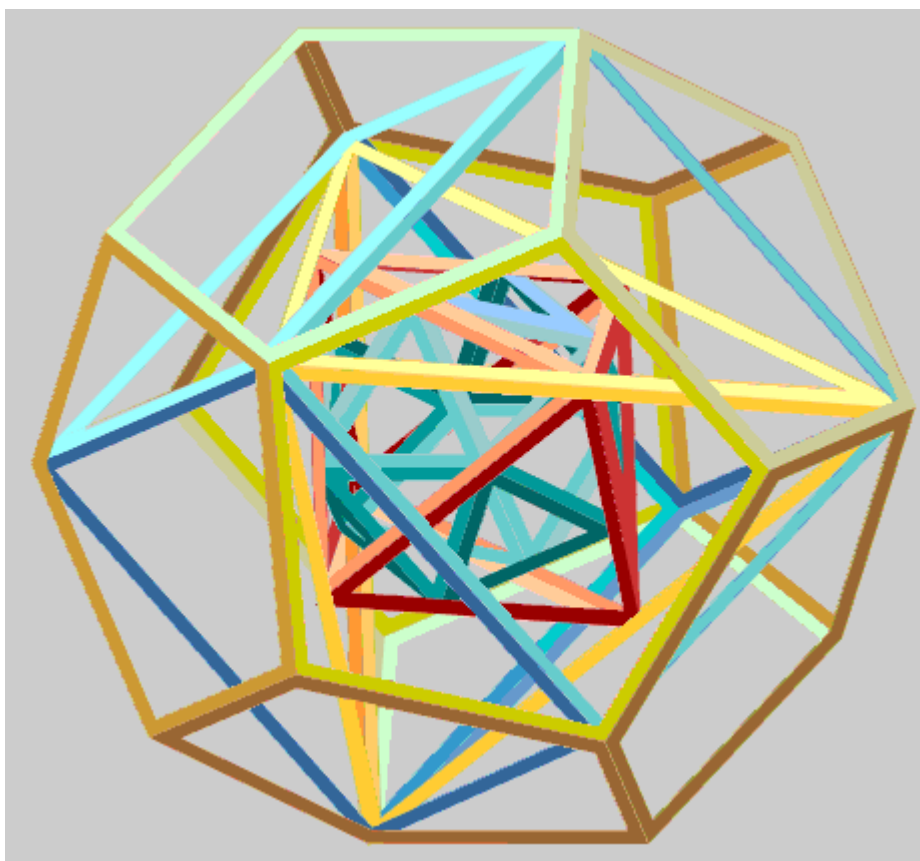


# **SÓLIDOS**

**e**

# **ESTATÍSTICA**



**PROF. ENZO MARCON TAKARA**

**EDIÇÃO 2021**

# PRISMAS

**1-CONCEITO:** Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à *inclinação* das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.

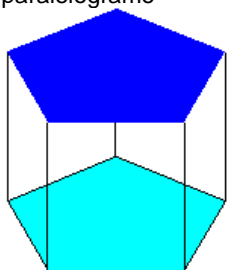
## 2-ASPECTOS GEOMÉTRICOS

2.1- Os polígonos que formam a base e a tampa são congruentes.

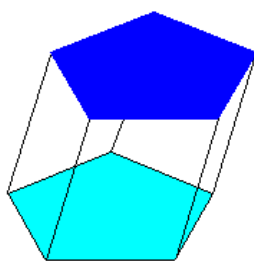
2.2- As arestas laterais são paralelas e todas têm a mesma medida.

2.3- Se as arestas laterais forem perpendiculares a base temos um “prisma reto”, caso contrário temos um prisma oblíquo.

2.3- Se o prisma for reto as faces laterais são retangulares se for oblíquo as faces laterais formam um paralelogramo

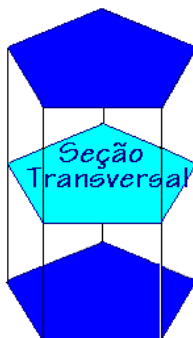


PRISMA RETO

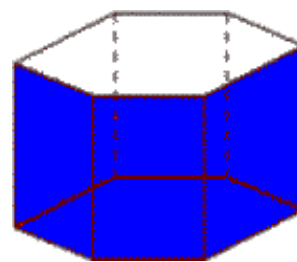


PRISMA OBLÍQUO

**3-SECÇÃO TRANSVERSAL** É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases.



**4-PRISMA REGULAR** É a região poligonal obtida pela interseção do prisma com um plano paralelo às bases, sendo que esta região poligonal é congruente a cada uma das bases. Em outras palavras a base é um polígono regular (equiângulo e equilátero)



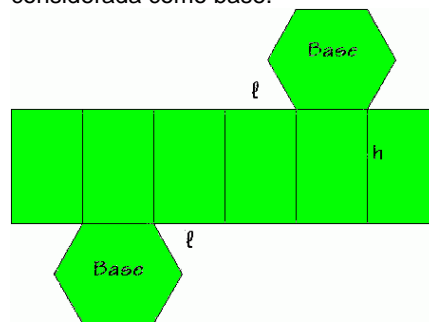
PRISMA HEXAGONAL REGULAR.

**5- CÁLCULO DA ÁREA DA BASE:** Para calcular a área da base de um prisma depende do formato da base. As faces com maior frequência nos vestibulares, são triangulares, quadrangulares e hexagonais.

**6- ÁREA LATERAL:** É a soma de todas as áreas das faces laterais do prisma.

Se o prisma for regular todas as faces laterais têm a mesma área, então basta calcular uma delas e multiplicar pelo número de faces.

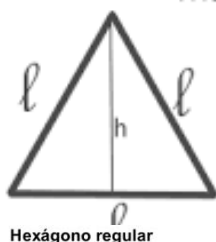
**7- ÁREA TOTAL:** É a soma da área da base com a área da “tampa” e com a área lateral. A “tampa” também é considerada como base.



**8-VOLUME:** É o produto da área da base pela altura do prisma. Se o prisma for reto a altura é **congruente** a aresta lateral.

## 9- ÁREA DE TRIÂNGULO EQUILÁTERO

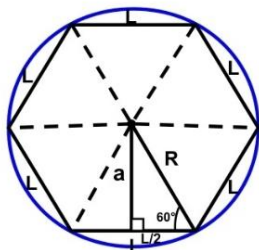
### Triângulo Equilátero



Hexágono regular

$$S = \text{ÁREA}$$

$$S = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$



$$L = R$$

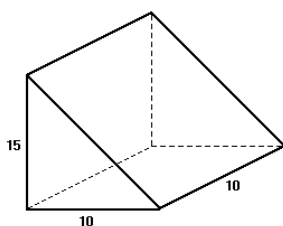
$$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Importante :

$$S_{hex} = 6 \frac{L^2 \sqrt{3}}{4}$$

### EXERCÍCIOS ESTRUTURAIS

**01-(FEI)** De uma viga de madeira de seção quadrada de lado 10 cm extrai-se uma cunha de altura  $h = 15$  cm, conforme a figura. O volume da cunha é (em  $\text{cm}^3$ )



- a) 250   b) 500   c) 750   d) 1000   e) 1250

**02-(UF)** Um prisma hexagonal regular de altura igual à aresta da base. Se a altura do prisma é 2, seu volume é

- a)  $4\sqrt{3}$    b)  $6\sqrt{3}$    c)  $8\sqrt{3}$    d)  $10\sqrt{3}$    e)  $12\sqrt{3}$

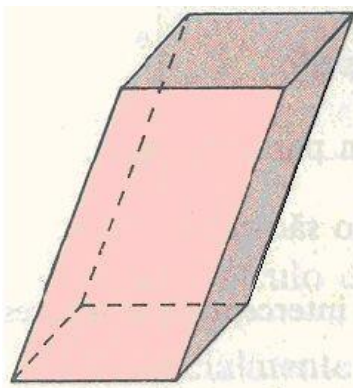
**03-(MACK)** Um prisma regular triangular tem todas as arestas congruentes e  $48 \text{ m}^2$  de área lateral. Seu volume vale, em metros cúbicos:

- a) 16   b) 32   c) 64   d)  $4\sqrt{3}$    e)  $16\sqrt{3}$

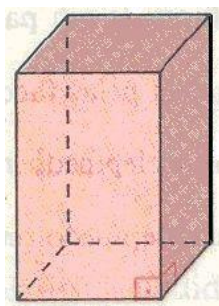
GABARITO: 1)C 2)E 3)E

# PARALELEPÍPEDO E CUBO

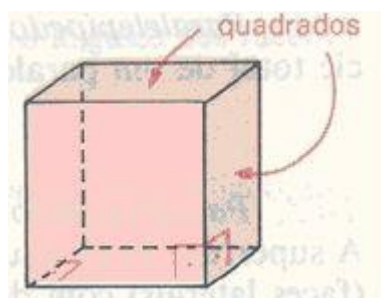
**1-CONCEITO DE PARALELEPÍPEDO:** É um prisma que possui em suas bases um paralelogramo. Sendo que o paralelepípedo é configurado pela reunião dos seis paralelogramos que o constituem.



**2-PARALELEPÍPEDO RETO** É aquele onde todas as arestas são perpendiculares entre si.

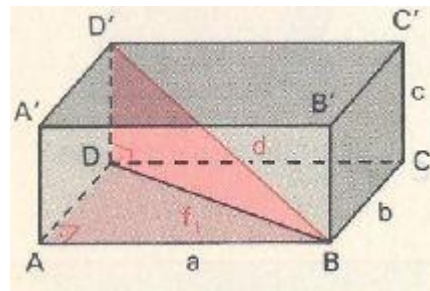


**3-CUBO (HEXAEDRO REGULAR):** É o paralelepípedo reto que tem todas as arestas congruentes



## 4-PARA CALCULAR EM UM PARALELEPÍPEDO

**4.1-DIAGONAL:**  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



No triângulo ABD aplica-se o Teorema de Pitágoras.  
 $f^2 = a^2 + b^2$  (eq 1)

No triângulo BDD' aplica-se novamente o Teorema de Pitágoras  
 $d^2 = f^2 + c^2$  (eq 2)

Substituindo a eq1 na eq 2 temos  
 $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Extraindo a raiz quadrada dos dois lados da igualdade, Obtemos

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

**4.2- ÁREA TOTAL:** É a soma de todas as faces de um paralelepípedo.

$At = 2ab + 2ac + 2bc$ , ou seja

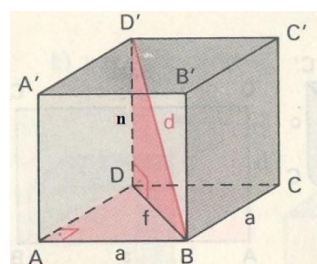
$$At = 2 (ab + AC + BC)$$

**4.3-VOLUME:** É o produto de todas as dimensões do paralelepípedo.  $V = a.b.c$

## 5- PARA CALCULAR EM UM CUBO.

Lembre-se que um cubo é um paralelepípedo em que todas as arestas são iguais.

Considerando um cubo de aresta "a", basta substituir a letra a nas letras b e c nas fórmulas do paralelepípedo.



5.1-DIAGONAL:  $d = a\sqrt{3}$  ( NÃO CONFUNDIR COM A  
DIAGONAL DE UMA FACE QUE É  $DF=a\sqrt{2}$  )

5.2-ÁREA TOTAL:  $At= 6a^2$

5.3-VOLUME:  $V = a^3$

### Exercícios estruturais

**01-(UNESP)** Uma piscina retangular de 10,0 m x 15,0 m e fundo horizontal está com água até a altura de 1,5 m. Um produto químico em pó deve ser misturado à água à razão de um pacote para cada 4500 litros. O número de pacotes a serem usados é:  
a) 45    b) 50    c) 5    d) 60    e) 75

**02-(FUVEST)** Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de x é:  
a) 16    b) 17    c) 18    d) 19    e) 20

**03-( GV )** Um cubo tem 96 m<sup>2</sup> de área total. De quanto deve ser aumentada a sua aresta para que o seu volume se torne igual a 216 m<sup>3</sup>?

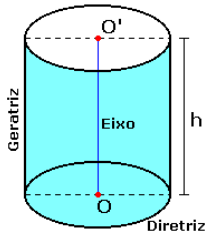
a) 1m    b) 0,5 m    c) 9m    d) 2m    e) 3m

GABARITO: 1)B 2) D 3)D

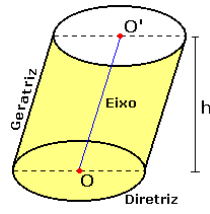
# CILINDROS

**01-CONCEITO:** É o sólido formado pela rotação completa de um retângulo em torno de um de seus lados.

**02-TIPOS:** Como prismas, podem ser de dois tipos: retos e oblíquos.



**CILINDRO RETO**



**CILINDRO OBLÍQUO**

## 03-CONCEITOS IMPORTANTES

3.1- Eixo de simetria: É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".

3.2- Altura: A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro". **Se o cilindro for reto a altura tem a mesma medida da geratriz.**

## 04-O QUE CALCULAR EM UM CILINDRO:

**4.1-Área da Base:**  $Ab = \pi \cdot r^2$

**4.2-Área lateral:** Se planificarmos um cilindro, a área da base é equivalente a um retângulo de lados  $2\pi \cdot r$  e altura h, portanto a sua areal lateral é :

$$Al = 2\pi \cdot r \cdot h$$

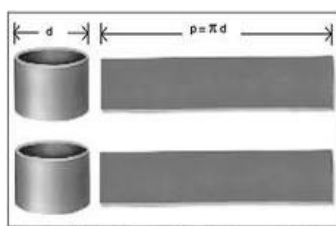
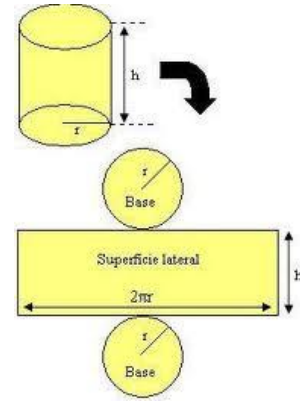


Fig. 1 - Seção de dois cilindros com cortes e rebendas suas superfícies laterais obtendo-se os retângulos correspondentes.

**4.3-Área total:** É a soma da área lateral mais a base mais a "tampa". Como a tampa tem a mesma área da base, podemos dizer que  $At = Al + 2 \cdot Ab$ , logo

$$At = 2\pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

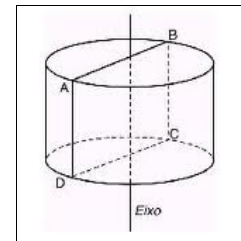


**4.4-Volume:** É o produto da área de base pela altura.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

**4.5-Secção Meridiana:** É um corte no sentido vertical (meridional) que contém o eixo de simetria do cilindro. A secção meridiana é um retângulo onde um dos lados é o diâmetro da base e a altura a própria altura do cilindro. Na figura é o retângulo ABCD

$$Sm = 2r \cdot h$$

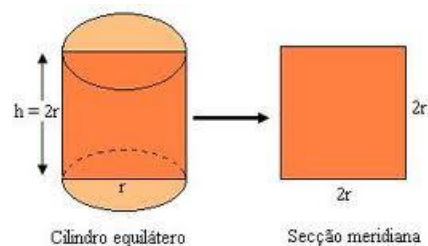


## 05-CILINDRO EQUILÁTERO:

É o cilindro reto cuja altura tem a mesma medida do diâmetro da base.



