

Luiz Guilherme Moraes da Costa Faria

APRENDIZADO DE MÁQUINA

Brasília, DF
27 de setembro de 2025

Luiz Guilherme Moraes da Costa Faria

APRENDIZADO DE MÁQUINA

Universidade de Brasília

Orientador: Nome do Orientador/Revisor (se aplicável)

Brasília, DF
27 de setembro de 2025

Sumário

Sumário	3
I	HISTÓRIA DA IA E DO COMPUTADOR 11
1	UMA BREVE HISTÓRIA DO COMPUTADOR 13
1.1	A Necessidade de Contar ao Longo das Eras 13
1.1.1	Ábaco 13
1.1.2	Régua de Cálculo 13
1.1.3	Bastões de Napier 13
1.1.4	Pascalina 13
2	UMA BREVE HISTÓRIA DA INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL . . . 15
2.1	Os Anos 1900 15
2.2	Os Anos 1910 15
2.3	Os Anos 1920 15
2.4	Os Anos 1930 15
2.5	Os Anos 1940 15
2.6	Os Anos 1950 15
2.7	Os Anos 1960 15
2.8	Os Anos 1970 15
2.9	Os Anos 1980 15
2.10	Os Anos 1990 15
2.11	Os Anos 2000 15
2.12	Atualidade 15
II	CONCEITOS MATEMÁTICOS 17
3	CÁLCULO PARA APRENDIZADO DE MÁQUINA 19
3.1	Funções: A Base do Cálculo 19
3.2	Derivadas Ordinárias 19
3.3	Integrais Simples 19
3.4	Derivadas Parciais 19
4	ÁLGEBRA LINEAR PARA APRENDIZADO DE MÁQUINA . . . 21
4.1	A Unidade Fundamental: Vetores e Espaços Vetoriais 21

4.2	Organizando Dados: Matrizes e Suas Operações	21
4.3	Tensores: A Estrutura de Dados do Deep Learning	21
4.4	Resolvendo Sistemas e Encontrando Propriedades: Autovalores e Autovetores	21
4.5	Decomposição de Matrizes (SVD e PCA)	21
5	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA PARA APRENDIZADO DE MÁQUINA	23
5.1	Medindo a Incerteza: Probabilidade Básica e Condicional	23
5.2	O Teorema de Bayes: Aprendendo com Evidências	23
5.3	Descrevendo os Dados: Estatística Descritiva: Média, mediana, variância, desvio padrão	23
5.4	Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade	23
5.5	A Função de Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimation - MLE)	23
III	PILARES DAS REDES NEURAIS	25
6	O ALGORITMO DA REPROPROPAGAÇÃO E OS OTIMIZADORES BASEADOS EM GRADIENTE	27
6.1	O Método do Gradiente Descendente	28
6.1.1	Exemplo Ilustrativo: Cadeia de Montanhas	28
6.1.2	O Método em Si	29
6.1.3	Implementação em Python	31
6.2	A Retropropagação: Aprendendo com os Erros	32
6.2.1	Utilizando o Gradiente Descendente para Atualizar os Pesos e Vieses	38
6.2.2	Entendendo Como o Gradiente É Propagado ao Longo de Muitas Camadas	39
6.3	Otimizadores Baseados em Gradiente	42
6.3.1	Método do Gradiente com Momentum	42
6.3.1.1	Implementação em Python	44
6.3.2	Método do Gradiente em Mini-Batch	44
6.3.3	Método do Gradiente Estocástico	44
6.3.3.1	Implementação em Python	44
6.3.4	Gradiente Acelerado de Nesterov	44
6.3.4.1	Implementação em Python	45
6.4	Otimizadores Modernos Baseados em Gradiente	45
6.4.1	Adaptive Gradient Algorithm (AdaGrad)	45
6.4.1.1	Implementação em Python	47
6.4.2	RMSProp	47

6.4.2.1	Implementação em Python	48
6.4.3	Adaptive Moment Estimation (Adam)	48
6.4.3.1	Implementação em Python	50
6.4.4	Nesterov-accelerated Adaptive Moment Estimation (Nadam)	50
6.4.4.1	Implementação em Python	51
6.4.5	AdaMax	51
6.4.6	Implementação em Python	52
6.4.7	Adam With Decoupled Weight Decay (AdamW)	52
6.4.7.1	Implementação em Python	53
6.4.8	RAdam	53
6.4.8.1	Implementação em Python	54
6.4.9	AdaBelief	54
6.4.9.1	Implementação em Python	54
6.4.10	Evolved Sign Momentum (Lion)	54
6.4.10.1	Implementação em Python	55
6.5	O Método de Newton: Indo Além do Gradiente	55
6.5.1	Conceitos iniciais: Matrizes Jacobianas e Hessianas	55
6.5.2	O Método	56
6.5.3	Implementação em Python	57
7	FUNÇÕES DE ATIVAÇÃO SIGMOIDAIS	59
7.1	Teoremas da Aproximação Universal	59
7.2	Exemplo Ilustrativo: Empurrando para extremos	61
7.3	A Sigmoid Logística	62
7.4	Contexto Histórico: Popularização da Sigmoid em Redes Neurais	62
7.4.1	Implementação em Python	67
7.5	Tangente Hiperbólica	67
7.5.1	Implementação em Python	69
7.6	Softsign: Uma Sigmoidal Mais Barata	70
7.6.1	Implementação em Python	72
7.7	Hard Sigmoid e Hard Tanh: O Sacrifício da Suavidade em Prol do Desempenho	73
7.7.1	Implementação em Python	76
7.8	O Desaparecimento de Gradientes	78
7.9	Comparativo de Desempenho das Sigmoidais	80
8	FUNÇÕES DE ATIVAÇÃO RETIFICADORAS	81
8.1	Exemplo Ilustrativo: Vendendo Pipoca	81
8.2	Rectified Linear Unit e Revolução Retificadora	82
8.2.1	Implementação em Python	87

8.3	Dying ReLUs Problem	88
8.4	Corrigindo o Dying ReLUs Problem: As Variantes com Vazamento	88
8.4.1	Leaky ReLU (LReLU)	89
8.4.1.1	Implementação em Python	94
8.4.2	Parametric ReLU	94
8.4.3	Randomized Leaky ReLU	98
8.5	Em Busca da Suavidade: As Variantes Não Lineares	101
8.5.1	Exponential Linear Unit (ELU)	102
8.5.2	Scaled Exponential Linear Unit (SELU)	105
8.5.3	Noisy ReLU	108
8.6	O Problema dos Gradientes Explosivos	114
8.7	Comparativo de Desempenho das Funções Retificadoras	115
9	FUNÇÕES DE ATIVAÇÃO MODERNAS E OUTRAS FUNÇÕES DE ATIVAÇÃO	117
9.1	Gaussian Error Linear Unit (GELU)	117
10	FUNÇÕES DE PERDA PARA CLASSIFICAÇÃO BINÁRIA	121
10.1	A Intuição da Perda: Medindo o Erro do Modelo	121
10.2	Entropia Cruzada Binária (Binary Cross-Entropy): A função de perda padrão	121
10.3	Perda Hinge (Hinge Loss)	121
10.4	Comparativo Visual e Prático	121
11	FUNÇÕES DE PERDA PARA CLASSIFICAÇÃO MULTILABEL	123
11.1	Softmax e a Distribuição de Probabilidades	123
11.2	Entropia Cruzada Categórica (Categorical Cross-Entropy)	123
11.3	Entropia Cruzada Categórica Esparsa (Sparse Categorical Cross-Entropy)	123
12	METAHEURÍSTICAS: OTIMIZANDO REDES NEURAI SEM O GRADIENTE	125
12.1	Algoritmos Evolutivos	125
12.2	Inteligência de Enxame	125
IV	APRENDIZADO DE MÁQUINA CLÁSSICO	127
13	TÉCNICAS DE REGRESSÃO	129
13.1	Exemplo Ilustrativo	129
13.2	Regressão Linear	129

13.2.1	Função de Custo MSE	129
13.2.2	Equação Normal	129
13.2.3	Implementação em Python	129
13.3	Regressão Polinomial	129
13.3.1	Implementação em Python	129
13.4	Regressão de Ridge	129
13.4.1	Implementação em Python	129
13.5	Regressão de Lasso	129
13.5.1	Implementação em Python	129
13.6	Elastic Net	129
13.6.1	Implementação em Python	129
13.7	Regressão Logística	129
13.7.1	Implementação em Python	129
13.8	Regressão Softmax	129
13.8.1	Implementação em Python	129
13.9	Outras Técnicas de Regressão	129
14	ÁRVORES DE DECISÃO E FLORESTAS ALEATÓRIAS	131
14.1	Exemplo Ilustrativo	131
14.2	Entendendo o Conceito de Árvores	131
14.2.1	Árvores Binárias	131
14.3	Árvores de Decisão	131
14.3.1	Implementação em Python	131
14.4	Florestas Aleatórias	131
14.4.1	Implementação em Python	131
15	MÁQUINAS DE VETORES DE SUPORTE	133
15.1	Exemplo Ilustrativo	133
16	ENSAMBLE	135
16.1	Exemplo Ilustrativo	135
17	DIMENSIONALIDADE	137
17.1	Exemplo Ilustrativo	137
17.2	A Maldição da Dimensionalidade	137
17.3	Seleção de Características (Feature Selection)	137
17.4	Extração de Características (Feature Extraction)	137
17.4.1	Análise de Componentes Principais (PCA)	137
17.4.2	t-SNE (t-Distributed Stochastic Neighbor Embedding) e UMAP	137
18	CLUSTERIZAÇÃO	139

18.1	Exemplo Ilustrativo	139
18.2	Aprendizado Não Supervisionado: Encontrando Grupos nos Dados	139
18.3	Clusterização Particional: K-Means	139
18.4	Clusterização Hierárquica	139
18.5	Clusterização Baseada em Densidade: DBSCAN	139
V	REDES NEURAIIS PROFUNDAS (DNNS)	141
19	PERCEPTRONS MLP - REDES NEURAIIS ARTIFICIAIS	143
20	REDES FEEDFORWARD (FFNS)	145
21	REDES DE CRENÇA PROFUNDA (DBNS) E MÁQUINAS DE BOLTZMANN RESTRITAS	147
22	REDES NEURAIIS CONVOLUCIONAIS (CNN)	150
22.1	Exemplo Ilustrativo	150
22.2	Camadas Convolucionais: O Bloco Fundamental para as CNNs . .	150
22.2.1	Implementação em Python	150
22.3	Camadas de Pooling: Reduzindo a Dimensionalidade	152
22.3.1	Max Pooling	152
22.3.1.1	Implementação em Python	152
22.3.2	Average Pooling	154
22.3.2.1	Implementação em Python	154
22.3.3	Global Average Pooling	155
22.3.3.1	Implementação em Python	155
22.4	Camada Flatten: Achatando os Dados	156
22.4.1	Implementação em Python	156
22.5	Criando uma CNN	157
22.6	Detecção de Objetos	157
22.7	Redes Totalmente Convolucionais (FCNs)	157
22.8	You Only Look Once (YOLO)	157
22.9	Algumas Arquiteturas de CNNs	157
22.9.1	LeNet-5	157
22.9.2	AlexNet	157
22.9.3	GoogLeNet	157
22.9.4	VGGNet	157
22.9.5	ResNet	157
22.9.6	Xception	157
22.9.7	SENet	157

23	REDES RESIDUAIS (RESNETS)	159
24	REDES NEURAIS RECORRENTES (RNN)	161
24.1	Exemplo Ilustrativo	161
24.2	Neurônios e Células Recorrentes	161
24.2.1	Implementação em Python	161
24.3	Células de Memória	161
24.3.1	Implementação em Python	161
24.4	Criando uma RNN	161
24.5	O Problema da Memória de Curto Prazo	161
24.5.1	Células LSTM	161
24.5.2	Conexões Peephole	161
24.5.3	Células GRU	161
25	TÉCNICAS PARA MELHORAR O DESEMPENHO DE REDES NEURAIS	163
25.1	Técnicas de Inicialização	163
25.2	Reguralização L1 e L2	163
25.3	Normalização	163
25.3.1	Normalização de Camadas	163
25.3.2	Normalização de Batch	163
25.4	Clipping do Gradiente	163
25.5	Dropout: Menos Neurônios Mais Aprendizado	163
25.6	Data Augmentation	163
26	TRANSFORMERS	165
26.1	As Limitações das RNNs: O Gargalo Sequencial	165
26.2	A Ideia Central: Self-Attention (Query, Key, Value)	165
26.3	Escalando a Atenção: Multi-Head Attention	165
26.4	A Arquitetura Completa: O Bloco Transformer	165
26.5	Entendendo a Posição: Codificação Posicional	165
26.6	As Três Grandes Arquiteturas	165
26.6.1	Encoder-Only (Ex: BERT): Para tarefas de entendimento	165
26.6.2	Decoder-Only (Ex: GPT): Para tarefas de geração	165
26.6.3	Encoder-Decoder (Ex: T5): Para tarefas de tradução/sumarização	165
26.7	Além do Texto: Vision Transformers (ViT)	165
27	REDES ADVERSÁRIAS GENERATIVAS (GANS)	167
28	MIXTURE OF EXPERTS (MOE)	169

29	MODELOS DE DIFUSÃO	171
30	REDES NEURAIIS DE GRAFOS (GNNS)	173
VI	APÊNDICES	175
	Referências	177

Parte I

História da IA e do Computador

1 Uma Breve História do Computador

1.1 A Necessidade de Contar ao Longo das Eras

1.1.1 Ábaco

1.1.2 Régua de Cálculo

1.1.3 Bastões de Napier

1.1.4 Pascalina

2 Uma Breve História da Inteligência Artificial

2.1 Os Anos 1900

2.2 Os Anos 1910

2.3 Os Anos 1920

2.4 Os Anos 1930

2.5 Os Anos 1940

2.6 Os Anos 1950

2.7 Os Anos 1960

2.8 Os Anos 1970

2.9 Os Anos 1980

2.10 Os Anos 1990

2.11 Os Anos 2000

2.12 Atualidade

Parte II

Conceitos Matemáticos

3 Cálculo para Aprendizado de Máquina

3.1 Funções: A Base do Cálculo

3.2 Derivadas Ordinárias

3.3 Integrais Simples

3.4 Derivadas Parciais

4 Álgebra Linear para Aprendizado de Máquina

4.1 A Unidade Fundamental: Vetores e Espaços Vetoriais

4.2 Organizando Dados: Matrizes e Suas Operações

4.3 Tensores: A Estrutura de Dados do Deep Learning

4.4 Resolvendo Sistemas e Encontrando Propriedades: Autovalores e Autovetores

4.5 Decomposição de Matrizes (SVD e PCA)

5 Probabilidade e Estatística para Aprendizado de Máquina

5.1 Medindo a Incerteza: Probabilidade Básica e Condicional

5.2 O Teorema de Bayes: Aprendendo com Evidências

5.3 Descrevendo os Dados: Estatística Descritiva: Média, mediana, variância, desvio padrão

5.4 Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade

5.5 A Função de Máxima Verossimilhança (Maximum Likelihood Estimation - MLE)

Parte III

Pilares das Redes Neurais

6 O Algoritmo da Retropropagação e Os Otimizadores Baseados em Gradiente

A filosofia de vida do gradiente descendente: 'Para lá é para baixo? É. Então eu vou para lá.'

— A Sabedoria do Algoritmo

Cada rede neural é composta de diferentes partes, uma rede feedforward é composta de camadas densas, que por sua vez são compostas por um conjunto de neurônios. Uma rede convolucional, possui camadas de achatamento, camadas de pooling e camadas convolucionais, que possuem kernels muitas vezes inteligentes que aprendem conforme o o treino a reconhecer diferentes padrões em imagens. Já uma rede recorrente, possui camadas com neurônios recorrentes, que buscam reconhecer padrões em diferentes tipos de séries, a fim de que seja por exemplo, possível prever qual será o valor de ação de uma marca x no dia 27 de setembro de 2025.

O que não falta em uma rede neural são parâmetros, eles estão por todos os lados. Agora imagine que você está encarregado de criar uma rede convolucional para reconhecer imagens de cães e gatos e precisa de forma manual ajustar todos, o pesos das camadas densas junto com o seus vieses, além de ter que atualizar os valores de um kernel presente na primeira camada convolucional.

Certamente isso é impossível de ser feito, uma rede como essa pode ter milhares e até milhões de parâmetros. Por isso, uma das formas de contornar esse problema, e, deixar para que o computador faça as suas atualiações é a retropropagação. Ela caminha junto com o método do gradiente para que todas essas atualiações sejam feitas de forma automática, e com uma maior garantia que ela será eficaz, uma vez que estará se baseando em como o erro do modelo que está sendo treinado é medido.

Esse capítulo se inicia explicando o conceito do método do gradiente, e como ele foi o ponto de partida para que a os pesquisadores pudessem criar a retropropagação. Contudo, essa otimização com o tempo passou a ser demorada, e assim, novos métodos surgiram, como o gradiente descendente com momento. Conforme o poder computacional foi aumento, outros métodos mais modernos também surgiram, apresentando conceitos novos, como múltiplas taxas de aprendizado, como o AdaGrad, de forma que características menos frequentes possuísem uma taxa de aprendizado maior, indicando que o modelo que estava sendo criado seria mais sensível à essas propriedades, e com isso, ele pudesse "tomar nota" quando uma informação assim aparecesse.

6.1 O Método do Gradiente Descendente

O Método do Gradiente faz parte de uma série de métodos numéricos que possuem como função otimizar diferentes funções. Métodos dessa forma veem sendo estudados a séculos, um exemplo disso é o trabalho *Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées* (Método geral para resolução de sistemas de equações simultâneas em português) do matemático francês do século XVIII Cauchy (1847), em que o autor apresenta um método que pode ser considerado um precursor para o método do gradiente atual.

Nesse texto, o autor apresenta uma forma de minimizar uma função de múltiplas variáveis ($u = f(x, y, z)$) que não assume valores negativos, para fazer isso, ele faz uso do cálculo de derivadas parciais dessa função de cada um dos seus componentes ($D_x u, D_y u, D_z u$), em seguida, ele realiza um passo de atualização, de forma que os valores de cada uma das variáveis sejam ligeiramente incrementados por valores (α, β, γ) (Cauchy, 1847). Um ponto importante destacado por Cauchy (1847) é de que esses incrementos devem ser proporcionais ao negativo das suas respectivas derivadas parciais, ele descreve que esse processo de calcular as derivadas e fazer pequenos incrementos deve ser feito de forma iterativa, assim, calculá-se as derivadas, faz-se os incrementos, e o passo é repetido até convergir para o valor mínimo de u .

Esse trabalho explica bem como aplicar o método do gradiente para se calcular mínimos de funções, mas para facilitar o entendimento do leitor, em seguida está um exemplo ilustrativo explicando o funcionamento dessa ferramenta.

6.1.1 Exemplo Ilustrativo: Cadeia de Montanhas

Imagine que você adora aventuras, e por isso, decidiu fazer uma trilha em uma floresta que fica em uma cadeia de montanhas que podem ser escaladas. Então, você teve a incrível ideia de ir para o menor ponto dessa cadeia de montanhas, pois, no guia que você estava seguindo, falava que lá havia um lago com uma água cristalina, perfeito para tirar fotos.

Para chegar até esse lago, você conta com uma bússula um tanto quanto diferente, ao invés dela apontar para o norte como uma bússula comum, ela aponta para a direção do lugar com menor altitude de uma região. Isso é perfeito para o que você precisa, pois ela irá apontar justamente para o lago de você quer ir.

Com isso em mente, você criou um plano de como irá chegar a esse lago, ele é método que segue dois passos diferentes, sendo eles:

1. Olha na bússula qual a direção ela está apontando;
2. Anda um metro na direção apontada pela bússola.

Você chegou na conclusão que se seguir essa estratégia repetidas vezes, em algum momento, você inevitavelmente irá chegar no lago que está querendo tirar as suas fotos.

Na matemática, existe um método semelhante a este, que busca com base em uma bússola (chamada de vetor gradiente), encontrar um ponto de mínimo de um determinado lugar (neste caso, uma função composta por múltiplas variáveis). Esse é o método do gradiente, ele é ponto central desse capítulo, pois, ele (e suas variações) junto com o algoritmo da retropropagação são algumas das principais ferramentas que colaboram para que os modelos de aprendizado de máquina possam aprender com os seus erros e com isso se tornarem melhores a cada iteração.

6.1.2 O Método em Si

A vantagem do método do gradiente é que ele é uma ferramenta matemática, e por isso pode ser representado utilizando notações mais formais e de forma enxuta. As notações utilizadas por Cauchy são diferentes das que são utilizadas hoje em dia, mas o seu significado não muda. Em *Deep Learning*, Goodfellow, Bengio e Courville (2016) explicam essa ferramenta através da equação 6.1 que deve ser repetida por múltiplos passos até o modelo convergir, ou seja, encontrar o ponto de mínimo da função estudada.

Método do Gradiente Descendente

$$x = x_0 - \epsilon \nabla f(x_0) \quad (6.1)$$

Em que:

- x' : representa as coordenadas do próximo ponto;
- x : representa as coordenadas do ponto atual;
- ϵ : representa o tamanho do passo, também chamado de taxa de aprendizado;
- $\nabla f(x)$: representa o vetor gradiente calculado na posição do ponto atual (x) para função que se deseja otimizar.

Note que assim como no método proposto por Cauchy, é pego como base o inverso do vetor gradiente. Isso ocorre pois o vetor gradiente é um vetor especial que tem como principal propriedade apontar para a direção de maior crescimento de uma função no ponto que está sendo calculada. Mas no método, o objetivo não é encontrar o ponto que irá gerar os maiores valores da função, e sim o contrário. Por isso, é tomado inverso do vetor gradiente, que, dessa forma, estará então apontando para a direção de menor crescimento de uma função.

Um ponto a ser destacado nesse método é na hora de escolher uma taxa de aprendizado para ser utilizada no método. Uma taxa de aprendizado muito pequena significa que o passo que o modelo irá dar de um ponto para outro será menor, e com isso implica que ele levará mais passos para encontrar um ponto de mínimo. É como se você fosse comparar a quantidade de passos que você gasta para andar do seu quarto até a sua cozinha com a quantidade de passos dados por uma formiga até lá, ambos vão chegar no local, mas a formiga certamente irá demorar bem mais. Considerando isso, surge então a hipótese de que quanto maior for o passo, mais rápido será a convergência, mas isso também não funciona muito bem, pois um passo muito largo pode ultrapassar o ponto de mínimo indo parar em outro canto da função, e ficará tentando chegar até o mínimo mas não irá conseguir pois caminha uma distância muito grande de uma só vez. Essas duas situações, em que o passo é pequeno demais e que o passo é grande demais, são ilustradas na figura 1.

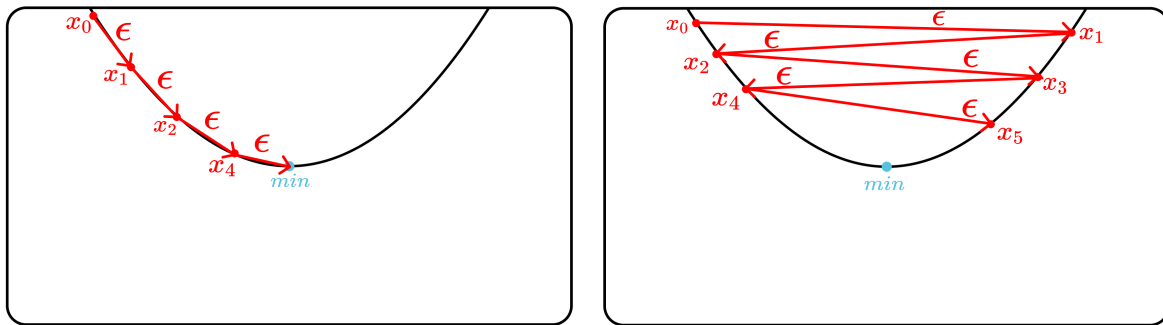


Figura 1 – Comparativo do tamanho de passos em uma função polinomial.

Na prática, escolher o valor da taxa de aprendizado é uma tarefa que irá depender de modelo em modelo, também irá variar com os diferentes métodos de otimização além da topologia da rede neural que está sendo construída. É sempre recomendado então experimentar diferentes tamanhos de passo, de forma que seja encontrado um que melhor se ajusta ao cenário que está sendo trabalhado.

Outro ponto que deve-se atentar é com relação as funções que estão sendo analisadas ao utilizar o método do gradiente mas também qualquer otimizador que seja baseado nele. Se tivermos uma função convexa, em que seu formato lembra um funil, será bem mais fácil para o modelo encontrar o ponto de mínimo global daquela função. Mas se tivermos uma função não convexa, cheia de ondas e com muitos pontos de mínimos locais e pontos de sela, a convergência do modelo será pior, pois existe a chance de que ele fique preso em um ponto de mínimo local ou em um ponto de sela. Isso afeta diretamente o desempenho da rede neural que estará sendo criada, fazendo com que ela tenha métricas piores. O problema é que muitas das vezes a função $f(x)$ que estaremos interessados para calcular o desempenho do modelo será não convexa,

dificultando o seu aprendizado.

Na figura 2 é possível ver o gráfico de duas funções diferentes, a primeira sendo uma função convexa e a segunda uma função não convexa.

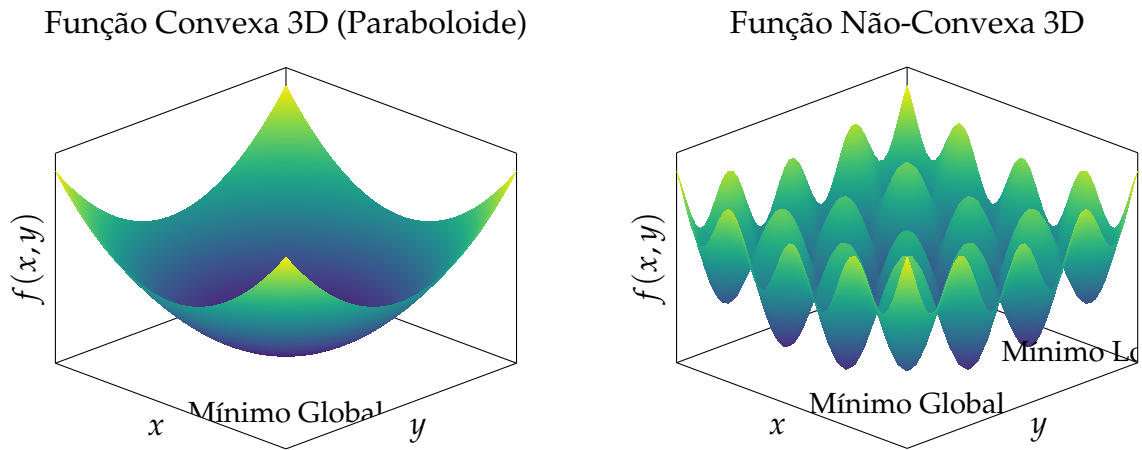


Figura 2 – Comparação entre funções 3D convexas e não-convexas.

6.1.3 Implementação em Python

Algorithm 1 O Método do Gradiente (Descida do Gradiente)

Requer: Taxa de aprendizado global ϵ

Requer: Parâmetros iniciais θ

- 1: Inicialize os parâmetros θ
 - 2: **while** critério de parada não for atingido **do**
 - 3: Calcule o gradiente $\mathbf{g} \leftarrow \nabla_{\theta} L(\theta)$, usando **todo** o conjunto de treinamento
 - 4: Calcule a atualização: $\Delta\theta \leftarrow -\epsilon \mathbf{g}$
 - 5: Aplique a atualização: $\theta \leftarrow \theta + \Delta\theta$
 - 6: **end while**
-

Para implementar o método do gradiente utilizando Python e a biblioteca de cálculos Numpy, deve-se seguir como base a equação 6.1, criando uma classe implenta essa ferramenta, recebendo como parâmetros de entrada a taxa de aprendizado (`learning_rate`), a função que se quer encontrar o ponto de mínimo (`function`), e um ponto inicial (`initial_point`), que pode ser um conjunto de coordenadas aleatórias ou escolhidas pelo programador.

Outro ponto que deve ser destacado nas informações dessa função é de que ela também irá receber a derivada da função (`function_prime`) que se quer descobrir o ponto de mínimo, pois não será feito cálculo simbólico para calcular o vetor gradiente. Dessa forma os cálculos serão mais rápidos. Além disso, também é preciso definir outros parâmetros auxiliares, como a quantidade máxima de iterações que o modelo irá seguir (`tolerance`), que são chamadas de épocas `epochs`, também será definida um

grau de tolerância para o modelo, pois, podem existir casos em que a norma do vetor gradiente não será exatamente zero, mas um valor muito próximo de zero, assim a tolerância será responsável por definir qual valor dessa diferença será aceitável para o problema.

Por fim, um ponto interessante que é possível adicionar nessa função é uma lista, que irá armazenar todos os pontos que o modelo passou em cada uma de suas iterações, indicando o seu caminho pela função que está sendo estudada.

Bloco de Código : Classe completa do otimizador GradientDescent

```
1 class GradientDescent:
2
3     def __init__(self, function, function_prime, initial_point
4         , learning_rate=0.001, epochs=100, tolerance=1e-6):
5         self.f = function
6         self.fp = function_prime
7         self.ip = initial_point
8         self.lr = learning_rate
9         self.ep = epochs
10        self.tol = tolerance
11        self.path = []
12
13    def update_step(self):
14        for i in range(self.ep):
15            self.path.append(self.ip)
16            grad = self.fp(self.ip)
17            if abs(grad) < self.tol: break
18            self.ip = self.ip + self.lr * (-grad)
19        return self.ip, self.path
```

Note que a classe apresenta apenas dois métodos, o primeiro sendo o `__init__`, que inicializa os parâmetros da classe, e a `update_step` a qual é responsável por implementar de fato o método do gradiente, ela irá retornar o ponto de mínimo e também a lista com os pontos pelos quais o modelo passou ao longo das iterações.

6.2 A Retropropagação: Aprendendo com os Erros

Ainda no contexto de utilizar com o vetor gradiente para otimizar um modelo de rede neural, existe uma ferramenta que trabalha justamente com esse processo, ela é a retropropagação ou *backpropagation* em inglês.

