

# Sistemas de equações lineares

Prof. Luiz T. F. Eleno



LOM3260 — Computação Científica em Python

Departamento de Engenharia de Materiais  
Escola de Engenharia de Lorena  
Universidade de São Paulo

# Plano de aula

1 Representação matricial

2 Regra de Cramer

3 Método da eliminação de Gauss

4 Códigos

# Sistemas lineares

- Um sistema linear é um conjunto de  $m$  equações lineares em  $n$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$
- Vamos considerar apenas sistemas definidos, ou seja, quando o número de equações é igual ao de incógnitas ( $m = n$ ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Exemplo:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 5z = 8 \\ 6x - y - 2z = 8 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

- solução (verifique!):  $x = 2, y = -4, z = 4$

# Representação matricial

- O sistema genérico do último slide pode ser representado de “forma matricial”:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Vamos indicar o **vetor solução** por

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$$

- $\mathbf{b}$  é o “vetor de termos independentes”:

$$\mathbf{b} = (b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n)^T$$

- o sobrescrito  $T$  indica transposição, ou seja, troca das linhas por colunas

- $\mathbf{A}$  é a “matriz de coeficientes”:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- veja que  $\mathbf{A}$  é uma **matriz quadrada de ordem  $n$**
- Com isso, o sistema pode ser escrito de forma compacta como:

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

# Solução de um sistema linear

- Em Álgebra Linear, você aprende que o sistema com  $n$  equações e  $n$  incógnitas

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

admite solução dependendo de  $\mathbf{b}$  e do **determinante** de  $\mathbf{A}$ , indicado por  $\det \mathbf{A}$ :

- se  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ :
    - solução única existe se  $\det \mathbf{A} \neq 0$
    - não existe solução se  $\det \mathbf{A} = 0$
  - se  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$  (sistema homogêneo):
    - apenas a solução trivial  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  se  $\det \mathbf{A} \neq 0$
    - múltiplas soluções se  $\det \mathbf{A} = 0$
- Você aprende também que, se  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , existe a “matriz inversa” de  $\mathbf{A}$ , indicada por  $\mathbf{A}^{-1}$ , com a seguinte propriedade:

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

sendo  $\mathbf{I}$  a “matriz identidade” de mesma ordem que  $\mathbf{A}$ , ou seja, de ordem  $n$ :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ou seja,  $\mathbf{I}$  tem a **diagonal principal** preenchida por “1”s e todos os outros elementos nulos.

# Representação da solução

- Vamos pensar num **sistema bem-definido**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

em que  $\det \mathbf{A} \neq 0$  e  $\mathbf{b} \neq 0$ , ou seja, com uma única solução

- Sabemos que  $\mathbf{A}^{-1}$  existe e, portanto, podemos multiplicar os dois lados do sistema por  $\mathbf{A}^{-1}$  sem alterar a igualdade:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Mas sabemos também que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

e, portanto,

$$\mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Mas a matriz identidade tem a seguinte propriedade: seja qual for a matriz  $\mathbf{M}$  (desde que o número de colunas de  $\mathbf{I}$  seja igual ao número de linhas de  $\mathbf{M}$ ):

$$\mathbf{IM} = \mathbf{M}$$

- $\Rightarrow$  A solução do sistema pode ser representada então por

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$$

- Essa forma da solução é útil para manipulações e teoremas, mas não serve na prática, pois calcular a matriz inversa não é nada fácil!

► precisamos encontrar outras maneiras de resolver o sistema!

# Plano de aula

1 Representação matricial

2 Regra de Cramer

3 Método da eliminação de Gauss

4 Códigos

# Regra de Cramer

- A **Regra de Cramer** vale para qualquer sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  bem-definido
- Segundo a regra de Cramer, a solução  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é dada por

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

em que  $\mathbf{A}_i$  é a matriz obtida substituindo a  $i$ -ésima coluna de  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{b}$

## Exemplo

- Por exemplo, para o sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Assim,

$$\mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Com isso:

$$\det \mathbf{A} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$$

$$\det \mathbf{A}_x = 4 \times (-1) - 1 \times 2 = -6$$

$$\det \mathbf{A}_y = 1 \times 2 - 4 \times 1 = -2$$

e portanto

$$x = \frac{-6}{-2} \rightarrow x = 3$$

e

$$y = \frac{-2}{-2} \rightarrow y = 1$$

- A Regra de Cramer é uma maneira interessante de se resolver sistemas lineares pequenos, de ordem 2 ou 3
  - ▶ mas, como veremos, é um desastre computacional!