Note que a secção meridiana de um cilindro equilátero é um quadrado



## Exercícios estruturais

**1-(UFPA)** Um cilindro circular reto tem o raio igual a 2 cm e a altura 3 cm. Sua superfície lateral mede, em  $\text{cm}^2$ :

- a)  $6\pi$    b)  $9\pi$    c)  $12\pi$    d)  $15\pi$    e)  $16\pi$

**2-(FUVEST)** A base de um cilindro de revolução é equivalente à secção meridiana. Se o raio da base é unitário, então a altura do cilindro é:

- a)  $\pi$    b)  $1/2$    c)  $\sqrt{\pi}$    d)  $\pi/2$    e)  $\sqrt{\pi}/2$

**3-(UBERABA)** A área total de um cilindro vale  $48\pi \text{ m}^2$  e a soma das medidas do raio da base e da altura é igual a 8 m. Então, em  $\text{m}^3$ , o volume do sólido é :

- a)  $75\pi$    b)  $50\pi$    c)  $45\pi$    d)  $25\pi$    e)  $15\pi$

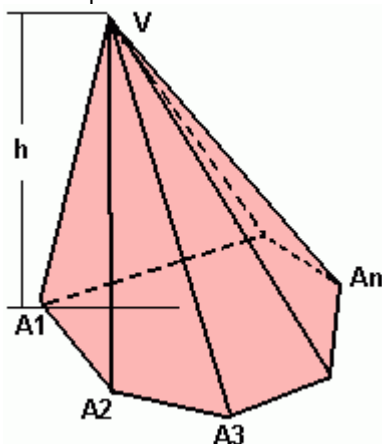
**4. (UFJF)** Aumentando-se o raio de um cilindro em 4 cm e mantendo-se sua altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do cilindro original. Sabendo-se que a altura do cilindro original mede 1 cm, então o seu raio atual mede, em cm:

- a) 1                      b) 2                      c) 4                      d) 6

GABARITO: 1)C 2)D 3)C 4) D

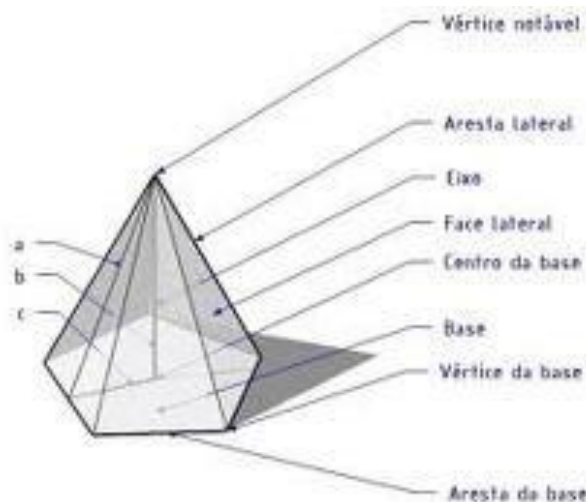
# PIRÂMIDES

**1-CONCEITO:** Consideremos um polígono contido em um plano (por exemplo, o plano horizontal) e um ponto V localizado fora desse plano. Uma Pirâmide é a reunião de todos os segmentos que têm uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do polígono. O ponto V recebe o nome de vértice da pirâmide.

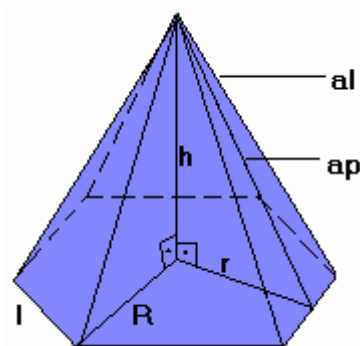


## 2- ELEMENTOS DE PIRÂMIDE

- 1) Base: A base da pirâmide é a região plana poligonal sobre a qual se apóia a pirâmide. É sempre um polígono.
- 2) Vértice: O vértice da pirâmide é o ponto isolado P mais distante da base da pirâmide.
- 3) Eixo: Quando a base possui um ponto central, isto é, quando a região poligonal é simétrica ou regular, o eixo da pirâmide é a reta que passa pelo vértice e pelo centro da base.
- 4) Altura: Distância do vértice da pirâmide ao plano da base.
- 5) Faces laterais: São regiões planas triangulares que passam pelo vértice da pirâmide e por dois vértices consecutivos da base.
- 6) Arestas Laterais: São segmentos que têm um extremo no vértice da pirâmide e outro extremo num vértice do polígono situado no plano da base.
- 7) Apótema: É a altura de cada face lateral.
- 8) Apótema da base: É a distância do centro do polígono regular da base a uma das arestas da base.
- 9) Superfície Lateral: É a superfície poliédrica formada por todas as faces laterais.
- 10) Aresta da base: É qualquer um dos lados do polígono da base



**3-PIRÂMIDE REGULAR RETA:** Pirâmide regular reta é aquela que tem uma base poligonal regular e a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base



R –raio do círculo circunscrito  
r- raio do círculo inscrito  
h- altura  
ap- apótema lateral ( é sempre perpendicular a aresta da base)  
al- aresta lateral  
Obs. Todas as faces laterais são triângulo isósceles congruentes

## 4-O QUE CALCULAR EM UMA PIRÂMIDE:

**4.1-RELAÇÃO FUNDAMENTAL:**  $(ap)^2 = h^2 + r^2$

**4.2- ÁREA DA BASE:** Depende do polígono da base.

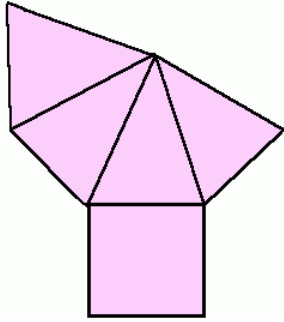
**4.3- ÁREA LATERAL:** É a soma das áreas das faces laterais.

**ATENÇÃO:** Se a pirâmide for regular reta, basta calcular a área de uma face e multiplicar pelo número de faces.

**A face lateral é sempre um triângulo isósceles e a sua altura é o apótema lateral.**

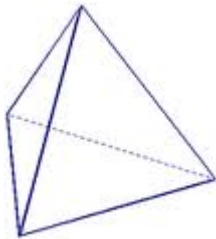


**4.4-ÁREA TOTAL:** É a soma das áreas das faces laterais e a área da base.



**4.5-VOLUME:**  $V = \frac{1}{3} Ab.h$

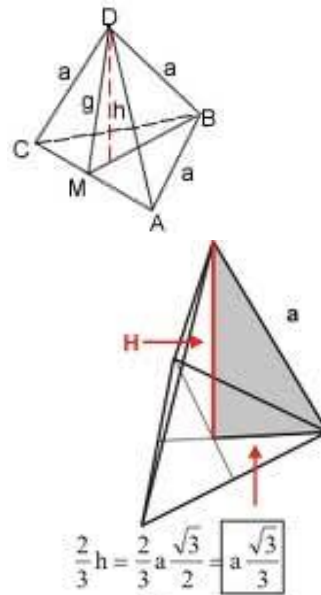
#### 5-TETRAEDRO REGULAR



**5.1-DEFINIÇÃO:** O tetraedro regular é uma pirâmide triangular (lados iguais entre si) em que todas as faces são triângulos equiláteros

#### 5.2-O QUE CALCULAR EM UM TETRAEDRO REGULAR

**ALTURA DO TETRAEDRO REGULAR:**  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



$$a^2 = H^2 + \left(a \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow a^2 = H^2 + \frac{a^2}{3} \Rightarrow H^2 = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow H = a \frac{\sqrt{6}}{3}$$

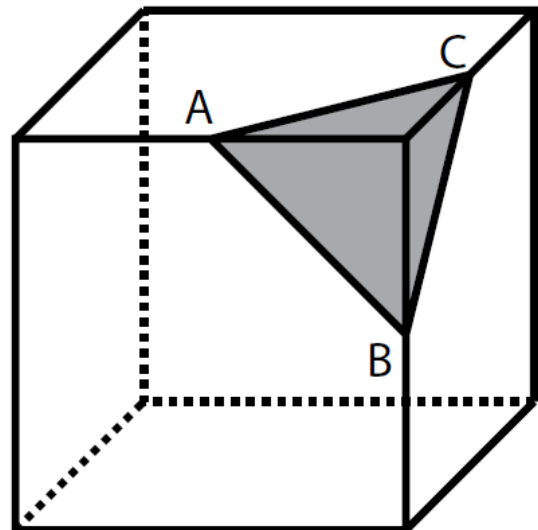
**ÁREA TOTAL:** A área total é 4 vezes a área de uma face.

$$At = 4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{VOLUME: } V = \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

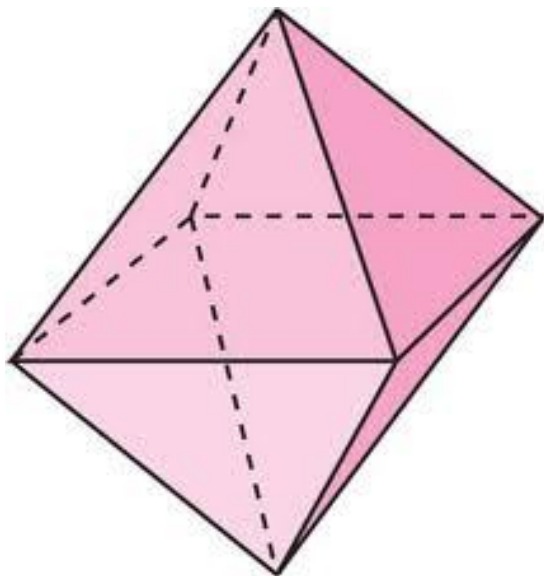
#### 6-TETRAEDRO TRI-RETANGULAR

Tetraedro formado por 3 triângulos retângulos



## 7-OCATAEDRO REGULAR:

É um sólido com 8 faces que são triângulos equiláteros



### EXERCÍCIOS ESTRUTURAIS

**1-(PUCCAMP)** Uma pirâmide regular de base hexagonal é tal que a altura mede 8 cm e a aresta da base mede  $2\sqrt{3}$  cm. O volume dessa pirâmide, em centímetros cúbicos, é

- a)  $24\sqrt{3}$       b)  $36\sqrt{3}$       c)  $48\sqrt{3}$   
d)  $72\sqrt{3}$       e)  $144\sqrt{3}$

**2-(METODISTA)** Em uma pirâmide regular de 24 cm de altura tendo como base um quadrado de lado igual a 20 cm, a área lateral, em centímetros quadrados, é

- a)  $80\sqrt{117}$       b) 960      c) 1040      d) 1360      e) 1600

**3-(UEM)** O perímetro da base de uma pirâmide hexagonal regular é 24 m e a altura 6 m. O volume dessa pirâmide mede, em  $m^3$

- a)  $1\sqrt{3}$       b)  $26\sqrt{3}$       c)  $39\sqrt{3}$       d)  $48\sqrt{3}$       e)  $60\sqrt{3}$

**4-(UECE)** Numa pirâmide quadrangular regular, uma aresta da base mede  $2\sqrt{2}$  cm e uma aresta lateral mede  $\sqrt{22}$  cm. O volume dessa pirâmide, em  $cm^2$ , é:

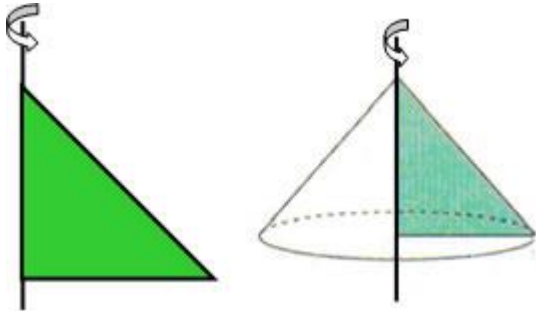
- a)  $7\sqrt{2}$       b)  $8\sqrt{2}$       c)  $9\sqrt{2}$       d)  $10\sqrt{2}$

### GABARITO

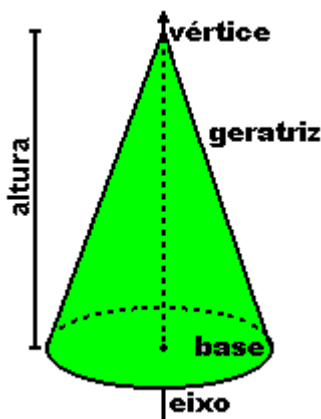
1)C 2)C 3)D 4)B

# CONE CIRCULAR RETO

**1-CONCEITO:** É o sólido formado pela rotação completa de um triângulo retângulo sobre um de seus catetos.



## 2-ELEMENTOS DE UM CONE:



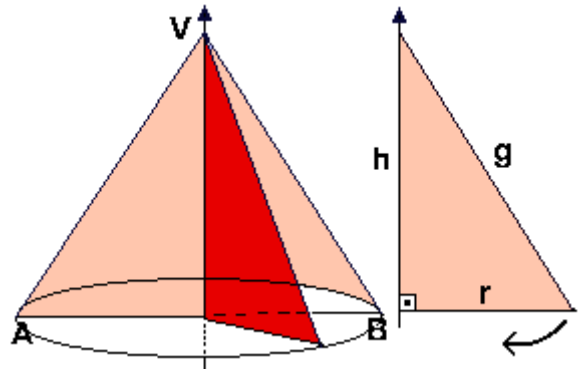
- 1) Vértice de um cone é o ponto P, onde concorrem todos os segmentos de reta.
- 2) Base de um cone : CÍRCULO DA BASE
- 3) Eixo do cone é quando a base do cone é uma região que possui centro, o eixo é o segmento de reta que passa pelo vértice P e pelo centro da base.
- 4) Geratriz é qualquer segmento que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base.
- 5) Altura é a distância do vértice do cone ao plano da base.
- 6) Área lateral de um cone é a reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra na curva que envolve a base. É UM SETOR CIRCULAR
- 7) Área total é a reunião da superfície lateral com a base do cone que é o círculo.

8) Seção meridiana de um cone é uma região triangular obtida pela interseção do cone com um plano que contém o eixo do mesmo.