Definição: A **retropropagação** é uma ferramenta que veio para permitir que redes que fazem o uso de unidades de neurônios possam aprender, para isso, o procedimento ajusta repetidamente os pesos das conexões da rede para minimizar a diferença entre o valor atual da saída do vetor da rede neural com o valor real desejado (Rumelhart; Hinton; Williams, 1986).

Essa ferramenta foi introduzida para a comunidade científica pelos pesquisadores Rumelhart, Hinton e Williams (1986) no texto *Learning Representations by Back-Propagating Errors*, e será explicada nesse capítulo de forma detalhada. Para isso Rumelhart, Hinton e Williams (1986) começam introduzindo três diferentes funções que serão utilizadas ao longo do texto para deduzir os conceitos da retropropagação do gradiente, sendo elas: a equação do neurônio, a função de ativação sigmoide e a função de custo do erro quadrático médio.

A primeira função, representada na equação xx, explica como um neurônio de uma camada densa irá funcionar quando recebe determinadas entradas.

Equação do Neurônio

$$x_j = \left(\sum_i y_i \cdot w_{ji} \right) + b_j \quad (6.2)$$

Sendo que:

- x_j : representa a saída de um neurônio j ;
- y_i : representa a entrada do neurônio j , a qual é resultado da saída de um neurônio i da camada anterior;
- w_{ij} : representa o peso da conexão entre o neurônio i com o neurônio j ;
- b_j : representa o viés do neurônio j .

Caso você leitor decida olhar o artigo original, verá que os autores utilizaram notações diferentes na fórmula do neurônio, eles utilizam algo na forma $x_i = \sum_i y_i \cdot w_{ji}$, sem o viés, mas na prática, eles adicionam o viés como um peso extra que terá valor fixo igual a 1, na prática, ele pode ser tratado com um peso normal, por isso a notação mais simplificada (Rumelhart; Hinton; Williams, 1986).

A segunda fórmula diz respeito a função de ativação que será utilizada, neste caso, Rumelhart, Hinton e Williams (1986) utilizam a sigmoide logística, representada na fórmula xx, mas eles explicam que essa função pode variar conforme o problema, porém recomendam ter uma derivada limitada além de ser não linear, para que o modelo possa aprender de forma mais eficiente.

Sigmoide Logística

$$y_j = \sigma(x_j) = \frac{1}{1 + e^{-x_j}} \quad (6.3)$$

Assim, a sigmoide é a função que irá transformar a saída do neurônio x_j em uma saída y_j que vai ser passada para o neurônio da camada seguinte. Além das duas notações da equação do neurônio, existe uma terceira, que já imbuí a função de ativação na equação do neurônio, nesse livro, utilizaremos uma implementação de camadas, em que elas não possuem a função embutida, assim, caso decida que a saída da camada densa deva passar por uma função de ativação, ela deverá ser passada como uma camada separada, sendo algo da forma: camada densa, seguida de camada de ativação.

Por fim, a última equação que os autores discutem para entender a retropropagação é a da função de custo, ou também chamada de erro. No texto, Rumelhart, Hinton e Williams (1986) utilizam a função do erro quadrático médio (MSE), a qual calcula o erro entre a saída atual do modelo e o valor real desejado, depois ela eleva ao quadrado esse valor, e por último, divide por dois. Ela é dada pela equação:

Erro Quadrático Médio (MSE)

$$E = \frac{1}{2} \sum_c \sum_j (y_{j,c} - d_{j,c})^2 \quad (6.4)$$

Em que:

- E : representa o valor do erro;
- $y_{j,c}$: representa o valor atual da saída do neurônio j para o caso c ;
- $d_{j,c}$: representa o valor desejado para o neurônio j para o caso c

Considerando essas equações, Rumelhart, Hinton e Williams (1986) explicam que o objetivo é reduzir o valor do erro E , para isso, eles aplicam o método do gradiente para encontrar o ponto de mínimo da função MSE. Para isso, o primeiro passo é diferenciar o valor da função de erro em relação a cada um dos pesos da rede neural, assim, deve-se calcular $\partial E / \partial y_k$ para um caso específico k , e depois generalizar a situação. Assim, é possível encontrar uma expressão da forma:

$$\frac{\partial E}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\frac{1}{2} \sum_c \sum_k (y_{k,c} - d_{j,c})^2 \right]$$

O primeiro passo é suprimir a soma sobre os casos c , pois, consideramos apenas de um caso específico k , então a expressão se simplifica para:

$$\frac{\partial E}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\frac{1}{2} \sum_k (y_{k,c} - d_{j,c})^2 \right]$$

O próximo passo é abrir a soma, para isso, será considerado que existem n neurônios na camada, assim, a expressão fica:

$$\frac{\partial E}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\frac{1}{2} \left((y_1 - d_1)^2 + (y_2 - d_2)^2 + \dots + (y_k + d_k)^2 + \dots + (y_n + d_n)^2 \right) \right]$$

Note que todos os termos que não possuem o índice k , como a parte $(y_1 - d_1)^2$, serão valores constantes, e que estarão fora do objetivo de calcular a derivada para o neurônio k , como eles são constantes, a sua derivada será igual a zero. Com base nisso, é possível obter uma versão ainda mais simplificada, sendo ela:

$$\frac{\partial E}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\frac{1}{2} (y_k + d_k)^2 \right]$$

Agora, o último passo é aplicar a regra da cadeia na expressão que sobrou para poder calcular a derivada, neste caso, será considerado que $u = (y_k + d_k)$, assim a expressão final fica:

$$\frac{\partial E}{\partial y_k} = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot \frac{\partial u}{\partial y_k} = (y_k - d_k) \cdot 1 = (y_k - d_k)$$

Voltando para o índice j da notação inicial, é possível concluir que o gradiente do erro (para a função MSE) em relação a uma saída específica de um neurônio é dado pela diferença da saída da unidade pelo resultado desejado, ou seja

$$\frac{\partial E}{\partial y_j} = (y_j - d_j)$$

O próximo passo proposto pelos autores, consiste em calcular o gradiente do erro em relação a entrada do neurônio j , para entender como o erro total muda em relação a uma variação na entrada do neurônio. Para isso, é preciso encontrar então a expressão $\partial E / \partial x_j$ (Rumelhart; Hinton; Williams, 1986).

Assim, a primeira etapa é aplicar a regra da cadeia, pois, como a entrada do neurônio x_j não aparece diretamente na equação do erro, é preciso aplicar a regra da cadeia, derivando o erro em relação a saída do neurônio y_j e multiplicando esse resultado pela derivada da saída do neurônio em relação a sua entrada, assim, a expressão inicial é:

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_j}$$

Perceba duas coisas nessa expressão, a primeira é que o primeiro termo é resultante o primeiro que foi calculado e desenvolvido na expressão ??, com isso, é possível substituir esse termo na expressão por $y_j - d_j$. A segunda informação, é de que o

termo $\partial y_i / \partial x_j$ é justamente a derivada da função de ativação em relação a sua entrada, ou seja, $\sigma'(x_j)$, assim, a derivada da sigmoide será dada por:

$$\frac{dy_i}{dx_j} = y_j(1 - y_j)$$

Sendo assim, a expressão final fica:

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot y_j \cdot (1 - y_j)$$

Note que é possível generalizar essa expressão, dessa forma o gradiente do erro da entrada de um neurônio é o gradiente do erro da saída do neurônio multiplicado pela derivada da função de ativação σ' em relação a sua entrada x_j .

Cálculo do Gradiente do Erro em Relação à Entrada de um Neurônio

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \sigma'(x_j) \quad (6.5)$$

em que $\sigma'(x_j)$ representa a derivada de uma função de ativação qualquer, neste caso representa a sigmoide logística. Mas pode ser outra função, como a tangente hiperbólica ou a ReLU. Um ponto importante a ser destacado, é que como a retropropagação trabalha com o método do gradiente, as derivadas são parte essencial do algoritmo, utilizar funções de ativação que possuem derivadas complexas, ou que não podem ser derivadas em grande parte do seu domínio, acabam por dificultar o algoritmo. Caso a função possua uma derivada complexa, o cálculo do gradiente irá demorar mais, pois levará uma quantidade maior de operações para computar o valor da derivada.

O próximo passo vai mais além ainda, agora, como Rumelhart, Hinton e Williams (1986) explicam, o seu objetivo é entender como o gradiente muda em relação a um peso w_{ij} específico da rede neural, para isso, é preciso calcular a expressão $\partial E / \partial w_{ij}$, note mais uma vez que o peso w_{ij} não aparece diretamente na equação do erro, assim, é necessário mais uma vez aplicar a regra da cadeia para calcular essa derivada. Assim, a expressão inicial é:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial w_{ij}}$$

Note que o primeiro termo da expressão é justamente o que foi calculado na equação 6.5, assim, é preciso calcular apenas o segundo termo, $\partial x_j / \partial w_{ij}$, ou seja, a derivada do neurônio em relação a um peso específico. Assim, tem-se a expressão inicial:

$$\frac{\partial x_j}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \left[\left(\sum_i y_i \cdot w_{ji} \right) + b_j \right]$$

Note que o viés, dado por b_j é uma constante, e por isso, não depende do peso w_{ij} , então a sua derivada será igual a zero, isso nos permite simplificar a expressão para:

$$\frac{\partial x_j}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} \left[\sum_i y_i \cdot w_{ji} \right]$$

Em seguida, é possível abrir a soma, assim, temos a expressão:

$$\frac{\partial x_j}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} [(y_1 \cdot w_{j1}) + (y_2 \cdot w_{j2}) + \dots (y_i \cdot w_{ji}) + \dots (y_n \cdot w_{jn})]$$

Note que para qualquer termo que o índice não é w_{ji} a derivada será iguala zero, pois eles serão constantes em relação ao peso w_{ji} , dessa forma, é possível simplificar mais uma vez a expressão obtendo:

$$\frac{\partial x_j}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}} [y_i \cdot w_{ji}]$$

Como y_i é uma constante em relação a w_{ij} a derivada final será dada por:

$$\frac{\partial x_j}{\partial w_{ij}} = y_i$$

Agora é possível voltar para a expressão inicial, obtendo então a expressão final para o gradiente do erro em relação a um peso específico da rede neural, sendo ela:

Cálculo do Gradiente do Erro em Relação a um Peso de um Neurônio

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot y_i = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \sigma'(x_j) \cdot y_i \quad (6.6)$$

Assim, é possível concluir que o gradiente do erro em relação a um peso específico de um neurônio é dado pelo gradiente do erro da saída do neurônio multiplicado pela derivada da função de ativação em relação a sua entrada e, por fim, multiplicado pela entrada do neurônio.

O próximo passo não está no artigo original, ele envolve entender como o erro varia em relação a um viés de um neurônio específico, ou seja, é preciso calcular a expressão $\partial E / \partial b_j$. Note que mais uma vez o viés b_j não aparece diretamente na equação do erro, ele está dentro da equação do neurônio, assim, novamente é preciso aplicar a regra da cadeia para encontrar essa derivada, assim, a expressão inicial é dada por:

$$\frac{\partial E}{\partial b_j} = \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial b_j}$$

A primeira expressão, $\partial E / \partial x_j$, já foi calculada na equação 6.5, assim, é preciso focar apenas na segunda parte da expressão, $\partial x_j / \partial b_j$, que avalia como a saída do neurônio x_j varia em relação ao viés b_j . Com base, nisso, é possível chegar na expressão:

$$\frac{\partial E}{\partial b_j} = \frac{\partial}{\partial b_j} \left[\left(\sum_k y_k \cdot w_{jk} \right) + b_j \right]$$

Note que os termos que não possuem o viés, como a parte que faz a soma da multiplicação das entradas pelos pesos, $\sum_l y_k \cdot w_{jk}$, são constantes em relação ao viés, portanto, a sua derivada será igual a zero, de tal forma que é possível simplificar a expressão para:

$$\frac{\partial E}{\partial b_j} = \frac{\partial}{\partial b_j} [b_j]$$

Com base nessa expressão, é possível concluir que a derivada da saída do neurônio em relação ao viés é igual a 1. Assim, voltando para a expressão inicial, temos que o gradiente do erro em relação ao viés de um neurônio específico é dado pelo gradiente do erro da entrada entrada total desse neurônio, ou seja:

Cálculo do Gradiente do Erro em Relação a um Viés de um Neurônio

$$\frac{\partial E}{\partial b_j} = \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot 1 = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \sigma'(x_j) \quad (6.7)$$

6.2.1 Utilizando o Gradiente Descendente para Atualizar os Pesos e Vieses

Já que é possível calcular o gradiente do erro em relação a um peso específico de um neurônio, e também em relação a um viés específico de um neurônio, o próximo passo proposto pelos autores é utilizar o método do gradiente como uma forma de atualizar os pesos (e também os vieses no nosso caso) da rede neural, de forma a minimizar o valor do erro com pequenas atualizações em cada um desses parâmetros (Rumelhart; Hinton; Williams, 1986).

Note que o método do gradiente, explicado na seção anterior diz que para atualizar um parâmetros, é preciso pegar o valor atual do parâmetro, e subtrair dele o valor do gradiente multiplicado pelo tamanho do passo (ou taxa de aprendizado). dessa forma, a regra de atualização para um peso específico é dada pela equação 6.8

Regra de Atualização de um Peso Através do Método do Gradiente

$$w_{t+1} = w_t - \epsilon \frac{\partial E}{\partial w} \quad (6.8)$$

Em que:

- w_{t+1} representa o valor do peso atualizado após o incremento do método do gradiente;

- w_t representa o valor inicial do peso na iteração t ;
- ϵ representa o tamanho do passo / taxa de aprendizado;
- $\partial E / \partial w$ representa o gradiente do erro em relação ao peso.

Analogamente, a regra de atualização de um viés pelo método do gradiente é dada pela equação 6.9

Regra de Atualização de um Viés Através do Método do Gradiente

$$b_{j,t+1} = b_{j,t} - \epsilon \frac{\partial E}{\partial b_j} \quad (6.9)$$

Neste caso, $b_{j,t+1}$ representa o valor final de um viés j após o incremento do método e $b_{j,t}$ o valor inicial do viés j .

Um ponto a ser destacado, é que quando estiver trabalhando com uma camada densa de neurônios, você não irá lidar com um neurônio específico, e sim como uma conjunto inteiro deles. Dessa forma, eles estarão distribuídos de forma vetorizada, que terá um vetor de vieses, uma matriz de pesos e um vetor de neurônios. Assim, as expressões eq:regra-de-atualizacao-do-vetor-de-pesos-atraves-do-metodo-do-gradiente e 6.11, resumem as regras de atualização de pesos e vieses, respectivamente, para casos em que estiver lidando com um conjunto de vetores ao invés de somente um dado.

Regra de Atualização do Vetor de Pesos Através do Método do Gradiente

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \epsilon \nabla_{\mathbf{w}} E \quad (6.10)$$

Regra de Atualização do Vetor de Vieses Através do Método do Gradiente

$$\mathbf{b}_{t+1} = \mathbf{b}_t - \epsilon \nabla_{\mathbf{b}} E \quad (6.11)$$

6.2.2 Entendendo Como o Gradiente É Propagado ao Longo de Muitas Camadas

Por fim, com base no que foi explicado até agora, é possível entender melhor como o gradiente passa de uma camada para a outra durante a retropropagação, para isso será analisada um rede com quatro camadas densas, sendo elas:

- **Camada 1 (Entrada)::** Ela possui neurônios com o índice i ;
- **Camada 2 (Oculta 1)::** Ela possui neurônios com o índice j ;

- **Camada 3 (Oculta 3)::** Ela possui neurônios com o índice k ;
- **Camada 4 (Oculta 3)::** Ela possui neurônios com o índice l ;

O objetivo é calcular o gradiente de um peso da primeira camada de pesos, w_{ji} , ou seja, é um peso que conecta um neurônio da camada i com um neurônio da camada j . Assim, o primeiro passo é utilizar a fórmula 6.6, que calcula o gradiente do erro em relação a um peso qualquer.

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot y_i$$

Para encontrar esse gradiente, é preciso desenvolver a expressão $\partial E / \partial x_j$, que representa o gradiente do erro da entrada de um neurônio j da primeira camada oculta. Para isso, é possível utilizar como base a equação 6.5, obtendo então:

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \frac{\partial E}{\partial y_j} \cdot \sigma'(x_j)$$

Nessa expressão, $\sigma'(x_j)$ representa a função de ativação, já o termo $\partial E / \partial y_j$ representa o gradiente que está vindo da camada de cima, o qual é dado por:

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial E}{\partial x_k} \cdot w_{kj}$$

Juntando os dois termos:

$$\frac{\partial E}{\partial x_j} = \left(\sum_k \frac{\partial E}{\partial x_k} \cdot w_{kj} \right) \sigma'(x_j)$$

Agora, é preciso calcular o termo $\partial E / \partial x_j$, de forma que será possível trazer o gradiente da camada de saída l , assim temos:

$$\frac{\partial E}{\partial x_k} = \left(\sum_l \frac{\partial E}{\partial x_l} \cdot w_{lk} \right) \cdot \sigma'(x_k)$$

Em que $\partial E / \partial x_l$ representa o primeiro gradiente, ele é calculado na camada de saída.

Por último, é preciso combinar essas expressões, encontrando como resultado a expressão:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \left(\sum_k \left[\left(\sum_l \frac{\partial E}{\partial x_l} \cdot w_{lk} \right) \sigma'(x_k) \right] \cdot w_{kj} \right) \sigma(x_j) \cdot y_i$$

Com base nessa expressão, é possível concluir que o gradiente de uma camada inicial é proporcional a uma cadeia de multiplicações dos pesos e das derivadas das funções de ativação das camadas posteriores, de forma que é possível simplificar isso para:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\text{primeira camada}}} \propto (\text{gradiente da saída}) \cdot (w_{\text{camada 3}} \cdot \sigma'_{\text{camada 3}}) \cdot (w_{\text{camada 2}} \cdot \sigma'_{\text{camada 2}})$$

Generalizando essa expressão, é possível concluir que o gradiente para uma camada é dado pela equação 6.12.

Gradiente para N Camadas

$$\delta^{(L)} = \left(\left(\mathbf{W}^{(L+1)} \right)^T \delta^{(L+1)} \right) \odot \sigma'(x^{(L)}) \quad (6.12)$$

Em que:

- L : Representa o índice de uma camada, podendo ser um valor entre 1 (indicando que é uma camada de entrada) ou n (indicando que é uma camada de saída);
- $\mathbf{W}^{(L)}$: Representa a matriz de pesos que conecta a camada $L - 1$ à camada L ;
- $b^{(L)}$: Representa o vetor de viés da camada L ;
- $x^{(L)}$: Representa o vetor de entradas totais para os neurônios da camada L antes da ativação;
- $y^{(L)}$: Representa o vetor de saídas da camada L ;
- $\delta^{(L)}$: Representa o vetor do gradiente na camada L ;
- $\sigma'(x^{(L)})$: Representa o vetor contendo a derivada da função de ativação para cada neurônio da camada L ;
- \odot : O produto de Hadamard, que significa multiplicação elemento a elemento.

Assim, é possível entender como o gradiente irá se propagar ao longo de uma rede neural. Esse ponto é um dos mais importantes, pois é possível considerar que ele terá uma grande relação com as funções de ativação que são utilizadas. Essa é uma relação complicada, pois, enquanto um determinado tipo de função possa causar um tipo de problema no cálculo do gradiente, e por isso não deve ser uma opção viável para ser escolhida para resolver um problema, optar por outra família de função também pode acarretar outro tipo de problema com o gradiente.

Para isso, o capítulo 7 foca em entender as principais funções sigmoidais, como a sigmoide e a tangente hiperbólica, e como essas possuem uma forte relação com o problema do desaparecimento de gradientes. Em seguida, o capítulo 8 busca introduzir as funções retificadoras, como a ReLU, e como elas podem ser uma alternativa para contornar esse problema. Contudo, isso não as torna perfeitas, elas ainda são susceptíveis a outro tipo de problema: a explosão de gradientes; e, no caso da ReLU: o problema dos neurônios agonizantes.

6.3 Otimizadores Baseados em Gradiente

Como Rumelhart, Hinton e Williams (1986) explicam logo ao terminar a dedução do cálculo da atualização dos pesos utilizando o método do gradiente, esse processo pode ser bastante lento quando comparado com métodos que fazem uso de derivadas de segunda ordem, que certamente são mais caras para serem implementadas no computador. Assim, os autores recomendam uma variação do método do gradiente que faz uso de momentum com intuito de acelerar a convergência a um custo computacional menor que o de implementar derivadas de segunda ordem (Rumelhart; Hinton; Williams, 1986).

6.3.1 Método do Gradiente com Momentum

Uma boa analogia para entender como o método do gradiente com momentum funciona é pensar é uma pedra rolando morro abaixo. No começo, quando ela não havia pegado muita velocidade, ela demorava para rolar e dependendo podia quase parar em algum pedaço do morro, mas conforme foi descendo, foi ganhando mais velocidade, de forma que quando chegar no final do morro, a sua velocidade será bem maior do que quando estava no topo do mesmo. Essa variante funciona de forma parecida a esse cenário.

Da mesma forma que o método do gradiente não surgiu originalmente no contexto do aprendizado de máquina, a sua variante com momentum não foi diferente. Um os artigos que trabalha com esse conceito de utilizar o momentum para acelerar a velocidade do método do gradiente e com isso obter uma convergência mais rápida é o *Some methods of speeding up the convergence of iteration methods*, do pesquisador Polyak (1964), nele o autor busca criar métodos iterativos mais rápidos para resolver equações funcionais. Para isso, ele introduz um método de "dois passos", que consiste na junção do método do gradiente com um segundo termo que dá inércia ao método, por último, ele justifica que esse método trás de fato uma convergência mais veloz quando comparado com métodos como o do gradiente.

Contudo, assim como a grande maioria dos conceitos matemáticos, essa ideia demorou a ser implementada para o aprendizado de máquina, e com o surgimento da retropropagação, como demonstrado por (Rumelhart; Hinton; Williams, 1986), em seu artigo, o método do gradiente com momentum se tornou uma excelente opção para garantir uma convergência mais rápida. Esse método é representado pela equação 6.13

Método do Gradiente com Momentum de Polyak

$$x_{n+1} = x_n - \epsilon \nabla f(x_n) + \beta(x_n - x_{n-1}) \quad (6.13)$$

Em que:

- x_{n+1} : Representa as coordenadas do ponto após a iteração do método;
- x_n : Representa as coordenadas do ponto na iteração n ;
- ϵ : Representa a taxa de aprendizado / tamanho do passo
- β : Representa a "inércia", controlando a influência do passo anterior no passo atual;
- x_{n-1} : Representa as coordenadas do ponto na iteração anterior.

Para calcular β , Polyak (1964) determina que será utilizada a expressão:

$$\beta = \left(\frac{\sqrt{M} - \sqrt{m}}{\sqrt{M} + \sqrt{m}} \right)^2$$

Em que M representa o maior valor da matriz hessiana m é o menor valor no ponto de mínimo da função. Isso significa que esses valores não são conhecidos de antemão. Contudo o maior problema da fórmula proposta por Polyak é que ela exige muitos cálculos, imagine ter que calcular a matriz hessiana de uma função de perda para uma rede que possui milhares ou até milhões de parâmetros, isso é muita coisa e também muito demorado. Assim, no artigo da retropropagação, Rumelhart, Hinton e Williams (1986), apresentam uma fórmula diferente, com intuito diminuir a quantidade de cálculos a serem feitas, mas mantendo a principal característica do método do gradiente com momentum: a inércia; ela é dada pela equação 6.15

Método do Gradiente com Momentum Usado na Retropropagação

$$\Delta w(t) = \epsilon \nabla f(x) + \alpha \Delta w(t - 1) \quad (6.14)$$

Em que:

- $\Delta w(t)$: Representa a variação nos pesos;
- ϵ : Representa a taxa de aprendizado;
- $\nabla f(x)$: Representa o gradiente;
- α : Representa um fator de decaimento exponencial entre 0 e 1 que determina a contribuição do gradiente passado para o gradiente futuro.

6.3.1.1 Implementação em Python

Algorithm 2 O Método do Gradiente com Momentum (versão de Rumelhart et al.)**Requer:** Taxa de aprendizado global ϵ **Requer:** Coeficiente de momentum α **Requer:** Parâmetros iniciais θ

- 1: Inicialize a atualização anterior: $\Delta\theta \leftarrow 0$
- 2: Inicialize os parâmetros θ
- 3: **while** critério de parada não for atingido **do**
- 4: Calcule o gradiente $\mathbf{g} \leftarrow \nabla_{\theta} L(\theta)$
- 5: Calcule a atualização atual: $\Delta\theta \leftarrow -\epsilon \mathbf{g} + \alpha \Delta\theta$
- 6: Aplique a atualização: $\theta \leftarrow \theta + \Delta\theta$
- 7: **end while**

6.3.2 Método do Gradiente em Mini-Batch

6.3.3 Método do Gradiente Estocástico

Método do Gradiente Estocástico

$$\theta_{\text{novo}} = \theta_{\text{antigo}} - n \nabla J(\theta; x^{(i)}; y^{(i)}) \quad (6.15)$$

6.3.3.1 Implementação em Python

6.3.4 Gradiente Acelerado de Nesterov

Gradiente Acelerado de Nesterov

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k + \beta(x_k - x_{k-1}) && \text{1. Calcula uma predição futura (lookahead) } y_k, \\
 &&& \text{dando um passo na direção do momento anterior.} \\
 x_{k+1} &= y_k - \epsilon \nabla f(y_k) && \text{2. Calcula o gradiente em } y_k \text{ (na predição)} \\
 &&& \text{e atualiza os pesos } x_k \text{ a partir de } y_k.
 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Em que:

- y_k : Representa o ponto de "lookahead";
- x_k : Representa os parâmetros na iteração k ;
- x_{k-1} : Representa os parâmetros na iteração $k - 1$;
- β : Representa
- x_{k+1} : Representa os parâmetros na iteração $k + 1$;

- ϵ : Representa a taxa de aprendizado;
- $\nabla f(y_k)$: Representa o vetor gradiente calculado no ponto de "lookahead"

6.3.4.1 Implementação em Python

6.4 Otimizadores Modernos Baseados em Gradiente

Conforme os anos foram passando, foram surgindo novos algoritmos de otimização baseados na ideia da descida do gradiente. A partir dos anos 2010, otimizadores como o AdaGrad foram ganhando popularidade na comunidade, principalmente por apresentar uma diferença notável quando comparados com os algoritmos clássicos: a utilização de diferentes parâmetros de representado a taxa de aprendizado, de forma que ela pudesse ser adaptável para cada um dos conjuntos de características que estavam sendo analisadas.

Essa seção busca justamente explorar esses otimizadores, explicando suas fórmulas e algoritmos, suas vantagens quando comparados com os métodos tradicionais. Além disso, é possível ver uma evolução gradual em como cada algoritmo sucessor busca complementar pequenos erros os métodos anteriores possuíam.

6.4.1 Adaptive Gradient Algorithm (AdaGrad)

Apresentado para a comunidade científica no texto *Adaptive Subgradient Methods for Online Learning and Stochastic Optimization*, o Adaptive Gradient Algorithm (AdaGrad), Duchi, Hazan e Singer (2011) o descrevem metafóricamente como uma adaptação dos métodos iterativos baseados em gradiente, que nos permite encontrar agulhas em palheiros em forma de características muito preditivas, mas raramente vistas.

O que os autores se referem ao ato de "encontrar agulhas em palheiros", está ligado diretamente na forma como o AdaGrad atua para melhorar o desempenho de um modelo tanto para reconhecer características que são muito frequentes nos dados de treino quando características que são mais raras. Como Duchi, Hazan e Singer (2011) explicam, esse método faz uso de múltiplas taxas de aprendizado, assim características muito frequentes recebem uma taxa de aprendizado pequena, enquanto características menos frequentes recebem uma taxa de aprendizado maior.

Dessa forma, o modelo que está sendo treinado consegue garantir melhores métricas durante o seu aprendizado, pois estará aprendendo sobre aquilo que aparece muito nos dados de treino, mas, quando aparecer algo diferente e menos comum, ele irá "prestar mais atenção" devido à maior taxa de aprendizado nessas características.

O AdaGrad veio como uma forma de aplicar técnicas de aprendizado-teórico para problemas online e aprendizado estocástico, focando concretamente no métodos de

(sub)gradiente, de forma que a representação desse algoritmo pode ser vista no bloco de algoritmo 3.

Algorithm 3 AdaGrad

```

1: ENTRADA:  $\eta > 0, \delta \geq 0$ 
2: VARIÁVEIS:  $s \in \mathbb{R}^d, H \in \mathbb{R}^{d \times d}, g_{1:t,i} \in \mathbb{R}^t$  para  $i \in \{1, \dots, d\}$ 
3: INICIALIZAÇÃO:  $x_1 = 0, g_{1:0} = []$ 
4: for  $t = 1$  até  $T$  do
5:   Incorre na perda  $f_t(x_t)$ 
6:   Recebe o subgradiente  $g_t \in \partial f_t(x_t)$  de  $f_t$  em  $x_t$ 
7:   ATUALIZE  $g_{1:t} = [g_{1:t-1} g_t], \quad s_{t,i} = \|g_{1:t,i}\|_2$ 
8:   DEFINA  $H_t = \delta I + \text{diag}(s_t), \quad \Psi_t(x) = \frac{1}{2} \langle x, H_t x \rangle$ 
9: end for
10:
11: Atualização de Subgradiente Primal-Dual (3):
12:  $x_{t+1} = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} \left\{ \eta \left\langle \frac{1}{t} \sum_{\tau=1}^t g_\tau, x \right\rangle + \eta \phi(x) + \frac{1}{t} \Psi_t(x) \right\}$ 
13:
14: Atualização Composta de Mirror Descent (4):
15:  $x_{t+1} = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} \left\{ \eta \langle g_t, x \rangle + \eta \phi(x) + B_{\Psi_t}(x, x_t) \right\}$ 

```

Note que essa definição foge do contexto de aprendizado de máquina, de forma que ela pode ser simplificada em várias partes a fim de criar uma fórmula mais resumida. No algoritmo, a linha $s_{t,i} = [g_{1:t,i}]_2$ calcula a norma L2, ou seja, o comprimento do vetor, de todos os gradientes passados para um único parâmetro i . Dessa forma, a matriz H_t armazena esses valores em sua diagonal. Quando está sendo calculada a norma L2 ao quadrado, como neste caso, é o mesmo que somar os quadrados de cada componente, assim, sua representação pode ser simplificada para $G_t = G_{t-1} + g_t \odot g_t$, que é uma maneira simplificada de calcular a soma dos quadrados dos gradientes passados. Neste caso, o termo G_t é uma adaptação da matriz H_t , só que ao invés de simbolizar uma matriz que armazena a norma dos gradientes, isso é feito por em forma de um vetor.