## Número de operações para calcular um determinante

- Para entender o pesadelo computacional da regra de Cramer, vamos calcular o número de operações envolvidas no cálculo de um determinante
- Da **definição de determinante** (ver algum livro de Álgebra Linear):

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det \tilde{\mathbf{A}}_{ij}$$

em que

- ▶  $i$  é qualquer uma das linhas de  $\mathbf{A}$ , uma matriz quadrada de ordem  $n$
- ▶  $A_{ij}$  é o elemento de  $\mathbf{A}$  encontrado na linha  $i$  e coluna  $j$
- ▶  $\tilde{\mathbf{A}}_{ij}$  é a **submatriz menor** obtida a partir de  $\mathbf{A}$  eliminando a linha  $i$  e a coluna  $j$ 
  - $(-1)^{i+j} \det \tilde{\mathbf{A}}_{ij}$  é chamado **cofator** do elemento  $A_{ij}$
- Da expressão acima, o número de somas/subtrações ( $S_n$ ) e de multiplicações ( $M_n$ ) para o cálculo de um determinante podem ser escritos recursivamente como

$$S_n = nS_{n-1} + n - 1$$

$$M_n = nM_{n-1} + n$$

- O número total de operações ( $D_n$ ) para o cálculo de um determinante é

$$D_n = S_n + M_n$$

- Percebendo que  $S_1 = M_1 = 0$ , podemos calcular qualquer  $S_n$ ,  $M_n$  e  $D_n$ , um a um

# Número de operações da regra de Cramer

- O número de operações envolvidas no uso da regra de Cramer ( $C_n$ ) é dado por:

$$C_n = (n + 1)D_n + n$$

- Podemos então montar a seguinte tabela:

$n$	$S_n$	$M_n$	$D_n$	$C_n$
1	0	0	0	1
2	1	2	3	11
3	5	9	14	59
4	23	40	63	319
5	119	205	324	1949
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
17	355687428095999	611171244308689	966858672404688	1.74e+16
18	6.40e+15	1.10e+16	1.74e+16	3.31e+17
19	1.22e+17	2.09e+17	3.31e+17	6.61e+18
20	2.43e+18	4.18e+18	6.61e+18	1.39e+20

- $\Rightarrow$  se cada operação leva aproximadamente  $10^{-1} \mu s$ , a solução de um sistema de ordem 20 demoraria mais de 400,000 anos!
- mas, na prática, podem aparecer sistemas com centenas de equações!
- $\Rightarrow$  obviamente precisamos de algum outro método...

# Plano de aula

1 Representação matricial

2 Regra de Cramer

3 Método da eliminação de Gauss

4 Códigos

# Sistemas triangulares

- Um **sistema triangular superior** é um sistema linear escrito como:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

- Em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

- A solução do sistema, supondo  $a_{ii} \neq 0$  (para qualquer  $1 \leq i \leq n$ ), é

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_n & = & b_n/a_{nn} \\ x_{n-1} & = & (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n)/a_{n-1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & = & (b_1 - a_{1n}x_n - \dots - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11} \end{array} \right.$$

- Infelizmente, nem todo sistema é triangular...

► mas podem ser transformados (quase sempre) em triangulares!

# Propriedades de sistemas lineares

- **Propriedade:** a solução do sistema linear  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  não se altera se o submetermos a uma sequência de operações do tipo:
  1. multiplicação de uma equação por uma constante não-nula;
  2. soma do múltiplo de uma equação a outra;
  3. permutar as equações (ou seja, trocar a sua ordem).

