Sistemas de equações lineares

Prof. Luiz T. F. Eleno

LOM3260 — Computação Científica em Python

Departamento de Engenharia de Materiais
Escola de Engenharia de Lorena
Universidade de São Paulo

Plano de aula

Sistemas lineares

- Um sistema linear é um conjunto de m equações lineares em n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Vamos considerar apenas sistemas definidos, ou seja, quando o número de equações é igual ao de incógnitas ($m = n$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Exemplo:

$$\begin{cases} 4x + 5y + 5z = 8 \\ 6x - y - 2z = 8 \\ \phantom{4x + {}} 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

- solução (verifique!): $x = 2, y = -4, z = 4$

Representação matricial

- O sistema genérico do último slide pode ser representado de **forma matricial:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Vamos indicar o **vetor solução** por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$$

- **b** é o **vetor de termos independentes:**

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T$$

- o sobrescrito T indica transposição, ou seja, troca das linhas por colunas
- **A** é a **matriz de coeficientes:**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- veja que **A** é uma **matriz quadrada** de **ordem** n
- Com isso, o sistema pode ser escrito de forma compacta como:

$$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b}}$$

Solução de um sistema linear

- Em Álgebra Linear, você aprende que o sistema com n equações e n incógnitas

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

admite solução dependendo de $\mathbf{b}$ e do **determinante** de $\mathbf{A}$, indicado por $\det \mathbf{A}$:

1. se $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$:
   1.1 solução única existe se $\det \mathbf{A} \neq 0$
   1.2 não existe solução se $\det \mathbf{A} = 0$
2. se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (sistema homogêneo):
   2.1 apenas a solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se $\det \mathbf{A} \neq 0$
   2.2 múltiplas soluções se $\det \mathbf{A} = 0$

- Você aprende também que, se $\det \mathbf{A} \neq 0$, existe a **matriz inversa** de $\mathbf{A}$, indicada por $\mathbf{A}^{-1}$, com a seguinte propriedade:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

sendo $\mathbf{I}$ a **matriz identidade** de mesma ordem que $\mathbf{A}$, ou seja, de ordem n:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ou seja, $\mathbf{I}$ tem a **diagonal principal** preenchida por “1”s e todos os outros elementos nulos.

Representação da solução

- Vamos pensar num **sistema bem-definido**

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

em que $\det \mathbf{A} \neq 0$ e $\mathbf{b} \neq 0$, ou seja, com uma única solução

- Sabemos que $\mathbf{A}^{-1}$ existe e, portanto, podemos multiplicar os dois lados do sistema por $\mathbf{A}^{-1}$ sem alterar a igualdade:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Mas sabemos também que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

e, portanto,

$$\mathbf{I}\,\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Mas a matriz identidade tem a seguinte propriedade: seja qual for a matriz $\mathbf{M}$ (desde que o número de colunas de $\mathbf{I}$ seja igual ao número de linhas de $\mathbf{M}$):

$$\mathbf{I}\,\mathbf{M} = \mathbf{M}$$

- $\Rightarrow$ A solução do sistema pode ser representada então por

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}}$$

- Essa forma da solução é útil para manipulações e teoremas, mas não serve na prática, pois calcular a matriz inversa não é nada fácil!
  - precisamos encontrar outras maneiras de resolver o sistema!

Plano de aula

Regra de Cramer

- A **Regra de Cramer** vale para qualquer sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ bem-definido
- Segundo a regra de Cramer, a solução $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é dada por

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

em que $\mathbf{A}_i$ é a matriz obtida substituindo a i-ésima coluna de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{b}$

Exemplo

- Por exemplo, para o sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

temos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Assim,

$$\mathbf{A_x} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A_y} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Com isso:

$$\det \mathbf{A} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$$

$$\det \mathbf{A_x} = 4 \times (-1) - 1 \times 2 = -6$$

$$\det \mathbf{A_y} = 1 \times 2 - 4 \times 1 = -2$$

e portanto

$$x = \frac{-6}{-2} \rightarrow x = 3$$

e

$$y = \frac{-2}{-2} \rightarrow y = 1$$

- A Regra de Cramer é uma maneira interessante de se resolver sistemas lineares pequenos, de ordem 2 ou 3
  - mas, como veremos, é um desastre computacional!