Ainda é possível fazer uma segunda simplificação no algoritmo, agora na linha que calcula $x_{t+1} = \operatorname{argmin}$, pois o que essa linha representa é uma forma matemática de descrever "encontre o próximo ponto x_{t+1} que minimiza uma combinação de gradiente e da distância em relação ao ponto atual". Como em redes neurais, não existem restrições tão complexas, a solução para esse problema se resume a dar um passo na direção do gradiente, com o tamanho do passo dividido pelo acumulador de gradientes.

Após essas duas simplificações para o cenário de aprendizado de máquina, é possível chegar em uma fórmula semelhante a equação 6.17

Adaptive Gradient Algorithm (AdaGrad) Simplificado para Redes Neurais

$$G_t = G_{t-1} + g_t \odot g_t \quad 1. \text{ Acumula a soma dos quadrados dos gradientes } (g_t) \text{ na matriz } G_t \text{ a cada passo.}$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{n}{\sqrt{G_t} + \epsilon} \odot g_t \quad 2. \text{ Atualiza os parâmetros } (\theta). \text{ A taxa de aprendizado } (n) \text{ é adaptada para cada parâmetro, sendo dividida pela raiz da soma acumulada } G_t.$$

(6.17)

Em que:

- G_t : Representa o vetor da soma dos quadrados dos gradientes na iteração t ;
- G_{t-1} : Representa o vetor da soma dos quadrados dos gradientes na iteração $t - 1$;
- g_t : Representa o vetor gradiente calculado na iteração t ;
- θ_{t+1} : Representa o vetor de parâmetros na iteração $t + 1$;
- θ_t : Representa o vetor de parâmetros na iteração t ;
- n : Representa a taxa de aprendizado adaptada para cada parâmetro;
- ϵ : Representa a taxa de aprendizado geral;
- \odot : Representa o produto de Hadamard.

6.4.1.1 Implementação em Python

6.4.2 RMSProp

RMSProp

$$E[g^2]_t = \gamma E[g^2]_{t-1} + (1 - \gamma)(g_t \odot g_t) \quad 1. \text{ Calcula a média móvel dos quadrados dos gradientes. O fator } \gamma \text{ (decaimento) dá mais peso aos gradientes mais recentes.}$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{n}{\sqrt{E[g^2]_t} + \epsilon} \odot g_t \quad 2. \text{ Atualiza os parâmetros. A taxa de aprendizado é dividida pela raiz da média móvel, evitando que a atualização se torne pequena demais com o tempo.}$$

(6.18)

6.4.2.1 Implementação em Python

6.4.3 Adaptive Moment Estimation (Adam)

Uma evolução natural dos algoritmos de otimização AdaGrad e RMSProp é o Adam ou Adaptive Moment Estimation. Esse algoritmo foi apresentado pelos pesquisadores Kingma e Ba (2017), no artigo *Adam: A Method for Stochastic Optimization*, ele veio para ser um método de otimização estocástica que requer apenas gradientes de primeira ordem com poucos requisitos de memória.

Para isso, o Adam computa taxas de aprendizado individuais para diferentes parâmetros para estimar o primeiro e segundo momento do gradiente, de forma que ele é capaz de combinar as vantagens do AdaGrad, que trabalha bem com gradientes esparsos, e o RMSProp, que trabalha bem on-line e em configurações não-estacionárias (Kingma; Ba, 2017).

O Adam recebe como entradas uma taxa de aprendizado (α), recebe dois valores β_1 e β_2 que representam as taxas de decaimento exponencial para as estimativas de momento em um conjunto de intervalos $[0, 1)$. Além disso, assim como todo método de otimização ele também recebe em sua entrada uma função de perda $f(\theta)$ bem como os parâmetros iniciais θ_0 .

O primeiro passo do método consiste em inicializar os vetores de primeiro (m_0) e segundo (v_0) momento bem como o passo do tempo t , para isso, ele coloca como zero os seus valores iniciais. Em seguida, é iniciado o loop de iterações do método, que só irá parar quando θ_t convergir. Nesse loop, primeiramente é feito um incremento no valor do passo de tempo, depois é calculado o valor do gradiente no tempo t , o qual é armazenado em g_t . Com base nessa nova variável é atualizada uma estimativa enviesada no primeiro momento, armazenada em m_t , em seguida, é feita uma segunda estimativa também enviesada só que agora no segundo momento. Essas estimativas são então corrigidas pelo método que com base nelas é feita a atualização dos parâmetros e assim uma iteração termina. Caso o método convirja ele irá retornar como resultado os parâmetros θ_t .

Esse método pode ser visto no bloco de algoritmo 4.

Algorithm 4 Adam, nosso algoritmo proposto para otimização estocástica**Requer:** Taxa de aprendizado α **Requer:** Taxas de decaimento exponencial para as estimativas de momento $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1)$ **Requer:** Função objetivo estocástica com parâmetros $\theta, f(\theta)$ **Requer:** Vetor de parâmetros inicial θ_0

```

1:  $m_0 \leftarrow 0$                                 ▷ Inicializar vetor de 1º momento (média)
2:  $v_0 \leftarrow 0$                                 ▷ Inicializar vetor de 2º momento (variância não centrada)
3:  $t \leftarrow 0$                                 ▷ Inicializar passo de tempo
4: while não convergir do
5:    $t \leftarrow t + 1$ 
6:    $g_t \leftarrow \nabla_{\theta} f_t(\theta_{t-1})$         ▷ Obter gradientes em relação ao objetivo no passo  $t$ 
7:    $m_t \leftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t$     ▷ Atualizar estimativa viciada do primeiro
      momento
8:    $v_t \leftarrow \beta_2 \cdot v_{t-1} + (1 - \beta_2) \cdot g_t^2$     ▷ Atualizar estimativa viciada do segundo
      momento
9:    $\hat{m}_t \leftarrow m_t / (1 - \beta_1^t)$             ▷ Calcular estimativa corrigida do primeiro momento
10:   $\hat{v}_t \leftarrow v_t / (1 - \beta_2^t)$             ▷ Calcular estimativa corrigida do segundo momento
11:   $\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \alpha \cdot \hat{m}_t / (\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon)$     ▷ Atualizar parâmetros
12: end while
13: Retorne:  $\theta_t$                                 ▷ Parâmetros resultantes

```

Para testar esse novo algoritmo, os pesquisadores 4 propuseram uma série de experimentos, sendo alguns deles envolvendo uma regressão logística, uma rede neural multi-camadas e uma rede convolucional.

No primeiro deles, eles avaliam esse método utilizando uma regularização L2 criando uma regressão logística para analisar o dataset de dígitos manuscritos MNIST (Kingma; Ba, 2017). Nos testes, Kingma e Ba (2017) comparam a sua técnica de otimização com o gradiente estocástico acelerado (accelerated SGD), com o otimizador de Nesterov e também como o AdaGrad; de forma que eles foram capazes de concluir que o Adam possui uma convergência similar ao SGD e Nesterov, enquanto o AdaGrad apresenta uma convergência mais demorada e com um maior custo de treino.

Adaptive Moment Estimation (Adam)

- | | |
|---|--|
| $m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$ | 1. Atualiza o momento de 1ª ordem (média móvel dos gradientes). |
| $v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2)(g_t \odot g_t)$ | 2. Atualiza o momento de 2ª ordem (média móvel dos quadrados dos gradientes), como no RMSProp. |
| $\hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}$ | 3. Corrige o viés do momento de 1ª ordem, que é inicializado em zero e precisa de aquecimento. |
| $\hat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t}$ | 4. Corrige o viés do momento de 2ª ordem. |
| $\theta_{t+1} = \theta_t - n \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon}$ | 5. Atualiza os parâmetros combinando o momento corrigido com a taxa de aprendizado adaptativa corrigida. |
- (6.19)

6.4.3.1 Implementação em Python

6.4.4 Nesterov-accelerated Adaptive Moment Estimation (Nadam)

Nesterov-accelerated Adaptive Moment Estimation (Nadam)

- | | |
|---|---|
| $m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$ | 1. Calcula o momento de 1ª ordem. |
| $v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2)(g_t \odot g_t)$ | 2. Calcula o momento de 2ª ordem. |
| $\hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}$ | 3. Corrige o viés do momento de 1ª ordem. |
| $\hat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t}$ | 4. Corrige o viés do momento de 2ª ordem. |
| $\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{\eta}{\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon} \left(\beta_1 \hat{m}_t + \frac{(1 - \beta_1) g_t}{1 - \beta_1^t} \right)$ | 5. Atualiza os parâmetros. A regra de atualização incorpora o momento Nesterov, usando uma estimativa do gradiente "lookahead". |
- (6.20)

Algorithm 5 Estimaco de Momento Adaptativa com Acelerao de Nesterov (Nadam)**Requer:** Hiperparâmetros: $\alpha_0, \dots, \alpha_T; \mu_0, \dots, \mu_T; \nu; \epsilon$

```

1:  $m_0, n_0 \leftarrow 0$  ▷ Inicializar vetores de primeiro e segundo momento
2: while não convergir do
3:    $g_t \leftarrow \nabla_{\theta_{t-1}} f_t(\theta_{t-1})$  ▷ Obter gradientes
4:    $m_t \leftarrow \mu_t m_{t-1} + (1 - \mu_t) g_t$  ▷ Atualizar estimativa viciada do primeiro momento (média)
5:    $n_t \leftarrow \nu n_{t-1} + (1 - \nu) g_t^2$  ▷ Atualizar estimativa viciada do segundo momento (variância)
6:    $\hat{m}_t \leftarrow (\mu_{t+1} m_t / (1 - \prod_{i=1}^{t+1} \mu_i)) + ((1 - \mu_t) g_t / (1 - \prod_{i=1}^t \mu_i))$  ▷ Corrigir o viés e aplicar o momento Nesterov
7:    $\hat{n}_t \leftarrow \nu n_t / (1 - \nu^t)$  ▷ Corrigir o viés da estimativa do segundo momento
8:    $\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \frac{\alpha_t}{\sqrt{\hat{n}_t + \epsilon}} \hat{m}_t$  ▷ Atualizar parâmetros
9: end while
10: Retorne:  $\theta_t$ 

```

6.4.4.1 Implementao em Python

6.4.5 AdaMax

Algorithm 6 AdaMax, uma variante do Adam baseada na norma infinita**Requer:** Taxa de aprendizado α **Requer:** Taxas de decaimento exponencial $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1)$ **Requer:** Funo objetivo estocástica com parâmetros $\theta, f(\theta)$ **Requer:** Vetor de parâmetros inicial θ_0

```

1:  $m_0 \leftarrow 0$  ▷ Inicializar vetor de 1º momento
2:  $u_0 \leftarrow 0$  ▷ Inicializar a norma infinita exponencialmente ponderada
3:  $t \leftarrow 0$  ▷ Inicializar passo de tempo
4: while não convergir do
5:    $t \leftarrow t + 1$ 
6:    $g_t \leftarrow \nabla_{\theta} f_t(\theta_{t-1})$  ▷ Obter gradientes em relao ao objetivo no passo  $t$ 
7:    $m_t \leftarrow \beta_1 \cdot m_{t-1} + (1 - \beta_1) \cdot g_t$  ▷ Atualizar estimativa viciada do primeiro momento
8:    $u_t \leftarrow \max(\beta_2 \cdot u_{t-1}, |g_t|)$  ▷ Atualizar a norma infinita exponencialmente ponderada
9:    $\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - (\alpha / (1 - \beta_1^t)) \cdot m_t / u_t$  ▷ Atualizar parâmetros
10: end while
11: Retorne:  $\theta_t$  ▷ Parâmetros resultantes

```

6.4.6 Implementação em Python

6.4.7 Adam With Decoupled Weight Decay (AdamW)

Algorithm 7 Adam com Decaimento de Peso Desacoplado (AdamW)

-
- 1: **Dado:** $\alpha = 0.001, \beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.999, \epsilon = 10^{-8}, \lambda \in \mathbb{R}$
 - 2: **Inicialize:** passo de tempo $t \leftarrow 0$, vetor de parâmetros $\theta_0 \in \mathbb{R}^n$, vetor de 1º momento $m_0 \leftarrow 0$, vetor de 2º momento $v_0 \leftarrow 0$, multiplicador de agendamento $\eta_0 \in \mathbb{R}$
 - 3: **repeat**
 - 4: $t \leftarrow t + 1$
 - 5: $\nabla f_t(\theta_{t-1}) \leftarrow \text{SelecionarLote}(\theta_{t-1})$ \triangleright Seleciona o lote e retorna o gradiente
 - 6: $g_t \leftarrow \nabla f_t(\theta_{t-1})$ \triangleright O gradiente NÃO inclui o termo de decaimento de peso
 - 7: $m_t \leftarrow \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$ \triangleright Atualizar 1º momento (operações element-wise)
 - 8: $v_t \leftarrow \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t^2$ \triangleright Atualizar 2º momento
 - 9: $\hat{m}_t \leftarrow m_t / (1 - \beta_1^t)$ \triangleright Corrigir viés do 1º momento
 - 10: $\hat{v}_t \leftarrow v_t / (1 - \beta_2^t)$ \triangleright Corrigir viés do 2º momento
 - 11: $\eta_t \leftarrow \text{DefinirMultiplicadorDeAgendamento}(t)$ \triangleright Pode ser fixo, decair, ou para reinícios abruptos
 - 12: $\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \eta_t \left(\frac{\alpha \hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon} \right) - \eta_t \lambda \theta_{t-1}$ \triangleright Atualização desacoplada do decaimento de peso
 - 13: **until** critério de parada for atingido
 - 14: **Retorne:** parâmetros otimizados θ_T
-

Adam With Decoupled Weight Decay (AdamW)

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t \quad 1. \text{ Atualiza o momento de 1ª ordem.}$$

$$v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) (g_t \odot g_t) \quad 2. \text{ Atualiza o momento de 2ª ordem.}$$

$$\hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t} \quad 3. \text{ Corrige o viés do momento de 1ª ordem.}$$

$$\hat{v}_t = \frac{v_t}{1 - \beta_2^t} \quad 4. \text{ Corrige o viés do momento de 2ª ordem.}$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t} + \epsilon} - \eta \lambda \theta_t \quad 5. \text{ Atualiza os pesos com o passo do Adam e aplica o decaimento de peso } (\lambda) \text{ de forma desacoplada.}$$

(6.21)

6.4.7.1 Implementação em Python

6.4.8 RAdam

RAdam

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$$

1. Calcula o momento de 1ª ordem.

$$v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) (g_t \odot g_t)$$

2. Calcula o momento de 2ª ordem.

$$\hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}$$

3. Corrige o viés do momento de 1ª ordem.

$$\rho_t = \rho_\infty - \frac{2t\beta_2^t}{1 - \beta_2^t}$$

4. Calcula o comprimento aproximado da média móvel.

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta_t - \eta_t \hat{m}_t & \text{se } \rho_t \leq 4 \\ \theta_t - \eta_t \frac{r_t \hat{m}_t}{\sqrt{\hat{v}_t + \epsilon}} & \text{se } \rho_t > 4 \end{cases}$$

5. Atualiza os pesos. Usa apenas o momento se a

variância for instável ($\rho_t \leq 4$), senão usa a taxa adaptativa retificada com o termo r_t .

(6.22)

6.4.8.1 Implementação em Python

6.4.9 AdaBelief

AdaBelief

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$$

1. Calcula o momento de 1ª ordem.

$$s_t = \beta_2 s_{t-1} + (1 - \beta_2) (g_t - m_t)^2$$

2. Calcula o momento de 2ª ordem baseado na diferença entre o gradiente atual e a média móvel (a "crença" na direção).

$$\hat{m}_t = \frac{m_t}{1 - \beta_1^t}$$

3. Corrige o viés do momento de 1ª ordem.

$$\hat{s}_t = \frac{s_t}{1 - \beta_2^t}$$

4. Corrige o viés do momento de 2ª ordem.

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta \frac{\hat{m}_t}{\sqrt{\hat{s}_t} + \epsilon}$$

5. Atualiza os pesos. Dá passos grandes quando o gradiente é previsível e pequenos quando não é.
(6.23)

6.4.9.1 Implementação em Python

6.4.10 Evolved Sign Momentum (Lion)

Lion

$$c_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$$

1. Interpola o momento anterior e o gradiente atual para obter a direção da atualização.

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \eta \cdot \text{sign}(c_t)$$

2. Atualiza os pesos usando apenas o SINAL (sign) da direção, não a magnitude. Cada peso se move exatamente por η ou $-\eta$.

$$m_t = \beta_2 m_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t$$

3. Atualiza o estado do momento para o próximo passo, usando um β_2 diferente.

(6.24)

Algorithm 8 Otimizador Lion (nosso)

```

1: Dado:  $\beta_1, \beta_2, \lambda, \eta, f$ 
2: Inicialize:  $\theta_0, m_0 \leftarrow 0$ 
3: while  $\theta_t$  não convergir do
4:    $g_t \leftarrow \nabla_{\theta} f(\theta_{t-1})$  ▷ Obter gradientes da função de perda  $f$ 
5:
6:   // Atualizar parâmetros do modelo
7:    $c_t \leftarrow \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t$  ▷ Interpolar momento e gradiente para a direção da
   atualização
8:    $\theta_t \leftarrow \theta_{t-1} - \eta \cdot (\text{sign}(c_t) + \lambda \theta_{t-1})$  ▷ Atualizar pesos usando o sinal e o
   decaimento de peso
9:
10:  // Atualizar EMA (Média Móvel Exponencial) de  $g_t$ 
11:   $m_t \leftarrow \beta_2 m_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t$  ▷ Atualizar o estado do momento para o próximo
   passo
12: end while
13: Retorne:  $\theta_t$ 

```

6.4.10.1 Implementação em Python

6.5 O Método de Newton: Indo Além do Gradiente

O método do gradiente se enquadra no tipo de **método de primeira ordem**, pois faz o uso de apenas derivadas de primeira ordem na sua implementação. Existem métodos que vão além das derivadas de primeira ordem buscando soluções que fazem uso de **derivadas de segunda ordem**. Um desses métodos é o **método de Newton**.

Essa técnica foi inicialmente proposta por Isaac Newton nos trabalhos “*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*” em 1669 e “*De methodis fluxionum et serierum infinitarum*” escrito em 1671. Entretanto, mais tarde Joseph Raphson apresentou uma versão aprimorada em seu livro “*Aequationum Universalis*” em 1690. Devido às contribuições de ambos os matemáticos, essa técnica também é conhecida como método de Newton-Raphson.

6.5.1 Conceitos iniciais: Matrizes Jacobianas e Hessianas

Como dito anteriormente, o método de Newton faz uso de derivadas de segunda ordem em sua fórmula. Nisso, surgem dois conceitos que devem ser explicados para entendermos melhor esse método: as matrizes jacobianas e hessianas.

Chamamos de **matriz jacobiana** a matriz que contém todas as derivadas parciais de uma função de n variáveis $f(x, y, \dots, n)$. Com base nas derivadas de primeira ordem, podemos ter uma melhor noção de como a função cresce ou decresce em intervalos do eixo.

$$J_f(x, y, \dots, n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x} & \frac{\partial F_m}{\partial y} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Já a **matriz hessiana** é uma matriz que contém todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x, y, \dots, n)$. Essas derivadas nos dão informações sobre a curvatura a função.

$$H_f(x, y, \dots, n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial n \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial n \partial y} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Assim, essas matrizes, por nos mostrarem como a função varia, podem ser muito úteis para nos auxiliar a encontrar pontos mínimos, máximos e de sela da função e assim otimizá-la.

Com isso, podemos entender o método de newton.

6.5.2 O Método

O método de Newton é baseado na expansão de uma função $f(x)$ em uma **série de Taylor de segunda ordem** em torno de um ponto $x(0)$. Com essa aproximação, podemos encontrar de forma mais rápida pontos críticos da função.

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (6.27)$$

$$x' = x - H_f(x)^{-1} \nabla f(x) \quad (6.28)$$

Quando estamos trabalhando com uma função que pode ser aproximada por uma função quadrática no ponto analisado, o método de Newton pode nos retornar o resultado de forma mais rápida que o método do gradiente. Contudo, se isso não for o caso, ele levará mais iterações para encontrar um ponto crítico e assim convergir.

Por mais que possa ser mais rápido que o método do gradiente em algumas situações, o método de Newton não é perfeito. Se estivermos próximo tanto de ponto de sela quanto de um ponto de mínimo, o método de Newton pode fornecer direções equivocadas e levar para o ponto de sela ao invés do ponto de mínimo. Assim, não será encontrado um valor ideal para otimizar aquela função de custo.

Além disso, pelo fato do método de Newton envolver o cálculo das derivadas de segunda ordem da função de custo, pois, diferente do método do gradiente que calcula somente as derivadas de primeira ordem, no método de Newton-Raphson são calculadas também as derivadas parciais de segunda ordem para a matriz hessiana.

Esse custo de poder de processamento será proporcional a quantidade de variáveis que a função de custo recebe, se f for uma função de várias variáveis, pode ser inviável o uso do método de newton devido à maior quantidade de cálculos envolvidos.

Portanto ao criar uma rede neural devemos escolher com sabedoria qual método de otimização devemos usar. O método do gradiente pode ser eficiente para minimizar uma função de custo de uma rede neural, mas em casos que essa convergência seja lenta, o método de Newton-Raphson pode ser uma melhor alternativa.

6.5.3 Implementação em Python

7 Funções de Ativação Sigmoidais

7.1 Teoremas da Aproximação Universal

Pense que você tem uma função matemática, como $f(t) = 40t + 12$, a qual representa o deslocamento em quilômetros de um carro em uma cidade, onde t é o tempo em horas. Caso você queira encontrar o valor de deslocamento quando o carro tiver andando por 3 horas, basta substituir a variável t por 3 e resolver a expressão. Assim temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= 40t + 12 \\ f(3) &= 40 \cdot 3 + 12 = 132km \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f(t) &= 40t + 12 \\ f(3) &= 40 \cdot 3 + 12 = 132km \end{aligned}} \right\} \text{Quando } t = 3$$

Esse cenário é o mais comum quando estamos estudando, contudo existe um segundo cenário que também é possível de acontecer. Isso ocorre quando temos um conjunto de pontos e, com base neles, queremos encontrar uma função que descreva o comportamento desses pontos.

Pense que temos os pontos dispostos no gráfico da figura 3 e queremos encontrar uma reta que tente passar o mais próximo de cada um deles.

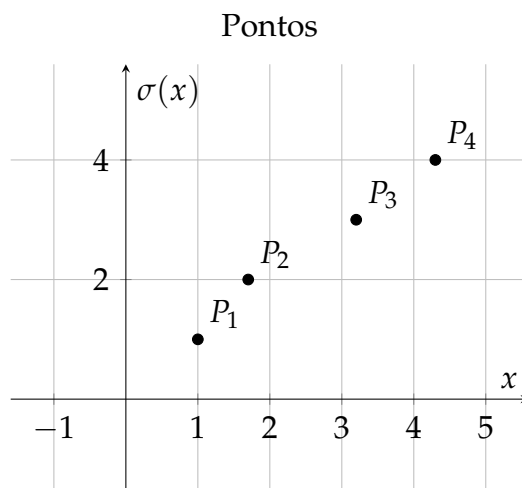


Figura 3 – Conjunto de pontos dispostos no plano cartesiano.

Existe uma técnica que permite que nos façamos isso, ela se chama **regressão linear** (a qual é um dos tópicos discutidos no capítulo 13), e com base nela, é possível dado um conjunto de pontos em um plano, traçar uma reta que se aproxime igualmente de cada um desses pontos. Existem diferentes técnicas de regressão linear, neste caso aplicaremos a dos mínimos quadrados e encontramos a expressão:

$$y = 0.8623x + 0.3011$$

Com base nessa função que encontramos, podemos desenhá-la junto ao gráfico dos pontos e vermos se ela é realmente uma boa aproximação, assim temos a figura 4

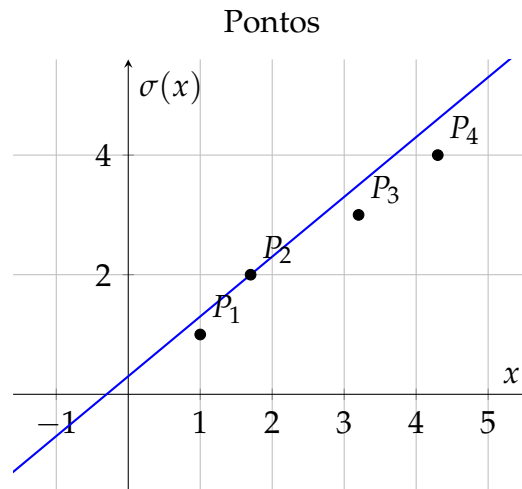


Figura 4 – Conjunto de pontos dispostos no plano cartesiano.

Existem diversas aproximações além da regressão linear, se quisermos, podemos tentar aproximar esses pontos utilizando uma função quadrática, cúbica ou até mesmo exponencial.

Esse tema parece não ter uma conexão com esse capítulo de funções de ativação, mas na realidade, o que muitas das vezes é feito por uma rede neural é justamente esse trabalho de encontrar uma função que aproxima o comportamento de um conjunto de pontos. Só que neste caso, não teremos um conjunto de pontos, vamos ter várias informações em uma base de dados, como imagens de exames médicos ou informações sobre o valor de imóveis e queremos encontrar de alguma forma uma conexão entre esses dados.

Para isso, existe um conjunto de teoremas que servem justamente para provar que uma determinada rede neural criada será capaz de encontrar uma função que descreva o comportamento que você esteja estudando. Eles são os teoremas da aproximação universal.

No livro *Deep Learning*, Goodfellow, Bengio e Courville (2016) dedicam uma seção explicando esses teoremas. Segundo os autores, o teorema da aproximação universal, introduzido Cybenko (1989) para a comunidade científica no texto *Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function*, afirma que uma rede feedforward com uma camada de saída linear e no mínimo uma camada oculta com qualquer função que possui a propriedade de "esmagamento", como a sigmoide logística, é capaz de aproximar qualquer função mensurável de Borel de um espaço de dimensão finita para outro com qualquer quantidade de erro diferente de zero desejada desde que essa rede neural possua unidades ocultas suficientes.

Para entendermos esse teorema, devemos primeiro entender o conceito de mensurabilidade de Borel, segundo Goodfellow, Bengio e Courville (2016) uma função contínua em um subconjunto fechado e limitado de \mathcal{R}^N é mensurável por Borel. Assim esse tipo de função pode ser aproximada por uma rede neural. Além disso, os autores ressaltam que por mais que o teorema original tenha conseguido provar apenas para as funções que saturam tanto para termos muito negativos ou termos muito positivos, diversos outros autores como Leshno *et al.* (1993), no texto *Multilayer feedforward networks with a nonpolynomial activation function can approximate any function*, foram capazes de provar que o teorema da aproximação universal pode funcionar para outras funções, no caso de Leshno, eles provaram para funções não polinomiais, como a Rectified Linear Unit (ReLU), a qual é o tema central do capítulo 8.

Basicamente os teoremas da aproximação universal reforçam o uso de funções de ativação para permitir que as redes neurais resolvam os problemas propostos por meio da aproximação de uma função. Isso acontece porque essas funções introduzem a não linearidade para a rede, como nos vimos na equação do neurônio de uma rede neural, uma RNA é composta por diferentes camadas de neurônios que são capazes de pegar valores de entrada, multiplicar por um peso dado e somar com um viés, esse resultado passa então por uma função de ativação.

$$y = x \cdot w + b$$

Se nos tivéssemos uma rede neural em que os neurônios não possuísem uma função de ativação, ou, fosse uma função linear, mesmo juntando todas essas camadas de neurônios que trazem expressões lineares, a junção disso, ainda seria uma expressão linear. Mas quando introduzimos uma função não linear, como a sigmoide, o teorema da aproximação universal, nos garante que somos capazes de encontrar qualquer função que estivermos procurando, desde que ela seja mensurável de Borel.

7.2 Exemplo Ilustrativo: Empurrando para extremos

Imagine que você está trabalhando para uma empresa na área de marketing e precisa analisar como foi a recepção do público para um novo produto anunciado. Para isso, você ficou responsável por classificar os comentários do público sobre esse produto. Você precisa colocar eles em duas categorias: avaliação positiva ou negativa. Então você precisa ler cada comentário e colocar ele em uma dessas categorias.

No começo foi fácil, mas depois de um tempo foi ficando repetitivo, então você teve a ideia de automatizar esse processo. Assim, você decide criar um diagrama de uma “caixa-preta” responsável por classificar automaticamente esses comentários da mesma forma que estava fazendo. Essa “caixa” irá receber uma entrada, neste caso,

o texto do comentário sobre o produto, e irá retornar uma saída, uma classificação positiva ou negativa sobre o comentário.

Na matemática, as funções do tipo sigmoide são excelentes para esse tipo de problema, pois possuem uma propriedade muito interessante: dado um valor de entrada, elas são capazes de "empurrar" esse valor para dois diferentes extremos. No caso da sigmoide logística, a função que dá nome a essa família, ela é capaz de empurrar essa entrada para valores próximos de zero ou um. Se nós consideramos que zero é uma avaliação negativa e um é uma avaliação positiva, essa função se torna perfeita para resolver o seu problema de classificar comentários.

7.3 A Sigmoide Logística

Por mais que a sigmoide hoje em dia seja bem comum em redes neurais, seu uso não começou nesse cenário. A sigmoide tem suas origens a análise de crescimento populacional e demografia, ela não surgiu em um artigo em específico, sendo mais uma evolução presente em vários artigos do matemático belga Pierre François Verhulst dentre os anos de 1838 e 1847. Contudo, existe um artigo desse matemático, intitulado "**Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population**" (Pesquisas matemáticas sobre a lei de crescimento da população), em que Verhulst propõem a função logística como um modelo para descrever o crescimento populacional, levando em consideração a capacidade de suporte de um ambiente, isso gerou a curva em "S" característica da sigmoide. Contudo, foi somente no próximo século, que sigmoide passou a ser utilizada na área da ciência da computação.

