

# PRINCÍPIOS DE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

TERTULIANO FRANCO (UFBA)

<http://w3.impa.br/~tertu>

**Salvador - Bahia - Brasil**

30 de Maio de 2018



*“Na vida nunca se deveria cometer duas vezes o mesmo erro. Há bastante por onde escolher.”*

*“A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza – uma beleza fria e austera, como a da escultura.”*

*“Uma vida virtuosa é aquela inspirada pelo amor e guiada pelo conhecimento.”*

Bertrand Russell (1872-1970)



## **Dedicatória**

*Para Amanda Amantes*



<b>Prefácio</b>	<b>1</b>
<b>1 Ferramentas Básicas</b>	<b>7</b>
1.1 Princípio de Indução . . . . .	7
1.2 Regra da Soma e do Produto . . . . .	17
1.3 Bijeções e Cardinalidade . . . . .	20
1.4 Relações . . . . .	21
1.5 Relações de Equivalência . . . . .	29
1.6 Probabilidade (espaços equiprováveis) . . . . .	33
<b>2 Contagem via Relações de Equivalência</b>	<b>39</b>
2.1 Permutações e Arranjos . . . . .	39
2.2 Permutações com Repetição . . . . .	45
2.3 Permutações Circulares . . . . .	49
2.4 Combinações e Argumentos Combinatórios . . . . .	52
2.5 Combinações com Repetição . . . . .	62
2.6 Contagem Dupla . . . . .	64
2.7 Classes de Equivalência de Tamanhos Variados . . . . .	68
2.8 Lema de Burnside . . . . .	75
2.9 Movimentos Rígidos . . . . .	79
<b>3 Coisas Fáceis e Difíceis de Contar via Recorrência</b>	<b>87</b>
3.1 Princípio de Inclusão-Exclusão . . . . .	88
3.2 Lemas de Kaplansky . . . . .	95
3.3 Recorrência . . . . .	97
3.4 Métodos de Resolução de Recorrências . . . . .	105
Substituição Reversa . . . . .	105
Soma Telescópica . . . . .	109
Equação Característica . . . . .	110
Função Geradora . . . . .	114

3.5	Princípio da Reflexão . . . . .	123
3.6	Partições . . . . .	127
<b>4</b>	<b>Existência, Aplicações e Grafos</b>	<b>139</b>
4.1	Princípio das Casas dos Pombos . . . . .	139
4.2	Triângulo de Pascal e Binômio de Newton . . . . .	145
4.3	Multinômio de Leibniz . . . . .	153
4.4	Noções de Grafos I . . . . .	155
4.5	Noções de Grafos II . . . . .	166
<b>5</b>	<b>Noções de Probabilidade Moderna I</b>	<b>177</b>
5.1	Precisa-se de uma nova definição? . . . . .	177
5.2	Espaços de Probabilidade . . . . .	179
5.3	Probabilidade Condicional e Independência . . . . .	184
5.4	Lema de Borel-Cantelli . . . . .	192
5.5	Método Probabilístico . . . . .	196
5.6	Variáveis Aleatórias . . . . .	200
5.7	Esperança e Variância . . . . .	211
5.8	Desigualdades Clássicas . . . . .	216
5.9	Função Característica e Função Geradora de Momentos . . . . .	220
5.10	Cumulantes . . . . .	220
<b>6</b>	<b>Noções de Probabilidade Moderna II</b>	<b>221</b>
6.1	Cadeias de Markov e Ruína do Jogador . . . . .	221
6.2	Lei Fraca dos Grandes Números . . . . .	227
6.3	Lei Forte dos Grandes Números . . . . .	230
6.4	Fórmula de Stirling . . . . .	232
6.5	Teorema Central do Limite . . . . .	237
6.6	Passeio do Bêbado . . . . .	246
<b>7</b>	<b>Soluções de Exercícios Seleccionados</b>	<b>253</b>
	Soluções do Capítulo 1 . . . . .	253
	Soluções do Capítulo 2 . . . . .	259
	Soluções do Capítulo 3 . . . . .	273
	Soluções do Capítulo 4 . . . . .	281
	Soluções do Capítulo 5 . . . . .	291
	Soluções do Capítulo 6 . . . . .	301
	<b>Lista de Figuras</b>	<b>309</b>
	<b>Lista de Tabelas</b>	<b>315</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>316</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>321</b>