# Matriz ampliada

- O **Método da eliminação de Gauss** faz uso sistemático da propriedade do slide anterior para transformar o problema original num **sistema triangular superior**
  - ▶ que conseguimos resolver facilmente!{}
- Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -5x_1 \quad \quad + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

- Ele pode ser representado em forma matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  como:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 51 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- A **matriz ampliada** do sistema é obtida anexando  $\mathbf{b}$  à matriz  $\mathbf{A}$ :

$$A_a = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Trabalhamos com a matriz ampliada, zerando, ou seja, eliminando termos (daí o nome)
  - ▶ a cada linha, escolhemos um elemento **pivô** que nos ajuda na eliminação
  - ▶ é mais fácil de entender usando um exemplo

→

# Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

## usando um exemplo

- Para a linha  $i$ , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos  $a_{ji}$ , com  $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- **Matriz ampliada original:**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1  $\rightarrow$  troca linhas 1 e 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$  adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$  os novos elementos da linha  $j$  serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que  $a_{ji} = 0$ , como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com  $m_{21} = -3/6 = -0.5$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2  $\rightarrow$  troca linhas 2 e 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

# Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

## usando um exemplo

- Para a linha  $i$ , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos  $a_{ji}$ , com  $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1  $\rightarrow$  troca linhas 1 e 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$  adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$  os novos elementos da linha  $j$  serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que  $a_{ji} = 0$ , como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com  $m_{21} = -3/6 = -0.5$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2  $\rightarrow$  troca linhas 2 e 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior



# Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha  $i$ , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos  $a_{ji}$ , com  $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1  $\rightarrow$  troca linhas 1 e 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$  adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$  os novos elementos da linha  $j$  serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que  $a_{ji} = 0$ , como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com  $m_{21} = -3/6 = -0.5$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2  $\rightarrow$  troca linhas 2 e 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

# Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

## usando um exemplo

- Para a linha  $i$ , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos  $a_{ji}$ , com  $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1  $\rightarrow$  troca linhas 1 e 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$  adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$  os novos elementos da linha  $j$  serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que  $a_{ji} = 0$ , como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com  $m_{21} = -3/6 = -0.5$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2  $\rightarrow$  troca linhas 2 e 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

# Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

## usando um exemplo

- Para a linha  $i$ , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos  $a_{ji}$ , com  $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1  $\rightarrow$  troca linhas 1 e 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$  adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$  os novos elementos da linha  $j$  serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que  $a_{ji} = 0$ , como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com  $m_{21} = -3/6 = -0.5$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- **Pivô 2  $\rightarrow$  troca linhas 2 e 3:**

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

# Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

## usando um exemplo

- Para a linha  $i$ , o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos  $a_{ji}$ , com  $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Pivô 1  $\rightarrow$  troca linhas 1 e 2:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$  adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$  os novos elementos da linha  $j$  serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji} a_{ik}, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que  $a_{ji} = 0$ , como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com  $m_{21} = -3/6 = -0.5$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array} \right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2  $\rightarrow$  troca linhas 2 e 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array} \right)$$

- Elimina termos da linha 3 com  $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

## Solução do sistema

- Do slide anterior, chegamos a

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

- A matriz está agora na **forma triangular superior**  $\Rightarrow$  o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -5x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -7.5x_2 + 12x_3 = 43.5 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$$

- Essa é também chamada de **forma de Gauss-Jordan**
- A solução é obtida facilmente, começando pela última equação:

$$\begin{cases} x_3 = 9/3 & \rightarrow x_3 = 3 \\ x_2 = \frac{43.5 - 12 \times 3}{-7.5} & \rightarrow x_2 = -1 \\ x_1 = \frac{51 - 12 \times 3 - (-9) \times (-1)}{6} & \rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

- Verifique que a solução vale também para o sistema na forma original!