7.4 Contexto Histórico: Popularização da Sigmoide em Redes Neurais

A primeira família de funções que iremos conhecer são as sigmodais, sendo a principal delas, e que dá nome a essa família a sigmoide logística. Para isso, vamos entender o contexto em que elas se popularizaram.

Nos anos 1980, estavam ocorrendo mudanças com as funções que eram utilizadas para construir uma rede neural, um desses motivos foi a introdução da retropropagação pelos pesquisadores David Rumelhart, Geoffrey Hinton e Ronald Williams. A retropropagação era uma técnica que permitia que um modelo aprendesse com base nos seus erros, ajustando automaticamente os seus parâmetros em busca de conseguir uma melhor acurácia.

Além disso, na pesquisa que introduz a retropropagação, "**Learning representations by back-propagating errors**" de 1986, os cientistas propõem o uso da função

sigmoide logística como uma das candidatas para ser utilizada junto com a retropropagação como uma função de ativação. Como justificativa, eles citam o fato dela ser uma função que é capaz de introduzir a não-linearidade para o modelo, permitindo que ele aprenda padrões mais complexos, e também por possuir uma derivada limitada.

Mas esse não foi o único fator que fez com que a sigmoide e sua família se tornassem funções populares para a época. Pouco antes da criação da retropropagação, na década passada, haviam cientistas estudando o comportamento dos neurônios humanos como inspiração para a criação de redes neurais artificiais. Um exemplo desse caso foi o dos cientistas Wilson Hugh e Jack Cowan, em 1972 eles publicaram um artigo intitulado **"excitatory and Inhibitory interactions in localized populations of model neurons"**, em que buscam estudar como os neurônios respondiam a determinados estímulos.

No artigo, Hugh e Cowan buscam analisar o comportamento de populações localizadas de neurônios excitatórios (denotados pela função $E(t)$) e inibitórios (representados por $I(t)$) e como as duas interagem entre si. Para isso, eles utilizam como variável a proporção de células em uma subpopulação que dispara/reage por unidade de tempo. Para modelar essa atividade eles fizeram o uso de uma variação da função sigmoide, representada pela expressão ??, que era capaz de descrever o comportamento dos neurônios a certos estímulos.

Neurônio de Wilson e Cowan

$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-\theta)}} - \frac{1}{1 + e^{a\theta}} \quad (7.1)$$

Nessa equação, o parâmetro a representa a inclinação, a qual foi ajustada para passar pela origem ($S(0) = 0$) e θ é o limiar. Para o plotar o gráfico da figura 5, foi utilizado os mesmos valores escolhidos pelos cientistas na pesquisa, assim $a = 1.2$ e $\theta = 2.8$.

Os cientistas demonstram que a população de neurônios reage de formas distintas quando sofrem determinados estímulos. Os níveis baixos de excitação não conseguem ativar a população, porém, existe uma região de alta sensibilidade, na qual pequenos aumentos no estímulo geram um grande aumento na atividade. Além disso, existe um terceiro nível, o de saturação, em que níveis muito altos de estímulos são capazes de ativar todas as células e a partir disso, a resposta da população atinge o comportamento de uma função constante, indicando que ela saturou. Ao juntar todos esses três níveis, temos a famosa curva em "S", característica da função sigmoide.

Com isso, ao considerarmos esses dois cenários: a criação da retropropagação e busca na natureza para inspiração na criação de redes neurais. A sigmoide, junto com a sua família, se tornaram funções muito populares para a época, estando presentes em várias redes neurais criadas. Um desses exemplos é a rede de Elman, um tipo de rede neural recorrente criada para aprender e representar estruturas em dados sequenciais.

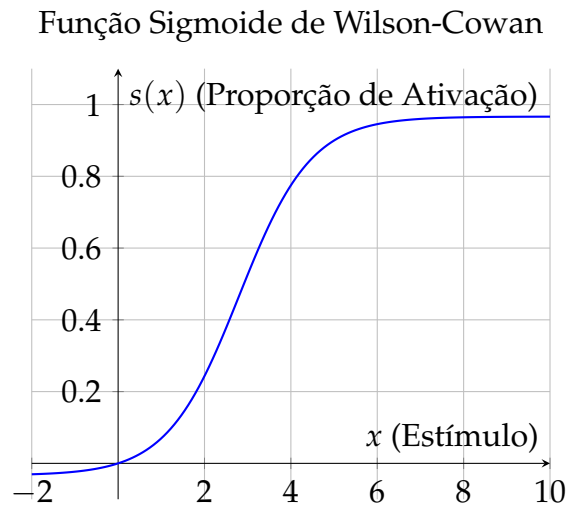


Figura 5 – Gráfico da função sigmoide conforme proposta por Wilson e Cowan (1972), com parâmetros de exemplo $a = 1.2$ e $\theta = 2.8$.

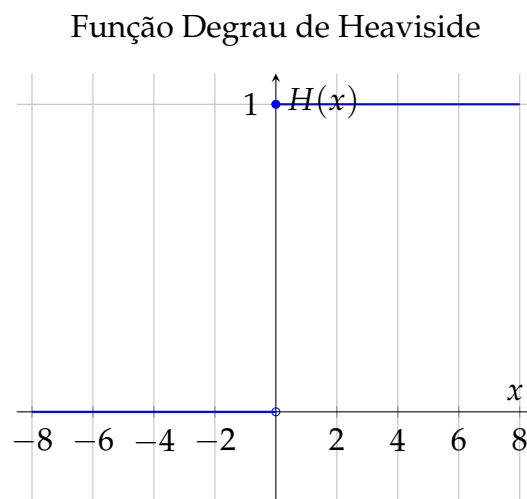


Figura 6 – Gráfico da função degrau de Heaviside.

Elman cita em seu estudo "**Finding structure in time**" de 1990 que era ideal o uso de uma função de ativação com valores limitados entre zero e um, um cenário ideal para o uso da sigmoide.

Cabe destacar também que, as sigmodais não foram as primeiras funções de ativação a serem utilizadas na criação de uma rede neural. Nesse cenário de redes neurais, existem sempre funções que são mais populares, e que com o tempo e o surgimento de novas pesquisas, são deixadas de lado para novas funções mais interessantes.

Uma função que era muito utilizada era a heavside, ou degrau em português. Ela inclusive esteve presente na produção da rede neural Perceptron criada por Frank Rosenblatt e introduzida para a comunidade científica no artigo "**The Perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain**" em 1958.

Quando a comparamos a degrau unitário com a sigmoide, notamos uma diferença crucial, a sigmoide é uma função contínua em todos os pontos, podemos dizer que para desenhar seu gráfico não precisamos tirar o lápis do papel nenhuma vez, algo que não ocorre com a heavside. Além disso, a derivada da heavside é zero em quase todos os seus pontos, por esse motivo, ela impossibilitava a retropropagação do erro, uma vez que quando fossemos calcular o gradiente para uma parte de um modelo que usasse essa função, ele provavelmente seria zero.

Por mais que a sigmoide hoje em dia seja bem comum em redes neurais, seu uso não começou nesse cenário. A sigmoide tem suas origens a análise de crescimento populacional e demografia, ela nao surgiu em um artigo em especifico, sendo mais uma evolução presente em vários artigos do matemático belga Pierre François Verhulst dentre os anos de 1838 e 1847. Contudo, existe um artigo desse matemático, intitulado **"Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population"** (Pesquisas matemáticas sobre a lei de crescimento da população), em que Verhulst propõem a função logística como um modelo para descrever o crescimento populacional, levando em consideração a capacidade de suporte de um ambiente, isso gerou a curva em "S" característica da sigmoide. Contudo, foi somente no próximo século, que sigmoide passou a ser utilizada na area da ciência da computação.

Sigmoide Logística

$$\sigma(z_i) = \frac{1}{1 + e^{-z_i}} \quad (7.2)$$

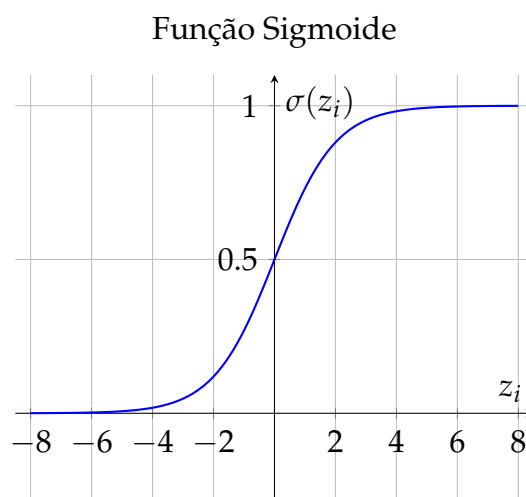


Figura 7 – Gráfico da função sigmoide logística.

A função sigmoide é escrita com uma exponencial, como na fórmula ???. Johannes Lederer, no texto **"Activations Functions in Artificial Neural Networks: A Systematic Overview"**, explica sobre a sigmoide, segundo o autor, ela é uma função limitada,

diferenciável e monotônica, o que significa que conforme os valores de x aumentam os valores de $f(x)$ também aumentam.

Como vemos na figura 7, o gráfico da sigmoide possui o formato de um "S" deitado. Assim, também podemos dizer que a função sigmoide é uma função suave, contínua (o que a possibilita de ser derivável em todos os pontos) e também é não linear. Lederer explica que uma das propriedades interessantes da sigmoide está no fato dela empurrar os valores de entrada para dois extremos, neste caso, 0 e 1.

Note que, conforme os valores crescem/decrecem muito, essa curva passa a assumir o comportamento de quase uma reta, tendo pouca variação entre esses valores, esse ponto será discutido mais em seguida.

Agora podemos discutir a sua derivada, para resolvê-la, podemos aplicar uma regra do quociente obtendo a expressão ?? e o gráfico 8

Derivada da sigmoide logística

$$\frac{d}{dz_i} \sigma(z_i) = \frac{e^{-z_i}}{(1 + e^{-z_i})^2} \quad (7.3)$$

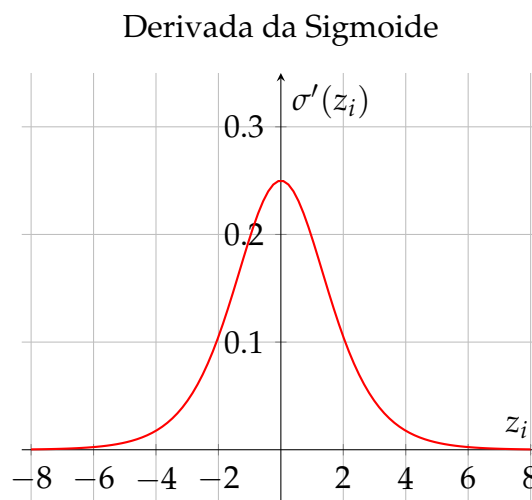


Figura 8 – Gráfico da derivada da sigmoide.

Notamos que sua derivada é contínua em todos os pontos e que ela atinge um ponto máximo entre 0.2 e 0.3 e que para valores que passam de ± 8 os resultados serão muito próximos de zero, isso acontece pois, como vemos no gráfico 7, a própria função sigmoide, não apresenta muita variação de valores conforme eles ultrapassam ± 8 . Guarde essa informação, pois ela será necessária para entender o conceito de gradiente evanescente, que será explicado no fim do capítulo. Contudo, a derivada da sigmoide também pode ser expressa em termos da própria sigmoide como a equação ?? nos mostra.

Ao analisarmos a derivada da sigmoide na expressão ?? vemos que ela possui uma derivada bem elegante e atrativa para os cientistas da computação da época, pois pelo fato dela poder ser escrita em termos de sua própria função, isso permite que vários cálculos possam ser reaproveitados. Isso é algo interessante para a criação de uma rede neural no milênio passado pois, devemos lembrar que os computadores da época não possuíam uma poder computacional tão alto como os da atualidade. Assim, qualquer calculo que pudesse ser reaproveitado e até mesmo simplificado, já era de muita ajuda para os cientistas além de poupar grande tempo de processamento.

7.4.1 Implementação em Python

Com base nesses dados, podemos escrever a sua implementação em código. Para isso, devemos apenas seguir a fórmula da sigmoide logística e sua derivada. Temos então o bloco de código ??.

Bloco de Código : Classe completa do função de ativação Sigmoid

```
1 import numpy as np
2
3 class Sigmoid(Layer):
4     def __init__(self):
5         super().__init__()
6         self.input = None
7         self.sigmoid = None
8
9     def forward(self, input_data):
10        self.input = input_data
11        self.sigmoid_output = 1/ (1 + np.exp(-input_data))
12        return self.sigmoid_output
13
14    def backward(self, grad_output):
15        sigmoid_grad = self.sigmoid_output * (1 - self.
sigmoid_output)
16        return grad_output * sigmoid_grad, None
```

7.5 Tangente Hiperbólica

Assim como a função sigmoide, a tangente hiperbólica não possui suas origens voltadas para o uso em redes neurais. Neste caso, um dos matemáticos que ficou reconhecido por criar a notação das funções hiperbólicas, seno, cosseno e tangente, foi o suíço

Johann Heinrich Lambert no trabalho de 1769 "**Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques**" (Memória sobre algumas propriedades notáveis de grandezas transcendentais circulares e logarítmicas), em que provou que muitas das identidades trigonométricas possuíam suas equivalentes hiperbólicas.

Passando mais de dois séculos, a tangente hiperbólica já estava sendo utilizada em diversas redes neurais, ela inclusive fez parte da primeira rede neural convolucional criada, estando presente na Le-Net-5, uma rede neural criada para identificar e classificar imagens de cheques em caixas eletrônicos. No artigo acadêmico "**Gradient-based learning applied to document recognition**" de 1998, os cientistas Yann LeCun, Léon Bottou, Yousha Bengio e Patrick Haffner explicam a criação dessa rede além de destacar suas métricas alcançadas.

Semelhante a sigmoide, a tangente hiperbólica possui várias propriedades parecidas. Como afirma Lederer em "**Activation Functions in Artificial Neural Networks: A Systematic Overview**" a tangente hiperbólica é infinitamente diferenciável, sendo uma versão escalada e rotacionada da sigmoide logística. Assim, como podemos ver no gráfico da figura 11, ela é uma função que está centrada em zero, e seus valores variam agora em um intervalo de -1 a 1, diferente da sigmoide, que varia somente de 0 a 1.

Podemos escrever a tangente hiperbólica utilizando a definição de tangente, que é o quociente a função seno com a função cosseno, só que neste caso usaremos as funções hiperbólicas. Assim temos a expressão ?? e seu gráfico 11.

Tangente Hiperbólica

$$\tanh(z_i) = \frac{\sinh(z_i)}{\cosh(z_i)} = \frac{e^{z_i} - e^{-z_i}}{e^{z_i} + e^{-z_i}} \quad (7.4)$$

Agora que temos a expressão da tangente hiperbólica e seu gráfico podemos também calcular sua derivada. Note na expressão ??, que podemos escrever a derivada da tangente utilizando a expressão da secante hiperbólica, mas também podemos utilizar a própria tangente hiperbólica se quisermos, assim ela também passa a ser bastante útil para reaproveitar códigos e cálculos.

Semelhante a sigmoide, os valores da tangente hiperbólica também se aproximam de zero conforme aumentam ou diminuem na sua derivada. Eles atingem um pico de 1, e conforme as entradas se aproximam de ± 4 a saída da derivada da tangente hiperbólica também fica próxima de zero. Além disso, como podemos ver na expressão ??, a derivada da tangente hiperbólica também pode ser expressas em termos da sua própria função, permitindo que cálculos possam ser reaproveitados.

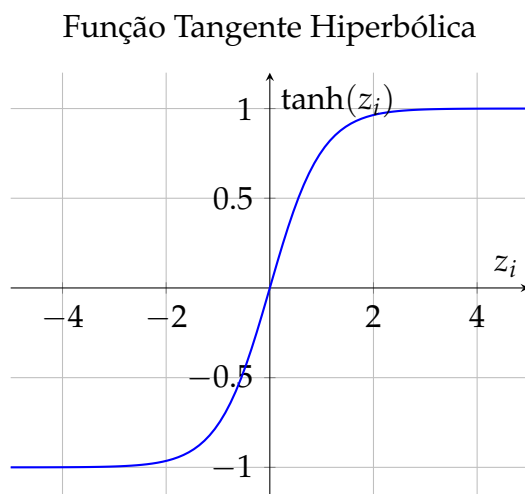


Figura 9 – Gráfico da tangente hiperbólica.

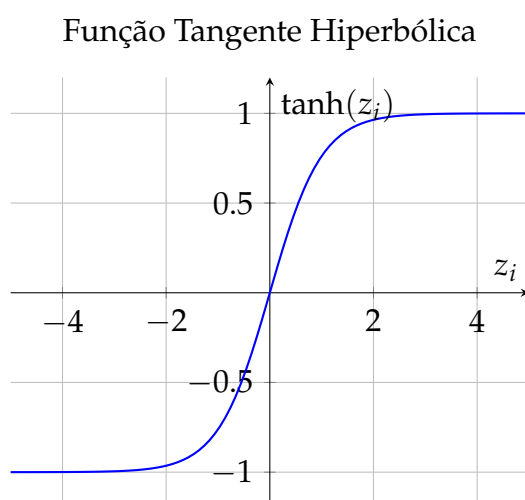


Figura 10 – Gráfico da tangente hiperbólica.

Derivada da tangente hiperbólica

$$\frac{d}{dz_i} \tanh(z_i) = \text{sech}^2(z_i) \quad (7.5)$$

7.5.1 Implementação em Python

Agora que sabemos como a tangente hiperbólica se comporta, além de conhecermos as suas fórmulas, podemos implementar a sua função em Python, utilizando o numpy para auxiliar nos cálculos.

Para isso, devemos implementar as expressões ?? e ??, obtendo o bloco de código ??.

Derivada da Tangente Hiperbólica

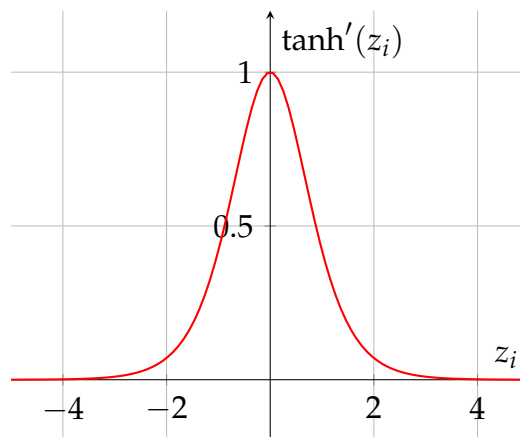


Figura 11 – Gráfico da derivada da tangente hiperbólica.

Bloco de Código : Classe completa do função de ativação Tangente Hiperbólica

```

1 import numpy as np
2 from layers.base import Layer # Assuming your base class is
  here
3
4 class Tanh(Layer):
5     def __init__(self):
6         super().__init__()
7         self.input = None
8         self.tanh_output = None
9
10    def forward(self, input_data):
11        self.input = input_data
12        self.tanh_output = np.tanh(self.input)
13        return self.tanh_output
14
15    def backward(self, grad_output):
16        tanh_grad = 1 - self.tanh_output**2
17        return grad_output * tanh_grad, None

```

7.6 Softsign: Uma Sigmoidal Mais Barata

A próxima função que vamos conhecer é a softsign, diferente da tangente hiperbólica e da sigmoide que tiveram suas origens em outros campos diferentes da ciência da computação, a softsign foi criada com o intuito de ser trabalhada em uma rede neu-

ral. Ela foi introduzida no artigo "**A Better Activation Function for Artificial Neural Networks**" de 1993, do cientista D.L. Elliott. No texto ele propõem a softsign como uma alternativa para as funções sigmodais tradicionais.

Como podemos ver no seu gráfico ??, ela possui o formato em "S" característico das sigmodais além de ser centrada em zero como a tangente hiperbólica. Além disso, como Elliot destaca em seu texto, ela é uma função que é diferenciável em toda a reta possuindo também a mesma propriedade das outras sigmodais de empurrar os valores de entrada para os seus extremos. Podemos notar também pelo seu gráfico que ela também uma função contínua, suave e não linear

Contudo, a principal diferença dela com as outras sigmodais está na sua fórmula, como podemos ver na equação ?? ela não utiliza nenhum exponencial para compor sua função. Isso faz com que ela seja uma função mais "barata" em termos de poder computacional para ser implementada em redes neurais. Assim, podemos obter resultados parecidos porém utilizando cálculos menos complexos e com isso teremos redes mais rápidas de serem treinadas. Um comparativo com as funções sigmodais desse texto e como elas reagem poderá ser visto em uma seção futura.

Com base em sua expressão, também podemos plotar o seu gráfico na figura ??.

Softsign

$$\text{softsign}(z_i) = \frac{z_i}{1 + |z_i|} \quad (7.6)$$

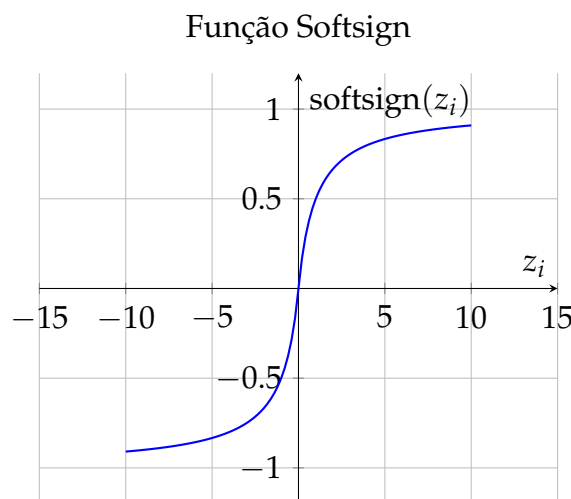


Figura 12 – Gráfico da função Softsign.

Com relação a sua diferenciabilidade, a softsign pode ser derivada em todos os seus pontos, e sua derivada pode ser vista na expressão ?. Com base nela, notamos uma outra diferença da softsign com a tangente hiperbólica e a sigmoide. Diferente das outras duas, a derivada da softsign não pode ser expressa em termos da sua própria função.

Assim, enquanto nas outras funções é feito um cálculo complexo na função e um simples na derivada, pois aproveitamos o resultado, na softsign isso não ocorre. Podemos pensar que talvez essa função seja mais rápida que as outras duas no Forward, mas não podemos garantir a mesma coisa com relação ao Backward, para isso devemos fazer alguns testes antes.

Podemos ver também no gráfico da derivada da softsign que o valor de sua derivada começa a ficar próximo de zero quando x se aproxima de ± 10 , indicando que ela começa a saturar nesse ponto.

Derivada da softsign

$$\frac{d}{dz_i} \text{softsign}(z_i) = \frac{1}{(1 + |z_i|)^2} \quad (7.7)$$

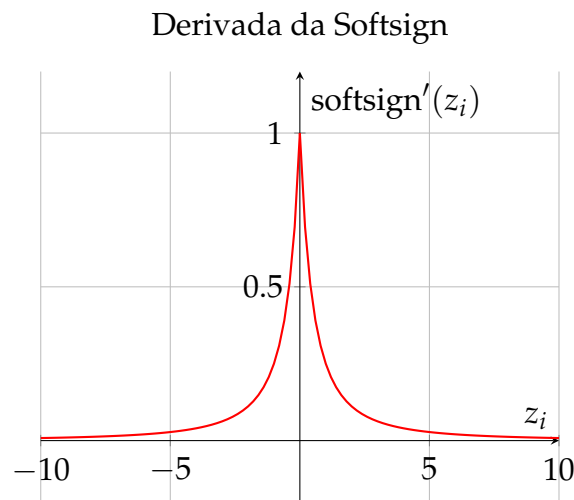


Figura 13 – Gráfico da derivada da função Softsign.

7.6.1 Implementação em Python

Assim, podemos implementar o bloco de código ?? representa a função softsign para ser utilizada uma rede neural.

Bloco de Código : Classe completa do função de ativação Softsign

```
1 from layers.base import Layer
2 import numpy as np
3
4 class Softsign(Layer):
5     def __init__(self):
6         super().__init__()
7         self.input = None
8
9     def forward(self, input_data):
10        self.input = input_data
11        return self.input / (1 + np.abs(self.input))
12
13    def backward(self, grad_output):
14        grad = (1 / (1 + np.abs(self.input))**2)
15        return grad_output * softsign_grad, None
```

7.7 Hard Sigmoid e Hard Tanh: O Sacrifício da Suavidade em Prol do Desempenho

Agora veremos duas funções sigmodais, criadas no contexto de redes neurais, cujo o seu intuito é ser trazer velocidade para o modelo que está sendo criado, elas são a hard sigmoid e hard tanh. Elas são inspiradas nas suas versões originais ou soft, com o mesmo intuito de variar até um certo ponto e depois saturar. Contudo, não garantem a mesma suavidade que as outras funções.

A primeira que vamos ver é a hard sigmoid. Como podemos ver na equação ??, ela pode ser escrita juntando 3 diferentes funções, duas delas sendo funções constantes e uma terceira sendo a função identidade. Note que ela perde a suavidade da função seno, possuindo bicos que a impedem de ser derivada em todos os seus pontos, contudo, seus cálculos são bem mais simples os cálculos quando comparamos com a sigmoide tradicional, não tem nenhuma exponencial para atrasar as respostas da função. Mas note que temos um crescimento linear quando os valores estão entre -3 e 3.

Hard Sigmoid

$$\text{hard sigmoid}(z_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i < -3 \\ z_i/6 + 0.5 & \text{se } -3 \leq z_i \leq 3 \\ 1 & \text{se } z_i > 3 \end{cases} \quad (7.8)$$

Função Hard Sigmoid

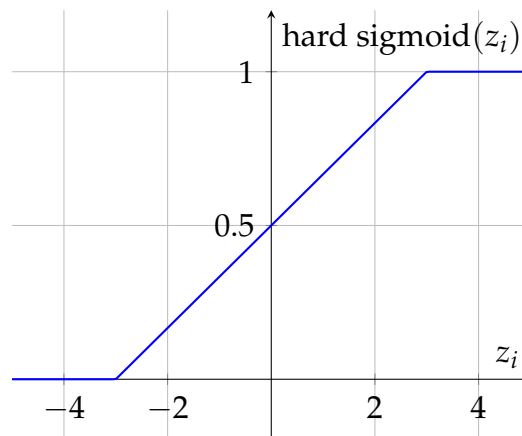


Figura 14 – Gráfico da função hard sigmoid.

Com relação a sua derivada, para obtê-la, apenas derivamos todas as três expressões construindo a expressão da sua derivada. Note que ela também não é suave quando comparamos com a derivada da sigmoide tradicional.

Derivada da Hard Sigmoid

$$\frac{d}{dz_i} \text{hard sigmoid}(z_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i < -3 \\ 1/6 & \text{se } -3 < z_i < 3 \\ 0 & \text{se } z_i > 3 \end{cases} \quad (7.9)$$

Note que o código dessa função é um pouco diferente das outras três que já vimos, ele não faz o uso de IFs, e sim opta por fazer essas operações de forma vetorizada, para garantir que os resultados sejam mais rápidos e otimizados para uma rede neural.

Também temos a função hard tanh, que tem a mesma proposta da hard sigmoid, porém busca imitar a tangente hiperbólica. Ela também é composta de uma condicional com três funções, duas constantes e a função identidade, como podemos ver na equação ??.

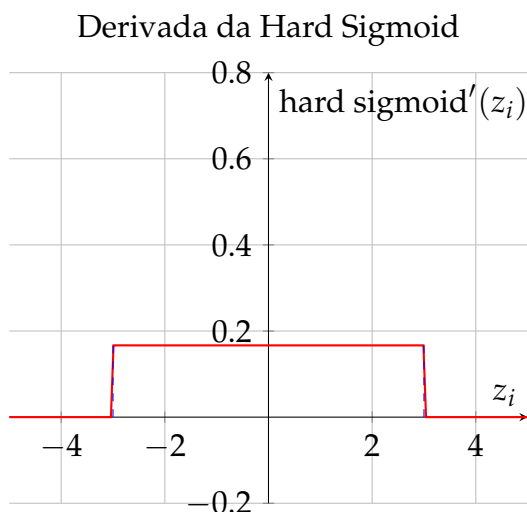


Figura 15 – Gráfico da derivada da Hard Sigmoid.

Hard Tanh

$$\text{hard tanh}(z_i) = \begin{cases} -1 & \text{se } z_i < -1 \\ z_i & \text{se } -1 \leq z_i \leq 1 \\ 1 & \text{se } z_i > 1 \end{cases} \quad (7.10)$$

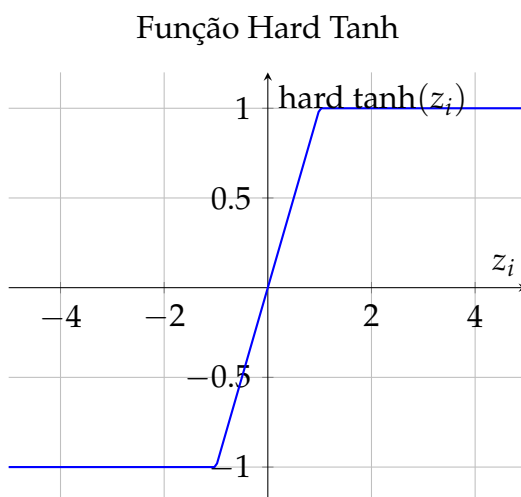


Figura 16 – Gráfico da função Hard Tanh. Fonte: PyTorch.

Utilizamos o mesmo procedimento da hard sigmoid para obter a derivada da hard tanh, derivamos as três expressões e encontramos então a equação ??, ao lado, temos a figura 16, que representa o gráfico da derivada da hard tanh.

Derivada da Hard Tanh

$$\frac{d}{dz_i} \text{hard tanh}(z_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i < -1 \\ 1 & \text{se } -1 < z_i < 1 \\ 0 & \text{se } z_i > 1 \end{cases} \quad (7.11)$$

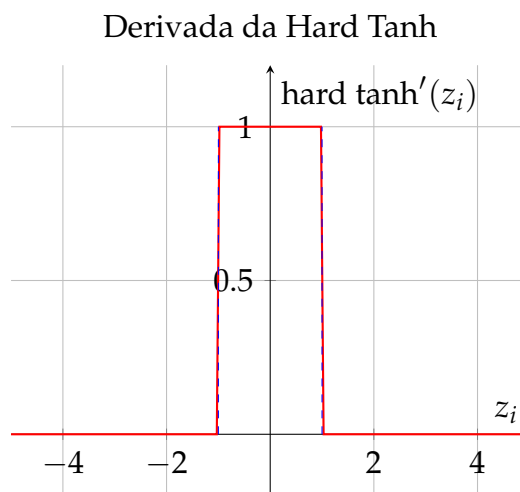


Figura 17 – Gráfico da derivada da Hard Tanh.

