Lista 01

1. Seja uma população H, para a qual se conhecem os valores de uma variável de interesse y e o parâmetro populacional é $\boldsymbol{D} = \{1, 5, 2, 0\}$. Construa a distribuição amostral, selecionando todas as possíveis amostras de tamanho $n = 3$, da estatística "mediana amostral" e verifique se essa estatística é um estimador não viciado para o parâmetro "mediana populacional". Para a seleção da amostra, utilize um plano amostral AASs.

2. Repita o exercício anterior para a média, isto é, verifique se a estatística "média amostral" é um estimador não tendencioso para a "média populacional".

3. Seja $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$. Para os dois planos amostrais A e B especificados abaixo, faça o que se pede:

s	$p_A(s)$
(1,1)	1/9
(1,2)	1/9
(1,3)	1/9
(2,1)	1/9
(2,2)	1/9
(2,3)	1/9
(3,1)	1/9
(3,2)	1/9
(3,3)	1/9

s	$p_B(s)$
(1,2)	1/10
(1,3)	1/15
(2,1)	1/6
(2,3)	1/3
(3,1)	1/12
(3,2)	1/4

   (a) Construa as distribuições das variáveis f_i e δ_i.

   (b) Calcule $E(\delta_1)$ e $Var(\delta_1)$.

   (c) Encontre π_i e π_{ij}, para todo i e j.

   (d) Um plano amostral é chamado de simétrico se $E(f_i)$, $Var(F_i)$ são as mesmas $\forall i$ e $Cov(f_i, f_j)$ são as mesmas $\forall i$ e j. Os planos A e B são simétricos?

4. Seja $n(\boldsymbol{s}) = n = \sum_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{s})$. Apresente $E(n)$ e $Var(n)$ considerando um plano AASc.

5. Usando um pacote computacional conveniente, simule uma população de tamanho $N = 100$, onde a característica de interesse y é gerada a partir da distribuição normal com média 50 e variância 16.

   (a) Encontre o total populacional, a média populacional e a variância populacional da população que foi simulada.

(b) Selecione uma amostra aleatória simples sem reposição de n=30 elementos. Calcule as estimativas pontuais do total e da média populacionais. Calcule também as estimativas das variâncias dos estimadores do total e da média populacionais.

6. Considere uma população com $N = 6$ elementos, isto é, $\mathcal{U} = \{1, \ldots, 6\}$ com o parâmtero populacional $\boldsymbol{D} = (2, 6, 10, 8, 10, 12)$. Dessa população, uma amostra de $n = 2$ elementos é selecionada sem reposição. Considere um plano amostral A que associa a cada possível amostra de S à mesma probabilidade.

   (a) Calcule $Var_A(f_i)$ e $Cov_A(f_i, f_j)$ para algum i e j que você escolher.

   (b) Seja $t(s)$ o total amostral da amostra s. Encontre a distribuição de $t(s)$. Calcule $E_A(t)$ e $Var_A(t)$.

   (c) Usando (b), verifique se a média amostral $\bar{y}$ é um estimador não viciado de μ. Calcule $EQM(\bar{y})$.

7. No caso da AASc, determine o tamanho aproximado da amostra n tal que

$$P(|\hat{\tau} - \tau| \leq B) \approx 1 - \alpha,$$

   em que B está fixado. Como fica n, quando $B = 0,03$, $\alpha = 0,01$ e $s^2 = 3,6$?

8. Um plano de AASs com $n = 30$ foi adotado em uma área da cidade contendo 14.848 residências. O número de pessoas por residência na amostra observada foi

$$\boldsymbol{d} = (5, 6, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 7, 4, 3, 5, 4, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 1, 2, 4, 3, 4, 2, 4).$$

   (a) Encontre uma estimativa do número médio de pessoas por residência na população e uma estimativa para a variância da estimativa obtida.

   (b) Encontre um intervalo de confiança de 90% de confiança para μ.

   (c) Suponha que seja de interesse uma estimativa duas vezes mais precisa que a amostra obtida com a amostra acima. Qual o tamanho da amostra necessário para tal precisão?

9. Considere uma população com $N = 6$, em que $\boldsymbol{D} = (0, 0, 1, 1, 1, 1)$. Deseja-se estimar p, a proporção de "uns" na população, utilizando uma AASs de $n = 4$.

   (a) Encontre a distribuição da média amostral de $\hat{p}$ e mostre que $\hat{p}$ é um estimador não viciado de p.

   (b) Sugira um estimador para $Var(\hat{p})$. Verifique se seu estimador é não viciado.

10. Mostre que um intervalo de confiança para o total populacional τ com coeficiente de confiança aproximadamente igual a $1 - \alpha$ é dado por

$$IC(\tau, (1-\alpha)\%) = \left(\hat{\tau} - z_{\alpha/2}\sqrt{N^2(1-f)\frac{s^2}{n}}; \hat{\tau} + z_{\alpha/2}\sqrt{N^2(1-f)\frac{s^2}{n}} \right).$$

11. Uma AASc de tamanho $n = 3$ é selecionada de uma população com N elementos. Mostre que a probabilidade de que a amostra contenha 1, 2 ou 3 elementos diferentes é

$$p_1 = \frac{1}{N^2}, p_2 = \frac{3(N-1)}{N^2}, p_3 = \frac{(N-1)(N-2)}{N^2}.$$

12. Considere numa população com $N = 6$, em que $\boldsymbol{D} = (1, 4, 5, 5, 6, 6)$. Adote um plano AASs com $n = 2$. Como estimador de μ considere

$$\overline{y}_c = \begin{cases} \overline{y} + 1, & \text{se } \boldsymbol{d_s} \text{ contém } Y_1 \text{ e não contém } Y_6 \\ \overline{y} - 1, & \text{se } \boldsymbol{d_s} \text{ contém } Y_6 \text{ e não contém } Y_1 \\ \overline{y}, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\overline{y}$ é a média amostral.

(a) Encontre as distribuições de $\overline{y}$ e $\overline{y}_c$. Verifique se estes estimadores são não viciados para μ.

(b) Encontre $Var(\overline{y})$ e $Var(\overline{y}_c)$. Qual o melhor estimador?