carga em física? Em que isto é diferente da quantização da energia?

Sim, faz sentido falar de quantização da carga em física. Uma vez que a quantização da carga está associada ao fato de a carga elétrica ser uma propriedade intrínseca das partículas, por exemplo todos os elétrons têm a mesma carga elétrica e não existem dois elétrons com cargas diferentes.

14. As partículas elementares parecem ter um conjunto discreto de massas de repouso. Pode-se encarar esse fato como uma quantização da massa?

Não, um sutil detalhe que é, massa é energia, consequentemente deve-se analisar as energias cinéticas das partículas, o que contribui para a massa de sistemas macroscópicos. Levando para o prático, somando todas as massas das partículas da sua caneta em repouso e a massa dessa mesma caneta em uma balança de precisão, observa-se uma variação no resultado. A variação encontrada não está em alguma falha na balança, mas nas relações nucleares de fusão e fissão.

15. Em muitos sistemas clássicos as frequências possíveis são quantizadas. Cite alguns desses sistemas. Nestes casos a energia também é quantizada?

Na frequência de vibração de uma corda. Matematicamente, $E \propto v^2$.

16. Mostre que a constante de Planck tem dimensões de momento angular. Isto necessariamente sugere que o momento angular é quantizado?

A constante de Planck tem dimensões de momento angular, contudo isto não necessariamente sugere que o momento angular é quantizado. Relembrando Física Básica 1, tanto o trabalho quanto o torque são definidos como $N \cdot m$, entretanto não possuem relação entre si.

$\Delta E = h\nu$ ou seja, $h = \frac{[energia]}{[frequência]} = [energia][tempo] = \frac{[massa][comprimento]^2}{[tempo]^2}$

A dimensão de momento angular é dada por $[L] = [comprimento][p]$, com essa informação compreende-se que $[p] = \frac{[massa][comprimento]}{[tempo]}$ e $[L] = \frac{[massa][comprimento]^2}{[tempo]}$, para finalizar $[h] = [L]$.

Um agradecimento especial a Professora Gisele Maria Moreira, por ministrar as aulas de Física Básica 1 na Universidade Federal do Paraná - UFPR.

17. Para que os efeitos quânticos fossem perceptíveis no dia a dia de nossas vidas, qual deveria ser a ordem de grandeza mínima de h?

A fim de responder utilizarei os conceitos de Física Básica 2, principalmente pêndulo simples, e deduzir que para que os efeitos quânticos fossem perceptíveis no dia a dia de nossas vidas, o valor da ordem de grandeza mínima da constante de Planck deveria ser de $10^{-34} Js$.

$[período] = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ onde $L = 1m$ e $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$. Resultando em um $[período] \approx 2s$ e $[frequência] = 0{,}5Hz$

Com os mesmos valores é encontra-se a energia do pêndulo com a energia potencial, $E = mgL \approx 10J$.

Substituindo todos os resultados obtidos, $h \sim \frac{E}{\nu} \approx \frac{10J}{0{,}5Hz} \sim 20Js$.

Um agradecimento especial ao Professor Márcio Henrique Franco Bettega, por ministrar as aulas de Física Básica 2 na Universidade Federal do Paraná - UFPR.

18. O que é que a radiação de corpo negro universal de 3K nos diz, se é que diz algo, sobre a temperatura do espaço exterior?

De acordo com o texto intitulado “Radiação cósmica de fundo de micro-ondas”, do autor Thyrso Villela, no site Com Ciência - Raios Cósmicos, o espectro de Corpo Negro associado a radiação cósmica de fundo possui uma temperatura de 2,7K, aproximando-se 3k. Desse modo, o espaço exterior tem comportamento semelhante ao de um Corpo Negro em temperatura de 3K.

19. A teoria de Planck sugere estados de energia atômica quantizados?

Sim, pois os átomos fazem parte do mundo microscópico e o mundo microscópico é descrito pela teoria quântica, logo a energia deve ser quantizada.

20. Discuta o fato memorável de que a descoberta de que a energia é discreta ter sido feita pela primeira vez na análise de um espectro contínuo emitido por átomos interagindo em um sólido, em vez de ter sido feita na análise de um espectro discreto tal como o emitido por um átomo isolado em um gás.