7.7.1 Implementação em Python

Para implementar a hard sigmoid em python, apenas devemos seguir as expressões ?? e ?? e obtemos o seu código. Note que por mais que ele seja maior que o da sigmoide, ele apresenta operações bem mais simples e "baratas" quando comparado com a sua versão soft.

Bloco de Código : Classe completa do função de ativação Hard Sigmoid

```
1 from layers.base import Layer
2 import numpy as np
3
4 class HardSigmoid(Layer):
5
6     def __init__(self):
7         super().__init__()
8         self.input = None
9
10    def forward(self, input_data):
11        self.input = input_data
12
13        output = self.input / 6 + 0.5
14        output = np.clip(output, 0, 1) # A more concise way
to handle the bounds
15
16        return output
17
18    def backward(self, grad_output):
19        hard_sigmoid_grad = np.full_like(self.input, 1 / 6)
20
21        hard_sigmoid_grad[self.input < -3] = 0
22        hard_sigmoid_grad[self.input > 3] = 0
23
24        return grad_output * hard_sigmoid_grad, None
```

Bloco de Código : Classe completa do função de ativação Hard Tanh

```
1 from layers.base import Layer
2 import numpy as np
3
4
5 class HardTanh(Layer):
6     def __init__(self):
7         super().__init__()
8         self.input = None
9
10    def forward(self, input_data):
11        self.input = input_data
12        return np.clip(self.input, -1, 1)
13
14    def backward(self, grad_output):
15
16        hard_tanh_grad = np.where((self.input > -1) & (self.
input < 1), 1, 0)
17
18        return grad_output * hard_tanh_grad, None
```

7.8 O Desaparecimento de Gradientes

Mesmo possuindo muitas propriedades atrativas para a utilização da família sigmoide em redes neurais, como a continuidade em todos os pontos e suavidade, além de que suas derivadas podem ser feitas com as próprias funções (no caso da sigmoide e da tangente hiperbólica), essa família de funções trouxe um problema para os cientistas da época.

Como foi destacado ao discutir o gráfico das derivadas dessas funções, nos notamos que para valores extremos, seja eles positivos ou negativos, a derivada dessas funções fica bem próxima de zero. Isso significa que quando essas funções recebem como entrada um valor alto no forward pass, na retropropagação, por pegarmos esse valor e calcularmos a derivada da função de ativação naquele ponto, irá retornar um valor baixo.

Como nós vimos em seções anteriores, a fórmula para encontrar o gradiente retropropagado para camadas anteriores de uma rede neural é dada pela multiplicação da perda, com a derivada da função de ativação no ponto e o valor do resultado da camada anterior de neurônios.

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ik}} = \left(\sum_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot w_{ji} \right) \cdot \sigma'(z_i) \cdot a_k^{\text{ant}}$$

Se considerarmos uma situação em que a derivada função de ativação irá retornar um valor baixo, esse valor será multiplicado com os outros termos da expressão fazendo com que o valor total do gradiente retropropagado naquela camada seja baixo.

$$\delta w = -\epsilon \frac{\partial E}{\partial w}$$

Nós também vimos que redes em que é utilizada a retropropagação, cálculo do gradiente é utilizado como forma de fazer com que os pesos e vieses dos neurônios se atualizem e com isso a rede aprenda. E se os pesos são atualizados com uma variação muito pequena quando comparamos com seus valores anteriores, isso significa que essa rede estaria dando pequenos passos para encontrar a sua função.

Ao passar valores muito extremos para uma função de ativação sigmoide, estamos prejudicando o aprendizado de uma rede neural, pois isso implica em derivadas com valores pequenos e consequentemente gradientes retropropagados pequenos. Agora imagine que em uma rede neural pode existir diversas camadas densas que usem a função sigmoide, se cada vez que o gradiente passar para a camada anterior ele diminuir, isso significa que na primeira camada, a última a ter seus pesos atualizados, o gradiente será tão pequeno que pode ser que não contribua para que a rede aprenda corretamente. É como se toda vez que passasse um valor muito extremo para a rede, o tamanho do passo que ela dá em direção a função procurada diminuísse.

Em "**Regularization and Reparametrization Avoid Vanishing Gradients in Sigmoid-Type Networks**", Leni Ven e Johannes Lederer explicam que se o gradiente é muito pequeno em valor absoluto, ou até mesmo igual a zero, a atualização do gradiente apresenta quase nenhum impacto nos parâmetros de uma rede neural, o que faz com que não há progresso nos parâmetros de aprendizado, assim o gradiente evanescente é quando esse fenômeno acontece repetidamente por vários pares de entrada e saída.

Isso se torna um problema, pois, quando criamos uma rede neural, utilizamos as primeiras camadas para que elas sejam responsáveis por aprender características básicas/simples de uma determinada amostra de dados. Se o gradiente é próximo de zero, o cálculo da atualização dos pesos e dos vieses irá gerar valores muito próximos dos originais. Como esses valores não irão atualizar corretamente, a rede neural não irá aprender características básicas de um cenário.

Porém, as retificadoras também não foram perfeitas, e por possuírem uma saída que não era limitada, elas acabaram trazendo o problema inverso, o gradiente explosivo. Assim, escolher uma função de ativação para compor uma rede neural é uma etapa

trabalhosa, pois estaremos sempre lidando com vantagens e desvantagens, sendo necessária uma escolha minuciosa a fim de encontrar o que melhor nos ajuda.

7.9 Comparativo de Desempenho das Sigmoidais

8 Funções de Ativação Retificadoras

8.1 Exemplo Ilustrativo: Vendendo Pipoca

Imagine que você está querendo ganhar dinheiro e decidiu vender pipoca em uma praça da sua cidade. Você comprou milho, óleo, sal e manteiga, um carrinho para poder levar e fazer as pipocas, além disso, você também comprou vários pacotes para poder colocar as pipocas para vender.

Nisso, você teve que estipular um valor para vender essas pipocas, após pensar um pouco e analisar todos os seus gastos, você estimou que um valor de R\$ 5,00 seria ideal, pois conseguiria pagar os seus gastos mas você ainda ia obter lucro dos seus clientes.

Agora você está pronto para vender, começou a fritar o milho e colocou uma plaquinha com o preço ao lado do seu carrinho. Então chega uma pessoa com R\$ 6,00 e decide comprar um pacote, você vende e entrega um real de troco. Logo em seguida aparece uma segunda pessoa com R\$ 4,99 e decide negociar com você, ela afirma que é quase R\$ 5,00, e por isso, você deveria vender a pipoca para ela, mas você explica que só vende pelo valor de R\$ 5,00.

Com base nisso, nós podemos chegar em uma situação em que um pacote de pipoca será vendido somente se uma pessoa possuir R\$ 5,00 no bolso, ou mais. Podemos então escrever algo como o da equação 8.1. Em casos em que uma venda ocorre, você poderá vender mais um pacote, para isso, o seu comprador deverá possuir pelo menos R\$ 10,00, assim, x que indica a quantidade de pacotes vendido seguirá a lei de formação $x = 5 \bmod d$, em que d é o dinheiro que a pessoa possui.

$$\text{Número de Pacotes} = \begin{cases} 0 & \text{quando } R\$ \leq 4,99 \\ x & \text{quando } R\$ > 4,99 \end{cases} \quad (8.1)$$

Saindo do assunto da pipoca e voltando para o tema deste texto, existe uma família de funções de ativação que funciona de forma semelhante a lógica de venda dos pacotes de pipoca, elas são as unidades lineares retificadoras. A ReLU, que dá nome a essa família, funciona de forma semelhante a essa venda, ela tem um comportamento de "tudo ou nada", em que irá comandar quando um neurônio de uma rede neural irá disparar seu resultado.

As funções retificadoras, como a ReLU, são o tópico principal deste texto, para isso, antes de conhecê-las vamos entender um pouco do cenário que elas surgiram, com uso das funções sigmóides e o problema do gradiente em fuga. Em seguida veremos a ReLU os problemas que ela pode causar em uma rede neural. Seguindo adiante, conheceremos as suas variantes com vazamento, como a Leaky ReLU, depois as variantes

suaves, como a ELU. Para conhecermos todas essas funções, serão utilizados gráficos, equações, comparativos de pesquisas e citações que explicam sobre suas propriedades. No final, veremos um comparativo com essas funções utilizando a construção de uma rede neural convolucional com o dataset CIFAR-10.

8.2 Rectified Linear Unit e Revolução Retificadora

Como vimos anteriormente, as funções sigmóides surgiram com inspiração nos neurônios humanos e como eles se comportam com determinados estímulos. Mas essas não foram as únicas funções que tiveram essa origem. Na década de 40, o pesquisador Alton Householder estava estudando um cenário parecido em seu trabalho *A theory of steady-state activity in nerve fiber network: I. Definition of mathematical biofysics*, nele o autor analisou o comportamento de fibras nervosas e quando elas irão assumir caráter excitatório ou inibitório, para isso ele apresentou a equação 8.2 (**Householder1941**).

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{quando } \eta_i \leq h_{ij} \\ a_{ij}, & \text{quando } \eta_i > h_{ij} \end{cases} \quad (8.2)$$

Essa equação nos mostra quando uma fibra nervosa irá disparar, para isso, devemos olhar o limiar da fibra h_{ij} e o estímulo total η_i , com base nesses valores e no que a fórmula apresenta, uma fibra irá disparar quando o estímulo total for maior que o seu limiar, quando isso não ocorrer, ela não irá disparar (**Householder1941**). Além disso, **Householder1941** explica também sobre o termo a_{ij} , a saída dessa função, segundo o autor ele é utilizado para representar o parâmetro de atividade, sendo um valor diferente de zero, podendo ser positivo (quando a fibra possui ação excitatória), ou negativo (apresentando caráter inibitório).

Essa equação criada por Householder, nos lembra bastante a expressão da função ReLU, a qual é denotada pela fórmula 8.3.

$$\text{ReLU}(z_i) = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i > 0 \\ 0, & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

A ReLU é o tópico principal desse texto e será a primeira função de ativação que iremos estudar. Dito isso, mesmo com ela existindo a mais de 80 anos, ela só passou a ser amplamente utilizada nos anos 2010, antes disso, as sigmóides eram a grande maioria quando o assunto era função de ativação. Contudo, as sigmóides eram funções saturantes, e isso fazia com que sua derivada retornasse muitos valores pequenos ao longo da função. Ao multiplicar vários valores pequenos na retropropagação do gradiente, o vetor gradiente ia diminuindo até chegar um ponto em que ele não conseguia atualizar os pesos e vieses das redes neurais de forma eficiente, assim, tínhamos o pro-

blema do gradiente em fuga. As funções retificadoras, sendo a principal delas a ReLU, surgem para corrigir esse problema crônico.

Dessa forma antes de conhecermos de fato a ReLU e suas propriedades, vamos antes entender o cenário que ela se popularizou, com os cientistas buscando novos tipos de funções de ativação que substituísse as sigmóides, funções saturantes, por outro tipo de função que resolvesse o problema do gradiente em fuga.

Nesse cenário, artigos como *Rectified Linear Units Improve Restricted Boltzmann Machines* foram essenciais para popularizar a ReLU como uma função de ativação interessante para se utilizar em redes neurais. No trabalho, **Nair2010** foram responsáveis por demonstrar propriedades úteis das funções retificadoras, como a capacidade da NReLU de auxiliar em reconhecimentos de objetos por possuir equivariância de intensidade (*intensity equivariance*), o que significa que se a intensidade da entrada de uma função for alterada por um determinado fator a intensidade de sua saída será alterada pelo mesmo fator. Essa propriedade se torna bastante útil em casos que queremos preservar informações, como ao comparar imagens, garantindo melhor precisão por exemplo em situações de baixa luz quando comparados com cenários em que possuem muita luz nas imagens.

Além disso, no texto *Deep Sparse Rectifier Neural Networks* dos autores **Bordes**, o uso de unidades retificadoras não lineares são propostos como alternativas para a tangente hiperbólica e sigmoide em redes neurais profundas, mas também os pesquisadores são capazes de demonstrar que as unidades retificadoras se aproximam melhor do comportamento de neurônios biológicos. Um ponto chave desse texto é que os autores destacam características importantes que a esparsidade traz para uma rede neural possibilitada pelo uso de funções retificadoras (**Bordes**). Entre elas estão:

- **Desembaraçamento de Informações:** Um dos principais objetivos dos algoritmos de aprendizado profundo é desembaraçar os fatores que explicam as variações nos dados, assim, existem diferentes tipos de representações, uma representação densa é altamente emaranhada porque quase qualquer mudança na entrada modifica a maior parte as entradas no vetor de representação, contudo, se tivermos uma representação esparsa e robusta a pequenas mudanças na entrada, o conjunto de características diferentes de zero é quase sempre aproximadamente conservado por pequenas mudanças na entrada (**Bordes**);
- **Representação eficiente de tamanho variável.** Diferentes entradas podem conter diferentes quantidades de informação e seriam mais convenientemente representadas usando uma estrutura de dados de tamanho variável, o que é comum em representações computacionais de informação, assim é interessante poder variar o número de neurônios ativos permitindo que um modelo controle a dimensi-

onalidade efetiva da representação para uma determinada entrada e a precisão necessária (**Bordes**);

- **Separabilidade linear.** Representações esparsas também são mais propensas a serem linearmente separáveis, ou mais facilmente separáveis com menos maquinário não linear, simplesmente porque a informação é representada em um espaço de alta dimensão, além disso, isso pode refletir o formato original dos dados (**Bordes**);
- **Distribuídas, mas esparsas.** Representações densamente distribuídas são as representações mais ricas, sendo potencialmente exponencialmente mais eficientes do que as puramente locais, além disso a eficiência das representações esparsas ainda é exponencialmente maior, com a potência do expoente sendo o número de características diferentes de zero, elas podem representar uma boa compensação em relação aos critérios acima (**Bordes**).

Por fim, um último trabalho que colaborou para a popularização da ReLU foi a *AlexNet*, de **AlexNet**, essa rede neural convolucional (CNN) foi capaz ganhar o Desafio de Reconhecimento Visual em Larga Escala ImageNet (ILSVRC) sendo treinada para classificar 1.2 milhões de imagens de alta resolução e classificá-las em 1000 diferentes classes. Para isso, a *AlexNet* foi construída utilizando 8 camadas com pesos, sendo as primeiras 5 camadas convolucionais, enquanto as três últimas são camadas totalmente conectadas, a última camada de neurônios faz uso da função de ativação *softmax* para fazer a distribuição em 1000 diferentes classes, além disso a *AlexNet* fez uso da ReLU em sua arquitetura (**AlexNet**). Podemos ver um esquema de sua arquitetura na figura ??.

Assim, como podemos ver na tabela 1, a *AlexNet* foi capaz de alcançar uma taxa de erro de 15.3% na fase de testes, podemos notar com base na variação de camadas convolucionais, que essa é uma rede que se beneficia da sua profundidade, algo que provavelmente só foi capaz de ocorrer devido ao uso da ReLU como função de ativação, por não gerar o problema do gradiente em fuga como nas sigmóides. Além disso, a rede SIFT + FVs (*Scale-Invariant Feature Transform + Fisher Vectors*) é mostrada na tabela como base de comparativo, podemos notar que a *AlexNet* foi capaz de diminuir com mais de 10% dos erros que essa rede gerava.

Além disso, o modelo SIFT + FVs (*Scale-Invariant Feature Transform + Fisher Vectors*), o qual é apresentado como base de comparação, apresenta uma taxa de erro de 26.2%, um aumento de 10 pontos percentuais quando comparado com o melhor modelo da *AlexNet* de 15.3%.

Agora que conhecemos um pouco de como foi o contexto em que a ReLU surgiu, podemos de fato conhecê-la. Para isso, primeiro conhecemos sua fórmula representada pela equação 8.3, mas também podemos representá-la com a expressão reduzida

Tabela 1 – Comparação das Taxas de Erro no AlexNet

Modelo	Top-1 (validação)	Top-5 (validação)	Top-5 (teste)
SIFT + FVs	-	-	26.2%
1 CNN	40.7%	18.2%	-
5 CNNs	38.1%	16.4%	16.4%
1 CNN ^a	39.0%	16.6%	-
7 CNNs ^a	36.7%	15.4%	15.3%

Nota. A tabela compara as taxas de erro de diferentes modelos nos conjuntos de validação e teste do ILSVRC-2012. Os valores em negrito indicam o melhor resultado. ^aModelos que foram pré-treinados para classificar todo o conjunto de dados ImageNet 2011 Fall. Adaptado de "ImageNet Classification with Deep Convolutional Neural Networks", por A. Krizhevsky, I. Sutskever, & G. E. Hinton, 2012, *Advances in Neural Information Processing Systems*, 25.

$\max(0, z_i)$. Nós podemos interpretar essa definição como uma pergunta em que a função ReLU recebe um número como entrada e faz uma pergunta "esse número é menor que zero?", se a resposta for sim, ela retorna como resultado o número zero, se a resposta for não, ela irá retornar o próprio número como sua saída. Neste caso estamos falando de números, mas a analogia utilizada no início do texto em que o pacote de pipoca só é vendido caso a pessoa tenha mais de R\$ 5,00 também pode ser utilizada, em que o resultado seria um valor booleano, indicando se a pessoa vende ou não a pipoca.

Além de sua fórmula, temos também o seu gráfico, que está presente na figura ??, podemos ver que ele é bem mais simples quando comparamos com a sigmoide, por exemplo, ele é a apenas a junção de duas retas, sendo uma delas uma função constante que irá retornar sempre zero e a outra a função identidade. Essa simplicidade da ReLU é algo muito atrativo para os desenvolvedores, pois, ao utilizá-la ao invés de uma função mais complexa como a sigmoide ou a tangente hiperbólica, estamos diminuindo a complexidade da rede neural, se essa rede se torna mais simples, a tendência é de que ela possua um custo de poder de processamento menor permitindo que um volume maior de dados seja processado em menos tempo e com isso seu tempo de treinamento seja menor. Note que, antes da ReLU surgir, muitos das funções de ativação faziam uso de exponenciais, a ReLU não só resolvia o problema do gradiente em fuga mas também era muito mais barata.

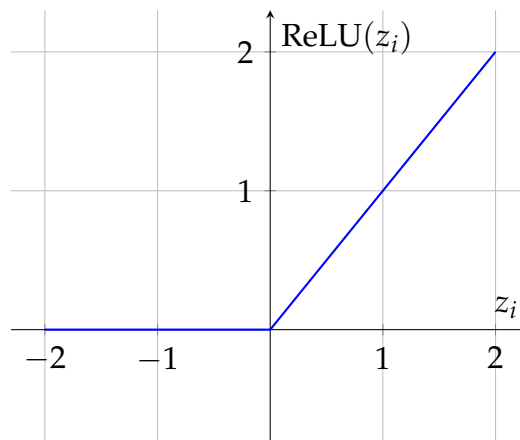
Rectified Linear Unit (ReLU)

$$\text{ReLU}(z_i) = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i > 0 \\ 0, & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

Como estamos trabalhando com redes neurais, uma das maiores vantagens dessas redes é o fato delas “aprenderem” com base na retropropagação do gradiente nas ca-

h!

Figura 18 – Gráfico da função ReLU.



madras da rede. Assim, ao calcularmos o gradiente para fazer a retropropagação do erro e ajustar os pesos e vieses das camadas, é necessário ter em mente também a derivada daquela função de ativação que vamos aplicar em uma camada de neurônios da rede, dado que ela entrará no backward pass do modelo.

Para achar a derivada da ReLU, podemos simplesmente derivar as duas condicionais dela, assim, quando x for maior que zero, a saída será 1, já quando x for menor que zero, a saída será zero. Mas encontramos um problema nisso, a derivada dessa função não existe quando x é 0, pois o limite lateral à esquerda dessa função é zero, enquanto o limite lateral a direita dela é um. Isso passa a ser um problema quando queremos calcular o valor de saída justamente quando aquele valor de entrada é zero. Na prática, esse problema é fácil de resolver quando estamos trabalhando com o código dessa função, basta escolhermos qual será o resultado da ReLU quando esse valor de entrada for zero. Podemos dizer que ele será 1 ou zero, isso irá depender somente da nossa implementação da derivada da ReLU. Note que, essa descontinuidade da ReLU, se torna um problema quando estamos trabalhando com sua derivada.

Assim, temos a equação ??.

Derivada Rectified Linear Unit (ReLU)

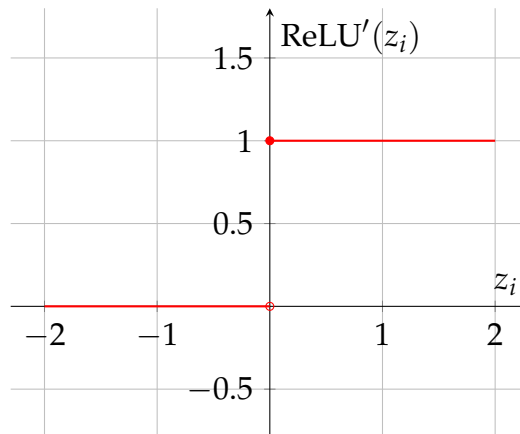
$$\frac{d}{dz_i}[\text{ReLU}](z_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } z_i > 0 \\ 0, & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

Esse detalhe da descontinuidade da ReLU no ponto zero foi algo que acabou mudando em funções futuras, que buscam corrigir erros da ReLU e melhorá-la, assim, com o passar do tempo foram surgindo outras alternativas que também trabalhassem com os atributos da ReLU, mas que fossem contínuas em toda a reta, permitindo a sua derivação também em todos os pontos. Uma dessas funções a ELU, ela será explicada

mais em frente.

Além de termos a sua derivada em equação, podemos fazer também o seu gráfico na figura ??, note que ela é ainda mais simples que a própria função de ativação, são só duas retas constantes que irão retornar zero quando o número for menor que zero, ou irão retornar 1 quando a entrada for um número maior que zero.

Figura 19 – Gráfico da Derivada da Função ReLU



8.2.1 Implementação em Python

Agora que sabemos qual é o comportamento da ReLU, quais são suas fórmulas e quais são seus gráficos, podemos trabalhar em uma implementação dessa função utilizando Python. Para fazer isso, vamos criar uma classe, com duas funções: a *forward* e a *backward*. A função *forward* é responsável por implementar a ReLU, já a *backward* implementa a sua derivada. Para criar a *forward*, podemos utilizar uma função já pronta da biblioteca numpy, a *maximum*, essa função é responsável por comparar dois valores e escolher o maior deles. Neste caso, um dos valores será sempre zero, enquanto o outro será a entrada da função. Já a *backward*, irá receber o gradiente retropropagado, e irá aplicar na fórmula da derivada da ReLU, comparando se aquele valor é negativo e retornando zero, caso for, ou um caso seja positivo.

Assim, conhecemos a ReLU, uma função que é considerada padrão para a maioria das redes neurais *feedforward* (Goodfellow2016). Vimos que ela veio para ser uma alternativa para as funções sigmóides, sendo mais simples e resolvendo o problema do gradiente em fuga, contudo, a ReLU também apresenta problemas, como o do neurônios agonizantes e o explosão de gradientes, uma versão diferente do problema do gradiente em fuga. Dito isso, eles serão explicados em seguida para entendermos também as desvantagens de se utilizar essa função em uma rede neural.

Bloco de Código : Classe completa do função de ativação Rectified Linear Unit

```
1 import numpy as np
2 from layers.base import Layer
3
4 class ReLU(Layer):
5     def __init__(self):
6         super().__init__()
7         self.input = None
8
9     def forward(self, input_data):
10         self.input = input_data
11         return np.maximum(0, self.input)
12
13     def backward(self, grad_output):
14         relu_grad = (self.input > 0)
15
16         # Apply the chain rule
17         return grad_output * relu_grad, None
```

8.3 Dying ReLUs Problem

8.4 Corrigindo o Dying ReLUs Problem: As Variantes com Vazamento

Diferente da ReLU tradicional que retorna zero para os casos em que sua entrada é negativa e por isso na sua derivada irá também retornar zero nestes casos, as variantes com vazamento atuam de outra forma, elas retornam um valor muito pequeno como 0.1, multiplicado pela entrada da função quando ela é negativa. Por isso, a sua derivada será algo também 0.1 (ou valores muito pequenos), isso permite um "vazamento" do gradiente em cenários nos quais a entrada do neurônio será negativa.

Nós vimos, que a causa do neurônios agonizantes era justamente isso: muitas situações em que a entrada era negativa, que gerava um gradiente nulo e consequentemente impedia os neurônios de terem seus pesos e vieses ajustados, e futuramente morrendo, retornando zero independente de qual fosse a sua entrada.

Assim, essas variantes, como a Leaky ReLU e a PReLU buscam tentar corrigir um amenizar esse problema da ReLU mas mantendo algumas de suas principais propriedades, como a não linearidade, a capacidade de ser escrita compondo duas retas per-

mitindo a criação de uma função simples e rápida de ser computada em uma rede neural.

8.4.1 Leaky ReLU (LReLU)

Seguindo adiante, a próxima função que iremos ver é a Leaky ReLU, ela é uma variante da ReLU que foi criada com intuito de corrigir o problema do neurônios agonizantes. Assim como a ReLU, que foi explicada com a analogia do vendedor de pipoca, podemos estender essa explicação para essa nova função, antes o limiar para comprar um pacote de pipoca era de R\$ 5,00, quem tivesse menos que isso não comprava nada. Mas agora, para garantir que todos possam comprar pipoca, você como vendedor definiu que quando uma pessoa tiver menos que R\$ 5,00 ela também será capaz de comprar pipoca, só que neste caso ela comprará um punhado de pipoca que será proporcional ao dinheiro que ela tem multiplicado por uma constante α . Assim, uma pessoa com um valor próximo de R\$ 5,00 pode sair com um punhado de pipoca quase igual ao do pacote original se essa constante α for um valor muito próximo de um. Com isso, você como vendedor consegue obter lucro com uma nova clientela além de não perder clientes por não possuírem o valor total do pacote de pipoca. A Leaky ReLU traz uma proposta parecida para resolver com o problema do neurônios agonizantes.

Ela foi apresentada no artigo *Rectifier Nonlinearities Improve Neural Networks Acoustic Models*, em que os autores exploram o uso de redes retificadoras profundas como modelos acústicos para a tarefa de reconhecimento de fala conversacional *switchboard* (Mass2013). Além disso, a sua principal diferença, como explicam Mass2013, está no fato dela permitir que um pequeno gradiente diferente de zero flua quando a unidade está saturada e não ativa. Esse gradiente diferente de zero que flui quando a unidade está saturada e não ativa são os seus compradores de pipoca que não possuem o valor total mas são capazes de comprar um punhado dela, neste caso a unidade estará não ativa pois o valor de entrada é negativo mas irá retornar um valor diferente de zero, algo que não acontecia na ReLU.

Em testes de desempenho realizados por Mass2013, eles foram capazes de analisar como uma rede neural que faz uso dessa função pode performar quando comparada com a ReLU tradicional e também com redes que fazem uso da Tangente hiperbólica, esse comparativo pode ser visto na tabela 2. Nós podemos nessa tabela que as redes neurais que fizeram uso da Leaky ReLU como função de ativação obtiveram melhores resultados quando comparadas com as redes que utilizaram a ReLU tradicional ou a Tangente Hiperbólica, vemos que a rede que foi construída com 3 camadas utilizando a LReLU foi capaz de obter a taxa de erro de palavra (WER) mais baixa no conjunto SWBD, com 17.8%, esse resultado 0.3 pontos percentuais menor quando comparado com uma mesma rede de três camadas que utilizou a ReLU tradicional.

Além disso, ainda na ??, nas redes compostas por três camadas, a rede que fez uso da LReLU também foi melhor que suas outras concorrentes que fizeram uso da ReLU e da tanh, sendo capaz de ter a menor taxa de erro de palavra no conjunto de avaliação (EV), com 24.3%, uma diferença de 0.1 pontos percentuais quando comparada com a ReLU de 24.4%, já quando essa rede é comparada com a tangente hiperbólica, a diferença é ainda maior, sendo de 2.1 pontos percentuais, indicando que a LReLU trás resultados melhores quando comparada com essas duas funções de ativação.

Tabela 2 – Comparativo de Desempenho de Redes Neurais para Reconhecimento de Fala

Modelo	Dev CrossEnt	Dev Acc (%)	SWBD WER	CH WER	EV WER
GMM Baseline	N/A	N/A	25.1	40.6	32.6
2 Camadas Tanh	2.09	48.0	21.0	34.3	27.7
2 Camadas ReLU	1.91	51.7	19.1	32.3	25.7
2 Camadas LReLU	1.90	51.8	19.1	32.1	25.6
3 Camadas Tanh	2.02	49.8	20.0	32.7	26.4
3 Camadas ReLU	1.83	53.3	18.1	30.6	24.4
3 Camadas LReLU	1.83	53.4	17.8	30.7	24.3
4 Camadas Tanh	1.98	49.8	19.5	32.3	25.9
4 Camadas ReLU	1.79	53.9	17.3	29.9	23.6
4 Camadas LReLU	1.78	53.9	17.3	29.9	23.7

Nota. Comparação de métricas de erro para sistemas de redes neurais profundas (DNN) em reconhecimento de fala. As métricas de quadro a quadro (frame-wise) foram avaliadas em um conjunto de desenvolvimento, e as taxas de erro de palavra (WER) no conjunto de avaliação Hub5 2000 e seus subconjuntos. Abreviações: Dev CrossEnt = Entropia Cruzada no conjunto de desenvolvimento; Dev Acc = Acurácia no conjunto de desenvolvimento; WER = Taxa de Erro de Palavra (Word Error Rate); SWBD = Switchboard; CH = CallHome; EV = Evaluation set. Valores em negrito indicam os melhores resultados para modelos de 3 e 4 camadas. Adaptado de "Rectifier Nonlinearities Improve Neural Network Acoustic Models", por A. L. Maas, A. Y. Hannun, & A. Y. Ng, 2013, *In Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning, Workshop on Deep Learning for Audio, Speech and Language Processing*.