A palavra *princípio* tem diferentes sentidos. No título do presente livro foi usada no sentido de *introdução*; em Matemática usa-se *princípio* como sinônimo de axioma, postulado, como no *Princípio de Indução*, por exemplo. Usa-se tal palavra também para denotar *proposição* ou *resultado*, como no *Princípio da Reflexão*. E em alguns contextos, pode ser ambos, pois o que é axioma pode se tornar resultado e vice-versa, a depender dos pressupostos adotados.

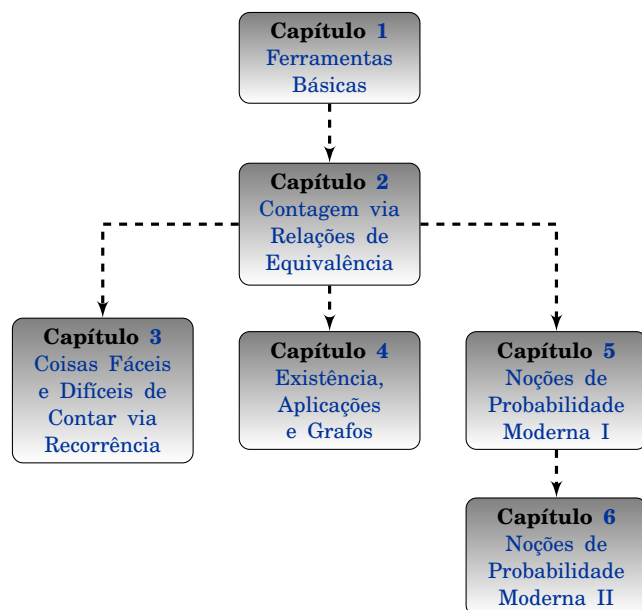


Figura 1. Fluxograma de dependências (de modo geral) entre capítulos. Como mostrado no próximo fluxograma, há certas seções dos Capítulos 5 e 6 que dependem dos Capítulos 3 e 4.

Este livro foi desenvolvido a partir de notas de um curso de graduação voltado para alunos de licenciatura e de bacharelado em Matemática que ministrei