Confesso que nunca passou pela minha mente isso, mas vamos lá. A ideia inicial do experimento é de explicar que o espectro contínuo precisava deduzir os níveis de energia acessíveis em discretos, e essa é a razão do método utilizado.

1.2.2 Problemas Resolvidos

1. Em que comprimento de onda um radiador de cavidade a 6000K irradia mais por unida de comprimento de onda?

Usando a Lei de Wein com $\lambda_{max}\mathrm{T} = k$ onde $k = 2{,}898 \cdot 10^{-3}Km$ e $\mathrm{T} = 6000k$

$\lambda_{max} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}Km}{6000^3 K} = 4{,}83 \cdot 10^{-7}m$ ou $483nm$.

2.Mostre que a constante de proporcionalidade em (1-4) é 4/c. Isto é, mostre que a relação entre radiância espectral $R_\mathrm{T}(v)$ e a densidade de energia $\rho_\mathrm{T}(v)$ é $R_\mathrm{T}(v) = \left(\frac{c}{4}\right)\rho_\mathrm{T}(v)dv$.

Equação (1-4) = $\rho_\mathrm{T}(v) \propto R_\mathrm{T}(v) \longrightarrow R_\mathrm{T}(v) = \left(\frac{c}{4}\right)\rho_\mathrm{T}(v) \longrightarrow R_\mathrm{T}(v) \cdot k = \rho_\mathrm{T}(v)$

Para quem tem trauma em Física 3 e ou em Cálculo 2, prepare-se. A resolução possui integrais múltiplas e até agora esse foi o exercício mais desafiador em todos os sentidos possíveis.

$E(v)dv = \iiint \rho_\mathrm{T}(v)dvdV$ onde $\rho_\mathrm{T}(v)dv$ é a energia por unidade de volume com frequência no intervalo$[v,\ v + dv\,]$

$E(v)dv = dv \iiint \rho_\mathrm{T}(v)dV$ como dv não faz parte da integral múltipla, a energia espectral também não usa.

Voltando no exemplo da bola de vôlei de praia e planificando o a cavidade para encher a bola, essa cavidade tendo área (A) e coordenadas esféricas ($r,\ \theta,\ \phi$).

$\iiint dv = \iint d\Omega\ \int r^2\, dr$ onde $d\Omega = sen\theta d\theta d\phi$

$$E(v) = \iint d\Omega\ \int r^2\, dr\rho_\mathrm{T}(v)$$

$$E(v) = \int r^2\, dr \left[\iint d\Omega \rho_{\mathrm{T}}(v)\right]$$

$$\rho_{\mathrm{T}}(v)\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\rho_{\mathrm{T}}(v) sen\theta d\theta d\phi$$

Usando um intervalo de tempo dt, a radiação prolonga-se por uma distância cdt, e o volume quando infinitamente percorrido pela radiação é dado por $A\ cos\theta cdt$.

$dE(v) = \frac{1}{4\pi}\rho_{\mathrm{T}}(v) csen\theta d\theta d\phi$ multiplicado por $A\ cos\theta cdt$

$$dE(v) = \frac{1}{4\pi} Adt\rho_{\mathrm{T}}(v) ccos\theta sen\theta d\theta d\phi$$

Retornando a radiância espectral, $R_{\mathrm{T}}(v) = \frac{1}{Adt}\iint dE(v) = \frac{1}{4\pi}\iint \rho_{\mathrm{T}}(v) c\ cos\theta sen\theta d\theta d\phi$

$$R_{\mathrm{T}}(v) = \frac{\rho_{\mathrm{T}}(v)c}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\theta\ cos\theta d\theta$$