Agora comparando as redes que fazem uso de quatro camadas, cabe destacar os resultados da entropia cruzada no conjunto de desenvolvimento (Dev CrossEnt), que é uma métrica responsável por medir a diferença entre duas distribuições de probabilidade, neste cenário: a distribuição de probabilidade prevista pelo modelo e a distribuição de probabilidade real, com base nesses dois valores, a entropia cruzada consegue medir o quão bem o modelo de rede neural criado pelos pesquisadores está prevendo a transcrição correta da fala durante a fase de treinamento e ajuste, para isso, é utilizado o conjunto de dados de desenvolvimento (Dev Set). Tendo isso em mente, o modelo de quatro camadas que fez uso da Leaky ReLU em sua arquitetura obteve o melhor resultado dos seus outros dois concorrentes, para isso, sendo assim, ele teve como resultado

uma entropia cruzada de 1.78, 0.01 menor que o modelo que fez uso da ReLU tradicional (que obteve 1.79) e 0.2 menor que o modelo que fez uso da tangente hiperbólica (que obteve 1.98).

Ainda no grupo de redes que possuem quatro camadas, podemos ver um empate quando analisamos a acurácia no conjunto de desenvolvimento (Dev Acc), que é uma métrica responsável por medir a proporção das previsões corretas feitas pelo modelo quando comparadas com o total de previsões feitas. Assim, quando vemos a tabela 2, as redes que fizeram uso tanto da ReLU quanto da Leaky ReLU obtiveram a mesma acurácia de 53.9%, já quando comparamos com a tangente hiperbólica, vemos uma diferença de 4.1 pontos percentuais, indicando as funções retificadoras acabam sendo mais precisas para essa análise. Não somente elas são mais precisas, mas quando comparamos com a Leaky ReLU, vemos outros ganhos também, como menores taxas de erro de palavra (WER) tanto no conjunto Switchboard (SWBD) quanto no conjunto de avaliação (EV).

Seguindo adiante, podemos discutir a expressão matemática da Leaky ReLU, a qual é dada pela equação ??, que é bem parecida com a ReLU, porém, ela também irá retornar valores negativos quando a sua entrada for um valor negativo, diferente da ReLU, que iria retornar como saída zero. A constante α , no texto original é dada por 0.1 fazendo com que os valores negativos sejam pequenos mas ainda sim, diferentes de zero quando passam pela entrada (Mass2013). Cabe destacar que, essa constante α pode ser ajustada para diferentes cenários, podendo ser valores diferentes de 0.1 como foram propostos no texto original, é possível ver isso acontecendo em comparativos ao longo desse texto, em que diferentes autores optam por valores diferentes de α para melhor ajustar ao problema que está sendo analisado.

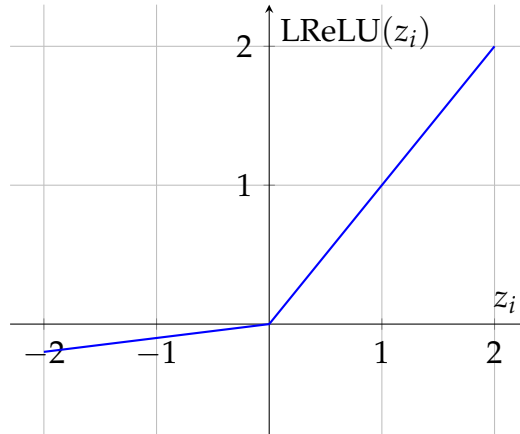
Leaky ReLU (LReLU)

$$\text{LReLU}(z_i) = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i \geq 0 \\ \alpha \cdot z_i, & \text{se } z_i < 0 \end{cases} \quad (8.6)$$

Cabe destacar, que assim como a ReLU tradicional, a Leaky ReLU também possui uma expressão compacta, dada por $\max(\alpha z_i, z_i)$, sendo uma forma mais simples de escrever a expressão ?? com condicionais mas ainda sim manter o seu sentido. Já para a sua representação gráfica, podemos plotar o seu gráfico na figura ??, analisando ele, vemos que a Leaky ReLU possui características muito semelhantes com a ReLU, como o fato dela assumir o comportamento de uma função identidade para para valores positivos em sua entrada, mas, quando analisamos seus valores negativos vemos uma diferença, agora eles são dados por um gráfico de uma função do primeiro grau, diferente da ReLU que era uma função constante em zero. Além disso, a LReLU, também

é uma função assimétrica e não linear, bem como apresenta um ponto de descontinuidade em zero, pois ao traçarmos os seus limites laterais, eles apresentam valores diferentes, por isso ela não pode ser derivada nesse ponto, assim como a ReLU que vimos anteriormente.

Figura 20 – Gráfico da Função Leaky ReLU (LReLU) com $\alpha = 0.1$



Sabendo de sua expressão e seu gráfico, podemos nos preocupar agora a calcular sua derivada, para isso, devemos derivar as duas condicionais que estão na função da Leaky ReLU. Assim, quando a entrada dessa função for maior que zero, essa função será x que derivada é 1, já quando a entrada for menor que zero, a função será αx , que quando derivada tem como resultado a própria constante α . Contudo, como dito anteriormente, a derivada da Leaky ReLU não existe quando a entrada é exatamente zero, mas na prática, quando estamos trabalhando com a sua definição na retropropagação, podemos definir um valor para a derivada nesse ponto, assim como fizemos com a ReLU tradicional. Com isso em mente, temos a equação ?? que representa a derivada da Leaky ReLU, note que para a sua derivada nós não temos uma expressão reduzida quando comparada com a expressão original.

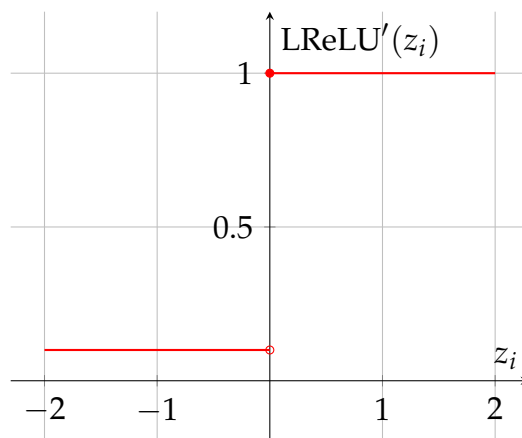
Derivada Leaky ReLU (LReLU)

$$\frac{d}{dz_i} [LReLU](z_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } z_i > 0 \\ \alpha, & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

Já que agora conhecemos a sua derivada, podemos também plotar o seu gráfico, o qual é dado pela figura ?. Ele também é parecido com o gráfico da ReLU que vimos anteriormente, sendo composto por duas retas constantes, para valores positivos ele retorna 1 (assim como a ReLU), e para valores negativos ou nulos ele irá sempre retornar a constante α , diferente da ReLU, que iria retornar zero, indicando que neste caso o neurônio não está passando nenhuma informação na retropropagação do gradiente. Por esse motivo que a Leaky ReLU tem esse nome, pois leaky em inglês

significa "vazamento", e neste caso, como a derivada dela é diferente de zero, mesmo quando a entrada for negativa, ela irá passar informações durante a retropropagação, isso permite que o neurônio não morra, como acontecia em algumas redes que faziam uso da ReLU tradicional, e por esse motivo continue aprendendo pelo fato do gradiente continuar fluindo pela rede e consequentemente atualizando os pesos e vieses dos neurônios.

Figura 21 – Gráfico da Derivada da Função Leaky ReLU (LReLU) com $\alpha = 0.1$



Voltando para *Rectifier Nonlinearities Improve Neural Networks Acoustic Models*, **Mass2013** explicam sobre outras propriedades da LReLU, como o fato dela sacrificar a esparsidade de zero duros (*hard-zero sparsity*) para ter um gradiente que é potencialmente mais robusto durante a otimização da rede neural. Além disso, os autores também explicam que ambas as funções retificadoras, tanto a ReLU quanto a Leaky ReLU se saem bem nos testes de performance quando comparadas com a tangente hiperbólica além de se beneficiarem melhor da profundidade de rede quando comparadas com as sigmóides (**Mass2013**).

A Leaky ReLU já é uma evolução quando comparamos com a ReLU tradicional, mas, podemos ir além e encontrar funções ainda mais complexas que também buscam assim como a LReLU resolver o problema dos neurônios agonizantes com um vazamento de gradiente nos casos negativos, uma dessas funções é a PReLU, a qual veremos em seguida.

8.4.1.1 Implementação em Python

Bloco de Código : Classe completa do função de ativação Leaky ReLU

```
1 import numpy as np
2 from layers.base import Layer
3
4
5 class LeakyReLU(Layer):
6     def __init__(self, alpha=0.01):
7         super().__init__()
8         self.input = None
9         self.alpha = alpha
10
11     def forward(self, input_data):
12         self.input = input_data
13         return np.maximum(self.input * self.alpha, self.input)
14
15     def backward(self, grad_output):
16         leaky_relu_grad = np.where(self.input > 0, 1, self.
alpha)
17         return grad_output * leaky_relu_grad, None
```

8.4.2 Parametric ReLU

Continuando nas analogias do vendedor de pipoca para explicar as funções retificadoras, podemos também pensar uma para a Parametric ReLU. Na LReLU nós tínhamos uma constante fixa, que valia para todos os valores de entrada e não mudava, era como se o vendedor de pipoca definisse um valor para a proporção de pipoca que a pessoa irá receber quando tiver com uma quantia menor de dinheiro que o limiar da venda. Mas agora, este vendedor está mais experiente, e sabe que pode ajustar essa constante sempre que quiser, assim, quando estiverem muitas pessoas na praça em que está vendendo pipoca, ele poderá colocar uma constante que será capaz de dar uma quantidade ainda maior de pipoca para aqueles que não possuem o valor total de um pacote, o que incentivaria a venda para as pessoas. Já quando estivesse em um lugar mais vazio, colocaria uma constante que daria menos pipoca, para maximizar o seu lucro. A Diferença da PReLU para a LReLU está justamente nessa constante e como ela irá se comportar.

Proposta por He2015 no artigo *Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human Level Performance on Image Net Classification*, a PReLU surgiu como uma variação não so-

mente da ReLU, mas também uma evolução da Leaky ReLU que vimos anteriormente, isso ocorre, pois diferente da LReLU que possuía uma constante α fixa que multiplicava o valor da entrada nos casos negativos, a PReLU trás essa mesma constante, mas neste caso ela é adaptável, se ajustando as particularidades de cada problema que uma rede neural está tentando resolver. Assim, a PReLU é como o pipoqueiro mais experiente, que ajusta como vai vender o seu punhado de pipoca em cada uma das situações para poder maximizar os seus lucros mas ao mesmo tempo garantir mais clientes para si.

Ainda em *Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human Level Performance on Image Net Classification*, os autores realizam testes comparando a ReLU tradicional com a PReLU utilizando como base o dataset de 1000 classes do ImageNet 2012, o qual contém cerca de 1.2 milhões de imagens de treino, 50.000 imagens de validação e 100.000 imagens de teste sem rótulos publicados (He2015). Para isso, He2015 criaram três modelos diferentes (A, B e C), baseados na arquitetura VGG-16 mas com variações entre si como diferentes números de camadas convolucionais e consequentemente complexidades distintas para cada algoritmo. Esses modelos podem ser vistos na tabela ??.

Conhecendo cada um dos modelos apresentados por He2015, podemos analisar como eles se comportaram nos testes de performance utilizando o dataset do ImageNet 2012, para isso, os autores realizaram testes tanto utilizando a nova função de ativação PReLU, mas também a ReLU tradicional, podendo ter uma base melhor para suas comparações. Além disso, como podemos ver na tabela ??, é medido o erro Top-1 e o erro Top-5, o erro Top-1 nos mostra quão preciso é o modelo em seu melhor chute, já o erro Top-5 nos mostra se a resposta correta estava entre os top 5 melhores chutes feito pelo modelo. Assim, conhecendo esses parâmetros de medida, podemos chegar na conclusão de que quanto menor esses valores, melhor o modelo está performando, seguindo essa lógica, podemos ver que todos os modelos que fazem uso de funções retificadoras, seja a PReLU ou mesmo a ReLU tradicional, são capazes de performar melhor que os modelos VGG-16 e GoogleLet que fazem uso de outras funções de ativação.

Quando comparamos o modelo C, que faz uso da PReLU e possui mais camadas convolucionais, com o modelo A que faz uso da ReLU, vemos uma diferença de 2,21 pontos percentuais no erro Top-1, já quando analisamos o erro Top-5, essa diferença é de 1,21 pontos percentuais, o que indica que a ReLU é capaz de trazer melhores resultados quando comparada com redes que fazem uso da ReLU tradicional. Já quando comparamos com o VGG-16, essa diferença de desempenho é ainda maior, sendo de 3,8 pontos percentuais no erro Top-1 e 1,95 pontos percentuais no erro Top-5, note que a VGG-16, a qual é indicada na tabela ?? possui bem menos camadas convolucionais que o modelo C, podemos notar também a sua complexidade computacional, que é menos da metade da do modelo C, isso indica que a PReLU, por ser uma função não

saturante e consequentemente corrigir o problema do gradiente em fuga, é capaz de criar redes neurais que se beneficiam melhor com uma maior profundidade, sendo capazes de extrair mais informações e com isso performar melhor.

Agora que conhecemos a Parametric ReLU e sabemos de seu potencial, podemos estudar a sua fórmula matemática, a qual é dada pela expressão ???. Como explicam **He2015**, a PReLU generaliza a tradicional ReLU, além de melhorar o *model fitting* apresentando quase nenhum custo computacional extra e com um baixo risco de sobreajuste (*overfitting*). Este coeficiente α , que ela apresenta assim como a Leaky ReLU que vimos anteriormente, é aprendível, e não uma constante fixa, isso indica ser otimizado utilizando a retropropagação do gradiente de forma simultânea com as outras camadas da rede neural criada (**He2015**). Assim, por esse fato temos uma melhor eficiência no aprendizado e no tempo da rede, dado que não precisamos criar uma nova etapa só para ajustar os valores de alpha das camadas densas que fazem o uso da Parametric ReLU.

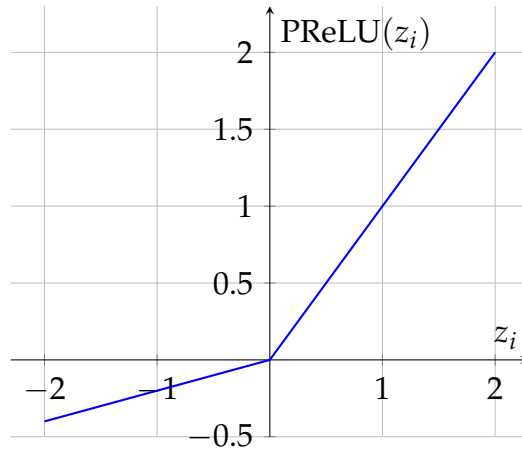
Parametric ReLU (PReLU)

$$\text{PReLU}(z_i) = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i \geq 0 \\ \alpha_i \cdot z_i, & \text{se } z_i < 0 \end{cases} \quad (8.8)$$

Assim como a LReLU e a ReLU, também podemos expressar a PReLU como uma função reduzida ao invés das condicionais vistas na expressão ??, para isso, ela utiliza a mesma forma $\max \alpha x, x$, que vimos na Leaky ReLU, mas agora, a constante possui outro significado, indicando que ela é um parâmetro aprendível, e não mais fixo como na Leaky ReLU.

Com base em sua equação, podemos plotar o gráfico da PReLU na figura ??, note que caso este coeficiente for igual a zero, nos temos então a ReLU tradicional, já quando ele for igual a 0.1, teremos a LReLU, no gráfico α está com valor de 0.2, mas ele irá variar conforme a rede aprende e para cada problema, podendo apresentar diferentes valores em diferentes situações. Com isso, nos notamos que a PReLU é composta por duas funções do primeiro grau, sendo assimétrica, e também apresentando um ponto de descontinuidade em zero, o que impede de ser derivada neste ponto.

Se conhecemos a sua fórmula e como ela se comporta, podemos também derivar a PReLU, para isso, derivamos cada uma das expressões dos condicionais de forma separada, assim como fizemos com a Leaky ReLU e a ReLU anteriormente. Como a fórmula da PReLU é igual a LReLU, podemos apenas nos lembrar dela e citar a expressão ?? como sua derivada. Note que, essa derivada também não existe quando a entrada é exatamente zero, mas assim como na Leaky ReLU, "corrigimos" isso dizendo que ela será igual a α nesse ponto, para que o gradiente continue fluindo durante o backward pass. Vale lembrar, que essa reta em α irá variar conforme a rede neural

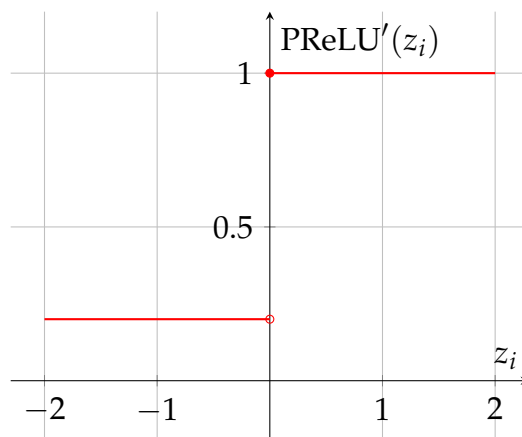
Figura 22 – Gráfico da Função Parametric ReLU (PReLU) com $\alpha = 0.2$ 

aprende as características e se ajusta ao problema que está tentando resolver.

Derivada Parametric ReLU (PReLU)

$$\frac{d}{dz_i}[PReLU](z_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } z_i > 0 \\ \alpha_i, & \text{se } z_i < 0 \\ \nexists, & \text{se } z_i = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

Sabendo a fórmula da derivada da PReLU, podemos também plotar o seu gráfico, o qual é dado pela figura ??, ele é semelhante ao gráfico da Leaky ReLU visto na seção anterior, mas agora, a constante α está com valor em 0.2. Note que, o gráfico da derivada é também muito simples, sendo apenas duas funções constantes, uma que vale 1 para os valores de entrada positivos e outra que irá valer 0,2 para os outros valores. Assim, a PReLU consegue manter a simplicidade da ReLU, mas ao mesmo tempo fazendo pequenos ajustes garantindo melhorias de desempenho em redes mais profundas, como as que vimos apresentadas por **He2015**.

Figura 23 – Gráfico da Derivada da Função Parametric ReLU (PReLU) com ($\alpha = 0.2$)

Um feito importante que deve ser destacado sobre a PReLU, que inclusive é o nome do artigo que foi responsável por introduzir essa função para a comunidade científica, é de que durante a pesquisa do texto *Delving Deep into Rectifiers: Surpassing Human Level Performance on Image Net Classification*, **He2015** foram capazes de criar uma rede neural capaz de superar a capacidade humana de reconhecer diferentes conjuntos de imagens no ImageNet Classification, isso ocorreu porque a um humano ao analisar o ImageNet apresenta uma taxa de erro Top-5 de 5.1% e em um dos testes realizados pelos autores, uma rede neural alcançou uma taxa de erro Top-5 de 4.94%, superando assim a capacidade humana de reconhecimento de imagens.

Assim, é nítido destacar que não somente a PReLU, mas as funções retificadoras de forma geral, foram capazes de trazer melhorias significativas para os modelos de aprendizado profundo quando comparadas com as funções sigmóides, as quais foram o padrão da indústria por muitos anos. De fato, a resolução do problema do gradiente em fuga, possibilitou a criação de redes neurais ainda mais profundas, e com isso, sendo capazes de extrair mais informações e consequente melhores métricas, sendo capazes até de superar a capacidade humanas em algumas tarefas como nós vimos no texto.

8.4.3 Randomized Leaky ReLU

Anteriormente, na Parametric ReLU, nós tínhamos um padrão aprendível que era atualizado ao longo da retropropagação da rede, nós o comparamos com o caso do vendedor de pipoca ficando mais experiente para as vendas. No caso da RReLU temos um vendedor um tanto quanto instável, ele se baseia na sorte/aleatoriedade para definir qual será o punhado de pipoca que cada pessoa irá receber ao comprar com um valor abaixo do limiar de venda. Para isso, não existe mais um padrão, algo como o horário ou a quantidade de pessoas na praça para fazer aumentar ou diminuir a quantidade de pipoca que terá em um punhado. Essa estratégia parece caótica, mas pode ser interessante caso você queira instigar as vendas e deixá-las divertidas, você pode comprar um punhado de pipoca, mas não irá saber quanto irá receber, é uma grande aposta.

Segundo **XuRReLU**, em *Empirical Evaluation of Rectified Activations in Convolutional Network*, a Randomized Leaky ReLU foi proposta pela primeira vez em uma competição do Kaggle NDSB, ela era uma função semelhante a leaky ReLU mas que o seu coeficiente α é um número aleatório dado pela distribuição normal da forma $U(l, u)$, nessa mesma competição os valores escolhidos para essa distribuição foram de $U(3, 8)$.

Ainda no artigo, **XuRReLU** investigam a performance de diferentes funções retificadoras em uma rede neural convolucional, cuja arquitetura pode ser vista na tabela ??, para a classificação de imagens, os autores analisaram a ReLU tradicional, a Le-

aky ReLU, a Parametric ReLU e a Randomized Leaky ReLU. Para fazer a análise dos modelos, foram escolhidos os datasets CIFAR-10 e CIFAR-100, e o desempenho dessas funções nos respectivos datasets pode ser visto nas tabelas ?? e ??.

Analisando a tabela ??, que mostra a taxa de erro das funções retificadoras na rede NIN para o dataset CIFAR-10, nós podemos notar que a Randomized Leaky ReLU foi a função que performou melhor, com um total de 11.19% de erro nos casos de teste, enquanto a leaky ReLU com $a = 100$ obteve o pior resultado. Contudo, essa diferença de resultado é pequena, indicando que caso essas funções sejam muito mais complexas quando comparadas com a ReLU na hora de treinar o modelo, pode ser melhor optar por uma função mais "barata" mas com uma taxa de erro um pouco maior.

Já ao analisarmos a tabela ??, que nos mostra a taxa de erro dessas funções no dataset CIFAR-10, vemos que assim como no CIFAR-10, a RReLU foi a função que obteve melhor resultado, neste caso nós vemos uma diferença de 2.65 pontos percentuais, quando comparada com a ReLU tradicional. Outro ponto interessante a ser destacado ao analisar essa tabela é de que provavelmente a rede que utilizou a Parametric ReLU sofreu um sobreajuste (*overfitting*) fazendo com que ela decorasse o dados de treino e com isso conseguisse uma taxa de erro consideravelmente menor, já quando ela foi apresentada para o conjunto de testes houve uma grande disparidade das taxas de erro.

Agora que entendemos um pouco de como a Randomized Leaky ReLU funciona, podemos entender melhor a sua fórmula, a qual é dada pela expressão ??, note que é a mesma expressão da Leaky ReLU e da PReLU, mas o que muda é o significado do termo α em cada uma delas. Neste caso temos que $\alpha \sim U(l, u)$ em que $l < u$ e $l, u \in [0, 1)$

Randomized Leaky ReLU (RReLU)

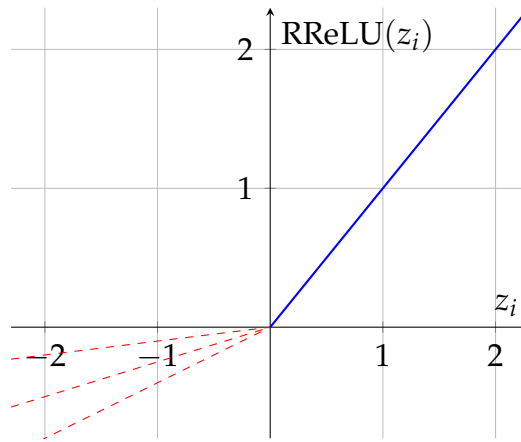
$$\text{RReLU}(z_i) = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i > 0 \\ \alpha_i z_i, & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.10)$$

Na fase de testes, devemos calcular a média de todos os valores de α durante o treino, e com isso α se torna uma constante fixa do tipo $(l + u)/2$ de forma que com isso seja possível obter um resultado determinístico, no artigo, os autores utilizam a fórmula ?? para calcular a RReLU durante o teste do modelo (**XuRReLU**).

Conhecendo como a Randomized Leaky ReLU se comporta, podemos plotar o seu gráfico, o qual está presente na figura ?. Na representação, é possível ver várias retas, isso ocorre pois elas irão variar de caso a caso, e como a RReLU é uma função que utiliza de conceitos probabilísticos, não podemos garantir um gráfico exato de como ela seria pois não temos os valores de α até que a distribuição seja feita. Note que mesmo

com essa particularidade, ela ainda continua sendo uma função bem simples, sendo a construção de duas retas originárias de equações do primeiro grau, a primeira delas sendo a própria função identidade, para os casos em que a entrada é positiva, e a outra é dada pela variável da entrada multiplicada pela constante α , para os casos em que a saída é negativa. Além disso, devemos nos atentar também para a sua descontinuidade no ponto zero, é o mesmo problema que acontece com outras variantes, como a ReLU e a Leaky ReLU.

Figura 24 – Gráfico da Função Randomized Leaky ReLU (RReLU) com Diferentes Inclinações Aleatórias para a Parte Negativa



Se conhecemos com a RReLU se comporta podemos também calcular a sua derivada, a qual será de extrema utilidade durante a retropropagação, fazendo que os pesos e vieses do modelo sejam ajustados e com base nisso ele consiga aprender melhor o problema que está sendo analisado. Como a RReLU utiliza a mesma fórmula que funções como a Leaky ReLU e a PReLU, nós podemos apenas repetir a expressão de sua derivada novamente, a qual será dada pela equação ???. Note que mesmo compartilhando a mesma fórmula, o termo α possui significado distintos em cada uma dessas funções, neste caso, ele é um valor aleatório dado pela distribuição $U(l, u)$.

Com relação ao problema da descontinuidade no ponto zero, nós podemos apenas escolher para qual valor essa função irá retornar neste caso, assim, vamos considerar que quando a sua entrada for zero, ela irá retornar o segundo caso, em que é a própria constante α .

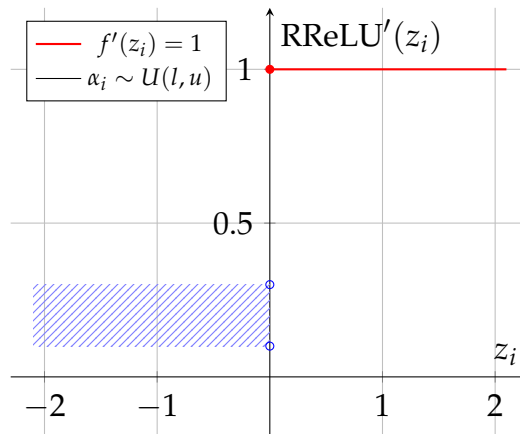
Derivada Randomized Leaky ReLU (RReLU)

$$\frac{d}{dz_i}[RReLU](z_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } z_i > 0 \\ \alpha_i, & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.11)$$

Esse detalhe da aleatoriedade da constante α afetou o desenho do gráfico da RReLU, e com isso, ele também afeta a plotagem de sua derivada. Como nós podemos ver na

figura ??, existem um conjunto de retas em um intervalo, neste caso, estamos considerando a distribuição como sendo de $U(0.1, 0.3)$, mas para cada uma dessas distribuições, teremos um conjunto de retas diferentes e com isso gráficos distintos para cada um dos problemas.

Figura 25 – Gráfico da Derivada da Função Randomized Leaky ReLU (RReLU) com $l = 0.1, u = 0.3$



Ainda em *Empirical Evaluation of Rectified Activations in Convolutional Network* **XuRReLU** explicam que a RReLU é uma função que ajuda a combater o sobreajuste (overfitting) do modelo, mas ainda devem ser feitos mais testes para descobrir como a aleatoriedade afeta os processos de treino e teste (**XuRReLU**). Essa característica de ajudar a combater o sobreajuste é uma vantagem que a RReLU possui, permitindo com que modelos maiores e mais profundos possam ser criados e mesmo assim obtenham resultados significativos. Provavelmente, um dos motivos dela possuir essa função está no fato de que ela introduz uma maior aleatoriedade para o modelo, ajudando a impedir que ele decore os padrões, como em imagens dos conjuntos CIFAR-10 e CIFAR-100.

Considerando as fórmulas da RReLU, podemos construir o seu bloco de código ?? que é capaz de implementar uma classe em python para atuar como a função Randomized Leaky ReLU.

8.5 Em Busca da Suavidade: As Variantes Não Lineares

Seguindo adiante, agora veremos um novo conjunto de variantes da ReLU tradicional, elas incluem funções que apresentam gráficos com curvas mais suaves, como é o caso da ELU, que faz uso de funções exponenciais para a sua composição e com isso consegue não só resolver o problema do neurônios agonizantes, mas também sendo uma função contínua em na origem e portanto derivável em todo o seu domínio.

Além disso, veremos uma variante da ELU, a Scaled Exponential Linear Unit, uma função que é utilizada para construir redes capazes de se autonormalizarem, ademais

veremos a Noisy ReLU, outra variante da ReLU, mas que dessa vez adiciona ruído em sua saída a fim de garantir uma melhor performance quando comparada com a sua função original.

8.5.1 Exponential Linear Unit (ELU)

Continuando com as alogias do vendedor de pipoca, o vendedor de pipoca que faz uso da ELU para as suas vendas trabalha de forma diferente. Ao invés de vender um punhado de pipoca de forma linear com base no dinheiro que o cliente tem quando ele não quer comprar o pacote inteiro por não possuir o valor total, ele adota uma curva exponencial como base, assim, clientes com valores muito próximos de R\$ 5,00 recebem uma quantia muito grande de pipoca, quase equivalente ao pacote total, enquanto aqueles que possuem valores pequenos irão receber um punhado pequeno de pipoca. Talvez seja uma forma de incentivar aqueles que quase tem o valor total para comprar uma pipoca, mas ainda sim garantir a clientela dos que possuem pouco dinheiro e aumentando o seu lucro como vendendor.

A ELU ou Exponential Linear Unit foi introduzida no artigo *Fast and Accurate Deep Networks Learning By Exponential Linear Units (ELUs)*, sendo uma variação que acelera o aprendizado de uma rede neural densa e apresentando uma maior acurácia em problemas de classificação (**Djork**). Um dos testes realizados pelos autores para analisar o desempenho na ELU, foi na criação de uma CNN com 18 camadas convolucionais para fazer a classificação dos datasets CIFAR-10 e CIFAR-100, para isso, outras técnicas foram utilizadas em conjunto como o decaimento do peso L2 e reduções das taxas de aprendizado (**Djork**).