## 3- O QUE CALCULAR EM UM CONE CIRCULAR.

**3.1-RELAÇÃO FUNDAMENTAL:** Aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo de formado pela altura, geratriz e raio da base.

$$g^2 = r^2 + h^2$$

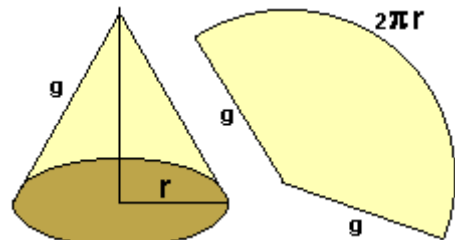


**3.2-ÁREA DA BASE:** É a área do círculo da base

$$Ab = \pi \cdot r^2$$

**3.3-ÁREA LATERAL:** É área do setor circular obtido com a planificação do cone. Note que o raio do setor circular é a geratriz do cone.  $Al = \pi r g$

**3.4-ÁREA TOTAL:** É a soma da área lateral com a área da base  $At = Al + Ab = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$



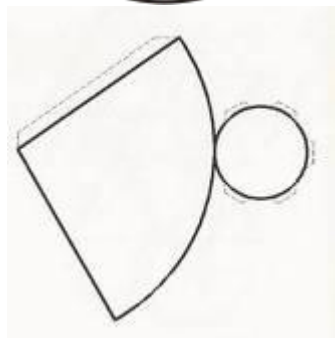
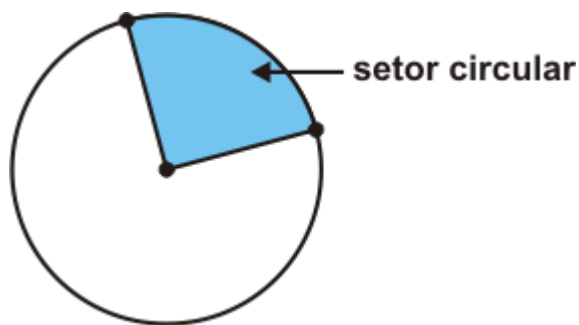
**3.5-VOLUME:** É a terça parte do produto da área da base

pela altura  $V = \frac{1}{3} \cdot Ab \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 h$

**3.6-ÂNGULO CENTRAL:** É o ângulo formado pela planificação da área lateral do cone.

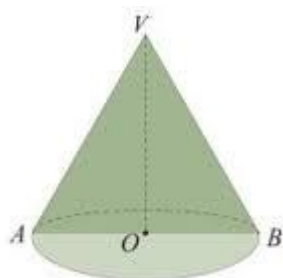
O cálculo desse ângulo é a divisão entre o comprimento da circunferência da base e a geratriz.

$$\theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{g}$$

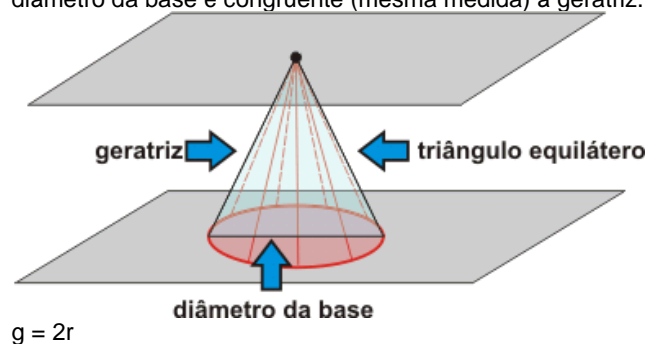


**3.7-SECÇÃO MERIDIANA:** É o triângulo isósceles

formado pelo corte meridional  $SM = \frac{2 \cdot r \cdot h}{2} = r \cdot h$



**4-CONE EQUILÁTERO:** Um cone é equilátero quando o diâmetro da base é congruente (mesma medida) à geratriz.



## EXERCÍCIOS ESTRUTURAIS

**01-(UEL)** Um cone circular reto tem altura de 8 cm e raio da base medindo 6 cm. Qual é, em centímetros quadrados, sua área lateral?

a)  $20\pi$  b)  $30\pi$  c)  $40\pi$  d)  $50\pi$  e)  $60\pi$

**02-(PUC)** Qual o volume de um cone circular reto, em  $\text{cm}^3$ , de diâmetro da base igual a 6 cm e de geratriz 5 cm ?

a)  $12\pi$  b)  $24\pi$  c)  $36\pi$  d)  $48\pi$  e)  $96\pi$

**03-(UFV)** Um chapéu, no formato de um cone circular reto, é feito de uma folha circular de raio 30 cm, recortando-se um setor circular de ângulo  $\theta = 2\pi/3$  radianos e juntando os lados. A área da base do chapéu, em  $\text{cm}^2$ , é:

a)  $140\pi$  b)  $110\pi$  c)  $130\pi$  d)  $100\pi$  e)  $120\pi$

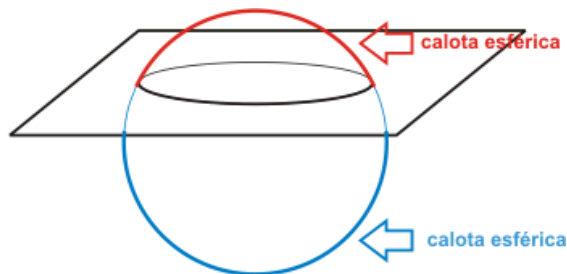
**GABARITO:** 1)E 2)A 3)D

# ESFERAS

**1-CONCEITO:** É o conjunto de pontos do espaço equidistantes de um ponto **O** denominado de centro.



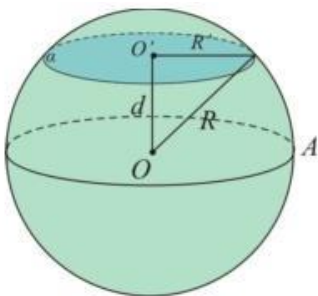
**2-ÁREA DE SECÇÃO:** Ao seccionarmos uma esfera por um plano, sempre vamos encontrar um círculo. O plano de secção divide a esfera em dois sólidos chamados de "calotas esféricas".



## 3-O QUE CALCULAR EM UMA ESFERA:

**3.1-RELAÇÃO FUNDAMENTAL:** É a aplicação do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos elementos: R (Raio da Esfera), d (distância do plano de secção ao centro da esfera) e R' (Raio do círculo formado pela secção do plano com a esfera)

$$R^2 = R'^2 + d^2$$



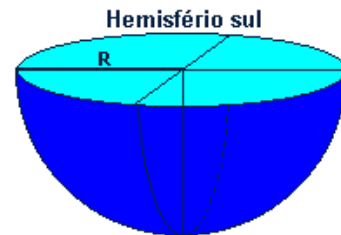
**3.2-SUPERFÍCIE:** É a área da superfície da esfera:

$$S = 4.\pi.R^2$$

**3.3-VOLUME:**  $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$

## 4-HEMISFÉRIO.

O hemisfério é o sólido formado pela intersecção de um plano com o centro da esfera. É a metade da esfera. Neste caso o raio da secção é igual ao raio da esfera. A parte plana do hemisfério é chamado de CÍRCULO MÁXIMO.

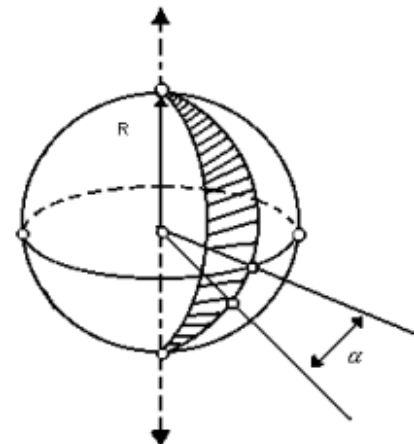


## 5-FUSO

Considere dois semiplanos que contenham um diâmetro AB de uma **superfície esférica**. Fuso esférico é a parte da **superfície esférica** limitada pelos semiplanos.

### FUSO TEM ÁREA

O ângulo  $\alpha$  é chamado de ângulo de diedro



Para calcular a área do fuso fazemos a seguinte regra de três.

$$360^0 \longrightarrow 4.\pi.R^2$$

$$\alpha \longrightarrow A$$

Que resulta na seguinte função:  $A = \frac{4.\pi.R^2.\alpha}{360^0}$

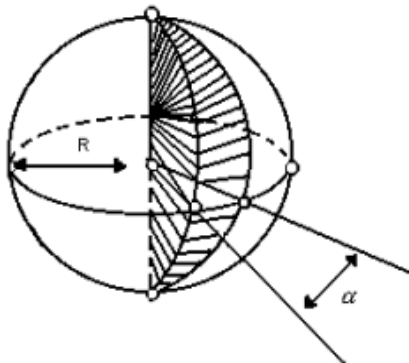
Cuidado: Se o ângulo de diedro estiver em radianos o denominador da fração deverá ser  $2\pi$ .

### 6-CUNHA:

Considere dois semiplanos que contenham um diâmetro AB de uma **esfera**.

Cunha esférica é a parte da **esfera** limitada pelos semiplanos.

O ângulo  $\alpha$  é chamado de ângulo de diedro



### CUNHA TEM VOLUME

Para calcular o volume de uma cunha fazemos a seguinte regra de três.

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \longrightarrow & \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3} \\ \alpha & \longrightarrow & V \end{array}$$

Que resulta na seguinte função: 
$$V = \frac{\pi \cdot R^3 \cdot \alpha}{270^\circ}$$

Cuidado: Se o ângulo de diedro estiver em radianos a

relação seria 
$$V = \frac{2}{3} \cdot R^3 \cdot \alpha$$

### EXERCÍCIOS ESTRUTURAIS

**01-(PUC)** Numa esfera de 26 cm de diâmetro, faz-se um corte por um plano que dista 5 cm do centro. O raio da secção feita mede, em cm:  
a) 8      b) 9      c) 10      d) 11      e) 12

**02-(UF-PA)** A área da superfície de uma esfera é  $16 \pi \text{ cm}^2$ . Qual o diâmetro da esfera ?  
a) 1 cm      b) 2 cm      c) 4 cm  
d) 6 cm      e) 8 cm

**03-(FUVEST)** A área de intersecção de um plano com uma bola de raio 13 é  $144 \pi$ . A distância do plano ao centro da bola é :  
a) 1      b) 5      c) 8      d) 12      e) 25

**GABARITO; 1)E 2)C 3)B**

## SECÇÃO TRANSVERSAL – SÓLIDOS SEMELHANTES-TRONCO DE PIRÂMIDE E CONE

### 1-SECÇÃO TRANSVERSAL DE UMA PIRÂMIDE OU CONE

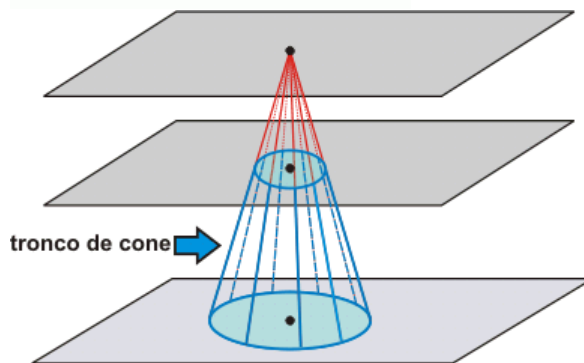
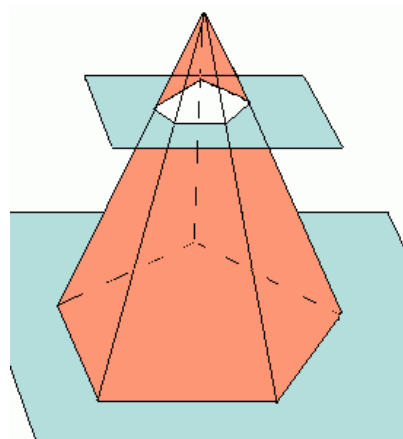
É a intersecção da pirâmide (ou cone) com um plano paralelo à base. A secção transversal tem a mesma forma que a base, isto é, as suas arestas correspondentes são proporcionais. Em uma pirâmide a razão entre uma aresta da secção transversal e uma aresta correspondente da base é a razão de semelhança. Já no cone a razão de semelhança é a razão entre o raio do plano de secção com o raio da base, ou a geratriz do cone menor com a geratriz do cone maior,

#### OBSERVAÇÕES:

1-Em uma pirâmide qualquer, a secção transversal e a base são regiões poligonais semelhantes. A razão entre a área da secção transversal e a área da base é igual ao quadrado da razão de semelhança. Em um cone é a mesma coisa apenas que as secções transversais são círculos e não regiões poligonais;

2-Ao seccionar uma pirâmide ( ou um cone) por um plano paralelo à base, obtemos outra pirâmide ( ou um cone) menor (acima do plano) semelhante em todos os aspectos à pirâmide ( ou cone) original. O sólido abaixo da secção transversal chama-se tronco de pirâmide ( ou cone).

3-Se duas pirâmides ( ou cones) têm a mesma altura e as áreas das bases são iguais, então as secções transversais localizadas à mesma distância do vértice têm áreas iguais



V secção – Volume de secção : Pirâmide menor  
V pirâmide – Volume da pirâmide maior  
V tronco- Volume do tronco de pirâmide ( ou cone)- V tronco=V pirâmide – V secção  
A secção – Área da secção ( BASE DA PIRÂMIDE MENOR)  
A base – Base da pirâmide maior  
h – Altura da pirâmide menor ( ou cone menor)  
H- Altura da pirâmide maior ( ou cone maior)

$$\frac{h}{H} = k \quad , \quad \frac{A_{\text{secção}}}{A_{\text{base}}} = \left( \frac{h}{H} \right)^2 \quad ,$$

$$\frac{V_{\text{secção}}}{V_{\text{pirâmide}}} = \left( \frac{h}{H} \right)^3$$

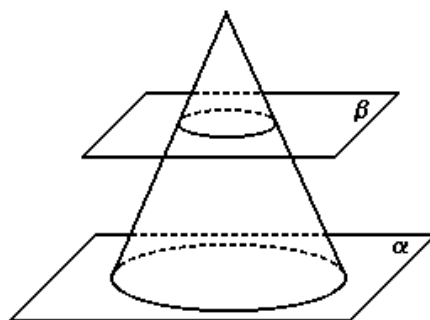
CUIDADO COM A ORDEM DOS ELEMENTOS NO  
NUMERADOR E NO DENOMINADOR DAS RAZÕES ACIMA

### EXERCÍCIOS BÁSICOS DE PLANO DE SECÇÃO

**01-(PUC)** Um cone de altura  $h = 18$  cm e raio da base  $r = 6$  cm, foi seccionado por um plano paralelo à base, a 12 cm da mesma. A área, em  $\text{cm}^2$ , da secção obtida, em  $\text{cm}^2$ , é :  
a)  $12\pi$    b)  $8\pi$    c)  $3\pi$    d)  $9\pi$    e)  $4\pi$

**02-(UEL)** Considere uma pirâmide regular, de altura 25 m e base quadrada de lado 10 m. Seccionando essa pirâmide por um plano paralelo à base, à distância de 5 m desta, obtém-se um tronco cujo volume, em  $\text{m}^3$ , é:  
a)  $200/3$    b) 500   c)  $1220/3$   
d)  $1280/3$    e) 1220

**03-(UFAL)** Na figura abaixo tem-se, apoiado no plano  $\alpha$ , um cone circular reto cuja altura mede 8 cm e cujo raio da base mede 4 cm. O plano  $\alpha$  é paralelo a  $\beta$  e a distância entre os dois planos é de 6 cm.