Número de operações para calcular um determinante

- Para entender o pesadelo computacional da regra de Cramer, vamos calcular o número de operações envolvidas no cálculo de um determinante
- Da **definição de determinante** (ver algum livro de Álgebra Linear):

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det \tilde{\mathbf{A}}_{ij}$$

  em que
  - i é qualquer uma das linhas de $\mathbf{A}$, uma matriz quadrada de ordem n
  - A_{ij} é o elemento de $\mathbf{A}$ encontrado na linha i e coluna j
  - $\tilde{\mathbf{A}}_{ij}$ é a **submatriz menor** obtida a partir de $\mathbf{A}$ eliminando a linha i e a coluna j
    - → $(-1)^{i+j} \det \tilde{\mathbf{A}}_{ij}$ é chamado **cofator** do elemento A_{ij}
- Da expressão acima, o número de somas/subtrações (S_n) e de multiplicações (M_n) para o cálculo de um determinante podem ser escritos recursivamente como

$$S_n = nS_{n-1} + n - 1$$

$$M_n = nM_{n-1} + n$$

- O número total de operações (D_n) para o cálculo de um determinante é

$$D_n = S_n + M_n$$

- Percebendo que $S_1 = M_1 = 0$, podemos calcular qualquer S_n, M_n e D_n, um a um

Número de operações da regra de Cramer

- O número de operações envolvidas no uso da regra de Cramer (C_n) é dado por:

$$C_n = (n+1)D_n + n$$

- Podemos então montar a seguinte tabela:

n	S_n	M_n	D_n	C_n
1	0	0	0	1
2	1	2	3	11
3	5	9	14	59
4	23	40	63	319
5	119	205	324	1949
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
17	355687428095999	611171244308689	966858672404688	1.74e+16
18	6.40e+15	1.10e+16	1.74e+16	3.31e+17
19	1.22e+17	2.09e+17	3.31e+17	6.61e+18
20	2.43e+18	4.18e+18	6.61e+18	1.39e+20

- $\Rightarrow$ se cada operação leva aproximadamente 10^{-1} μs, a solução de um sistema de ordem 20 demoraria mais de 400,000 anos!
- mas, na prática, podem aparecer sistemas com centenas de equações!
- $\Rightarrow$ obviamente precisamos de algum outro método…

Plano de aula

Sistemas triangulares

- Um **sistema triangular superior** é um sistema linear escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

- A solução do sistema, supondo $a_{ii} \neq 0$ (para qualquer $1 \leq i \leq n$), é

$$\begin{cases} x_n & = & b_n / a_{nn} \\ x_{n-1} & = & (b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) / a_{n-1,n-1} \\ & \vdots & \\ x_1 & = & (b_1 - a_{1n}x_n - \ldots - a_{13}x_3 - a_{12}x_2) / a_{11} \end{cases}$$

- Infelizmente, nem todo sistema é triangular…
  - mas podem ser transformados (quase sempre) em triangulares!

Propriedades de sistemas lineares

- **Propriedade:** a solução do sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ não se altera se o submetermos a uma sequência de operações do tipo:
  1. multiplicação de uma equação por uma constante não-nula;
  2. soma do múltiplo de uma equação a outra;
  3. permutar as equações (ou seja, trocar a sua ordem).