Com base nessa CNN e seus experimentos, é possível ver os resultados na tabela ??, em que **Djork** comparam a ELU com outras redes no mesmo problema, como a AlexNet que vimos anteriormente na explicação do surgimento da ReLU. Ao analisarmos esses resultados, vemos que a ELU obteve um desempenho excelente no dataset CIFAR-100, com uma diferença de 21.52 pontos percentuais quando comparada com a AlexNet, que ficou em último lugar. Já quando analisamos o seu desempenho para um problema de classificação mais simples, como o CIFAR-10, ela ficou em segundo lugar, estando atrás apenas da Fract. Max-POoling, mas ainda sim, apresentando uma diferença considerável de 2.05 pontos percentuais a mais de erro.

Isso nos indica que a ELU é uma excelente opção para problemas de classificação, especialmente se tivermos um grande número de classes a ser analisados. Contudo, uma rede neural convolucional que apresenta 18 camadas de convolução pode ser um tanto quanto custosa para ser processada por um computador, assim, faz-se necessário o uso de unidades de GPUs para o processamento de uma rede como essa, para que mesmo sendo pesada para ser processada, os resultados possam sair um pouco mais

rápidos. Em uma das seções a frente, será possível comparar o desempenho das funções retificadoras as quais estamos vendo nesse texto, e a partir desses comparativos, veremos que talvez não seja uma opção interessante utilizar funções que fazem uso de exponenciais em suas fórmulas para resolver problemas de classificação mais simples, como o caso do dataset CIFAR-10.

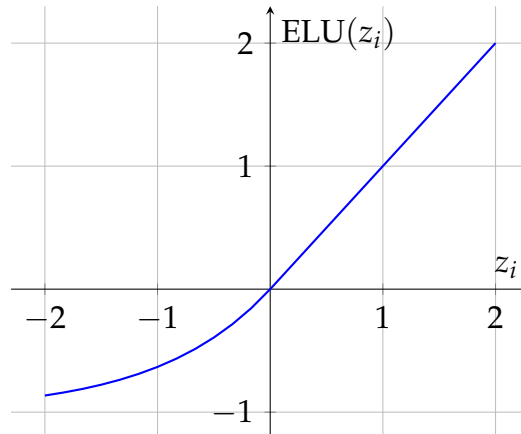
Agora que entendendo que a ELU pode ser uma boa alternativa para problemas de classificação de múltiplas classes, podemos conhecer como ela é escrita e como se comporta graficamente. A Exponential Linear Unit pode é descrita utilizando a expressão ???. Note que temos uma grande diferença dela quando comparamos com a ReLU, a Exponential Linear Unit faz uso de funções exponenciais, algo que é computacionalmente mais pesado para um computador quando comparado com apenas cálculos simples como uma função identidade, podemos esperar que ela será mais lenta quando comparamos com a ReLU, mas para ter certeza precisaremos fazer comparativos, os quais serão vistos futuramente.

Exponential Linear Unit (ELU)

$$\text{ELU}(z_i) = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i \geq 0 \\ \alpha \cdot (e^{z_i} - 1), & \text{se } z_i < 0 \end{cases} \quad (8.12)$$

Conhecendo como é a fórmula da ELU, podemos também plotar o seu gráfico, o qual está presente na figura ??. Ao analisarmos, vemos uma diferença notável quando o comparamos com as funções vistas anteriormente, a ELU não apresenta um bico no ponto de origem, ela é uma função bem mais suave. Além disso, vemos que ela segue o mesmo padrão das outras funções: ela retorna a função identidade nos casos em que a entrada é maior que zero, assim como as outras variantes, mas quando analisamos a os casos em que a entrada é negativa, vemos que ela utiliza uma função exponencial, o que garante a suavidade vista no gráfico. Podemos notar também que ela possui valores negativos, assim como as variantes com vazamento, indicando que ela também pode ser capaz de lidar com o problema do neurônios agonizantes causado pela ReLU tradicional e que vem sendo mitigado com outras variantes como a Leaky ReLU.

Já que sabemos a sua fórmula e o seu gráfico, podemos também calcular a sua derivada, a qual será útil na retropropagação do modelo. Para isso, seguimos a mesma estratégia vista até agora, derivamos a função em cada um dos casos, gerando assim a sua derivada. Nos cenários em que a entrada é positiva, a derivada será sempre 1, pois quando derivamos a expressão x , ela nos irá retornar 1. Já quando temos o cenário negativo, teremos como resultado da derivação da expressão $\alpha \cdot (e^{z_i} - 1)$ o termo $\alpha \cdot e^{z_i}$. Um ponto a ser destacado é de que a ELU é contínua na origem, assim, não temos que nos preocupar em escolher um valor da derivada quando o seu valor de

Figura 26 – Gráfico da Função Exponential Linear Unit (ELU) com $\alpha = 1$ 

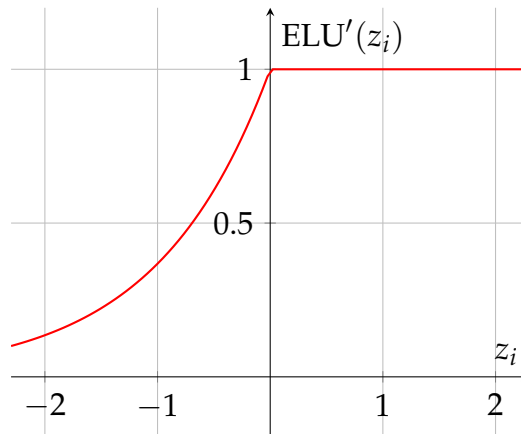
entrada for zero. Assim, temos como resultado final a expressão ??

Para calcularmos sua derivada, basta derivamos as duas expressões da equação ?? encontrando então a função ??.

Derivada Exponential Linear Unit (ELU)

$$\frac{d}{dz_i}[ELU](z_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } z_i > 0 \\ \alpha \cdot e^{z_i}, & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

Sabendo a sua derivada, podemos também plotar o seu gráfico, para isso, temos a figura ??. Note que ele é composto de duas partes diferentes, sendo a primeira delas, para os casos em que a entrada é negativa, a função constante em um, e para os casos em que a entrada é negativa, nós temos uma curva exponencial. Podemos notar também que a sua derivada irá sempre retornar valores positivos quando é calcula para qualquer ponto do seu domínio.

Figura 27 – Gráfico da Derivada da Função Exponential Linear Unit (ELU) com $\alpha = 1$ 

Por fim, cabe destacar algumas afirmações realizadas pelos autores ainda em *Fast and Accurate Deep Networks Learning By Exponential Linear Units (ELUs)*, segundo **Djork**,

quando nós comparamos a ELU com funções como a ReLU tradicional e Leaky ReLU, nós podemos notar um melhor e mais rápido aprendizado, além de que a Exponential Linear Unit é capaz de garantir uma melhor generalização quando passa a ser utilizada em redes com mais de cinco camadas. Outro ponto destacado pelos autores, está no fato da ELU garantir noise robust deactivation states, algo que mesmo com a Leaky ReLU e Parametric ReLU possuindo valores negativos, não são capazes de garantir ao serem utilizadas para construir uma rede neural.

Mesmo apresentando um grande salto, quando comparada com a ReLU tradicional, a ELU também pode ser modificada para atender outros casos. Para isso, ela também tem variações, sendo uma delas a SELU, a qual adiciona a ELU um termo λ para garantir uma autonormalização da rede que está sendo criada. Nós veremos essa função em seguida.

8.5.2 Scaled Exponential Linear Unit (SELU)

A próxima função que iremos conhecer é uma variante da ELU, a Scaled Exponential Linear Unit, ou SELU. Ela se distingue da ELU tradicional pelo fato de que ela é capaz de implementar propriedades auto-normalizadoras em uma rede que faz uso dessa função, como explicam os autores no artigo de sua introdução *Self-Normalizing Neural Networks (SELU)*.

No texto, **SELU**, comparam as redes neurais criadas por eles, as quais são chamadas de Self-Normalizing Neural Networks (SNN), com outras redes feedforward, como MSRAinit (uma FNN que não possui técnicas de normalização, com funções de ativação ReLU, e que faz uso do Microsoft weight initialization), a BatchNorm (uma FNN com normalização em lote), a LayerNorm (uma FNN com normalização nas camadas), a WightNorm (uma FNN com normalização nos pesos), a Highway e também com redes residuais ResNet. Para comparar essas redes, os autores escolhem 121 datasets do UCI, em que são apresentadas áreas de aplicação diversas como física e biologia, nesses datasets o seus tamanhos podem variar de 10 até 130.000 pontos de dados com o número de features variando de 4 a 250, na tabela ??, é possível ver o ranking médio entre as SNNs e as outras diferentes arquiteturas em 75 tarefas de classificação.

Para analisar essa tabela, podemos primeiro olhar o ranking médio de cada uma desses modelos, que é dado pela média de como esses modelos performaram nos diferentes datasets, considerando isso, nós notamos que as redes que fazem uso da SELU em sua composição, as SNNs, são as melhores, por uma diferença de 1.4 pontos quando comparadas com o segundo colocado, isso nos indica que a SELU pode ser uma ótima alternativa quando ainda não se sabe exatamente qual será o conjunto de dados que será trabalhado, se ele será de conceitos como física ou geologia, assim, elas garantem uma maior versatilidade para encarar diversos problemas. Além disso, se

olharmos também o seu p-value, que vem de um teste de Wilcoxon pareado para verificar se a diferença em relação ao melhor colocado é significativa, vemos que as SNNs continuam se destacando, com o p-value mais alto, indicando que existe uma diferença que não é estatisticamente significativa quando ela é comparada com o modelo SVM, nos mostrando que podemos considerar as SNNs como se tivessem empatadas com o campeão.

O interessante dessa comparação é olharmos ela considerando aquelas redes que fazem uso de técnicas de normalização para conseguir uma maior desempenho, como a BatchNorm e a LayerNorm, cada uma delas utiliza uma técnica de normalização diferente de forma a garantir que problemas como os gradientes explosivos e fuga do gradiente não ocorra com tanta frequência e com isso permitindo um melhor convergência do modelo que está sendo treinado. Se olharmos por essa ótica, podemos chegar a conclusão que criar uma rede neural utilizando a SELU não só ura garantir uma maior versatilidade para a resolução de problemas, como também não teremos que nos preocupar em aplicar técnicas de normalização ao construir essa rede.

Agora que temos uma noção maior de como a SELU pode ser uma opção interessante para criar uma RNA, podemos conhecer como ela funciona de fato. Para isso, os autores apresentam a fórmula ?? para calcular essa função, em que o termo λ é uma constante que será maior que 1 (SELU). Note que essa fórmula é bem parecida com a da Exponential Linear Unit, a única diferença é que ela estará sendo multiplicada pela constante λ , assim podemos escrever também que $\text{SELU}(z_i) = \lambda \text{ELU}(z_i)$.

Scaled Exponential Linear Unit (ELU)

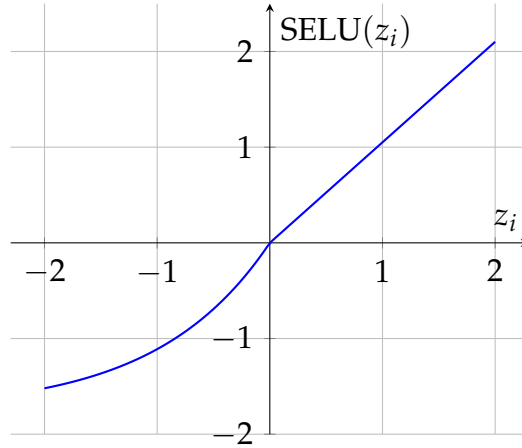
$$\text{SELU}(z_i) = \lambda \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i > 0 \\ \alpha \cdot (e^{z_i} - 1), & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

Conhendo sua equação, podemos também plotar o seu gráfico, o qual está presente na figura ??, neste caso, estamos considerando que as constantes α e λ são dados por 1.7 e 1.05 respectivamente. Podemos notar que é um gráfico que lembra bastante a Leaky ReLU, mas que neste caso, quando a função recebe valores negativos, ela não estará mais assumindo o comportamento de uma reta, e sim o de uma curva exponencial, já para os cenários em que a entrada é positiva os resultados serão próximos os de uma função identidade, mas com uma reta um pouco mais inclinada.

Pelo fato da SELU ter um comportamento que também retorna valores para a saída quando a sua entrada é negativa, ela consegue combater o problema dos Dying ReLUs, causado pela ReLU, além de que também não é uma função saturante, como a sigmoide, o que também ajuda a resolver o problema da fuga dos gradientes. Mas, por não ser uma função saturante, e pelo fato de que sua saída vai para valores infi-

nitos conforme os valores de sua entrada aumentam, ela está sujeita ao problema da explosão de gradientes.

Figura 28 – Gráfico da Função Scaled Exponential Linear Unit (SELU) com $\alpha \approx 1.67e\lambda \approx 1.05$



Considerando agora que sabemos como é a equação da SELU e qual é o seu comportamento no gráfico, podemos também calcular a sua derivada para utilizarmos na retropropagação do gradiente, para isso, devemos derivar a expressão ??, considerando os dois cenários, em que a sua entrada será positiva e quando sua entrada for negativa ou zero. Um ponto que nos ajuda bastante ao calcular a derivada da SELU está no fato dela ser composta pela função ELU multiplicada por uma constante, se utilizarmos regras de derivação para esse cenário, precisaremos apenas derivar a ELU e depois adicionar a constante λ multiplicando-a. Como nós já calculamos a derivada da ELU, podemos ver então a derivada da Scaled Exponential Linear Unit na equação ??.

Derivada Scaled Exponential Linear Unit (ELU)

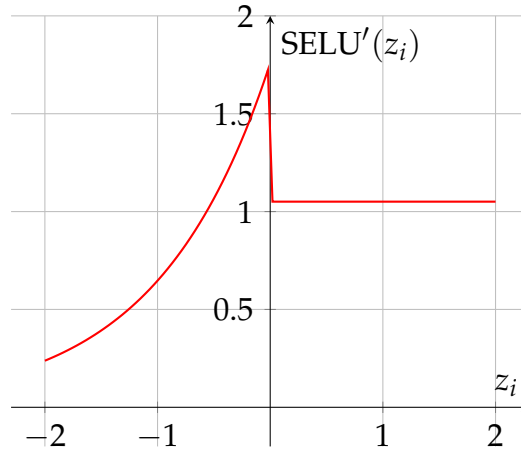
$$\frac{d}{dz_i}[SELU](z_i) = \lambda \begin{cases} 1, & \text{se } z_i > 0 \\ \alpha \cdot e^{z_i}, & \text{se } z_i \leq 0 \end{cases} \quad (8.15)$$

Se sabemos a sua derivada, podemos também plotar o seu gráfico, para isso, temos a representação na figura ?. Note, que o gráfico da derivada da SELU também possui grandes similaridades com a ELU original mas também com as outras retificadoras, pois também pode ser dividido em duas partes principais. A primeira parte, para os casos em que a entrada é negativa segue o comportamento de uma curva exponencial, enquanto a segunda parte é semelhante a uma reta constante com inclinação zero.

Um ponto interessante dessa reta da segunda parte é que ela retorna justamente um valor bem próximo de um, assim como nas retificadoras, isso trás como benefício uma menor chance para ocorrer casos de fuga de gradiente, pois ele não estará sendo cons-

tantemente sendo multiplicado por valores pequenos e com isso reduzindo o seu valor. Mas, por outro lado, isso também acaba colaborando para que gradientes explosivos possam ocorrer.

Figura 29 – Gráfico da Derivada da Função Scaled Exponential Linear Unit (SELU) com $\alpha \approx 1.67, \lambda \approx 1.05$



Voltando para o seu texto de introdução, os autores destacam propriedades importantes dessa nova função de ativação criada, como o fato de que elas possibilitam a criação de redes neurais mais profundas além de serem capazes de aplicar fortes esquemas de regularização (SELU). Por favorecer a criação de RNAs mais profundas, como consequência, a SELU se torna uma excelente alternativa para ser utilizada em problemas complexos, que possuem muitas características e por essa razão necessitam de que mais camadas sejam construídas a fim de garantir um melhor processamento e aprendizado dos dados e com base nisso, alcançar métricas maiores, como uma maior acurácia indicando uma generalização maior e também uma perda menor, indicando que o gradiente conseguiu uma convergência melhor.

8.5.3 Noisy ReLU

Seguindo adiante, a última variante da ReLU que iremos ver nessa seção das variantes suaves, é a Noisy ReLU, também conhecida como NReLU. Um dos trabalhos que explora as características dessa função e como ela pode ser aplicada em uma RNA é o Rectified Linear Units Improve Restricted Boltzmann Machines dos autores **Nair2010**. Nesse texto, os autores comparam o desempenho dessa função com a função binária, dada pela equação 8.16, que era a opção mais comum para ser utilizada na construção de máquinas restritas de Boltzmann.

$$f(z_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } z_i \geq \theta \\ 0 & \text{se } z_i < \theta \end{cases} \quad (8.16)$$

Para entendermos como a comparação dessas funções ocorreu, é interessante primeiro conhecer o conceito das máquinas restritas de boltzmann.

As Máquinas de Boltzmann Restritas (RBMs) têm sido usadas como modelos generativos de muitos tipos diferentes de dados, incluindo imagens rotuladas ou não rotuladas, sequências de coeficientes mel-cepstrais que representam a fala, sacos de palavras que representam documentos e classificações de usuários de filmes. Em sua forma condicional, elas podem ser usadas para modelar sequências temporais de alta dimensão, como dados de vídeo ou captura de movimento. Seu uso mais importante é como módulos de aprendizagem que são compostos para formar redes de crenças profundas.

—(Nair & Hinton, 2010, p. 1, tradução nossa)

No trabalho, **Nair2010** exploram o desempenho dessas duas funções utilizando o dataset NORB, que é um dataset para o reconhecimento de objetos 3D sintéticos que contém cinco classes: humanos, animais, carros, aviões e caminhões. No texto, os autores utilizam a versão Jittered-Cluttered NORB, uma variante que tem imagens estereoscópicas em tons de cinza com fundo desorganizado e um objeto central que é aleatoriamente instável em posição, tamanho, intensidade de pixels (**Nair2010**). O desempenho dessas funções nesse dataset pode ser visto pelas tabelas 3 e ??.

A tabela 3, nos mostra a taxa de erro dos diferentes modelos no dataset, para isso, são construídos modelos com 4000 unidades ocultas treinados com imagens de dimensões 32x32x2. Podemos notar ao analisar a tabela que é nítido que os modelos que são pré-treinados utilizando máquinas de Boltzmann restritas apresentam um melhor desempenho de forma geral, da mesma forma que a NReLU oferece uma perda menor quando comparada com a função binária em ambos os casos: pré-treinado ou não.

Mas, podemos fazer uma comparação ainda mais interessante, o modelo que faz uso da Noisy ReLU que não foi pré-treinado apresenta um resultado com uma diferença de 0.9 pontos quando comparado com o modelo treinado que faz uso da função binária. Isso é interessante porque nos indica que podemos conseguir um resultado muito melhor utilizando a Noisy ReLU mediante a função binária mesmo quando não tivermos condições de pré-treinar uma rede.

Seguindo adiante, na tabela ?? também é possível analisar as taxas de erro dos classificadores, mas, neste caso, eles possuem duas camadas ao invés de somente uma como mostrado da comparação da tabela 3, assim a primeira camada é composta de 4000 unidades ocultas (assim como no primeiro caso), enquanto a segunda camada possui 2000 unidades ocultas.

Com base essa tabela nós podemos notar que o desempenho dos modelos que fazem uso da Noisy ReLU melhorou tanto nos casos em que as camadas não foram pré-treinadas, quanto nos casos em que uma ou ambas foram, quando se compara com os

Tabela 3 – Taxa de Erro de Classificadores no Dataset NORB Jittered-Cluttered

Pré-treinado?	NReLU (%)	Binary (%)
Não	17.8	23.0
Sim	16.5	18.7

Nota. Taxas de erro no conjunto de teste para classificadores com 4000 unidades ocultas. Os valores em negrito indicam a menor taxa de erro (melhor resultado) em cada coluna. Os modelos foram treinados com imagens de 32x32x2 do dataset NORB Jittered-Cluttered. A coluna "NReLU" refere-se a unidades de ativação ReLU com ruído (Noisy ReLU), enquanto "Binary" refere-se a unidades binárias tradicionais. A coluna "Pré-treinado?" indica se o modelo utilizou uma Máquina de Boltzmann Restrita para pré-treinamento. Adaptado de "Rectified Linear Units Improve Restricted Boltzmann Machines", por V. Nair & G. E. Hinton, 2010, *Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning (ICML-10)*.

resultados da tabela 3. Um ponto interessante disso é que no caso em que somente uma das camadas foi pré-treinada no modelo que usa a NReLU o seu resultado foi igual ao do primeiro caso onde existia somente uma camada, o que pode nos indicar que talvez não seja vantajoso adicionar mais camadas em uma rede caso não estejamos dispostos a pré-treiná-las. Note também que esse cenário com a unidade binária foi ainda pior, nos mostrando que não temos um grande ganho em adicionar mais camadas em uma rede que faz uso dessa função.

Esse resultado prová-se ainda mais nítido quando vemos o caso em que ambas as camadas foram pré-treinadas, na unidade binária não houve nenhuma diminuição na sua perda, ela inclusive é pior que a do modelo que faz uso de apenas uma camada. Já quando observamos a Noisy ReLU e seus resultados, vemos um cenário bem diferente, os modelos que fazem uso dela apresentam um desempenho melhor quando são adicionadas mais camadas na rede, fazendo com que a perda da rede diminua, indicando que essa função permite a criação de redes mais profundas e com isso, desempenhos melhores possam ser alcançados.

Esse tópico de permitir a criação de redes mais profundas, que aconteceu justamente ao optar por funções retificadoras como a ReLU e a Noisy ReLU ao invés de funções sigmoide, está intrinsicamente relacionado ao problema da fuga do gradiente. Em redes que faziam uso de funções sigmoide, os programadores e pesquisadores estavam constantemente correndo o risco de que ao adicionar mais camadas a fim de que essa rede pudesse alcançar melhores métricas, o problema da fuga do gradiente viesse a tona. Isso acontece, porque ao adicionar mais camadas, existe uma maior chance de que esse vetor seja mais uma vez multiplicado por valores pequenos e com isso diminuísse o seu valor.

Sabendo de como a NReLU surgiu e sua importância para permitir a criação de redes mais profundas, podemos conhecer a sua fórmula e entender como ela funciona na prática. No texto, **Nair2010**, apresentam a NReLU como sendo dada pela equa-

ção $\max(0, z_i + \mathcal{N}(0, \sigma(z_i)))$, em que $\mathcal{N}(0, V)$ representa o ruído Gaussiano (Gaussian noise em inglês), com média zero e variância dada por V . Como neste texto estamos dando maior enfoque em uma notação com condicionais para as funções retificadoras, também podemos expressar a Noisy ReLU com a equação 8.17.

$$\text{NReLU}(z_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i \leq 0 \\ z_i + \mathcal{N}(0, \sigma(z_i)) & \text{se } z_i > 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

Antes de seguir em frente, é útil entender primeiro o que é ruído gaussiano, e para isso, precisamos entender antes a distribuição gaussiana. Segundo **Goodfellow2016**, a distribuição gaussiana é a distribuição mais utilizada para números reais, ela também é conhecida também por ser chamada de distribuição normal, ela é dada pela equação 8.18.

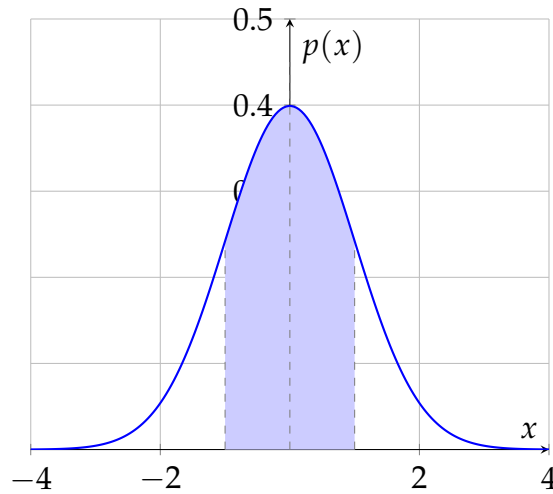
$$\mathcal{N}(x; \mu, \sigma^2) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right) \quad (8.18)$$

Nessa equação, os dois parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma(0, \infty)$ controlam como a distribuição normal funciona; o termo μ é responsável por dar as coordenadas para o pico do centro, que é também a média da distribuição $\mathbb{E}[x] = \mu$, já o desvio padrão é dado por σ , enquanto a variância é denotada por σ^2 (**Goodfellow2016**). Para chegarmos no ruído gaussiano, precisamos então adicionar como parâmetros da equação da distribuição gaussiana (equação 8.18) os termos que são dados pela equação 8.17.

A distribuição normal, com os parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, é responsável por nos dar um gráfico em formato de sino, como é mostrado na figura 30. Esse gráfico indica quais são os casos que possuem uma maior probabilidade de acontecer, os casos que estão no centro, onde, $p(x)$ possuem uma maior probabilidade de acontecer, já conforme eles se distanciam desse centro essa probabilidade diminui.

Entendendo a estrutura e como funciona a Noisy ReLU, podemos também plotar o seu gráfico, o qual é dado pela figura ???. Vemos que ela compartilha a suavidade das funções ELU e SELU, apresentando uma curva para os casos em que a entrada é negativa, o que é bom, pois ela permite um vazamento de gradiente, evitando assim o Dying ReLU problem. Já para os cenários que a entrada é positiva ela assume o comportamento de uma função identidade, lembrando bastante as outras variantes da ReLU. Contudo, como os autores destacam no texto, ela não é capaz de resolver o problema da descontinuidade em zero, para isso, em sua derivada que é utilizada na retropropagação, os casos em que sua entrada é zero irão retornar zero como saída (**Nair2010**).

Figura 30 – Gráfico da Distribuição Gaussiana (ou Normal) para o caso padrão, com média 0 ($\mu = 0$) e desvio padrão 1 ($\sigma = 1$).



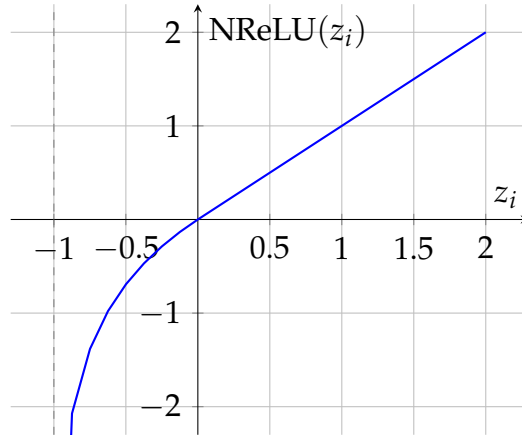
Noisy ReLU (NReLU)

$$\text{NReLU}(z_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i \leq 0 \\ z_i + \mathcal{N}(0, \sigma(z_i)) & \text{se } z_i > 0 \end{cases} \quad (8.19)$$

Entendendo a estrutura e como funciona a Noisy ReLU, podemos também plotar o seu gráfico, o qual é dado pela figura ???. Vemos que ela compartilha a suavidade das funções ELU e SELU, apresentando uma curva para os casos em que a entrada é negativa, o que é bom, pois ela permite um vazamento de gradiente, evitando assim o Dying ReLU problem. Já para os cenários que a entrada é positiva ela assume o comportamento de uma função identidade, lembrando bastante as outras variantes da ReLU. Contudo, como os autores destacam no texto, ela não é capaz de resolver o problema da descontinuidade em zero, para isso, em sua derivada que é utilizada na retropropagação, os casos em que sua entrada é zero irão retornar zero como saída (Nair2010).

Quando vamos calcular a sua derivada, encontramos um problema que não havia aparecido nas outras funções. O termo de ruído \mathcal{N} é um termo não determinístico, o que significa que mesmo que tivéssemos a mesma entrada para a função Noisy ReLU duas ou mais vezes, não poderíamos afirmar com certeza de que essas saídas seriam iguais. Para resolver esses problemas, os autores consideram para a NReLU que sua função para o backward pass será ir retornar zero quando o valor de entrada for negativo ou nulo, e irá retornar um, quando o valor de entrada for positivo (Nair2010). Então a expressão que representa a NReLU para a retropropagação é dada pela equação ??, note que ela é a mesma expressão da derivada da ReLU tradicional.

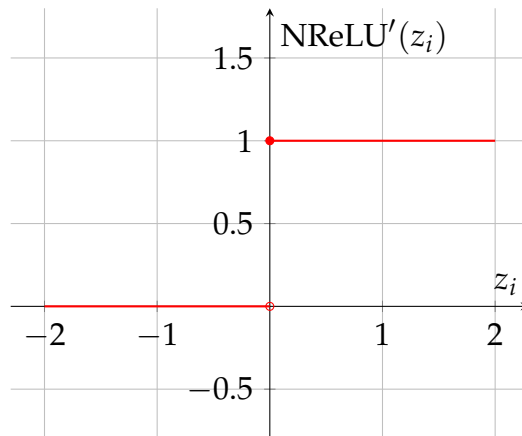
Figura 31 – Gráfico da Função Noisy ReLU (NReLU)

**Derivada Noisy ReLU (NReLU)**

$$\frac{d}{dz_i}[\text{NReLU}](z_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } z_i \leq 0 \\ 1 & \text{se } z_i > 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

Se a função da Noisy ReLU no backward pass será a mesma que a derivada da ReLU, podemos então utilizar como base o gráfico da derivada da ReLU. Para isso, temos então a figura ??.

Figura 32 – Gráfico da função Backward Pass da Noisy ReLU



Ainda em *Rectified Linear Units Improve Restricted Boltzmann Machines*, **Nair2010** citam que uma das propriedades interessantes da NReLU é a intensity equivariance (), a qual é bem útil para o reconhecimento de objetos. No texto, os autores destacam que um dos principais objetivos ao contruir um sistema que faça o reconhecimento de objetos, é garantir que a saída seja invariante às propriedades da sua entrada, como localização, escala, iluminação e orientação, e a NReLU é uma das funções que quando adicionada em uma rede neural, garante que isso possa ser atingido (**Nair2010**).