O volume do cone que está apoiado no plano  $\beta$  é, em centímetros cúbicos, igual a  
a)  $\pi/3$    b)  $\pi/2$    c)  $2\pi/3$    d)  $3\pi/4$    e)  $4\pi/5$

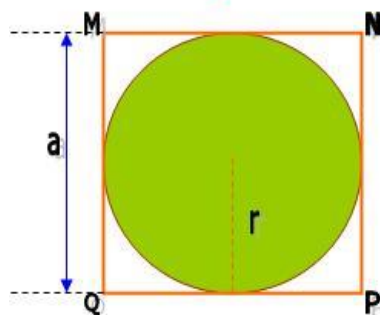
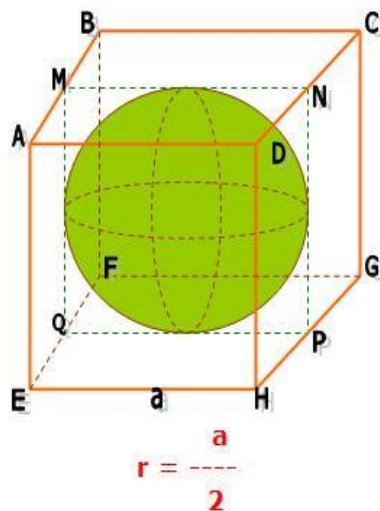
**4-(UFMS)** Na hora do recreio, Susanita comprou um copo de sorvete com a forma de um cone com altura  $h$  de 8 cm e raio da base  $R$  de 3 cm. Para enchê-lo com quantidades iguais de sorvete de creme e de chocolate, a altura  $x$  atingida pelo primeiro sabor, em cm, deve ser  
a)  $4\sqrt{3}$    b)  $3\sqrt{3}$    c)  $4\sqrt[3]{4}$    d)  $4\sqrt{2}$    e) 4

GABARITO: 1)E 2)C 3) C 4)C



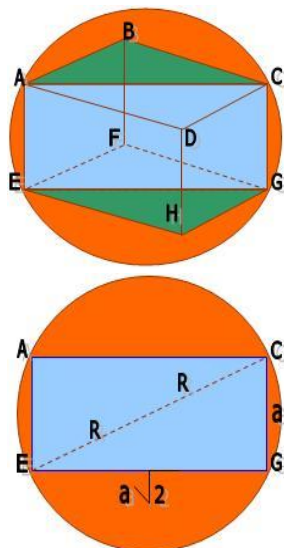
# INSCRIÇÃO E CIRCUNSCRIÇÃO DE SÓLIDOS

## 1-ESFERA INSCRITA EM UM CUBO



O RAO DA ESFERA É A METADE DA MEDIDA DA ARESTA DO CUBO

## 2-CUBO INSCRITO NA ESFERA

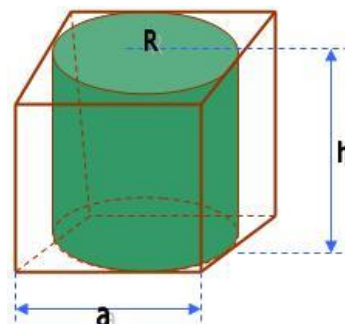


O RAO DA ESFERA INSCRITA EM UM CUBO DE

ARESTA  $a$  É  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . ESTE RESULTADO É OBTDO

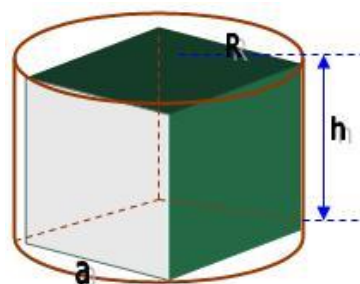
PELA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO TRIÂNGULO ECG DAS FIGURAS.

## 3-CILINDRO INSCRITO EM UM CUBO



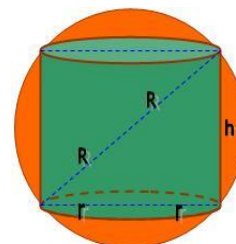
O DIÂMETRO DA BASE TEM A MESMA MEDIDA DA ALTURA DO CILINDRO. NESTE CASO O CILINDRO É EQUILÁTERO.

## 4-CUBO INSCRITO EM UM CILINDRO



O DIÂMETRO DO CILINDRO TEM A MESMA MEDIDA DA DIAGONAL DA BASE DO CUBO, OU SEJA,  $2r = a\sqrt{2}$

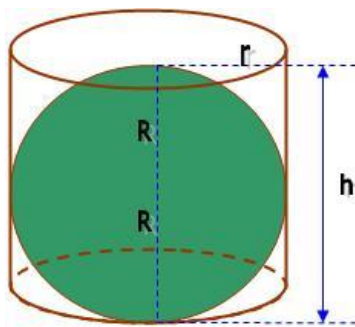
## 5-CILINDRO INSCRITO NA ESFERA



RELAÇÃO ENTRE RAO  $R$  DA ESFERA, RAO  $r$  DA BASE DO CILINDRO E A ALTURA  $h$  DO CILINDRO

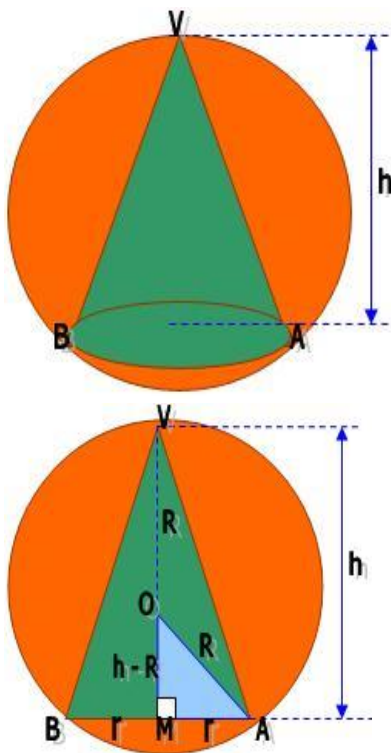
$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2$$

### 6-ESFERA INSCRITA EM UM CILINDRO



O CILINDRO É EQUILÁTERO  $R = r$  e  $h = 2R = 2r$

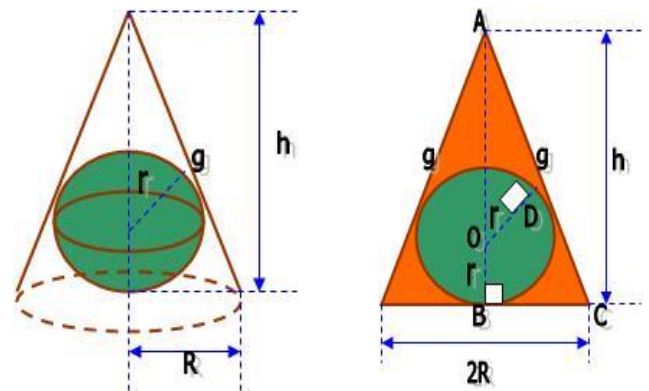
### 7-CONE INSCRITO NA ESFERA



APLICANDO O TEOREMA DE PITÁGORAS NO TRIÂNGULO OMA OBTEMOS A RELAÇÃO

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2$$

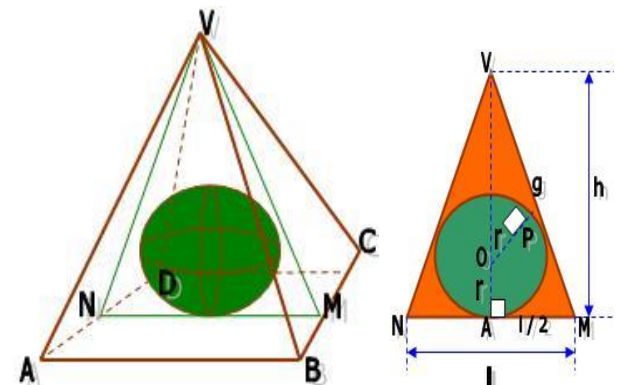
### 8-ESFERA INSCRITA EM UM CONE



APLICANDO RELAÇÃO DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NOS TRIÂNGULOS AOD E ABC, OBTEMOS A RELAÇÃO

$$g^2 = h^2 + R^2$$

### 9-ESFERA INSCRITA EM UMA PIRÂMIDE REGULAR DE BASE QUADRADA

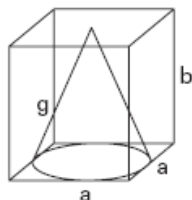


O SECCIONAR A PIRÂMIDE PELO PLANO VNM OBTEMOS UM CÍRCULO INSCRITO NO TRIÂNGULO VMS. APLICANDO SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS NOS TRIÂNGULOS VOP E VAM OBTEMOS:

$$g^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

## EXERCÍCIOS ESTRUTURAIS

**1-(FUVEST)** Um cone circular reto está inscrito em um paralelepípedo reto retângulo, de base quadrada, como mostra a figura. A razão  $b/a$  entre as dimensões do paralelepípedo é  $3/2$  e o volume do cone é  $\pi$ . Calcule o comprimento da geratriz  $g$  do cone

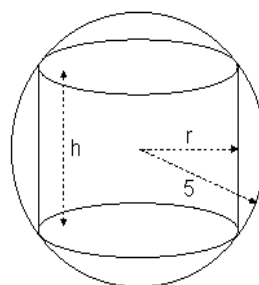


Então, o comprimento  $g$  da geratriz do cone é

**2-(MACK)** Seja  $36\pi$  o volume de uma esfera circunscrita a um cubo. Então a razão entre o volume da esfera e o volume do cubo é:

- a)  $\sqrt{3} \pi/2$       b)  $8\pi/3$       c)  $2\pi/3$   
 d)  $\sqrt{3} \pi/4$       e)  $\sqrt{3} \pi$

**3-(PUC)** Um cilindro reto de base circular de raio  $r$  e altura  $h$  é inscrito numa esfera de raio 5.



- a) Encontre a altura do cilindro quando  $r = 3$ .  
 b) Calcule a área total do cilindro quando  $r = 3$ .

**4-(UNITAU)** Uma esfera de raio  $R$  está inscrita em um cilindro. O volume do cilindro é igual a:

- a)  $\pi r^3/3$ .    b)  $2\pi r^3/3$ .    c)  $\pi r^3$     d)  $2r^3$     e)  $2\pi r^3$

GABARITO: 1)  $\sqrt{10}$     2)A    3) a) 8u.c. b)  $66\pi$  u.a    4)E

## ESSA PROVA FOI INSPIRADA EM EVENTOS REAIS

1) Certo dia quando dava aula na sala 32 observei pela janela uma pirâmide quadrangular regular feita de acrílico. Sabe-se que a aresta de base mede 1m e que as faces laterais são triângulos equiláteros e que custo de 1 m<sup>2</sup> de acrílico colorido é

R\$ 200,00. USE  $\sqrt{3}=1,7$

a) Calcule o custo revestir a área lateral dessa pirâmide. Não leve em consideração o custo das armações metálicas.

b) Calcule a altura desta pirâmide



Foto de Marco Aurelio Zerlin

2) Abaixo da pirâmide da questão anterior há um vaporizador que é acionado quando a umidade relativa do ar está baixa. O vapor d'água sai de um disco que é um cilindro circular reto de raio da base 30cm e altura 2cm. Supondo que o cilindro esteja completamente cheio de água e que o tempo para vaporizar 0,54 litros de água é de 30 minutos. Calcule o tempo necessário para vaporizar toda a água contida no disco. Adote  $\pi = 3$  **USE BOM SENSO PARA DAR A RESPOSTA**



Foto de Marco Aurelio Zerlin

3) O copo de plástico descartável é um dos itens mais utilizados no cotidiano dos indivíduos. Na maioria dos casos, o uso desses copos é utilizado apenas uma vez sendo posteriormente descartados, o que acarreta gastos financeiros e, o mais agravante, contribui com a degradação ambiental visto que, na maioria das vezes a sua destinação é imprópria. Em consonância com esta questão ambiental o Singular distribuiu aos professores um copo plástico reutilizável.

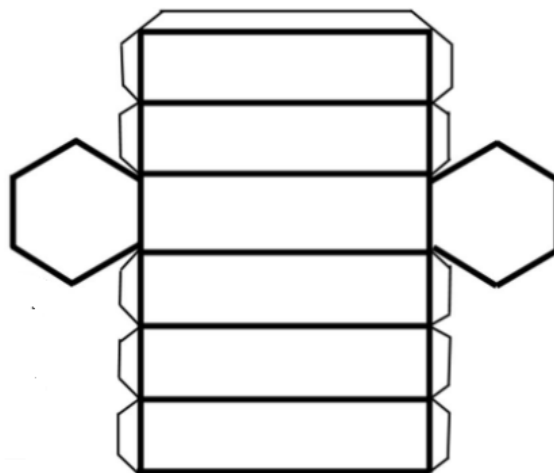
Supondo que o copo seja um **CILINDRO EQUILÁTERO** de 4 cm de raio da base e que, em média, os professores colocam água até  $\frac{5}{8}$  de

altura. Use  $\pi=3$  para os seus cálculos.

- Calcule o volume d'água (**em ml**) que um professor coloca no copo.
- Vamos supor que neste copo tenha água até uma certa altura. Ao jogar uma pedra, que fica totalmente submersa, verifica-se que o nível de água sobe 1 cm. Calcule o volume da pedra



4) A figura planificada é um modelo para montar uma embalagem em forma de um prisma hexagonal regular. Este prisma tem  $4\sqrt{3}$  cm de aresta da base e x cm de aresta lateral. Calcule x sabendo que nessa embalagem devem ser encaixadas **perfeitamente 3 esferas** sendo uma em cima da outra. Obs. As **3 esferas** tangenciam as faces laterais do prisma, uma delas tangencia a base e uma outra a tampa.



5) Uma das coisas que mais me chama a atenção é o formato de copos e embalagens. Certo dia, ao visitar uma loja da NESPRESSO, degustei o tal de café com gelo. O gosto era duvidoso, mas o copo era legal. Tinha o formato de um tronco de cone de 4 cm de raio da base maior, 2 cm de raio da base menor e 10 cm de altura. Calcule o volume do copo. Não precisa substituir o  $\pi$  por qualquer número. Use  $\pi=3$



6) Na Páscoa ganhei uma caixa de chocolates em forma de pirâmide quadrangular regular. Na realidade eu gostei mesmo foi da embalagem. Calcule o volume desta pirâmide sabendo que a aresta da base mede  $5\sqrt{2}$  cm e que a aresta lateral mede 13 cm



#### Gabarito

1) a) R\$340,00 b)  $\sqrt{2}/2$  2) 5h 3) a) 240ml b)  $48\text{cm}^3$   
4) 36cm 5)  $280\text{cm}^3$  6)  $200\text{cm}^3$



PO 1UL 2019

**ESSA PROVA FOI INSPIRADA EM EVENTOS REAIS**  
**A Geometria Espacial tem muita**  
**aplicabilidade na resolução de problemas em**  
**situações reais do cotidiano. Uma delas é o**  
**estudo e construção de embalagens.**

**1-ESPARADRAPO CREMER:** A embalagem de esparadrapo é um cilindro com um furo cilíndrico em seu interior conforme figura. Calcule o volume interno da embalagem do esparadrapo da Cremer, sabendo que o raio do círculo maior da base é 2 cm, o raio do círculo furo é de 1 cm e a altura do cilindro é de 8 cm. Despreze a espessura do plástico da embalagem.