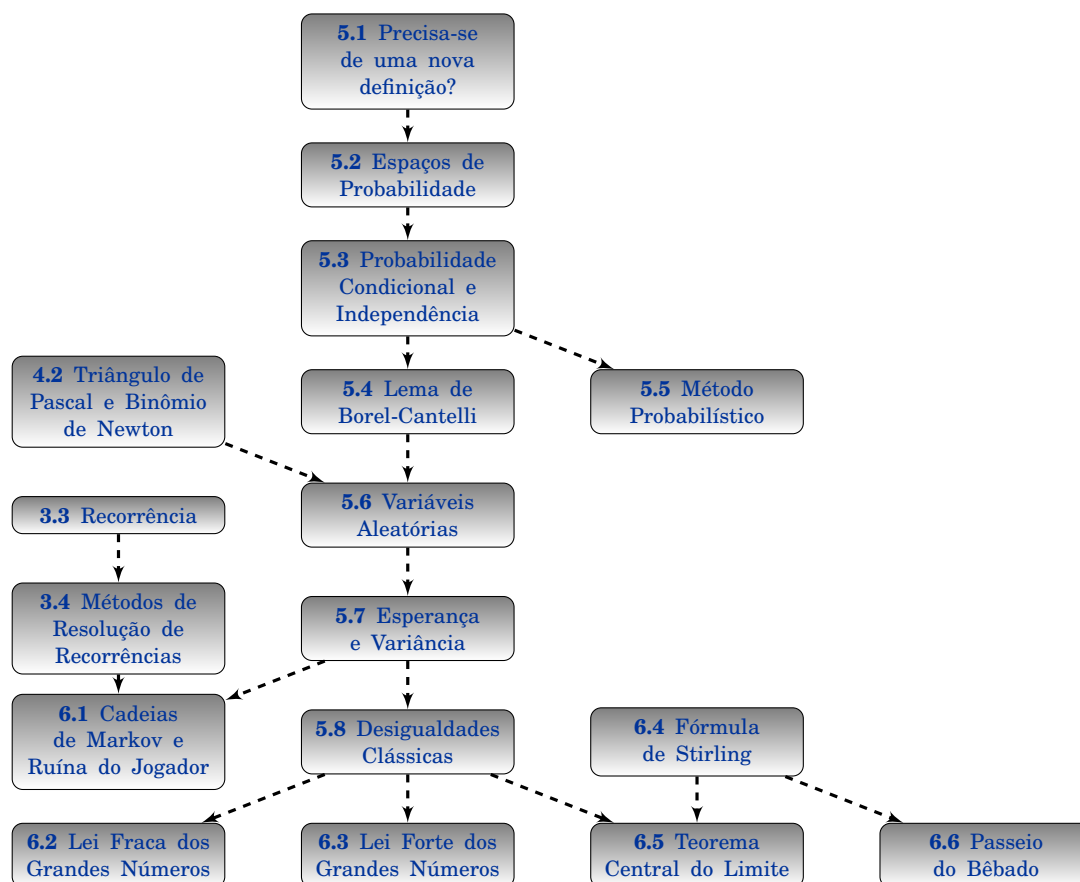


Figura 2. Fluxograma de dependências (fortes) entre certas seções dos Capítulos 3, 4, 5 e 6.

algumas vezes na Universidade Federal da Bahia. Escrever um livro enquanto se leciona torna o curso prolixo, às vezes confuso. Por servirem (involuntariamente) de cobaias, e pela paciência, agradeço a todos meus alunos. Com eles aprendi e continuo aprendendo.

O interesse em escrever o presente texto surgiu ao não encontrar um único livro texto que satisfizesse a todas as necessidades deste curso que lectionei. Com este objetivo em mente foi escrito este livro, que tem as seguintes características:

- Contém o conteúdo de combinatória lecionado do Ensino Médio, pois esta é a ementa básica do curso que deu origem ao presente livro.

- *Não contém* apenas o conteúdo do Ensino Médio. Como exemplo, o leitor encontrará uma discussão de problemas de contagem envolvendo classes de equivalência de tamanhos variados, assunto interessantíssimo que não está presente nos atuais livros textos de Combinatória, exceto em alguns sobre olimpíadas de Matemática. As Seções 2.7, 2.8 e 2.9 são relacionadas ao tema, cujo *leitmotiv* é o aparentemente inocente problema: *De quantas maneiras podemos pintar uma roleta de seis compartimentos se há três cores disponíveis?*

- Aborda o conteúdo de permutações, combinações e arranjos sob o ponto de vista de relações de equivalência, em vez da maneira apenas intuitiva que geralmente é feita no Ensino Médio. Longe de ser um preciosismo matemático, abordar tais temas sob esta perspectiva é uma maneira natural, a qual permite lidar com problemas mais complicados, como o da roleta citado acima, bem como leva a um entendimento melhor de permutações, combinações e arranjos. E culmina no belo Lema de Burnside, que permite realizar contagem envolvendo simetrias quaisquer, conectando Combinatória com Ação de Grupos.

- Evita exercícios demasiadamente difíceis, bem como evita um excesso de exercícios fáceis e repetitivos. Contém dicas e soluções para boa parte dos exercícios, principalmente os mais difíceis. Algumas seções contêm mais exercícios do que outras, o que é intencional: certos temas são imprescindíveis e requerem mais prática. Discute, em meio ao texto e também nos exercícios, *soluções equivocadas*. Encontrar um erro escondido em um argumento não é um tipo de exercício convencional, mas acredito ser útil para o leitor.