8.6 O Problema dos Gradientes Explosivos

Anteriormente, nós conhecemos as funções sigmóides, vimos que elas eram comumente utilizadas como as funções de ativação padrão de uma rede neural antes das funções retificadoras. Mas elas possuíam um problema, o do gradiente em fuga. Esse problema acontecia porque essas funções retornavam sempre números muito pequenos em suas derivadas, que consequentemente eram multiplicadas no *backward pass* com o gradiente retropropagado gerando como produto um número pequeno, esse número era então novamente multiplicado por outra constante de baixo valor e por aí vai, como resultado, o gradiente retropropagado que chegava nas primeiras camadas para atualizar os pesos e vieses da rede possuía um valor tão pequeno que muitas vezes não resultava em uma atualização capaz de gerar impacto no aprendizado da rede. Assim, tínhamos o problema do gradiente em fuga.

Já nessa seção nós conhecemos a ReLU, e vimos que ela veio como uma alternativa para as funções sigmóides e que era capaz de corrigir esse problema. Contudo, ela também possui problemas, pelo fato de ser uma função que não é suturante como as sigmóides, isso faz com que ela possa gerar o problema da explosão do gradiente, para entendê-lo primeiro precisamos nos lembrar da fórmula do gradiente retropropagado.

$$\frac{\partial E}{\partial w_{ik}} = \left(\sum_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot w_{ji} \right) \cdot \sigma'(z_i) \cdot a_k^{\text{ant}}$$

O primeiro termo, o que possui o somatório, é responsável por calcular o erro total que chega para um neurônio i da camada atual, para isso temos a equação 8.21.

$$\text{Erro}_i = \left(\sum_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \cdot w_{ji} \right) \quad (8.21)$$

$\partial E / \partial x_j$ nos indica o gradiente do erro em relação à saída de um neurônio j que está na camada seguinte da rede. Para nós calcularmos ele, devemos aplicar a regra da cadeia, assim $\partial E / \partial x_j$ será dado pelo cálculo do erro vindo depois da camada j , uma camada k por exemplo, assim, o erro será dado pela equação 8.22.

$$\text{Erro}_j = \left(\sum_k \frac{\partial E}{\partial x_k} \cdot w_{kj} \right) \quad (8.22)$$

Note que temos um padrão nos cálculos dos erros.

1. Para que nós possamos calcular o erro de uma camada $w_b a$ devemos encontrar o Erro_b ;
2. Para encontrar o Erro_b , precisamos calcular o gradiente da camada seguinte: $\partial E / \partial x_c$

3. O gradiente $(\partial E / \partial x_c)$ é calculado a partir do Erro_c
4. Para calcular o Erro_c, precisamos da camada seguinte e seu gradiente $\partial E / \partial x_d$ que envolve os pesos w_{de}
5. E assim por diante até a última camada da rede.

Com base nessa análise podemos encontrar uma expressão que será capaz de nos mostrar qual será o valor do gradiente retropropagado agora considerando as atualizações de pesos que é feita na rede, ela é dada pela equação 8.23.

$$\delta^l \propto (W^{l+1})^T \cdot (W^{l+2})^T \dots (W^L)^T \cdot \delta^L \quad (8.23)$$

Note que, com base nessa expressão, se um cenário em que sempre houver valores muito grandes nos pesos das camadas da rede, ou ate mesmo muitas camadas, o gradiente que chegará na última camada poderá ter um valor muito alto, podendo atrapalhar o desempenho da rede neural e como ela irá aprender, assim temos um sério problema ao construir uma rede.

Esse tipo de problema, é chamado de problema da explosão do gradiente e ele pode ser definido da seguinte forma:

Quando o erro é retropropagado por uma rede neural, ele pode aumentar exponencialmente de camada para camada. Nesses casos, o gradiente em relação aos parâmetros em camadas inferiores pode ser exponencialmente maior do que o gradiente em relação aos parâmetros em camadas superiores. Isso torna a rede difícil de treinar se ela for suficientemente profunda.

(explodingGradient)

Assim, mesmo a ReLU corrigindo o problema do gradiente em fuga, ela acabou por introduzir uma nova categoria de problemas para uma rede neural. Acontecimentos assim são comuns, muitas vezes queremos concertar algo mas acabamos por atrapalhar outra parte de um projeto de rede neural, por isso, devemos escolher com calma quais funções serão utilizadas além de realizar testes para garantir uma melhor performance do modelo que está sendo criado.

8.7 Comparativo de Desempenho das Funções Retificadoras

Além do problema do explosão de gradientes que pode ocorrer ao utilizar a ReLU em uma rede neural, essa função também sofre de outro problema crônico: o do neurônios agonizantes (ou *Dying ReLU Problem* em inglês). Esse problema pode ser definido

como uma variação do problema do gradiente em fuga, em que uma parte dos neurônios da rede morrem e passam a retornar somente zero independente de sua entrada (**dyingReLU**).

Para entendermos melhor devemos nos lembrar da estrutura básica de uma camada densa de neurônios de uma rede neural, de forma que ela pode ser vista na equação 8.24, em que W representa um vetor de pesos para os neurônios dessa camada, X é o vetor de elementos de entrada e b é o viés.

$$y = W^T X + b \quad (8.24)$$

Se estivemos utilizando a ReLU como função de ativação dessa camada, essa variável y irá passar para uma função $\max(0, y)$, podem existir conjuntos de dados que quando passados por essa camada, a condição mais comum de ocorrer será a de $y < 0$ para os diferentes padrões de treinamento, isso tem efeito no *backward pass*, em que vamos utilizar a derivada da ReLU, que também será zero para casos em que $y < 0$, e nós sabemos que com a derivada dessa função nós calculamos o gradiente que irá calcular o como o peso da rede irá mudar de uma época para outra, se essa saída for zero, quando ela for multiplicada ao calcular o gradiente ele também será zero, e consequentemente os pesos e vieses da rede neural não serão atualizados, se eles não são atualizados, o neurônio não aprende, tendo então o problema do neurônios agonizantes (**douglasDyingRelu**).

Essa condição de vários neurônios morrendo causada pela ReLU acabou por gerar um novo conjunto de funções, as quais possuem propriedades comuns da ReLU, como a não linearidade e a simplicidade nos cálculos mas que buscam resolver ou amenizar esse problema em uma rede neural. Uma das funções que busca resolver esse problema é a Leaky ReLU (**douglasDyingRelu**).

Agora que conhecemos a ReLU, vimos como ela surgiu e se popularizou, além de suas propriedades e problemas, podemos conhecer as suas variações, as quais buscam corrigir alguns problemas que a função original possui mas mesmo assim mantendo as sua essência como inspiração para a criação de uma função melhor. Primeiro, conheceremos as variações com vazamentos, começando pela Leaky ReLU ou LReLU.

9 Funções de Ativação Modernas e Outras Funções de Ativação

9.1 Gaussian Error Linear Unit (GELU)

Agora chegamos na última função que iremos ver neste texto, ela é a Gaussian Error Linear Unit, ou GELU. Ela é uma das mais diferentes quando nós passamos a analisar como é sua fórmula, a qual veremos mais em frente. A GELU foi introduzida no artigo *Gaussian Error Linear Units (GELUs)* dos autores **gelu**, nele, os pesquisadores apresentam uma nova função de ativação de alta performance para ser utilizada na construção de redes neurais.

No texto, os autores, avaliam a GELU e outras variantes como a Exponential Linear Unit e a ReLU tradicional no dataset MNIST, o qual apresenta 10 classes de imagens em escala de cinza sendo 60.000 imagens de treino e 10.000 de teste, os resultados de como a perda e robustez a ruído dessas funções se comporta o longo do experimento podem ser vistos nas figuras ?? e ?? respectivamente (**gelu**). Além disso, **gelu**, avaliaram essas funções em outros conjuntos como o MNIST autoencoding, Tweet part-of-speech tagging, TIMIT frame recognition além dos datasets de imagens CIFAR-10/100.

Analisando a figura ??, podemos compreender como essas diferentes funções contribuem para a diminuição da perda no modelo criado para a classificação do dataset MNIST. Nos vemos que a GELU é a função que apresenta a menor perda, mas não somente isso, ela é a que contribui para que ela diminua mais rapidamente. Nos casos em que foi utilizado o dropout nas camadas os resultados são ainda mais mais significativos, com a ReLU apresentando a maior perda dentre as três funções, a ELU em segundo, e GELU com uma diferença considerável em relação as suas concorrentes. Isso pode nos indicar que em redes neurais cujo técnicas como o dropout de neurônios nas camadas não seja uma prática viável, pode ser interessante utilizar como estratégia a GELU como função de ativação, pois mesmo sem o dropout, ela consegue manter um bom valor para a perda do modelo que está sendo desenvolvido.

Já na figura ??, podemos ver como a acurácia dos modelos se comporta quando é adicionado é adicionado ruído as dados de teste. Para isso, nós notamos que os todos os modelos possuem a mesma tendência de decrescer a sua acurácia ao longo do aumento do ruído, vemos que o modelo que é mais afetado com essa transformação é o que faz uso da exponential linear unit, enquanto os que fazem uso da ReLU e da GELU, mesmo encontrando grandes dificuldades para identificar corretamente as imagens, conseguem manter uma acurácia de quase 0.1 a mais que a ELU. Ainda na figura ??, também vemos como a perda no conjunto de testes de comporta ao aumentar o ru-

ido, aqui vemos uma situação diferente, vemos que o modelo que menos se adequou ao que estava analisando foi o que fazia uso da ReLU, pois, encontrou dificuldades em tentar minimizar o cálculo da perda, por outro lado temos a GELU, que mesmo aumentando o ruído, conseguiu manter uma diferença considerável quando comparada a essas outras duas funções.

Além disso, como dito anteriormente, os autores também fazem testes comparando a GELU com outras funções de ativação utilizando também o dataset CIFAR-10, o qual vem sendo discutido em seções anteriores deste texto, assim, temos a figura ??, que nos mostra esse comparativo com a taxa de erro (**gelu**). Com base nessa análise, nós podemos concluir que a GELU é a melhor alternativa dentre essas três funções para a rede que foi criada, apresentando a menor taxa de erro, tanto no conjunto de dados de treino quanto no conjunto de dados de teste. Uma observação interessante a ser feita com base neste gráfico é de que esses modelos foram treinados por 200 épocas no total, e como a GELU é uma função bem mais complexa que a ReLU, o tempo de treino do modelo que fez uso dessa função foi provavelmente bem maior, algo que pode ser levado em consideração caso seja necessário criar uma rede que seja treinada mais rapidamente mas que ainda sim tenha uma taxa de erro baixa.

Conhecendo um pouco como a GELU atua em uma rede neural, podemos agora conhecer ela por meio da sua fórmula, a qual é dada pela expressão 9.1, a qual é um tanto diferente das outras expressões que vimos até agora. Note que nós não temos dessa vez uma expressão condicional como na ReLU e suas outras variantes, temos uma expressão única, que pode ser reescrita utilizando outras expressões diferentes. Mais a esquerda, temos o termo $\Phi(z_i)$ que representa o standard Gaussian cumulative distribution function, já na expressão mais a direita, temos o uso da função erro, uma função bem comum de ser utilizada quando estamos trabalhando com conceitos probabilísticos.

$$\text{GELU}(z_i) = z_i P(X \leq z_i) = z_i \Phi(z_i) = z_i \frac{1}{2} \left[1 + \text{erf}(z_i / \sqrt{2}) \right] \quad (9.1)$$

Por apresentar cálculos mais complexos em sua composição, como o uso da função erro para encontrar o standard gaussian cumulative distribution function os autores também apresentam aproximações para a GELU, elas são dadas pelas equações 9.2 e 9.3 (**gelu**). Essas aproximações facilitam não somente os cálculos mas também na hora de implementar essa função em Python, garantindo algoritmos mais curtos e fáceis de serem implementados.

Na expressão 9.2 vemos que ela pode ser aproximada utilizando a função tangente como um dos componentes usados, já na expressão 9.3, os autores utilizam como base a Sigmoid Linear Unit (SiLU), a qual é dada pela fórmula $\text{SiLU} = x\sigma(x)$ para criar uma expressão que seja capaz de aproximar como a GELU se comporta mas trazer

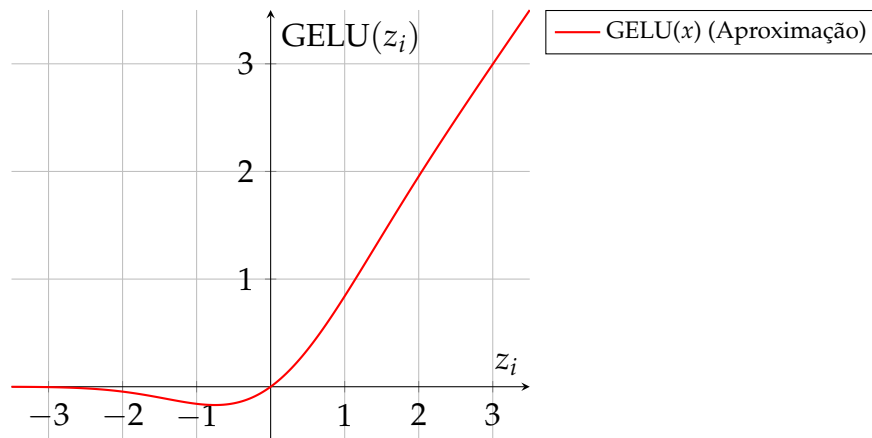
uma maior velocidade de processamento por apresentar cálculos mais simples em sua composição.

$$\text{GELU}(x) \approx 0.5x \left(1 + \tanh \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(x + 0.044715x^3 \right) \right] \right) \quad (9.2)$$

$$\text{GELU}(x) = x\sigma(1.702x) \quad (9.3)$$

Se sabemos a sua fórmula, podemos também plotar o seu gráfico, para isso temos a figura 33, esse gráfico é uma aproximação, tendo como base a expressão 9.2. Note que ela é uma função assimétrica, que possui o comportamento quase que de uma função identidade para os casos em que a sua entrada é maior que zero, além disso, podemos ver que ela retorna valores não nulos quando a entrada é negativa, mas apenas até um certo ponto, depois ela assume o comportamento de uma função constante. O fato dela retornar valores quando alguns valores da entrada são negativos pode acabar contribuindo para que essa função diminua o problema do neurônios agonizantes, além disso, por ser uma variante da ReLU, ela também é capaz de resolver o problema do gradiente em fuga.

Figura 33 – Gráfico da Função de Ativação GELU (usando aproximação).



Considerando as suas expressões e como a GELU se comporta, podemos também calcular a sua derivada para ser utilizada na retropropagação do modelo. Para isso, temos a expressão 9.4, a qual pode ser expandida em uma equação mais completa, resultando então na fórmula da expressão 9.5.

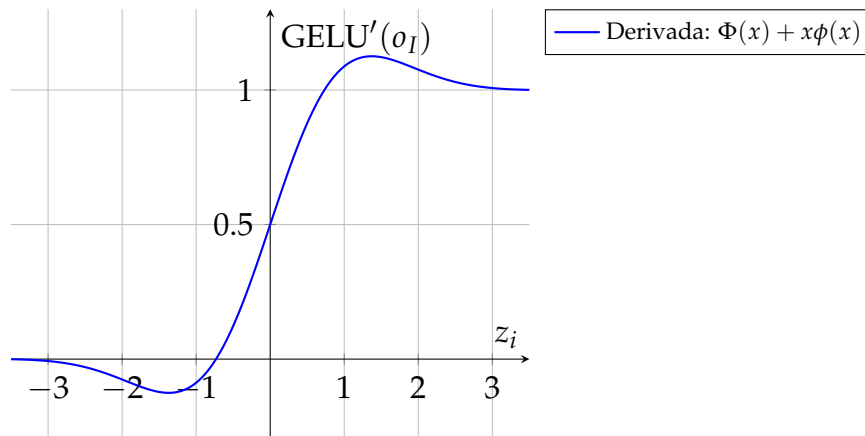
$$\frac{d}{dz_i} [\text{GELU}](z_i) = \Phi(z_i) + z_i \phi(z_i) \quad (9.4)$$

$$\frac{d}{dx} [\text{GELU}](z_i) = \Phi(z_i) + \frac{z_i}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}} \quad (9.5)$$

Para plotarmos o gráfico de sua derivada podemos fazer uma aproximação utilizando $\phi(x) = 1/(1 + \exp(-1.702 * x))$, com base nela, encontramos como resultado

a figura 34. Note que ele também é diferente dos gráficos que estávamos vendo até agora, ele é contínuo em todo o seu domínio, diferente das funções mais simples, com a ReLU e a Leaky ReLU, além de possuir um caráter saturante, assim, para valores acima de três o ele irá retornar valores próximos de um, indicando que o não irá colaborar para que o problema do gradiente em fuga ocorra como no caso das funções sigmodais. Além disso, para valores abaixo de -3 a derivada da GELU retorna valores próximos de zero, algo que tem em comum com a ReLU e algumas de suas variantes.

Figura 34 – Gráfico da Derivada da Função de Ativação GELU



Ainda no artigo *Gaussian Error Linear Units (GELUs)*, os autores discutem outras informações úteis da Gaussian Error Linear Unit para serem considerados ao construir uma rede neural com essa função de ativação, o primeiro deles é de que é recomendado o uso de um otimizador com momentum quando estiver treinando uma rede com a GELU (**gelu**). Em segundo lugar, **gelu**, destacam que é importante utilizar uma aproximação próxima da distribuição acumulativa da distribuição gaussiana, entretanto, funções como a sigmoide, são uma aproximação acumulativa da distribuição normal, contudo, a SiLU mesmo performando pior que a GELU, ainda sim, é capaz de performar melhor que outras retificadoras como a ELU e a ReLU nos testes realizados pelos autores, assim, faz necessário o uso de novas aproximações, como as vistas nas expressões 9.2 e 9.3.

10 Funções de Perda para Classificação Binária

10.1 A Intuição da Perda: Medindo o Erro do Modelo

10.2 Entropia Cruzada Binária (Binary Cross-Entropy): A função de perda padrão

10.3 Perda Hinge (Hinge Loss)

10.4 Comparativo Visual e Prático

11 Funções de Perda para Classificação Multilabel

11.1 Softmax e a Distribuição de Probabilidades

11.2 Entropia Cruzada Categórica (Categorical Cross-Entropy)

11.3 Entropia Cruzada Categórica Esparsa (Sparse Categorical Cross-Entropy)

12 Metaheurísticas: Otimizando Redes Neurais Sem o Gradiente

O texto do seu capítulo começa aqui...

12.1 Algoritmos Evolutivos

12.2 Inteligência de Enxame

Parte IV

Aprendizado de Máquina Clássico

13 Técnicas de Regressão

13.1 Exemplo Ilustrativo

13.2 Regressão Linear

13.2.1 Função de Custo MSE

13.2.2 Equação Normal

13.2.3 Implementação em Python

13.3 Regressão Polinomial

13.3.1 Implementação em Python

13.4 Regressão de Ridge

13.4.1 Implementação em Python

13.5 Regressão de Lasso

13.5.1 Implementação em Python

13.6 Elastic Net

13.6.1 Implementação em Python

13.7 Regressão Logística

13.7.1 Implementação em Python

13.8 Regressão Softmax

13.8.1 Implementação em Python

13.9 Outras Técnicas de Regressão

14 Árvores de Decisão e Florestas Aleatórias

14.1 Exemplo Ilustrativo

14.2 Entendendo o Conceito de Árvores

14.2.1 Árvores Binárias

14.3 Árvores de Decisão

14.3.1 Implementação em Python

14.4 Florestas Aleatórias

14.4.1 Implementação em Python

15 Máquinas de Vetores de Suporte

15.1 Exemplo Ilustrativo

16 Ensamble

16.1 Exemplo Ilustrativo

17 Dimensionalidade

17.1 Exemplo Ilustrativo

17.2 A Maldição da Dimensionalidade

17.3 Seleção de Características (Feature Selection)

17.4 Extração de Características (Feature Extraction)

17.4.1 Análise de Componentes Principais (PCA)

17.4.2 t-SNE (t-Distributed Stochastic Neighbor Embedding) e UMAP

18 Clusterização

18.1 Exemplo Ilustrativo

18.2 Aprendizado Não Supervisionado: Encontrando Grupos nos Dados

18.3 Clusterização Particional: K-Means

18.4 Clusterização Hierárquica

18.5 Clusterização Baseada em Densidade: DBSCAN

Parte V

Redes Neurais Profundas (DNNs)

19 Perceptrons MLP - Redes Neurais Artificiais

O texto do seu capítulo começa aqui...

20 Redes FeedForward (FFNs)

O texto do seu capítulo começa aqui...

21 Redes de Crença Profunda (DBNs) e Máquinas de Boltzmann Restritas

O texto do seu capítulo começa aqui...

22 Redes Neurais Convolucionais (CNN)

22.1 Exemplo Ilustrativo

22.2 Camadas Convolucionais: O Bloco Fundamental para as CNNs

22.2.1 Implementação em Python

Bloco de Código : Classe completa de Convolution2D

```
1 import numpy as np
2 from layers.base import Layer
3
4 class Convolution2D(Layer):
5     def __init__(self, input_channels, num_filters,
6         kernel_size, stride=1, padding=0):
7         super().__init__()
8         self.input_channels = input_channels
9         self.num_filters = num_filters
10        self.kernel_size = kernel_size
11        self.stride = (stride, stride) if isinstance(stride,
12            int) else stride
13        self.padding = padding
14
15        kernel_height, kernel_width = self.kernel_size
16        self.kernels = np.random.randn(num_filters,
17            input_channels, kernel_height, kernel_width) * 0.01
18        self.biases = np.zeros((num_filters, 1))
19        self.params = [self.kernels, self.biases]
20        self.cache = None
21
22    def forward(self, input_data):
23        (batch_size, input_height, input_width, input_channels
24        ) = input_data.shape
25        filters, _, kernel_height, kernel_width = self.kernels
26        .shape
27        stride_height, stride_width = self.stride
28
29        pad_config = ((0, 0), (self.padding, self.padding), (
30            self.padding, self.padding), (0, 0))
31        input_padded = np.pad(input_data, pad_config, mode='
32            constant')
33        self.cache = input_padded
```


22.3 Camadas de Pooling: Reduzindo a Dimensionalidade

22.3.1 Max Pooling

22.3.1.1 Implementação em Python

Bloco de Código : Classe completa de MaxPooling2D

```

1 import numpy as np
2 from layers.base import Layer
3
4 class MaxPooling2D(Layer):
5     def __init__(self, pool_size=(2,2), stride=None):
6         super().__init__()
7         self.pool_size = pool_size
8         self.stride = stride if stride is not None else
pool_size
9         self.cache = None
10
11     def forward(self, input_data):
12         (batches, input_height, input_width, channels) =
input_data.shape
13
14         pool_height, pool_width = self.pool_size
15         stride_height, stride_width = self.stride
16
17         output_height = int((input_height - pool_height) /
stride_height) + 1
18         output_width = int((input_width - pool_width) /
stride_width) + 1
19
20         output_matrix = np.zeros((batches, output_height,
output_width, channels))
21         self.cache = np.zeros_like(input_data)
22
23         for b in range(batches):
24             for c in range(channels):
25                 for h in range(output_height):
26                     for w in range(output_width):
27
28                         start_height = h * stride_height
29                         start_width = w * stride_width
30                         end_height = start_height +
pool_height
31                         end_width = start_width + pool_width
32

```


22.3.2 Average Pooling

22.3.2.1 Implementação em Python

Bloco de Código : Classe completa de AveragePooling2D

```
1 import numpy as np
2 from layers.base import Layer
3
4 class AveragePooling2D(Layer):
5     def __init__(self, pool_size=(2, 2), stride=None):
6         super().__init__()
7         self.pool_size = pool_size
8         self.stride = stride if stride is not None else
pool_size
9
10    def forward(self, input_data):
11        (batches, input_height, input_width, channels) =
input_data.shape
12        pool_h, pool_w = self.pool_size
13        stride_h, stride_w = self.stride
14
15        output_height = int((input_height - pool_h) / stride_h
) + 1
16        output_width = int((input_width - pool_w) / stride_w)
+ 1
17
18        output_matrix = np.zeros((batches, output_height,
output_width, channels))
19
20        for b in range(batches):
21            for c in range(channels):
22                for h in range(output_height):
23                    for w in range(output_width):
24                        start_h = h * stride_h
25                        start_w = w * stride_w
26                        end_h = start_h + pool_h
27                        end_w = start_w + pool_w
28
29                        pooling_window = input_data[b, start_h
:end_h, start_w:end_w, c]
30                        output_matrix[b, h, w, c] = np.mean(
pooling_window) # Changed to mean
31
32        return output_matrix
33
```

22.3.3 Global Average Pooling

22.3.3.1 Implementação em Python

Bloco de Código : Classe completa de GlobalAveragePooling2D

```
1 import numpy as np
2 from layers.base import Layer
3
4 class GlobalAveragePooling2D(Layer):
5     def __init__(self):
6         super().__init__()
7         self.input_shape = None
8
9     def forward(self, input_data):
10         self.input_shape = input_data.shape
11
12         output = np.mean(input_data, axis=(1, 2), keepdims=
13             True)
14
15         return output
16
17     def backward(self, output_gradient):
18         _, input_h, input_w, _ = self.input_shape
19
20         distributed_grad = output_gradient / (input_h *
21             input_w)
22
23         upsampled_grad = np.ones(self.input_shape) *
24             distributed_grad
25
26         return upsampled_grad, None
```

22.4 Camada Flatten: Achatando os Dados

22.4.1 Implementação em Python

Bloco de Código : Classe completa de Flatten

```
1 import numpy as np
2 from layers.base import Layer
3
4 class Flatten(Layer):
5     def __init__(self):
6         super().__init__()
7         self.input_shape = None
8
9     def forward(self, input_data):
10         self.input_shape = input_data.shape
11
12         flatten_output = input_data.reshape(input_data.shape
13 [0], -1)
14
15         return flatten_output
16
17     def backward(self, output_gradient):
18         input_gradient = output_gradient.reshape(self.
19 input_shape)
20         return input_gradient, None
```

22.5 Criando uma CNN

22.6 Detecção de Objetos

22.7 Redes Totalmente Convolucionais (FCNs)

22.8 You Only Look Once (YOLO)

22.9 Algumas Arquiteturas de CNNs

22.9.1 LeNet-5

22.9.2 AlexNet

22.9.3 GoogLeNet

22.9.4 VGGNet

22.9.5 ResNet

22.9.6 Xception

22.9.7 SENet

23 Redes Residuais (ResNets)

O texto do seu capítulo começa aqui...

24 Redes Neurais Recorrentes (RNN)

O texto do seu capítulo começa aqui...

24.1 Exemplo Ilustrativo

24.2 Neurônios e Células Recorrentes

24.2.1 Implementação em Python

24.3 Células de Memória

24.3.1 Implementação em Python

24.4 Criando uma RNN

24.5 O Problema da Memória de Curto Prazo

24.5.1 Células LSTM

24.5.2 Conexões Peephole

24.5.3 Células GRU

25 Técnicas para Melhorar o Desempenho de Redes Neurais

25.1 Técnicas de Inicialização

25.2 Regularização L1 e L2

25.3 Normalização

25.3.1 Normalização de Camadas

25.3.2 Normalização de Batch

25.4 Clipping do Gradiente

25.5 Dropout: Menos Neurônios Mais Aprendizado

25.6 Data Augmentation

26 Transformers

26.1 As Limitações das RNNs: O Gargalo Sequencial

26.2 A Ideia Central: Self-Attention (Query, Key, Value)

26.3 Escalando a Atenção: Multi-Head Attention

26.4 A Arquitetura Completa: O Bloco Transformer

26.5 Entendendo a Posição: Codificação Posicional

26.6 As Três Grandes Arquiteturas

26.6.1 Encoder-Only (Ex: BERT): Para tarefas de entendimento

26.6.2 Decoder-Only (Ex: GPT): Para tarefas de geração

26.6.3 Encoder-Decoder (Ex: T5): Para tarefas de tradução/sumarização

26.7 Além do Texto: Vision Transformers (ViT)

27 Redes Adversárias Generativas (GANs)

O texto do seu capítulo começa aqui...

28 Mixture of Experts (MoE)

O texto do seu capítulo começa aqui...

29 Modelos de Difusão

O texto do seu capítulo começa aqui...

30 Redes Neurais de Grafos (GNNs)

O texto do seu capítulo começa aqui...

Parte VI

Apêndices

Referências

CAUCHY, Augustin-Louis. Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, v. 25, p. 536–538, 1847. Citado na p. 28.

CYBENKO, George. Approximation by Superpositions of a Sigmoidal Function. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, v. 2, n. 4, p. 303–314, 1989. Citado na p. 60.

DUCHI, John; HAZAN, Elad; SINGER, Yoram. Adaptive Subgradient Methods for Online Learning and Stochastic Optimization. *Journal of Machine Learning Research*, v. 12, n. 61, p. 2121–2159, 2011. Disponível em: <http://jmlr.org/papers/v12/duchi11a.html>. Citado na p. 45.

GOODFELLOW, Ian; BENGIO, Yoshua; COURVILLE, Aaron. *Deep Learning*. [S. l.]: MIT Press, 2016. Citado nas pp. 29, 60, 61.

KINGMA, Diederik P.; BA, Jimmy. *Adam: A Method for Stochastic Optimization*. [S. l.: s. n.], 2017. arXiv: 1412.6980 [cs.LG]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1412.6980>. Citado nas pp. 48, 49.

LESHNO, Moshe *et al.* Multilayer feedforward networks with a nonpolynomial activation function can approximate any function. *Neural Networks*, v. 6, n. 6, p. 861–867, 1993. ISSN 0893-6080. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0893-6080\(05\)80131-5](https://doi.org/10.1016/S0893-6080(05)80131-5). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608005801315>. Citado na p. 61.

POLYAK, Boris T. Some methods of speeding up the convergence of iteration methods. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Elsevier, v. 4, n. 5, p. 1–17, 1964. Citado nas pp. 42, 43.

RUMELHART, David E.; HINTON, Geoffrey E.; WILLIAMS, Ronald J. Learning Representations by Back-Propagating Errors. *Nature*, v. 323, p. 533–536, 1986. Citado nas pp. 33–36, 38, 42, 43.