**2- TOBLERONE:** Toblerone foi criado em [1908](#) pelos suíços Theodor Tobler e Emil Baumann. Em 1911 passou a ser embalado em [papel de alumínio](#), um produto que havia sido inventado no ano anterior por outra empresa suíça. O Chocolate Toblerone original é constituído por chocolate ao leite, amêndoas da Califórnia, e mel.

Calcule a área total da embalagem de papelão de um tobleone, sabendo que a sua base é um triângulo equilátero de 4 cm de aresta e a altura é de 20 cm. Use  $\sqrt{3}=1,7$



**3-CONE DE FERREIRO ROCHER:** Olha isso!!!! Um cone recheado de ferreiro rocher. O raio da base desse cone seja 10 cm e a **altura** 30cm. Vamos admitir que um bombom seja uma esfera perfeita de raio 3cm. Calcule aproximadamente quantos bombons de ferreiro rocher cabem nesta embalagem. Despreze os espaços vazios entre os bombons.



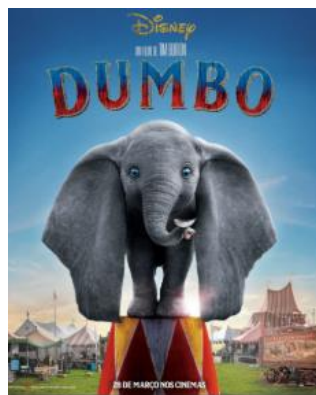
**4- BOLA DE TÊNIS DUNLOP:** Nesta embalagem de bola de tênis estão inscritas 4 bolas de volume  $36\pi\text{cm}^3$  cada uma. Calcule a área total desta embalagem admitindo que ela seja um cilindro.



**5- OMO:** Observe essa embalagem de sabão em pó. Note que foi apagado o “peso” do sabão em pó de seu conteúdo. Se as dimensões do paralelepípedo são 10cm, 20cm e 40 cm e que a densidade do sabão em pó é  $0,25\text{g/cm}^3$ , calcule o peso ( EM KG) que deveria estar impresso na embalagem



**6- DUMBO O FILME:** Neste propagando deste clássico filme da Disney (o primeiro filme estreou em 1941), o Dumbo está em cima de um tronco de cone cujo círculo maior tem 40 cm de raio e o menor 30 cm de raio. Se a altura desse tronco é de 40 cm, calcule o seu volume. Use  $\pi=3$



Gabarito

- 1)  $24\pi\text{cm}^3$  2)  $253,6\text{cm}^3$  3) aproximadamente 28  
4)  $162\pi\text{cm}^2$  5) 2kg 6)  $148000\text{cm}^3$



## SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS PARA AT E PO

**1-(METODISTA)** Um prisma hexagonal regular tem altura 6 cm possui volume igual a  $1728\sqrt{3} \text{ cm}^3$ . Calcule o valor da sua aresta da base.

**2-(PUC)** Um prisma reto é tal que sua base é um triângulo equilátero cujo lado mede  $4\sqrt{3} \text{ cm}$  e seu volume é igual ao volume de um cubo de aresta medindo  $4\sqrt{3} \text{ cm}$ . a área total desse prisma, em centímetros quadrados, é

- a)  $24\sqrt{3}$       b)  $192\sqrt{3}$       c)  $204\sqrt{3}$   
d)  $216\sqrt{3}$       e)  $228\sqrt{3}$

**3-(ESAL)** Num prisma triangular, regular e reto, todas as arestas têm a mesma medida, e o volume é de  $0,375 \text{ u}^3$ . a aresta, medida em unidades de comprimento, é igual à raiz cúbica de :

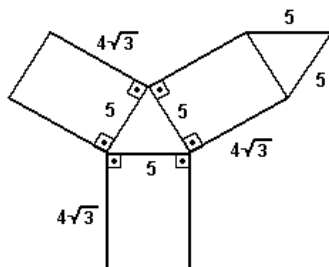
- a) 1      b)  $1/3$       c)  $\sqrt{3}/2$       d)  $\sqrt{3}/4$       e)  $1/2$

**4-(MACK)** Calcule área total de um prisma triangular cujas arestas são todas congruentes entre si e cujo volume é  $54\sqrt{3}$

**5-(PUC)** A base de um prisma reto é um triângulo de lados iguais a 5m, 5m e 8 m e a altura tem 3m. O seu volume será, em  $\text{m}^3$ :

- a) 12      b) 24      c) 36      d) 48      e) 60

**6-(UF)** A figura a seguir representa a planificação de um sólido. O volume deste sólido é



- a)  $20\sqrt{3}$       b) 75      c)  $50\sqrt{3}$       d) 100      e)  $100\sqrt{3}$

**7-(UFPA)** Um paralelepípedo retângulo de dimensões 2, 3 e 5 cm tem a diagonal igual a :

- a)  $\sqrt{38}$       b)  $\sqrt{35}$       c)  $\sqrt{32}$       d)  $2\sqrt{32}$       e)  $3\sqrt{35}$

**8-(MACK)** Um paralelepípedo retângulo tem arestas medindo 5, 4 e k. Se sua diagonal mede  $3\sqrt{10}$ , o valor de k é :

- a) 20      b) 10      c) 9      d) 7      e) 3

**9-(FUVEST)** Dispondo-se de uma folha de cartolina, medindo 50 cm de comprimento por 30 cm de largura, pode-se construir uma caixa aberta, cortando-se um quadrado de 8 cm de lado em cada canto da folha. O volume dessa caixa, em  $\text{cm}^3$ , será :

- a) 1244      b) 1828      c) 2324      d) 3808      e) 12000

**10-(FUVEST)** Um reservatório tem a forma de um paralelepípedo reto retangular e mede 0,5 m de largura, 1,2 m de comprimento e 0,7 m de altura. Estando o reservatório com certa quantidade de água, coloca-se dentro dele uma pedra com forma irregular, que fica totalmente coberta pela água. Observa-se, então, que o nível da água sobe 1 cm. Isto significa que o volume da pedra é de:

- a)  $0,6\text{m}^3$       b)  $6\text{m}^3$       c)  $6\text{dm}^3$   
d)  $6\text{cm}^3$       e)  $600\text{cm}^3$

**11-(MACK)** Uma piscina com 5m de comprimento, 3m de largura e 2m de profundidade tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Se o nível da água está 20cm abaixo da borda, o volume de água existente na piscina é igual a:

- a)  $27000\text{cm}^3$       b)  $27000\text{m}^3$       c) 27000 litro  
d) 3000 litros      e)  $30\text{m}^3$

**12-(UF)** O volume de uma caixa cúbica é 216 litros. A medida de sua diagonal, em centímetros, é

- a)  $0,8\sqrt{3}$       b) 6      c) 60      d)  $60\sqrt{3}$       e)  $900\sqrt{3}$

**13-(UF)** Um cubo possui aresta 4cm. A sua diagonal mede:

- a)  $4\sqrt{3} \text{ cm}$       b)  $2\sqrt{3} \text{ cm}$       c)  $4\sqrt{2} \text{ cm}$   
d)  $2\sqrt{2} \text{ cm}$       e) 2 cm

**14-(CESGRANRIO)** Se a diagonal de uma face de um cubo mede  $5\sqrt{2}$ , calcule o volume do cubo

**15-(PUCCAMP)** Um bloco maciço de ferro tem a forma de um paralelepípedo retângulo com dimensões de 15 cm de comprimento, 7,5 cm de largura a 4 cm de altura. Quantos gramas tem esse bloco, se a densidade do ferro é  $7,8 \text{ g/cm}^3$ ?

- a) 35,1      b) 234      c) 351      d) 2340      e) 3510

**16-(UFSCAR)** Se a soma das medidas de todas as arestas de um cubo é 60 cm, então o volume desse cubo, em centímetros cúbicos, é

- a) 125.      b) 100      c) 75.      d) 60      e) 25.

**17-(PUC)** Considere um paralelepípedo retangular com lados 2, 3 e 6 cm. A distância máxima entre dois vértices deste paralelepípedo é:

- a) 7 cm      b) 8 cm      c) 9 cm      d) 10 cm.      e) 11 cm.

**18-(UNESP)** Atira-se uma pedra de forma irregular em um vaso cilíndrico de 1,2 m de diâmetro da base em parte cheio de água. Qual o volume da pedra, em  $\text{m}^3$ , se em consequência da imersão a água elevou-se 0,54 m ? ( $\pi = 3,14$ )

- a) 0,610      b) 0,620      c) 0,580      d) 0,850      e) 0,575

**19-(UFPA)** A área lateral de um cilindro de revolução é metade da área da base. Se o perímetro de sua secção meridiana é 18 m, o volume, em  $m^3$ , vale:

- a)  $8\pi$  b)  $10\pi$  c)  $12\pi$  d)  $16\pi$  e)  $20\pi$

**20-(PUC)** Se triplicarmos o raio da base de um cilindro, mantendo a altura, o volume do cilindro fica multiplicado por:

- a) 3 b) 6 c) 9 d) 12 e) 15

**21-(UFMG)** Um cilindro circular reto, de ouro maciço, tem o raio da base igual a 2 cm e a altura igual a 10 cm. Sendo a densidade do ouro  $19g/cm^3$ , a massa total do cilindro, em gramas é:

- a)  $950\pi$  b)  $760\pi$  c)  $570\pi$  d)  $380\pi$  e)  $190\pi$

**22-(UFPA)** o reservatório "tubinho de tinta" de uma caneta esferográfica tem 4 mm de diâmetro e 10 cm de comprimento. Se você gasta  $5\pi mm^3$  de tinta por dia, a tinta de sua esferográfica, em dias, durará:

- a) 20 b) 40 c) 50 d) 80 e) 100

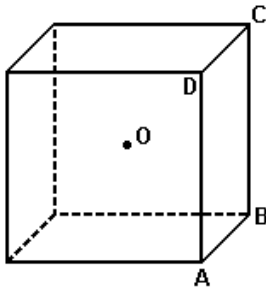
**23-(PUC)** A base de uma pirâmide reta é um quadrado cujo lado mede  $8\sqrt{2}$  cm. Se as arestas laterais da pirâmide medem 17 cm, o seu volume, em centímetros cúbicos, é:

- a) 520. b) 640. c) 680. d) 750 e) 780.

**24-(FEI)** São dados dois planos paralelos distantes de 5 cm. Considere em um dos planos um triângulo ABC de área  $30 cm^2$  e no outro plano um ponto qualquer O. O volume do tetraedro ABCO é em  $cm^2$ :

- a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

**25-(UFRS)** Na figura, O é o centro do cubo.



Se o volume do cubo é 1, o volume da pirâmide de base ABCD e vértice O é

- a)  $1/2$ . b)  $1/3$ . c)  $1/4$ . d)  $1/6$ . e)  $1/8$ .

**26-(UFC)** Um tetraedro regular tem arestas medindo

$\sqrt{6}$  cm. Então a medida de suas alturas é igual a:

- a)  $1/2$  cm b) 1 cm c)  $3/2$  cm d) 2 cm e)  $5/2$  cm

**27-(FUVEST)** Em uma pirâmide regular de 12 cm de altura tendo como base um quadrado de lado igual a 10 cm, a área lateral é, em  $cm^2$ :

- a) 240 b) 260 c) 340 d) 400 e)  $20\sqrt{119}$

**28-(FUVEST)** Deseja-se construir um cone circular reto com 4 cm de raio da base e 3 cm de altura. Para isso, recorta-se, em cartolina, um setor circular para a superfície lateral e um círculo para a base. A medida do ângulo central do setor circular é:

- a)  $144^\circ$  b)  $192^\circ$  c)  $240^\circ$  d)  $288^\circ$  e)  $336^\circ$

**29-(FUVEST)** Um pedaço de cartolina possui a forma de um semicírculo de raio 20 cm. Com essa cartolina um menino constrói um chapéu cônico e o coloca com a base apoiada sobre uma mesa. Qual a distância, em cm, do bico do chapéu à mesa?

- a)  $10\sqrt{3}$  b)  $3\sqrt{10}$  c)  $20\sqrt{2}$  d) 20 e) 10

**30-(FATEC)** A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é  $8\pi cm$ , então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é

- a)  $64\pi$  b)  $48\pi$  c)  $32\pi$  d)  $16\pi$  e)  $8\pi$

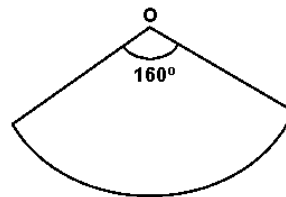
**31-(UFPA)** Um cone equilátero tem e área da base  $4\pi cm^2$ . Qual a sua área lateral?

- a)  $2\pi$  b)  $4\pi$  c)  $8\pi$  d)  $16\pi$  e)  $32\pi$

**32-(UEL)** Uma chapa com forma de um setor de raio 20 cm e ângulo de x graus é manuseada para se transformar num cone. Se o raio da base do cone obtido é  $r = 5$  cm então o valor de x é:

- a)  $60^\circ$  b)  $75^\circ$  c)  $80^\circ$  d)  $85^\circ$  e)  $90^\circ$

**33-(MACK)** Planificando a superfície lateral de um cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro O e raio 18 cm. Dos valores abaixo, o mais próximo da altura desse cone é:



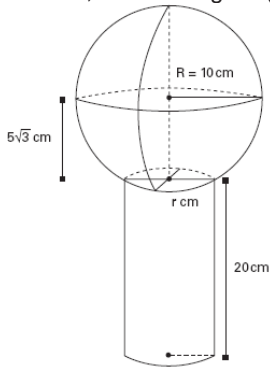
- a) 12 cm b) 18 cm c) 14 cm d) 16 cm e) 20 cm

**34-(UFPA)** A circunferência máxima de uma esfera mede  $6\pi$  cm. Qual o volume da esfera, em  $cm^3$ ?

- a)  $12\pi$  b)  $24\pi$  c)  $36\pi$  d)  $72\pi$  e)  $144\pi$

**35-(UNESP)** Um troféu para um campeonato de futebol tem a forma de uma esfera de raio  $R = 10cm$  cortada por um plano situado a uma distância de  $5\sqrt{3}$  cm do centro da esfera, determinando uma circunferência de raio r cm, e sobreposta a um cilindro circular reto de 20cm de altura e

raio  $r$  cm, como na figura (não em escala).



O volume do cilindro, em  $\text{cm}^3$ , é

- A)  $100\pi$ . B)  $200\pi$ . C)  $250\pi$ . D)  $500\pi$ . E)  $750\pi$ .