Matriz ampliada

- O **Método da eliminação de Gauss** faz uso sistemático da propriedade do slide anterior para transformar o problema original num **sistema triangular superior**
  - que conseguimos resolver facilmente!
- Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -5x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

- Ele pode ser representado em forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ como:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 51 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- A **matriz ampliada** do sistema é obtida anexando $\mathbf{b}$ à matriz $\mathbf{A}$:

$$A_a = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Trabalhamos com a matriz ampliada, zerando, ou seja, eliminando termos (daí o nome)
  - a cada linha, escolhemos um elemento **pivô** que nos ajuda na eliminação
  - é mais fácil de entender usando um exemplo

$\rightarrow$

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i, o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji}, com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Pivô 1 –> troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$ adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}\,, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$ os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji}\, a_{ik}\,, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array}\right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2 $\rightarrow$ troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i, o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji}, com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ \color{blue}{6} & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Pivô 1 –> troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \color{blue}{6} & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$ adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}\,, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$ os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji}\, a_{ik}\,, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array}\right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2 $\rightarrow$ troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i, o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji}, com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Pivô 1 –> troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$ adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}\,, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$ os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji}\, a_{ik}\,, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array}\right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2 $\rightarrow$ troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i, o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji}, com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Pivô 1 –> troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$ adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}\,, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$ os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji}\, a_{ik}\,, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array}\right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2 $\rightarrow$ troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i, o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji}, com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Pivô 1 –> troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$ adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}\,, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$ os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji}\, a_{ik}\,, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array}\right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2 $\rightarrow$ troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Método da eliminação de Gauss usando a matriz ampliada

usando um exemplo

- Para a linha i, o **pivô** é o maior elemento (em módulo) entre os elementos a_{ji}, com $j \geq i$
- Se preciso, troque a ordem das linhas
- Vamos usar um exemplo:
- Matriz ampliada original:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Pivô 1 –> troca linhas 1 e 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 3 & -2 & 5 & 20 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Quero zerar todos os termos abaixo do pivô
- $\Rightarrow$ adiciono um múltiplo da linha do pivô a cada linha abaixo; o multiplicador é

$$m_{ji} = -a_{ji}/a_{ii}\,, \quad (i < j \leq n)$$

- $\Rightarrow$ os novos elementos da linha j serão

$$a_{jk} \leftarrow a_{jk} + m_{ji}\, a_{ik}\,, \quad (1 \leq k \leq n)$$

- veja que $a_{ji} = 0$, como queremos!

- Elimina termos da linha 2 com $m_{21} = -3/6 = -0.5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{31} = -(-5)/6 = 5/6$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \end{array}\right)$$

- E terminamos o trabalho do primeiro pivô (e da primeira linha)
- Pivô 2 $\rightarrow$ troca linhas 2 e 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 2.5 & -1 & -5.5 \end{array}\right)$$

- Elimina termos da linha 3 com $m_{32} = -(2.5)/(-7.5) = 1/3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

- E pronto! O sistema está em forma triangular superior

Solução do sistema

- Do slide anterior, chegamos a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -9 & 12 & 51 \\ 0 & -7.5 & 12 & 43.5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

- A matriz está agora na **forma triangular superior** $\Rightarrow$ o sistema é equivalente a:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -5x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -7.5x_2 + 12x_3 = 43.5 \\ 3x_3 = 9 \end{cases}$$

- Essa é também chamada de **forma de Gauss-Jordan**
- A solução é obtida facilmente, começando pela última equação:

$$\begin{cases} x_3 = 9/3 & \rightarrow \quad x_3 = 3 \\ x_2 = \dfrac{43.5 - 12 \times 3}{-7.5} & \rightarrow \quad x_2 = -1 \\ x_1 = \dfrac{51 - 12 \times 3 - (-9) \times (-1)}{6} & \rightarrow \quad x_1 = 1 \end{cases}$$

- Verifique que a solução vale também para o sistema na forma original!