$$R_{\mathrm{T}}(v) = c\,\frac{\rho_{\mathrm{T}}(v)}{4\pi}\ 2\pi \frac{1}{2}$$

$$R_{\mathrm{T}}(v) = \frac{c}{4}\rho_{\mathrm{T}}(v)$$

3. Considere duas cavidades de material e formato arbitrários, as duas a uma mesma temperatura T, ligadas por um tubo estreito no qual podem ser colocados filtros de cor (supostos ideais) que vão permitir a passagem apenas de radiação com uma dada frequência v. (A) Suponha que em uma certa frequência v', $\rho_{\mathrm{T}}(v')dv$ para a cavidade 1 seja maior que $\rho_{\mathrm{T}}(v')dv$ para a cavidade 2. Um filtro que permite a passagem apenas da frequência v' colocado no tubo que liga as duas cavidades. Discuta o que vai acontecer em termos de fluxo de energia. (B) O que vai acontecer com as respectivas temperaturas? (C) Mostre que isto violaria a segunda lei da termodinâmica; portanto, prove que todos os corpos negros a uma mesma temperatura devem emitir radiação térmica com o mesmo espectro, independentemente dos detalhes de sua composição.

Resolução$_{3(A)}$

Quando corpo um emite radiação energia o outro absorve e vice-versa, e ambos também possuem mesma frequência. Logo a diferença de energia em um corpo será a que é absorvida pelo outro, assim a energia é o “calor” trocado entre os corpos.

Respondendo essa pergunta, um corpo 1 estaria perdendo energia enquanto o 2 estaria ganhando.

Resolução$_{3(B)}$

Continuando com o raciocínio da Resolução$_{3(A)}$, o corpo 1 emite mais do que absorve, no mesmo momento que o corpo 2 absorve mais que emite. Portanto, a temperatura do corpo 1 deve diminuir e a do corpo 2 deve ver aumentar.

Resolução$_{3(C)}$

Viola a segunda lei da termodinâmica, porque em um sistema em está em equilíbrio térmico é impossível que ocorra fluxo de energia líquida de um corpo para outro deixando as temperaturas diferentes, sem a influência de um agente externo. Inclusive, a energia dos corpos devem ser iguais, consequentemente emitindo o mesmo espectro quando ambos estão na mesma temperatura.

4. Um radiador de cavidade a 6000°K tem um orifício de 0,10 mm de diâmetro feito em sua parede. Ache a potência irradiada através do orifício no intervalo de comprimentos de onda entre 5500Å e 5510 Å. (Sugestão: Veja problema 2.)

$c = \lambda v$ pode ser escrito como, $v = \frac{c}{\lambda}$

Substituindo os dados do cabeçalho para descobrir a frequência utilizada na integral da radiância emitida ($R_{\mathrm{T}} = \int_{v}^{v_1} R_{\mathrm{T}}(v)dv$):

$v = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{5510\text{Å}} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{551 \cdot 10^{-9} nm} = 5{,}4446 \cdot 10^{14} Hz$

$$v = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{5500\text{Å}} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{550 \cdot 10^{-9} nm} = 5{,}4545 \cdot 10^{14} Hz$$

Por algum motivo a resposta não confere quando resolvo pela integral, talvez seja o Cálculo 1 no EAD. Com isso, para ter o resultado igual ao do gabarito deve-se analisar que tendo as frequências muito próximas uma da outra, a integral aproximada fica $R_{\mathrm{T}} = R_{\mathrm{T}}(v^*)\Delta v$ onde $R_{\mathrm{T}} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$.

Lembrando que, $R_{\mathrm{T}}(v) = \frac{c}{4}\rho_{\mathrm{T}}(v)$ onde $\rho_{\mathrm{T}}(v) = \frac{8\pi v^2}{c^3} \cdot \frac{hv}{-1+e^{\{\frac{hv}{k_B \mathrm{T}}}}$, logo $(v) = \frac{2\pi v^2}{c^2} \cdot \frac{hv}{-1+e^{\frac{hv}{k_B \mathrm{T}}}}$

$P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{2\pi v^2}{c^2} \cdot \frac{hv}{-1+e^{\frac{hv}{k_B \mathrm{T}}}} \cdot \Delta v \rightarrow \; P = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{hv^{*3}}{c^2} \cdot \frac{\Delta v}{-1+e^{\frac{hv^*}{k_B \mathrm{T}}}}$

$P = \frac{3{,}14^2}{2} \cdot \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34})\left(\frac{(5{,}4446+5{,}44955) \cdot 10^{14}}{2}\right)^3}{(3 \cdot 10^8)^2} \cdot \frac{(5{,}4545-5{,}4446) \cdot 10^{14}}{-1+e^{\frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34})\left(\frac{(5{,}4446+5{,}4545) \cdot 10^{14}}{2}\right)}{(1{,}381 \cdot 10^{-23})(6000)}}}$

Finalizando, $P \approx 7{,}5W$.