36-(FUVEST) Uma superfície esférica de raio 13 cm é cortada por um plano situado a uma distância de 12 cm do centro da superfície esférica, determinando uma circunferência. O raio desta circunferência, em cm é:

- a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

37-(PUCMG) Uma esfera de raio  $r = 3$  cm tem volume equivalente ao de um cilindro circular reto de altura  $h = 12$  cm. O raio do cilindro, em cm, mede:

- a) 1 b) 2 c)  $\sqrt{3}$  d) 3 e)

38-(PUCPR) Tem-se um recipiente cilíndrico, de raio 3 cm, com água. Se mergulharmos inteiramente uma bolinha esférica nesse recipiente, o nível da água sobe cerca de 1,2 cm. Sabe-se, então, que o raio da bolinha vale aproximadamente:

- a) 1 cm b) 1,5 cm c) 2 cm d) 2,5 cm e) 3 cm

39-(UFRS) O volume de uma esfera A é  $1/8$  do volume de uma esfera B. Se o raio da esfera B mede 10, então o raio da esfera A mede

- a) 5 b) 4 c) 2,5 d) 2 e) 1,25

40-(UFMS) O volume de uma esfera é  $288\pi \text{ cm}^3$ , o seu diâmetro mede, em cm:

- a) 8 b) 10 c) 12 d) 15 e) 16

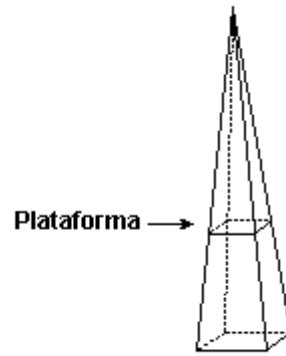
41-(UFMG) Um plano intercepta uma superfície esférica segundo uma circunferência de  $6\sqrt{3}\pi$  cm de comprimento. Sendo a distância do centro da esfera ao centro da circunferência igual a 3 cm, o raio da esfera é, em cm:

- a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

42-(UFSC) A base quadrada de uma pirâmide tem  $144 \text{ m}^2$  de área. A 4 m do vértice traça-se um plano paralelo à base e a seção assim feita tem  $64 \text{ m}^2$  de área. Qual a altura da pirâmide?

43-(UFG) A figura a seguir representa uma torre, na forma de uma pirâmide regular de base quadrada, na qual foi construída uma plataforma, a 60 metros de altura, paralela à base. Se os lados da base e da plataforma medem,

respectivamente, 18 e 10 metros, a altura da torre, em metros, é:

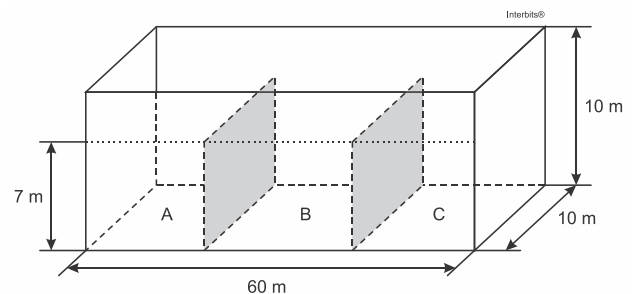


- a) 75 b) 90 c) 120 d) 135 e) 145

44.(Enem 2017-31%) Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que seja adicionado 1,5 mL desse produto para cada 1.000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina. A quantidade desse produto, em mililitro, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é

- a) 11,25. b) 27,00. c) 28,80. d) 32,25. e) 49,50.

45. (Enem 2016-25%) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por  $60 \text{ m} \times 10 \text{ m}$  de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.

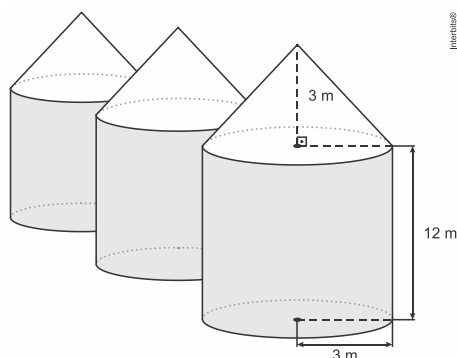


Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C. Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

- a)  $1,4 \times 10^3 \text{ m}^3$
- b)  $1,8 \times 10^3 \text{ m}^3$
- c)  $2,0 \times 10^3 \text{ m}^3$
- d)  $3,2 \times 10^3 \text{ m}^3$
- e)  $6,0 \times 10^3 \text{ m}^3$

46. (Enem 2016-29%) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de  $20 \text{ m}^3$ . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para  $\pi$ .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

- a) 6. b) 16. c) 17. d) 18. e) 21.

47. (Enem 2015-19%) Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa. Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de  $1.000 \text{ cm}^3$  e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango,

de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar. O volume máximo, em  $\text{cm}^3$ , da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

- a) 450. b) 500. c) 600. d) 750. e) 1.000.

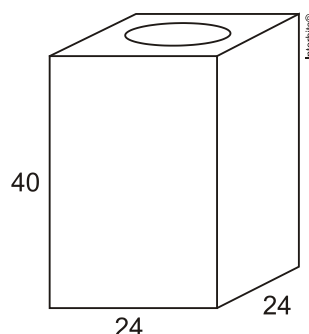
48. (Enem 2015-27%) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar  $81 \text{ m}^3$  de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada.

Utilize 3,0 como aproximação para  $\pi$ .

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

- a) 0,5 b) 1,0 c) 2,0 d) 3,5 e) 8,0

49. (Enem 2014-17%) Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.

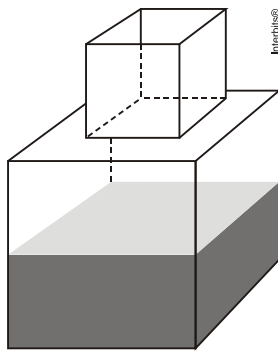


Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

- a) 14,4% b) 20% c) 32,0% d) 36,0% e) 64,0%

50. (Enem 2014-20%) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

- a) 8. b) 10. c) 16. d) 18. e) 24.

51. (Enem 2014-9%) O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1:100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3cm, 1cm e 2cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será

- a) 6. b) 600. c) 6.000.  
d) 60.000. e) 6.000.000.

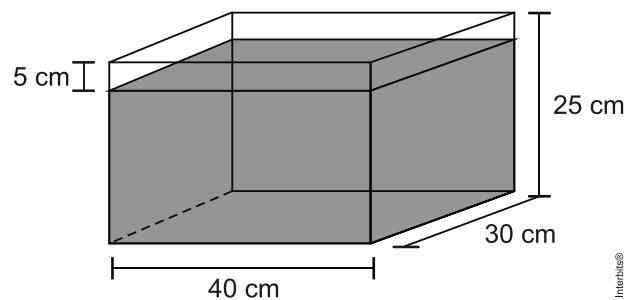
52. (Enem 2014-19%) Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas. (USE  $\pi=3$ )

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

- a) 168. b) 304. c) 306. d) 378. e) 514.

53. (Enem 2012-32%) Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de  $2\,400\text{ cm}^3$ ?

- a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.  
b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.  
c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.  
d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.  
e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

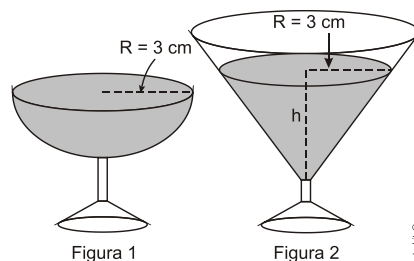
54. (Enem 2010-27%) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

- a) 5 cm. b) 6 cm. c) 12 cm. d) 24 cm. e) 25 cm.

31. (Enem 2010-31%) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

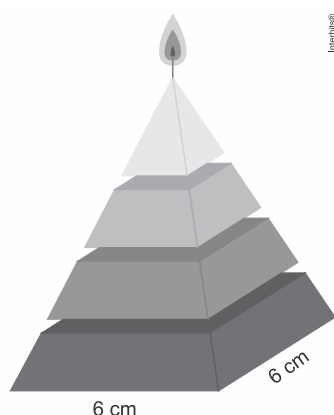
- a) 1,33. b) 6,00. c) 12,00. d) 56,52. e) 113,04.

55. (Enem 2009-16%) Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las.

Sabendo que a capacidade da caixa é de  $13.824 \text{ cm}^3$ , então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a

a) 4. b) 8. c) 16. d) 24. e) 32.

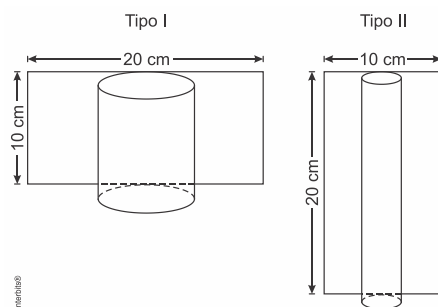
56. (Enem 2009-23%) Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

- a)  $156 \text{ cm}^3$ . b)  $189 \text{ cm}^3$ . c)  $192 \text{ cm}^3$ .  
d)  $216 \text{ cm}^3$ . e)  $540 \text{ cm}^3$ .

57. (Enem 2006-20%) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de  $20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$  (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

- a) o triplo. b) o dobro. c) igual.  
d) a metade. e) a terça parte.

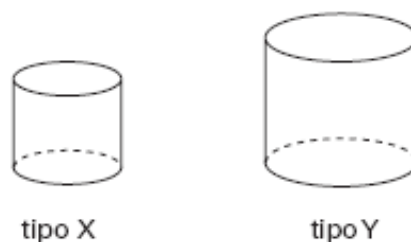
58. (ENEM 2019) O rótulo da embalagem de um cosmético informa que a dissolução de seu conteúdo, de acordo com suas especificações, rende 2,7 litros desse produto pronto para o uso. Uma pessoa será submetida a um tratamento estético em que deverá tomar um banho de imersão com esse produto numa banheira com capacidade de  $0,3 \text{ m}^3$ . Para evitar o transbordamento, essa banheira será preenchida em 80% de sua capacidade. Para esse banho, o número mínimo de embalagens desse cosmético é

a) 9 b) 12 c) 89 d) 112 e) 134.

59. (FUVEST) Um fabricante de cristais produz três tipos de taças para servir vinho. Uma delas tem o bojo no formato de uma semiesfera de raio  $r$ ; a outra, no formato de um cone reto de base circular de raio  $2r$  e altura  $h$ ; e a última, no formato de um cilindro reto de base circular de raio  $x$  e altura  $h$ . Sabendo-se que as taças dos três tipos, quando completamente cheias, comportam a mesma quantidade de vinho, é correto afirmar que a razão  $x/h$  é igual a:

a)  $\sqrt{3}/6$  b)  $\sqrt{3}/3$  c)  $2\sqrt{3}/3$  d)  $\sqrt{3}$  e)  $4\sqrt{3}/3$

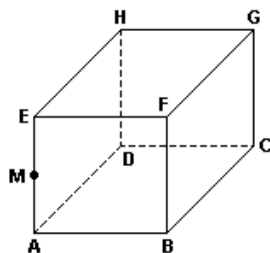
60. (FUVEST) Uma empresa de construção dispõe de 117 blocos de tipo X e 145 blocos de tipo Y. Esses blocos têm as seguintes características: todos são cilindros retos, o bloco X tem 120 cm de altura e o bloco Y tem 150 cm de altura.



A empresa foi contratada para edificar colunas, sob as seguintes condições: cada coluna deve ser construída sobrepondo blocos de um mesmo tipo e todas elas devem ter a mesma altura. Com o material disponível, o número máximo de colunas que podem ser construídas é de

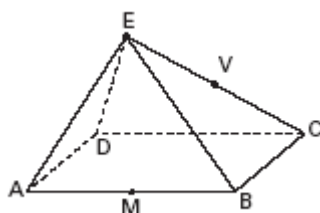
a) 55 b) 56 c) 57 d) 58 e) 59

**61-(FUVEST)** O cubo de vértices ABCDEFGH, indicado na figura, tem arestas de comprimento  $a$ . Sabendo-se que M é o ponto médio da aresta AE, então a distância do ponto M ao centro do quadrado ABCD é igual a



- a)  $\frac{(a\sqrt{5})}{5}$   
 b)  $\frac{(a\sqrt{3})}{3}$   
 c)  $\frac{(a\sqrt{3})}{2}$   
 d)  $a\sqrt{3}$   
 e)  $2a\sqrt{3}$

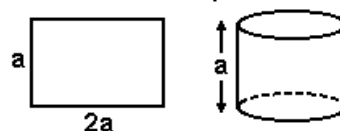
**62-(FUVEST)** A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura tem volume 4. Se M é o ponto médio da aresta AB e V é o ponto médio da aresta EC, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:



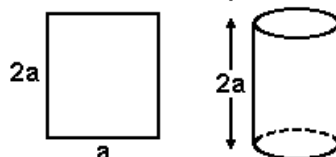
- a) 1    b) 1,5    c) 2    d) 2,5    e) 3

**63-(FUVEST)** Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, A e B, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados  $a$  e  $2a$ , soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado a seguir.

barril do tipo A



barril do tipo B



Se  $V_A$  e  $V_B$  indicam os volumes dos barris do tipo A e B, respectivamente, tem-se:

- a)  $V_A = 2V_B$     b)  $V_B = 2V_A$     c)  $V_A = V_B$   
 d)  $V_A = 4V_B$     e)  $V_B = 4V_A$

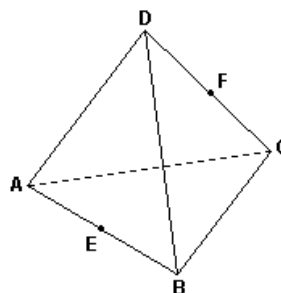
**64-(FUVEST)** Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8m e a altura da pirâmide 3m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem  $1 \text{ m}^2$ . Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

- a) 90    b) 100    c) 110    d) 120    e) 130

**65-(FUVEST)** Em um bloco retangular (isto é, paralelepípedo reto retângulo) de volume  $27/8$ , as medidas das arestas concorrentes em um mesmo vértice estão em progressão geométrica. Se a medida da aresta maior é 2, a medida da aresta menor é:

- a)  $7/8$     b)  $8/8$     c)  $9/8$     d)  $10/8$     e)  $11/8$

**66-(FUVEST)** Na figura a seguir, ABCD é um tetraedro regular de lado  $a$ . Sejam E e F os pontos médios de  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , respectivamente. Então, o valor de EF é:



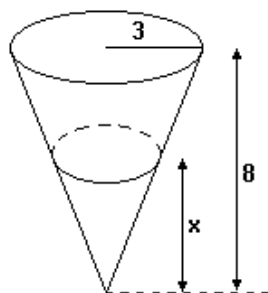
- a)  $\frac{a}{2}$     b)  $\frac{(a\sqrt{2})}{2}$     c)  $\frac{(a\sqrt{2})}{4}$     d)  $\frac{(a\sqrt{3})}{2}$     e)  $\frac{(a\sqrt{3})}{4}$



**67-(FUVEST)** O volume de um paralelepípedo reto retângulo é de  $240 \text{ cm}^3$ . As áreas de duas de suas faces são  $30 \text{ cm}^2$  e  $48 \text{ cm}^2$ . A área total do paralelepípedo, em  $\text{cm}^2$ , é

- a) 96   b) 118   c) 236   d) 240   e) 472

**68-(FUVEST)** Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível a altura  $x$  atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:

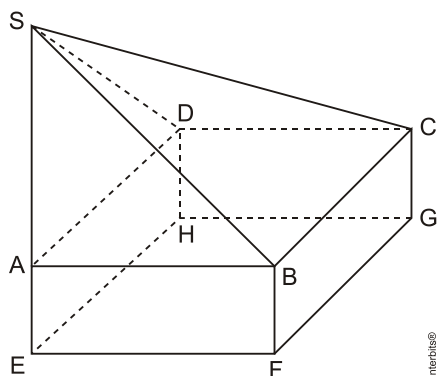


- a)  $8/3 \text{ cm}$    b)  $6 \text{ cm}$    c)  $4 \text{ cm}$    d)  $4\sqrt{3} \text{ cm}$    e)  $4\sqrt[3]{4} \text{ cm}$

**69-(FUVEST)** Em um tetraedro regular de lado  $a$ , a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a

- a)  $a\sqrt{3}$    b)  $a\sqrt{2}$    c)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$    d)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$    e)  $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

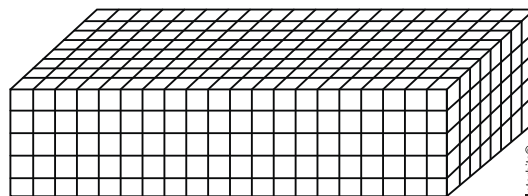
**70. (FUVEST)** O sólido da figura é formado pela pirâmide  $SABCD$  sobre o paralelepípedo reto  $ABCDEFGH$ . Sabe-se que  $S$  pertence à reta determinada por  $A$  e  $E$  e que  $\overline{AE} = 2\text{cm}$ ,  $\overline{AD} = 4\text{cm}$  e  $\overline{AB} = 5\text{cm}$ .