Bônus: determinantes

- O método da eliminação de Gauss tem outra utilidade: o cálculo de determinantes
- Exemplo: encontrar o determinante da matriz $\mathbf{A}$ abaixo,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & -9 & 12 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Basta usar o método da eliminação de Gauss:

$$\mathbf{A}^{(r)} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 0 & -7.5 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{A}^{(r)}$ é chamada de **forma reduzida** de $\mathbf{A}$
  - ou, como já vimos, forma triangular superior
- Propriedades dos determinantes:
  1. adicionar um múltiplo de uma linha a outra não altera o valor do determinante
  2. multiplicar uma linha por a multiplica também o valor do determinante por a
  3. permutar duas linhas troca o sinal do determinante
- Com isso, não é difícil de ver que

$$\det \mathbf{A} = (-1)^t \prod_{i=1}^{n} A_{ii}^{(r)} = (-1)^t A_{11}^{(r)} \times A_{22}^{(r)} \times \ldots \times A_{nn}^{(r)}$$

  - t é o número de vezes em que permutamos linhas
- $\Rightarrow$ o módulo do determinante de $\mathbf{A}$ é o produto dos elementos da diagonal principal de $\mathbf{A}^{(r)}$

Número de operações do método da eliminação de Gauss

- Não é difícil fazer a contabilidade do número de operações envolvidas na redução da matriz ampliada:

$$R_n = \frac{n(n-1)(4n+7)}{6}$$

  - (não consideramos a permutação de linhas como uma operação)
- Já na solução de um sistema triangular superior, o número de operações é

$$T_n = n^2$$

- $\Rightarrow$ O número total de operações no método da eliminação de Gauss é

$$G_n = R_n + T_n = \mathcal{O}\left(\frac{2}{3}n^3\right)$$

n	R_n	T_n	G_n	$2n^3/3$
1	0	1	1	0.7
2	5	4	9	5.3
3	19	9	28	18.0
4	46	16	62	42.7
5	90	25	115	83.3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	4029	324	4353	3888.0
19	4731	361	5092	4572.7
20	5510	400	5910	5333.3

- Um sistema com 20 equações levaria $\approx$ 0,6 ms para ser resolvido
  - 1000 equações levariam em torno de 7 segundos

Plano de aula

Um código caseiro em python usando numpy

Solução de sistemas lineares pelo método da eliminação de Gauss

```python
import numpy as np

def gauss(A, b):

    A = np.column_stack((A, b)).astype(float)  # matriz ampliada
    N = len(A)  # no. de equacoes do sistema

    # Obtendo a forma triangular superior:
    for i in range(N):  # loop sobre as linhas
        k = np.argmax(np.abs(A[i:, i]))  # buscando o maior pivo
        if k > 0:
            A[i+k], A[i] = np.copy(A[i]), np.copy(A[i+k])  # trocando linhas
        m = A[i, i:] / A[i, i]  # multiplicadores
        for j in range(i+1, N):  # reduzindo as linhas abaixo da linha i
            A[j, i:] -= A[j, i] * m
            A[j, :i] = 0.

    # Resolvendo o sistema triangular superior:
    for i in range(N-1, -1, -1):  # loop sobre as linhas
        for j in range(N-1, i, -1):  # loop sobre as colunas
            A[i, -1] -= A[i, j] * A[j, -1]
        A[i, -1] /= A[i, i]  # ultima coluna de A tem a solucao

    return A[:, -1]
```

- `numpy.argmax(v)` retorna o índice do maior elemento do array v

Biblioteca scipy.linalg

- A biblioteca `scipy.linalg` tem uma função pronta para resolver sistemas lineares:

Solução de sistemas lineares usando a biblioteca scipy.linalg

```
import scipy.linalg as la
'''
scipy.linalg.solve(A, b) retorna x, solucao do sistema A x = b
A -> matriz quadrada de coeficientes
b -> vetor de termos independentes
por exemplo, A = [ [ 1, 1 ], [ 1, -1 ] ], b = [ 4, 2 ]
'''
x = la.solve(A, b)
```