5.(A) Supondo que a temperatura da superfície do sol é 5700°K, use a lei de Stefan, (1.2), para determinar a massa de repouso perdida por segundo pelo sol sob forma de radiação. Considere o diâmetro do sol como sendo $1{,}4 \cdot 10^9 m$. (B) Que fração da massa de repouso do sol é perdida a cada ano sob forma de radiação eletromagnética? Considere a massa de repouso do sol sendo 2,0· 10^{30}Kg.

Resolução5(A)

A radiância total emitida pelo Sol, usando a constante de Stefan-Boltzmann igual a $5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2K^4}$, é $R_\mathrm{T} = 5{,}98 \cdot 10^7 \frac{W}{m^2}$. Essa radiância aplicada em $P = R_\mathrm{T} 4\pi r^2$ encontrasse a potência de $3{,}68 \cdot 10^{26} W$.

Com a equivalência de massa à energia, aparece $4{,}08 \cdot 10^9 \frac{kg}{s}$.

Resolução5(B)

Transformando $\frac{kg}{s} \rightarrow \frac{kg}{ano}$, achasse $\frac{4{,}08 \cdot 10^9 kg}{s} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = \frac{1{,}29 \cdot 10^{17} kg}{ano}$

O valor encontrado quando dividido pela massa de repouso do sol: $\frac{1{,}29 \cdot 10^{17}}{2 \cdot 10^{30}}$. A fração da massa de repouso do sol perdida a cada ano sob forma de radiação eletromagnética é $6{,}5 \cdot 10^{-12}\%$

6.Em uma explosão termonuclear, a temperatura no centro da explosão é momentaneamente 10^7K Ache o comprimento de onda para o qual a radiação emitida é máxima.

Pela Lei do Deslocamento ou Lei de Wein: $\lambda_{max} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3} Km}{10^7 K} = 2{,}898 \cdot 10^{-10} m$

7. A uma dada temperatura, λ_{max}=6500Å para uma cavidade de corpo negro. Qual será λ_{max} se a temperatura nas paredes da cavidade for aumentada de forma que a taxa de emissão de radiação espectral seja duplicada?

A Lei da Wein, $\lambda_{max} = \frac{k}{\mathrm{T}}$, pode ser escrita junta com a Lei de Stefan comparando as temperaturas finais e iniciais. Assim:

Inicial → $R_{T_1} = \sigma T_1^4$ Juntas → $\sigma T_2^4 = 2\sigma T_1^4$ e $R_{T_2} = 2R_{T_1}$

Final → $R_{T_2} = \sigma T_2^4$ $T_2^4 = \sqrt[4]{2} T_1^4$

8. A que comprimento de onda o corpo humano emite sua radiação térmica máxima? Apresente uma lista das hipóteses que você fez para chegar a esta resposta.

Novamente pela Lei de Wein, onde o comprimento é igual a constante ($2{,}898 \cdot 10^{-3} K \cdot m$) dividido pela temperatura ($309K$). Dessa maneira, $\lambda_{max} = 9{,}37 \cdot 10^{-6} m$ e portanto, corresponde à faixa do infravermelho.

9. Supondo que λ_{max} está no infravermelho próximo para a radiação térmica de cor vermelha e no ultravioleta próximo para a radiação térmica de cor azul, a aproximadamente que temperatura na lei do deslocamento de Wien corresponde a radiação térmica de cor vermelha? E a de cor azul?

Tendo o comprimento de onda na fronteira entre o infravermelho e o espectro visível da cor vermelha igual à $700nm$, e o comprimento de onda na fronteira entre o ultravioleta e o espectro visível da cor azul igual à $400nm.$ Corresponde as temperaturas, 4140K e 7245K, respectivamente.