A medida do segmento  $SA$  que faz com que o volume do sólido seja igual a  $\frac{4}{3}$  do volume da pirâmide  $SEFGH$  é

- a) 2 cm   b) 4 cm   c) 6 cm   d) 8 cm   e) 10 cm

**71- (UNICAMP)** Um queijo tem o formato de paralelepípedo, com dimensões  $20 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ . Sem descascar o queijo, uma pessoa o divide em cubos com 1 cm de aresta, de modo que alguns cubos fiquem totalmente sem casca, outros permanecem com casca em apenas uma face, alguns com casca em duas faces e os restantes com casca em três faces. Nesse caso, o número de cubos que possuem casca em apenas uma face é igual a



- a) 360.   b) 344.   c) 324.   d) 368

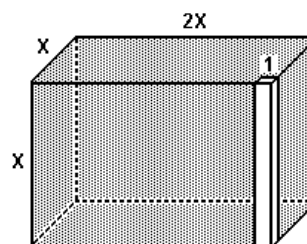
**72. (UNICAMP)** Um cilindro circular reto, com raio da base e altura iguais a  $R$ , tem a mesma área de superfície total que uma esfera de raio

- a)  $2R$ .   b)  $\sqrt{3}R$ .   c)  $\sqrt{2}R$ .   d)  $R$ .

**73. (UNICAMP)** Considere um cilindro circular reto. Se o raio da base for reduzido pela metade e a altura for duplicada, o volume do cilindro

- a) é reduzido em 50%.  
b) aumenta em 50%.  
c) permanece o mesmo.  
d) é reduzido em 25%.

**74-(UNESP)** Considere o sólido resultante de um paralelepípedo retângulo de arestas medindo  $x$ ,  $x$  e  $2x$ , do qual um prisma de base quadrada de lado 1 e altura  $x$  foi retirado. O sólido está representado pela parte escura da figura.



O volume desse sólido, em função de  $x$ , é dado pela expressão:

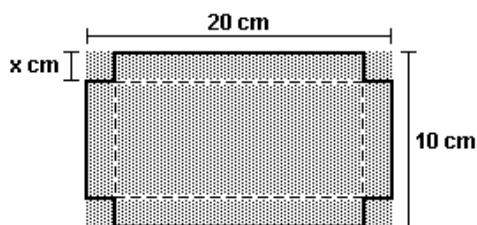
- a)  $2x^3 - x^2$ .   b)  $4x^3 - x^2$ .   c)  $2x^3 - x$ .  
d)  $2x^3 - 2x^2$ .   e)  $2x^3 - 2x$ .



**75-(UNESP)** A água de um reservatório na forma de um paralelepípedo retângulo de comprimento 30m e largura 20m atingia a altura de 10m. Com a falta de chuvas e o calor, 1800 metros cúbicos da água do reservatório evaporaram. A água restante no reservatório atingiu a altura de

- a) 2 m.
- b) 3 m.
- c) 7 m.
- d) 8 m.
- e) 9 m.

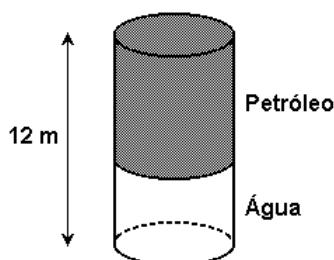
**76-(UNESP)** Considere um pedaço de cartolina retangular de lado menor 10 cm e lado maior 20 cm. Retirando-se 4 quadrados iguais de lados  $x$  cm (um quadrado de cada canto) e dobrando-se na linha pontilhada conforme mostra a figura, obtém-se uma pequena caixa retangular sem tampa.



O polinômio na variável  $x$ , que representa o volume, em  $\text{cm}^3$ , desta caixa é

- a)  $4x^3 - 60x^2 + 200x$ .
- b)  $4x^2 - 60x + 200$ .
- c)  $4x^3 - 60x^2 + 200$ .
- d)  $x^3 - 30x^2 + 200x$ .
- e)  $x^3 - 15x^2 + 50x$ .

**77-(UNESP)** Um tanque subterrâneo, que tem a forma de um cilindro circular reto na posição vertical, está completamente cheio com  $30 \text{ m}^3$  de água e  $42 \text{ m}^3$  de petróleo.



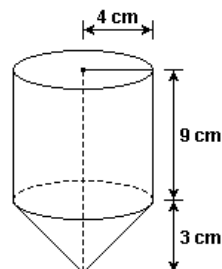
Se a altura do tanque é 12 metros, a altura, em metros, da camada de petróleo é

- a)  $2\pi$ .
- b) 7.
- c)  $\frac{7\pi}{3}$ .
- d) 8.
- e)  $\frac{8\pi}{3}$ .

**78-(UNESP)** Se quadruplicarmos o raio da base de um cilindro, mantendo a sua altura, o volume do cilindro fica multiplicado por

- a) 16.
- b) 12.
- c) 8.
- d) 4.
- e)  $4\pi$ .

**79-(UNESP)** Um paciente recebe por via intravenosa um medicamento à taxa constante de 1,5 ml/min. O frasco do medicamento é formado por uma parte cilíndrica e uma parte cônica, cujas medidas são dadas na figura, e estava cheio quando se iniciou a medicação.



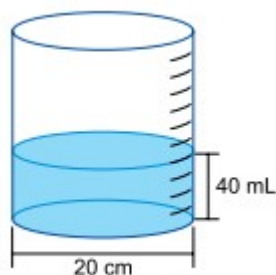
(figura fora de escala)

Após 4h de administração contínua, a medicação foi interrompida. Dado que  $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ , e usando a aproximação  $\pi = 3$ , o volume, em ml, do medicamento restante no frasco após a interrupção da medicação é, aproximadamente,

- a) 120.
- b) 150.
- c) 160.
- d) 240.
- e) 360.

**80.(VUNESP-2020)** Com o intuito de formar uma rede de observação e coleta de dados sobre as chuvas, um professor de geografia instalou, nas escolas em que trabalha, instrumentos meteorológicos para recolher e medir a quantidade de água precipitada.

Após uma chuva, um aluno verificou que o instrumento registrou 40 mL de água em um tubo, no formato de um cilindro reto com 20 cm de diâmetro, conforme a figura.



fora de escala

A partir dessas informações, o aluno deve comunicar ao professor que o valor aproximado indicado no

- a) pluviômetro foi 1,3 mm de chuva.
- b) higrômetro foi 1,3 mm de chuva.
- c) barômetro foi 2 mm de chuva.
- d) pluviômetro foi 2 mm de chuva.
- e) higrômetro foi 2 mm de chuva.

**81-(ITA)** Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja  $\frac{1}{8}$  do volume da pirâmide original?

a) 2 m. b) 4 m. c) 5 m. d) 6 m. e) 8 m.

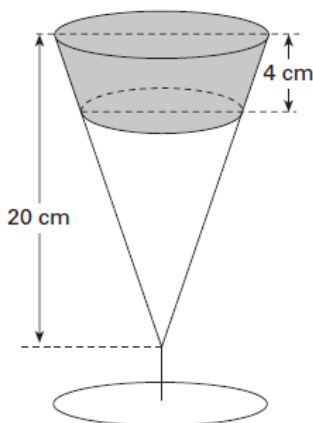
**82-(ITA)** Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de  $45^\circ$ . Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

- a)  $\sqrt{2}$  b)  $\frac{1}{3}$  c)  $\sqrt{6}$  d)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**83-(MACK)** Uma piscina com 5m de comprimento, 3m de largura e 2m de profundidade tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Se o nível da água está 20cm abaixo da borda, o volume de água existente na piscina é, igual a:

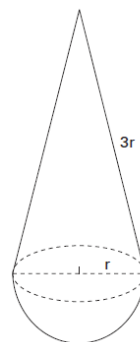
- a) 27000cm<sup>3</sup> b) 27000m<sup>3</sup> c) 27000 litros  
d) 3000 litros e) 30m<sup>3</sup>

**84-(MACK)** Uma mistura de leite batido com sorvete é servida em um copo, como na figura. Se na parte superior do copo há uma camada de espuma de 4cm de altura, então a porcentagem do volume do copo ocupada pela espuma está melhor aproximada na alternativa:



- a) 65% b) 60% c) 50% d) 45% e) 70%

**85-(MACK)** Uma boia marítima construída de uma determinada liga metálica tem o formato de uma gota que, separada em dois sólidos, resulta em um cone reto e em uma semiesfera, conforme a figura ao lado, na qual  $r = 50$ cm. Se o preço do m<sup>2</sup> da liga metálica é 1200 reais, adotando-se  $\pi = 3$ , o custo da superfície da boia é, em reais, igual a



- a) 4200 b) 5700 c) 4500 d) 5200 e) 3800

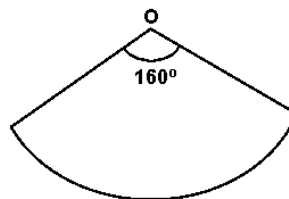
**86-(MACK)** Um recipiente cilíndrico reto, com raio da base igual a 4cm, contém água até a metade de sua altura. Uma esfera maciça, colocada no seu interior, fica totalmente submersa, elevando a altura da água em 2cm. O raio da esfera é:

- a)  $2\sqrt[3]{3}$  b) 4 c)  $3\sqrt[3]{2}$  d)  $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$  e) 2

**87-(MACK)** Um prisma e um cone retos têm bases de mesma área. Se a altura do prisma é  $\frac{2}{3}$  da altura do cone, a razão entre o volume do prisma e o volume do cone é:

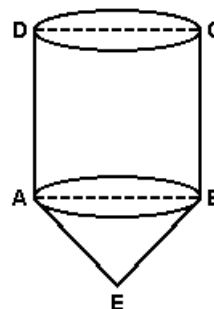
- a) 2 b)  $\frac{3}{2}$  c) 3 d)  $\frac{5}{3}$  e)  $\frac{5}{2}$

**88-(MACK)** Planificando a superfície lateral de um cone, obtém-se o setor circular da figura, de centro O e raio 18 cm. Dos valores abaixo, o mais próximo da altura desse cone é:



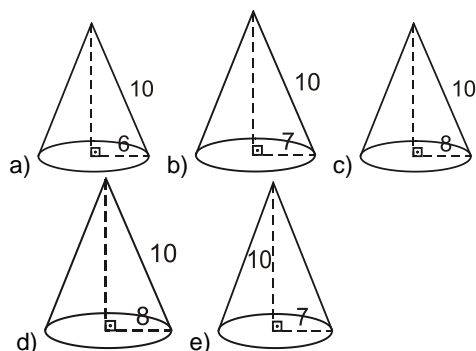
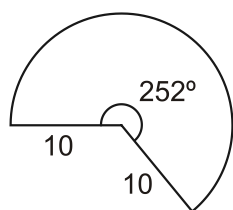
- a) 12 cm b) 18 cm c) 14 cm d) 16 cm e) 20 cm

**89-(MACK)** No sólido da figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e  $AE = BE = \sqrt{10}$ . O volume desse sólido é:



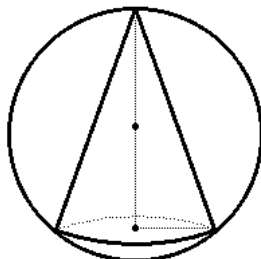
- a)  $\frac{5\pi}{2}$  b)  $\frac{4\pi}{3}$  c)  $4\pi$  d)  $5\pi$  e)  $3\pi$

**90-(GV)** A figura indica a planificação da lateral de um cone circular reto. O cone a que se refere tal planificação é



**91-(GV)** A soma das medidas das 12 arestas de um paralelepípedo reto-retângulo é igual a 140 cm. Se a distância máxima entre dois vértices do paralelepípedo é 21 cm, sua área total, em  $\text{cm}^2$ , é  
a) 776. b) 784. c) 798. d) 800. e) 812

**92-(PUC)** Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura a seguir. O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?



a) 26,4% b) 21,4% c) 19,5% d) 18,6% e) 16,2%

**93. (FAC. ALBERT EINSTEIN - MEDICINA)** Sobre uma artéria média, sabe-se que o diâmetro externo de uma seção reta e a espessura da parede medem 0,04 dm e 1 mm, respectivamente. Considerando que uma seção reta dessa artéria, obtida por dois cortes transversais distantes 1,5 cm um do outro, tem a forma de um cilindro circular reto, quantos mililitros de sangue ela deve comportar, em relação ao seu diâmetro interno? (Considere  $\pi = 3$ )  
a) 0,018 b) 0,045 c) 0,18 d) 0,45

**.(FUVEST 2020)** A menor esfera na qual um paralelepípedo reto-retângulo de medidas  $7 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$  está inscrito tem diâmetro de  
a) 9cm  
b) 10cm  
c) 11cm  
d) 12cm  
e) 15cm

**95.(UNICAMP 2020)** Se um tetraedro regular e um cubo têm áreas de superfície iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

- a)  $\sqrt{2}\sqrt{3}$ .  
b)  $\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$ .  
c)  $\sqrt{2}\sqrt[3]{3}$ .  
d)  $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}$ .

GABARITO

1)  $8\sqrt{3}$  cm 2) D 3) C 4)  $18\sqrt{3} + 108$  5) C 6) B 7) A 8) D  
9) D 10) C 11) C 12) D 13) A 14) 125 15) E 16) A 17) A  
18) A 19) D 20) C 21) B 22) D 23) B 24) E 25) D 26) D 27) B  
28) D 29) A 30) A 31) C 32) E 33) D 34) C 35) D 36) E 37) C  
38) C 39) A 40) C 41) C 42) 6m 43) D 44) B 45) D 46) D  
47) C 48) C 49) D 50) B 51) E 52) E 53) C 54) B 55) B 56) B  
57) B 58) C 59) E 60) E 61) C 62) B 63) A 64) A 65) C 66) B  
67) C 68) E 69) D 70) E 71) A 72) D 73) A 74) C 75) C 76) A  
77) B 78) A 79) A 80) A 81) C 82) D 83) C 84) C 85) C 86) A  
87) A 88) D 89) E 90) B 91) B 92) E 93) B 94) A 95) C

# ESTATÍSTICA

**1) MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL** : Servem para "resumir", em apenas uma informação, a característica desse conjunto de dados.