- Exige como pré-requisito apenas um curso de Cálculo, o que é suficiente para mostrar diversas e interessantes conexões de Combinatória e Probabilidade com outras áreas da Matemática, tais como Teoria dos Números, Grupos, Álgebra Linear e Análise. Como o leitor poderá encontrar no decorrer do livro, há demonstrações combinatórias e/ou probabilísticas de resultados clássicos como o Teorema de Wilson, o Pequeno Teorema de Fermat, a Fórmula de Euler para a Função Zeta de Riemann, o Teorema de Aproximação de Weierstrass, entre outros.

- Pensando no professor, segue, na medida do possível, uma exposição pragmática, objetiva, tentando minimizar o esforço que o docente terá em transformar cada seção em uma aula. Livros com extensa historiografia e discussões minuciosamente detalhadas têm grande valor, indubitavelmente. Porém, em geral, se tornam mais difíceis de serem utilizado em sala de aula, e às vezes escondem do leitor iniciante os pontos cruciais da teoria.

- Tem referências a problemas práticos e metáforas curiosas, pois Combinatória e Probabilidade são áreas da Matemática com aplicações a Física, Computação, Ciências Biológicas, Ciências Sociais etc. Em meio à leitura deste texto, o leitor encontrará falsos positivos, *reality shows*, distribuições da Mecânica Estatística, jogos de azar, paradoxos, inspetores de estradas, moléculas isômeras, macacos que escrevem Shakespeare, simetrias, investigação de assassinato, xadrez, genética, falácias em julgamentos, razão áurea, dominós, *chips* de computadores, sensação de aleatoriedade em aplicativos que tocam músicas, bêbados que chegam ou não chegam em casa, campeonatos, sequência de Fibonacci, entre outros.

- Aborda recorrências, técnica fundamental de contagem que não é vista no Ensino Médio, e é raramente apresentada nos cursos de Combinatória da graduação. Dentre as maneiras de resolver uma recorrência, apresenta a poderosa técnica de *funções geradoras*.

- Introduz noções de grafos, incluindo planaridade, isomorfismos, circuitos eulerianos e hamiltonianos.

- Aborda o genial *Método Probabilístico*, desenvolvido por Paul Erdős e outros matemáticos, o qual conecta Combinatória com Probabilidade. Como o leitor verá, o Método Probabilístico permite mostrar a existência de um objeto argumentando que, em um espaço de probabilidade adequado, ele tem *probabilidade positiva de existir*!

- Aborda o tema de partições de números naturais, o qual induz naturalmente ao manejo de funções geradoras. Muitos alunos iniciam o curso acreditando ingenuamente que todo problema de contagem com um enunciado simples tem uma solução conhecida e simples. Estudar partições de números naturais é uma belíssima forma de ilustrar que isso não corresponde à realidade! E no início da Seção 3.6, referente à partições, o leitor estudará a contagem do número de maneiras de distribuir objetos em caixas em cada um dos possíveis casos de distinguibilidade (se objetos e caixas são ou não distinguíveis entre si).

- Apresenta a definição moderna de Probabilidade, mas sem ter o volume de conteúdo de um livro de Probabilidade mais avançado. E mostra ao leitor, da maneira mais rápida possível, resultados principais na Probabilidade Moderna, como a Lei dos Grandes Números e o Teorema Central do Limite, usando bastante a Combinatória desenvolvida nos capítulos anteriores. Além disso, também apresenta outros tópicos de Probabilidade como o Passeio Aleatório e Cadeias de Markov, sendo que este último é conectado a Álgebra Linear e também a recorrências.

- Prova a importante Fórmula de Stirling, usando apenas cálculo como pré-requisito para o entendimento da demonstração. Conecta a Probabilidade à Fórmula de Stirling numa via de mão dupla, bem como liga a Fórmula de Stirling à bela Fórmula de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots$$

- Tem referências a olimpíadas de Matemática, que estão cada vez mais presentes no contexto de ensino, e são cada vez mais importantes na formação inicial de matemáticos ao redor do mundo.