10. A taxa média de radiação solar incidente por unidade de área sobre a superfície da Terra é 0,485 cal/cm²-min (ou 355 W / (m^2)) . (A) Explique a consistência entre esse número e a constante solar (a energia solar que incide segundo a normal por unidade de tempo sobre uma unidade de área da superfície da Terra) cujo valor é 1,94cal / cm^2 min (ou 1340 W / (m^2)). (B) Considere a Terra como sendo um corpo negro irradiando energia para o espaço segundo essa mesma taxa. Qual seria a temperatura de sua superfície sob tais circunstâncias?

Resolução$_{10(A)}$

Considerando que o Sol emita uma potência (P_{Sol}) a uma distância da Terra (D), pode-se medir a intensidade (I_{Sol}), esses dados resultam em $I_{Sol} = \frac{P_{Sol}}{4\pi D^2} = 1340\,\frac{W}{m^2}$.

Pensando no resultado obtido, a potência da Terra é $P_{Terra} = \frac{\pi R_{Terra}^2}{4\pi D^2} P_{Sol} = \pi R^2 I_{Sol}$, que quando divido pela superfície da Terra, resulta na taxa média de incidente no planeta.

Portanto, $I_{Sol} = 1340\,\frac{W}{m^2}$ e $I_{Terra} = 355\,\frac{W}{m^2} \approx \frac{I_{Sol}}{4}$, explica consistência entre esse número e a constante solar.

Resolução$_{10(B)}$

Tendo a Terra como um Corpo Negro e usando os dados da questão Resolução$_{10(A)}$, $R_{Terra} = \sigma T^4$, onde $T = \sqrt[4]{\frac{R_T}{\sigma}}$.

$$T = \sqrt[4]{\frac{355\frac{W}{m^2}}{5{,}67\cdot 10^{-8}\frac{W}{m^2K^4}}} \rightarrow T = 281K$$

11. Mostre que a Lei da Radiação de Rayleigh-Jeans, (1-17), não é consistente com a Lei do Deslocamento de Wien $v_{max} \propto \mathrm{T}$, (1-3a), ou λ_{max}T=const, (1-3b).

De início, é impossível maximizar a função $\rho_T(v) = \frac{8\pi v k_B T}{c^3} = K_T v^2$, uma vez que a densidade de energia espectral é crescente com relação a frequência. Esse problema corrigido por Planck, ocorre pois, a Lei de Rayleigh-Jeans =é inconsistente com a Lei de Deslocamento.

12. Obtemos v_{max} para o espectro de corpo negro fazendo $d\rho_{\mathrm{T}}(v)/dv$ =0, e λ_{max} fazendo $d\rho_{\mathrm{T}}(\lambda)/d\lambda$ = 0. Por que não é possível obter a partir de λ_{max}T=const, que v_{max}=const$\cdot$ T , simplesmente usando-se $\lambda_{max} = \frac{c}{v_{max}}$? Isto é, por que é errado supor-se $v_{max}\lambda_{max} = c$, onde c é a velocidade da luz?

Não é o suficiente trocar v por $\frac{c}{\lambda}$em $\rho_{\mathrm{T}}(v)$. Porque, devesse considerar que $\int \rho_{\mathrm{T}}(v)dv = \int \rho_{\mathrm{T}}(\lambda)d\lambda$ ou seja, $-\rho_{\mathrm{T}}(v)dv = \rho_{\mathrm{T}}(\lambda)d\lambda$

Usando $v = \frac{c}{\lambda}$, $dv = \frac{dv}{d\lambda}d\lambda = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$ ou seja, $\rho_{\mathrm{T}}(\lambda)d\lambda = -\left(-\frac{c}{\lambda^2}\rho_{\mathrm{T}}(v)dv\right)$quando dividido por $v = \frac{c}{\lambda}$, obtém-se $\rho_{\mathrm{T}}(\lambda)d\lambda = \frac{c}{\lambda^2}\rho_{\mathrm{T}}\left(v = \frac{c}{\lambda}\right)$, a expressão correta.