## MÉDIA

### a) Média aritmética simples

É o resultado da divisão da soma de n valores por n. Por

$$\frac{5 + 10 + 6}{3} = 7$$

exemplo, a média entre 5, 10 e 6 será:

### b) Média aritmética ponderada

Neste tipo de média aritmética, cada número que fará parte da média terá um peso. Este peso será multiplicado pelo número, que serão somados e divididos depois pela soma dos pesos. Veja o exemplo:

Números	Peso
2	3
4	2
6	1
3	2

$$\text{Média ponderada} = \frac{(2 \cdot 3) + (4 \cdot 2) + (6 \cdot 1) + (3 \cdot 2)}{3 + 2 + 1 + 2} = \frac{26}{8}$$

## MODA

Moda é a medida de tendência central que consiste no valor observado com mais frequência em um conjunto de dados.

Se um determinado time fez, em dez partidas, a seguinte quantidade de gols: 3, 2, 0, 3, 0, 4, 3, 2, 1, 3, 1; a moda desse conjunto é de 3 gols.

Pode acontecer de 2 valores observados tenham a maior frequência. Neste caso dizemos que esse conjunto é bimodal

## MEDIANA

Mediana é uma medida de tendência central que indica exatamente o valor central de uma amostra de dados.

- os valores da amostra devem ser colocados em ordem crescente.

- se a quantidade n de valores da amostra for ímpar, a mediana é o valor central da amostra. Nesse caso, há a

mesma quantidade de valores acima e abaixo desse

valor; A POSIÇÃO DO TERMO CENTRAL É  $\frac{n}{2} + 1$

- se a quantidade de n valores da amostra for par, é

preciso tirar a média dos valores centrais para calcular a mediana. Nesse caso, 50% dos valores da amostra estão

abaixo e 50% dos valores da amostra estão acima

desse valor. OS TERMOS CENTRAIS SÃO  $\frac{n}{2}$  e  $\frac{n}{2}$

+1

## 2) MEDIDAS DE DISPERSÃO (medem regularidade)

Ao efetuar os cálculos da média aritmética, mediana e moda, podemos observar que são medidas de tendência central, ou ainda, são valores em torno dos quais os dados se distribuem.

Vamos agora analisar o número de gols por partida da última rodada de um campeonato de futebol.

Jogos	1	2	3	4	5	6
Gols	5	0	11	3	4	1

Nessa rodada, a média aritmética de gols por partida foi:

Média aritmética =  $(5+0+11+3+4+1) : 6 = 24 : 6 = 4$  gols

Em Estatística, podemos ter uma ideia de como esses dados se distribuem em torno da média, ou seja, se estão muito ou pouco dispersos

Para tanto, basta calcular as medidas de dispersão que são: desvio médio, a variância e o desvio padrão.

## DESVIO MÉDIO

Vamos verificar o desvio do valor que representa o número de gols de cada partida em relação a média = 4. O desvio médio é calculado pela média aritmética dos valores absolutos dos desvios, portanto

Jogos	1	2	3	4	5	6
Desvios	5-4=1	0-4=-4	11-4=7	3-4=-1	4-4=0	1-4=-3
Módulos	1	4	7	1	0	3

Como devemos trabalhar com os valores absolutos dos desvios temos:  $16:6 = 2,6$

$$Dm = (1+4+7+1+0+3) : 6 = 2,6$$

## Variância

A dispersão dos dados também pode ser calculada considerando-se os quadrados dos desvios médios. A média aritmética desses quadrados chamamos de variância (Var ou  $\sigma^2$ ). O inconveniente é a unidade de medida que está ao quadrado, por isso surge o desvio padrão

$$\text{Var} = 1^2 + (-4)^2 + 7^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-3)^2 = 76 : 6 = 12,6 \text{ gols}^2$$

## Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{12,6} = 3,5 \text{ gols}$$

## ESTATÍSTICA NOS VESTIBULARES E ENEM

**1-(VUNESP)** Uma aluno fez 5 provas de matemática e obteve média final 4,8. Sua professora, de espírito maternal, resolveu desconsiderar a pior nota. Em consequência disso, a média da aluna passou a ser 5,5 com 4 provas. A pior nota obtida pela aluna foi :

- a) 1,0 b) 1,5 c) 2,0 d) 3,0 e) 3,5

**2. (ENEM)** Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

- a) 17°C, 17°C e 13,5°C b) 17°C, 18°C e 13,5°C  
c) 17°C, 13,5°C e 18°C d) 17°C, 18°C e 21,5°C.  
e) 17°C, 13,5°C e 21,5°C.

**3-(UNIFESP)** Para ser aprovado num curso, um estudante precisa submeter-se a três provas parciais durante o período letivo e a uma prova final, com pesos 1, 1, 2 e 3, respectivamente, e obter média no mínimo igual a 7. Se um estudante obteve nas provas parciais as notas 5, 7 e 5, respectivamente, a nota mínima que necessita obter na prova final para ser aprovado é

- a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5

**4-(ENEM)** Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de suas propriedades. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m<sup>2</sup> e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m<sup>2</sup>). A variância das produções dos talhões expressa em (sacas/hectare)<sup>2</sup> é

- a) 20,25. b) 4,50. c) 0,71. d) 0,50. e) 0,25

**5.(ENEM 2019)** Em uma fábrica de refrigerantes, é necessário que se faça periodicamente o controle no processo de engarrafamento para evitar que sejam envasadas garrafas fora da especificação do volume escrito no rótulo. Diariamente, durante 60 dias, foram anotadas as quantidades de garrafas fora dessas especificações. O resultado está apresentado no quadro. A média diária de garrafas fora das especificações no período considerado é

- a) 0,1 B) 0,2 c) 1,5 d) 2,0 e) 3,0

**6. (ENEM)** Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidato	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior. O candidato aprovado será

- a) K. b) L. c) M. d) N. e) P.

**7-(ENEM)** Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

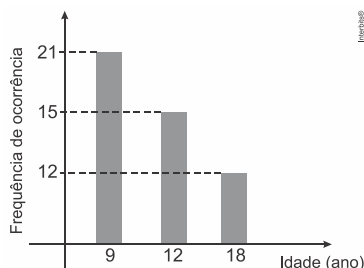
Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe

- a) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
- b) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
- c) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
- d) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
- e) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9

**8. (UFU)** As 10 medidas colhidas por um cientista num determinado experimento, todas na mesma unidade, foram as seguintes: 1,2; 1,2; 1,4; 1,5; 1,5; 2,0; 2,0; 2,0; 2,0; 2,2. Ao trabalhar na análise estatística dos dados, o cientista esqueceu-se, por descuido, de considerar uma dessas medidas. Dessa forma, comparando os resultados obtidos pelo cientista em sua análise estatística com os resultados corretos para esta amostra, podemos afirmar que

- a) a moda e a média foram afetadas.
- b) a moda não foi afetada, mas a média foi.
- c) a moda foi afetada, mas a média não foi.
- d) a moda e a média não foram afetadas.

**9. (ENEM)** Uma pessoa, ao fazer uma pesquisa com alguns alunos de um curso, coletou as idades dos entrevistados e organizou esses dados em um gráfico.



Qual a moda das idades, em anos, dos entrevistados?

- a) 9 b) 12 c) 13 d) 15 e) 21

**10. (ENEM)** Os salários, em reais, dos funcionários de uma empresa são distribuídos conforme o quadro:

Valor do salário (R\$)	622,00	1.244,00	3.110,00	6.220,00
Número de funcionários	24	1	20	3

A mediana dos valores dos salários dessa empresa é, em reais,

- a) 622,00. b) 933,00. c) 1.244,00.
- d) 2.021,50. e) 2.799,00.

**11-(ENEM)** Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas

**Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)**

Equipes	Média	Moda	Desvio-Padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

- a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

**12-(ENEM)** O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

- A)  $X = Y < Z$ . B)  $Z < X = Y$ . C)  $Y < Z < X$ .
- D)  $Z < X < Y$ . E)  $Z < Y < X$

**13. (ENEM)** Considere as seguintes medidas descritivas das notas finais dos alunos de três turmas:

TURMA	Número de alunos	Média	Desvio Padrão
A	15	6,0	1,31
B	15	6,0	3,51
C	14	6,0	2,61

Com base nesses dados, considere as seguintes afirmativas:

1. Apesar de as médias serem iguais nas três turmas, as notas dos alunos da turma B foram as que se apresentaram mais heterogêneas.
2. As três turmas tiveram a mesma média, mas com variância diferente.
3. As notas da turma A se apresentaram mais dispersas em torno da média.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
- b) Somente a afirmativa 2 é verdadeira.
- c) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
- d) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
- e) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

**14. (ENEM)** Em uma escola, cinco atletas disputam a medalha de ouro em uma competição de salto em distância. Segundo o regulamento dessa competição, a medalha de ouro será dada ao atleta mais regular em uma série de três saltos. Os resultados e as informações dos saltos desses cinco atletas estão no quadro.

Atleta	1º salto	2º salto	3º salto	Média	Mediana	Desvio padrão
I	2,9	3,4	3,1	3,1	3,1	0,25
II	3,3	2,8	3,6	3,2	3,3	0,40
III	3,6	3,3	3,3	3,4	3,3	0,17
IV	2,3	3,3	3,4	3,0	3,3	0,60
V	3,7	3,5	2,2	3,1	3,5	0,81

A medalha de ouro foi conquistada pelo atleta número

- a) I. b) II. c) III. d) IV. e) V.

**15. (Epcar (Afa) 2017)** As notas de oito alunos numa prova de matemática foram escritas pelo professor numa tabela como a que segue:

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H
Nota	6,5	10	8	9,4	8	6,4	x	7,4

Sabe-se que a média aritmética dessas notas é 8,2.

Considerando as notas dos oito alunos, é correto afirmar que a nota do aluno G é

- a) igual à moda.
- b) inferior a 9,8.
- c) superior à mediana.
- d) inferior à média aritmética das outras sete notas.

**16. (Fgv 2017)** Removendo um número do conjunto {11, 12, 17, 18, 23, 29, 30} formamos um novo conjunto com média aritmética dos elementos igual a 18,5. A mediana dos elementos desse novo conjunto é igual a

- a) 26,5. b) 26,0. c) 20,5. d) 17,5. e) 14,5.

**17. (Eear 2017)** A tabela seguinte informa a quantidade de pessoas que compraram ingressos antecipados de um determinado show, cujos preços eram modificados semanalmente.

Valor do ingresso (R\$)	Número de pessoas
50 – 75	300
75 – 100	640
100 – 125	500
125 – 150	1.310
150 – 175	850
	$\Sigma = 3.600$

O percentual de pessoas que adquiriram o ingresso por menos de R\$ 125,00 foi

- a) 40% b) 45% c) 50% d) 55%

**18. (Udesc)** Sejam  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ . O valor do desvio padrão, de modo que o conjunto de dados ordenados {14, 17, 22, a, b, 37} tenha média e mediana iguais a 24 é:

- a)  $\sqrt{59}$  b)  $\sqrt{62}$  c)  $\sqrt{58}$  d)  $\sqrt{57}$  e)  $\sqrt{\frac{19}{3}}$

**9. (Eear)** A distribuição de frequência abaixo refere-se à exportação de soja realizada por uma Cooperativa no mês de abril.

$x_i$	Toneladas exportadas	$f_i$
1	10 – 20	3
2	20 – 30	2
3	30 – 40	8
4	40 – 50	10
5	50 – 60	7
		$\Sigma f_i = 30$

Com base nos dados apresentados, a mediana da distribuição pertence à

- a) 2ª classe b) 3ª classe c) 4ª classe d) 5ª classe

20. (Ueg 2016) Os números de casos registrados de acidentes domésticos em uma determinada cidade nos últimos cinco anos foram: 100, 88, 112, 94 e 106. O desvio padrão desses valores é aproximadamente  
a) 3,6 b) 7,2 c) 8,5 d) 9,0 e) 10,0

21. (Enem 2ª aplicação 2016) Uma pessoa está disputando um processo de seleção para uma vaga de emprego em um escritório. Em uma das etapas desse processo, ela tem de digitar oito textos. A quantidade de erros dessa pessoa, em cada um dos textos digitados, é dada na tabela.

Texto	Número de erros
I	2
II	0
III	2
IV	2
V	6
VI	3
VII	4
VIII	5

Nessa etapa do processo de seleção, os candidatos serão avaliados pelo valor da mediana do número de erros.

A mediana dos números de erros cometidos por essa pessoa é igual a  
a) 2,0. b) 2,5. c) 3,0. d) 3,5. e) 4,0.

22. (Enem 2016) O procedimento de perda rápida de “peso” é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três “pesagens” antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos “pesos”. As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Médiana	Mediana	Desvio-padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três “pesagens”, os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas  
a) I e III. b) I e IV. c) II e III. d) II e IV. e) III e IV.

23. (Upe-ssa 2 2016) Preocupada com o hábito de leitura na escola onde trabalha, uma bibliotecária aplicou uma pesquisa, num grupo de 200 estudantes escolhidos de forma aleatória, sobre a quantidade de livros que cada aluno havia solicitado por empréstimo no primeiro semestre de 2015. Os dados coletados na pesquisa estão apresentados na tabela a seguir:

Livros Emprestados por Aluno	
Número de Livros	Número de Alunos
3	90
2	55
1	30
0	25
Total	200

Para esses dados, a média, a moda e a mediana são respectivamente:

- a) 1,50; 2,00; 3,00 b) 1,50; 3,50; 2,00  
c) 1,50; 3,00; 3,00 d) 2,05; 3,00; 2,00  
e) 2,05; 3,00; 3,00

24.(ENEM 2019) Os alunos de uma turma escolar foram divididos em dois grupos. Um grupo jogaria basquete, enquanto o outro jogaria futebol. Sabe-se que o grupo de basquete é formado pelos alunos mais altos da classe e tem uma pessoa a mais do que o grupo de futebol. A tabela seguinte apresenta informações sobre as alturas dos alunos da turma.

Média	Mediana	Moda
1,65	1,67	1,70

Os alunos P, J, F e M medem, respectivamente, 1,65 m, 1,66 m, 1,67 m e 1,68 m, e as suas alturas não são iguais a de nenhum outro colega da sala. Segundo essas informações, argumenta-se que os alunos P, J, F e M jogaram, respectivamente,  
a) basquete, basquete, basquete, basquete.  
b) futebol, basquete, basquete, basquete.  
c) futebol, futebol, basquete, basquete.  
d) futebol, futebol, futebol, basquete.  
e) futebol, futebol, futebol, futebol

#### GABARITO

1)C 2)B 3)A 4)E 5)B 6)D 7)D 8)B 9)A 10)B 11)C 12) E 13)D 14)C 15)C 16)D 17)A 18)D 19)C 20)C 21)B 22)C 23)D 24)C