## Bônus: determinantes

- O método da eliminação de Gauss tem outra utilidade: o cálculo de determinantes
- Exemplo: encontrar o determinante da matriz **A** abaixo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Basta usar o método da eliminação de Gauss:

$$\mathbf{A}^{(r)} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 0 & -7.5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{A}^{(r)}$  é chamada de **forma reduzida** de **A**
  - ▶ ou, como já vimos, forma triangular superior
- Propriedades dos determinantes:
  1. adicionar um múltiplo de uma linha a outra não altera o valor do determinante
  2. multiplicar uma linha por  $a$  multiplica também o valor do determinante por  $a$
  3. permutar duas linhas troca o sinal do determinante
- Com isso, não é difícil de ver que

$$\det \mathbf{A} = (-1)^t \prod_{i=1}^n A_{ii}^{(r)} = (-1)^t A_{11}^{(r)} \times A_{22}^{(r)} \times \dots \times A_{nn}^{(r)}$$

- ▶  $t$  é o número de vezes em que permutamos linhas
- $\Rightarrow$  o módulo do determinante de **A** é o produto dos elementos da diagonal principal de  $\mathbf{A}^{(r)}$

# Número de operações do método da eliminação de Gauss

- Não é difícil fazer a contabilidade do número de operações envolvidas na redução da matriz ampliada:

$$R_n = \frac{n(n-1)(4n+7)}{6}$$

- ▶ (não consideramos a permutação de linhas como uma operação)
- Já na solução de um sistema triangular superior, o número de operações é

$$T_n = n^2$$

- $\Rightarrow$  O número total de operações no método da eliminação de Gauss é

$$G_n = R_n + T_n = \mathcal{O}\left(\frac{2}{3}n^3\right)$$

$n$	$R_n$	$T_n$	$G_n$	$2n^3/3$
1	0	1	1	0.7
2	5	4	9	5.3
3	19	9	28	18.0
4	46	16	62	42.7
5	90	25	115	83.3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	4029	324	4353	3888.0
19	4731	361	5092	4572.7
20	5510	400	5910	5333.3

- Um sistema com 20 equações levaria  $\approx 0,6$  ms para ser resolvido
  - ▶ 1000 equações levariam em torno de 7 segundos

# Plano de aula

1 Representação matricial

2 Regra de Cramer

3 Método da eliminação de Gauss

4 Códigos



# Um código caseiro em python usando numpy

## Solução de sistemas lineares pelo método da eliminação de Gauss

```
import numpy as np

def gauss(A, b):

    A = np.column_stack((A, b)).astype(float) # matriz ampliada
    N = len(A) # no. de equacoes do sistema

    # Obtendo a forma triangular superior:
    for i in range(N): # loop sobre as linhas
        k = np.argmax(np.abs(A[i:, i])) # buscando o maior pivo
        if k > 0:
            A[i+k], A[i] = np.copy(A[i]), np.copy(A[i+k]) # trocando linhas
        m = A[i, i:] / A[i, i] # multiplicadores
        for j in range(i+1, N): # reduzindo as linhas abaixo da linha i
            A[j, i:] -= A[j, i] * m
            A[j, :i] = 0.

    # Resolvendo o sistema triangular superior:
    for i in range(N-1, -1, -1): # loop sobre as linhas
        for j in range(N-1, i, -1): # loop sobre as colunas
            A[i, -1] -= A[i, j] * A[j, -1]
        A[i, -1] /= A[i, i] # ultima coluna de A tem a solucao

    return A[:, -1]
```

- `numpy.argmax(v)` retorna o índice do maior elemento do array `v`

# Biblioteca `scipy.linalg`

- A biblioteca `scipy.linalg` tem uma função pronta para resolver sistemas lineares:

## Solução de sistemas lineares usando a biblioteca `scipy.linalg`

```
import scipy.linalg as la
'''
scipy.linalg.solve(A, b) retorna x, solucao do sistema A x = b
A -> matriz quadrada de coeficientes
b -> vetor de termos independentes
por exemplo, A = [ [ 1, 1 ], [ 1, -1 ] ], b = [ 4, 2 ]
'''
x = la.solve(A, b)
```