13. Considere os seguintes números: 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 1, 0 representando o número de gois feitos em cada partida pelo Fluminense no último campeonato. (A) Calcular diretamente o número médio de gols por partida. (B) Seja x uma variável significando o número de gols por partida, e seja f(x) o número de vezes que o número x aparece. Mostre que o número médio de gols por partida pode ser escrito como $\overline{x} = \frac{\sum_0^4 xf(x)}{\sum_0^4 f(x)}$ (C) Seja $p(x)$ a probabilidade de se obter o número x . Mostre que $\overline{x}$ é dado por

$\overline{x} = \sum_0^4 xp(x)$.

Resolução13(A)

O número médio de gols por partida é dado simplesmente pela média aritmética, $\overline{x} = \frac{2+3+3+4+1+2+2+1+0}{9} \rightarrow \overline{x} = 2$

Resolução13(B)

Usando $\overline{x} = \frac{\sum_0^4 xf(x)}{\sum_0^4 f(x)}$e substituindo os valores, $\overline{x} = \frac{1f(1)+1f(1)+2f(2)+3f(3)+4f(4)}{f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)}$, assim $\overline{x} = 2$

Resolução13(C)

A probabilidade $p(x) = \frac{f(x)}{\sum f(x)}$, logo $\overline{x} = \frac{\sum xf(x)}{\sum f(x)} = \sum x\frac{f(x)}{\sum f(x)} = \sum xp(x)$

14.Considere a função $f(x) = \frac{1}{10}(10-x)^2 \quad 0 \leq x \leq 10$

$f(x) = 0$ qualquer outro x

(A) a partir de $\overline{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}$ ache o valor médio de x . (B) Suponha que a variável x é discreta em vez de contínua. Suponha que $\Delta x = 1$, de modo que x toma apenas os valores inteiros 0, 1, 2, ..., 10. Calcule $\overline{x}$ e compare com o resultado obtido no item (A). (Sugestão: Pode ser mais fácil calcular a soma apropriada diretamente, em vez de trabalhar com fórmulas gerais de soma.) (C) Calcule $\overline{x}$ para $\Delta x = 5$ isto é, x = 0,5,10. Compare este resultado com o obtido no item (A).

Resolução14(A)

A partir de $\overline{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}$, e substituindo os valores, $\overline{x} = \frac{\frac{1}{10}\int_0^{10}(100x-20x^2+x^3)dx}{\frac{1}{10}\int_0^{10}(100-20x+x^2)dx} = \frac{\frac{1}{10}\left(5000-\frac{20000}{3}+\frac{10000}{4}\right)}{\frac{1}{10}\left(1000-1000+\frac{10000}{3}\right)} = \frac{\frac{250}{3}}{\frac{100}{3}} = 2,5$

Resolução$_{14(B)}$

Parar transformar a variável x discreta em contínua, é necessário transformar de integral para somatório. Considerando os valores inteiros, substituindo tem-se $\sum f(x)\Delta x \approx \big(f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)+f(8)+f(9)+f(10)\big)\Delta x$, logo $(0)(10)+(1)(8{,}1)+(2)(6{,}4)+(3)(4{,}9)+(4)(3{,}6)+(5)(2{,}5)+(6)(1{,}6)+(7)(0{,}9)+(8)(0{,}4)+(9)(0{,}1)+(10)(0)$

$\overline{x} \approx \frac{82{,}5}{38{,}5} \approx 2{,}14$

Resolução$_{14(C)}$

Semelhante ao exercício Resolução$_{14(B)}$, mas agora com $\Delta x = 5$

$$\int f(x)dx \approx \big(f(0)+f(5)+f(10)\big)\cdot \Delta x$$

$$\int xf(x)dx \approx \big(0f(0)+5f(5)+10f(10)\big)\cdot 5$$

$$\int xf(x)dx \approx (0+12{,}5+0)\cdot 5 = 62{,}5$$

$\overline{x} = 1$

15. Usando as relações $P(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{k\mathrm{T}}}}{k\mathrm{T}}$ e $\int_0^\infty P(\varepsilon)d\varepsilon = 1$, faça o cálculo da integral de (1-21) e obtenha (1-22), $\varepsilon = k\mathrm{T}$.

Tendo $x = \frac{\varepsilon}{k_B\mathrm{T}} \rightarrow\ dx = \frac{d\varepsilon}{k_B\mathrm{T}}$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{k_B\mathrm{T}}\int_0^\infty k_B\,\mathrm{T}e^{-x}k_B\mathrm{T}dx = k_B\mathrm{T}\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$$

Relembrando cálculo 1, $u = x$ e $dv = e^{-x}dx$

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = -(e^{-x})_0^\infty = 1$$

$\overline{\varepsilon} = 1k_B\mathrm{T}$

16.Use a relação $R_\mathrm{T}(v)dv = \left(\frac{c}{4}\right)\rho_\mathrm{T}(v)dv$ entre a radiância espectral e a densidade de energia, e a lei da radiação de Planck para obter a lei de Stefan. Isto é, demonstre que $R_\mathrm{T} = \int_0^\infty \frac{2\pi h}{c^2}\frac{v^3dv}{e^{\frac{hv}{k\mathrm{T}}}-1} = \sigma\mathrm{T}^4$ onde $\sigma \cdot 2\pi^5k^4/15c^2h^3$. Sugestão: $\int_0^\infty \frac{q^3dq}{e^q-1} = \frac{\pi^4}{15}$.

Tendo $q = \frac{hv}{k_B\mathrm{T}} \rightarrow\ dq = \frac{h}{k_B\mathrm{T}}dv$

$$R_{\mathrm{T}}=\frac{2\pi h}{c^2}\int_0^\infty\left(\frac{k_B\mathrm{T}q}{h}\right)^3\frac{1}{e^q}\frac{k_B\mathrm{T}q}{h}dq$$

$R_{\mathrm{T}}=\frac{2\pi h k_B^4\mathrm{T}^4}{c^2h^4}\int_0^\infty\frac{q^3}{e^q-1}dq$, agora é só usar a sugestão dada no enunciado

$\sigma=\frac{2\pi^5k_B^4}{15c^2h^3}$ e $R_{\mathrm{T}}=\sigma\mathrm{T}^4$

17. Obtenha a lei do deslocamento de Wien, $\lambda_{max}\,\mathrm{T}$ =0,2014 $\frac{hc}{k}$ resolvendo a equação $d\rho(\lambda)/d\lambda=0$. (Sugestão: Faça$\frac{hc}{\lambda k\mathrm{T}}=x$ e mostre que a equação citada leva a $e^{-x}+\frac{x}{5}=1$. Mostre então que $x=4{,}965$ e a solução.)

Usando o problema 12, $\rho_{\mathrm{T}}(\lambda)=\frac{c}{\lambda^2}\rho_{\mathrm{T}}\left(v=\frac{c}{\lambda}\right)$, $\rho_{\mathrm{T}}(\lambda)=\frac{c}{\lambda^2}\frac{8\pi h}{c^3}\frac{c^3}{\lambda^3}\frac{1}{-1+e^{\frac{hc}{\lambda k_B\mathrm{T}}}}=\frac{8\pi h}{\lambda^5}\frac{1}{-1+e^{\frac{hc}{\lambda k_B\mathrm{T}}}}$

Derivando esse megazoide, $\frac{d\rho_{\mathrm{T}}(\lambda)}{d\lambda}=8\pi hc\left(-\frac{5}{\lambda^6}\frac{1}{-1+e^{\frac{hc}{\lambda k_B\mathrm{T}}}}+\frac{1}{\lambda^5}\right)\left((-hc/\lambda^2k_B\mathrm{T})e^{hc/\lambda k_B\mathrm{T}}\right)\frac{1}{\left(-1+e^{hc/\lambda k_B\mathrm{T}}\right)^2}$

Resulta em $-5+\frac{hc}{\lambda k_B\mathrm{T}}\frac{e^{hc/\lambda k_B\mathrm{T}}}{(-1+e^{hc/\lambda k_B\mathrm{T}})}=0$, portanto $-xe^x=5e^x-5\rightarrow\ -e^x+\frac{x}{5}=1$

Com essa equação, já dada no enunciado, apenas falta substituir o valor de x

$$x=\frac{hc}{\lambda k_B\mathrm{T}}\rightarrow\lambda\frac{1}{4{,}965}\frac{hc}{k_B\mathrm{T}}$$

$$\lambda_{max}=0{,}2014\frac{hc}{k_B\mathrm{T}}$$

18. Para verificar experimentalmente que a radiação universal de 3K recentemente descoberta, se ajusta precisamente ao espectro de corpo negro, decide-se medir $R_{\mathrm{T}}(\lambda)$ desde um menor que λ_{max} para o qual, $R_{\mathrm{T}}(\lambda)=0{,}2R_{\mathrm{T}}(\lambda_{max})$, até um λ maior que λ_{max} para o qual $R_{\mathrm{T}}(\lambda)=0{,}2R_{\mathrm{T}}(\lambda_{max})$ novamente. Entre que valores de λ devem ser feitas as medidas?

Copiando os resultados obtidos no problema 17, $f_{\mathrm{T}}(\lambda)=\frac{\lambda_{max}}{\lambda^5}\frac{1}{-1+e^{4{,}965\lambda_{max}/\lambda}}$ e compreendendo $\lambda=\lambda_{max}$, tem-se que $f_{\mathrm{T}}(\lambda_{max})=\frac{\lambda_{max}}{(\lambda_{max})^5}\frac{1}{-1+e^{4{,}965}}=0{,}2\,\frac{0{,}0070269}{(\lambda_{max})^4}$

$$\frac{(\lambda_{max})^5}{\lambda_{max}}\frac{1}{-1+e^{4{,}965}}=0{,}00140539$$

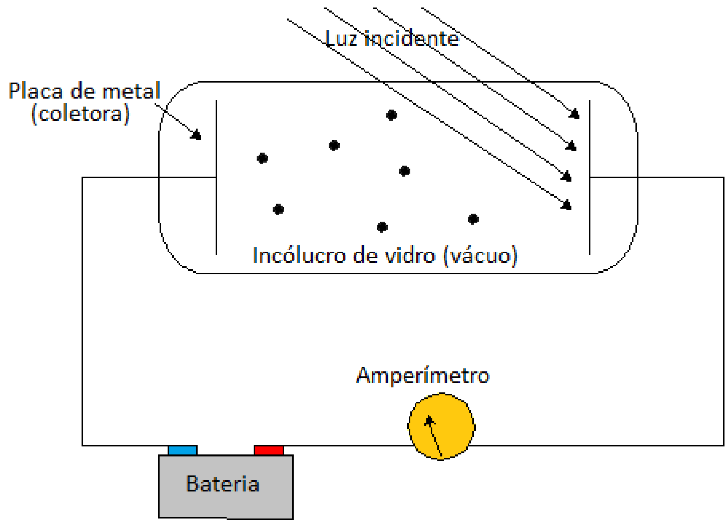
Entendo como a função, $f(x)=x$

$f(x)=0{,}00140539$ e $f(x)'\ =\frac{x^5}{-1+e^{4{,}965x'}}$, $x=2{,}041$ e $x'=0{,}379$ respectivamente

$\lambda=\frac{\lambda_{max}}{2{,}041}=0{,}4899\lambda_{max}$ e $\lambda=2{,}6385\lambda_{max}$

2 Propriedades corpusculares da radiação

A imagem a direita representa um aparelho para estudar a emissão de elétrons de uma superfície devida à incidência de luz sobre a superfície.



Referências

Eisberg, Robert; Resnick, Robert. **Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. Edição 1ª. Rio de Janeiro: Elsevier, 1979.

Acosta, Virgilio; Cowan, Clyde L.; Graham, G. J. **Curso de física moderna**. Edição 1ª. Santa Catarina: Harla, 1975.

Tipler, Paul A.; Llewellyn, Ralph A.; **Física Moderna.** 6ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

Thorntom, Stephen T.; Rex, Andrew; Hood, Carol; **Modern Physics for Scientists and Engineers.** 5ª edição. Boston: Cengage Learning, 2012.

Wichmann, Eyvind H. **Quantuim physics.** Edição preliminar. Rio de Janeiro: McGraw - Hill, 1967.