No Brasil, infelizmente, há uma tradição disseminada de se repetir na graduação em Matemática os mesmos conteúdos de Combinatória e Probabilidade que são lecionados no segundo grau, e da mesma maneira como são lecionados nesse nível de escolarização. O presente livro é mais um esforço visando reverter tal quadro. Para auxiliar o docente que pretenda utilizar este material como livro texto de algum curso, na Figura 1 é mostrado um fluxograma com as dependências gerais entre os capítulos, e na Figura 2 é mostrado um fluxograma de certas dependências importantes entre seções finais do livro, as quais recomendo que sejam seguidas. Com tais dependências, o professor pode omitir seções, ou mesmo capítulos, sem prejudicar a sequência lógica dos assuntos. É

difícil lecionar todo o conteúdo deste livro num único curso semestral. Mas recomendo fortemente que, além da ementa indispensável (arranjos, permutações, combinações, Binômio de Newton, Triângulo de Pascal e Princípio das Casas dos Pombos), o docente que venha a escolher este livro como livro texto ao menos inclua também a Seção 2.7 ([Classes de Equivalência de Tamanhos Variados](#)), bem como algo de recorrências, grafos e pelo menos parte do Capítulo 5. E que fique à vontade para escolher outras seções adicionais.

Escolher a ordem com que os assuntos são apresentados foi um parte difícil quando da escrita deste livro, pois frequentemente o assunto  $A$  tem resultados interessantes que necessitam do conhecimento do assunto  $B$  mas, por sua vez, o assunto  $B$  também tem resultados interessantes que necessitam do conhecimento do assunto  $A$ ! Assim é a Matemática, com conexões por todos os lados. O que é maravilhoso, mas dificulta a vida de quem escreve um livro. Afinal, um livro precisa ter uma ordem na apresentação dos assuntos. Por isso, escolhas tiveram de ser feitas e, salvo um inevitável par de exceções nos exercícios da Seção 3.6, não há referências “futuras”, do tipo “*pelo resultado da seção a ser vista mais adiante*”.

Frequentemente as seções neste livro começam motivadas por um problema em particular, cuja solução é o cerne da técnica que se deseja apresentar. Esta é uma intenção didática: quando começamos diretamente com um enunciado geral, abstrato, arriscamos perder a atenção do leitor ou da plateia, ainda mais de uma plateia possivelmente composta por alunos em início de graduação.

Aponto aqui uma linha de pensamento que tentei seguir: assuntos que em geral são apresentados de maneira *naïve*, apenas intuitiva, como combinações e permutações, são aqui abordados com mais rigor, usando indução e relações de equivalência. E tópicos que, usualmente, aparecem em livros texto repletos de detalhes e resultados, como funções geradoras, são apresentados aqui de maneira mais resumida. Assim, tentei buscar um certo equilíbrio. Sobre a redação: este livro foi digitado em  $\text{\LaTeX}$  e, exceto uma (a Figura 6.2), as mais de cento e trinta figuras inéditas foram desenhadas via o pacote TikZ, sempre usando a plataforma GNU/Linux.

Embora o público alvo original seja de alunos de graduação em Matemática e respectivos docentes, o presente livro pode ser utilizado também por aqueles que desejem se preparar para vestibulares como ITA e IME, olimpíadas de Matemática, por alunos de Ciência da Computação e Engenharias, e por alunos e professores do Ensino Médio. De fato, boa parte do presente livro foi desenvolvida através da experiência do autor como participante e posteriormente professor nas olimpíadas de Matemática, professor de cursinhos preparatórios para vestibulares do tipo ITA/IME, autor do banco anual de questões da OBMEP (Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas), além de professor universitário e pesquisador em Matemática. Tento aqui refletir essa variada experiência da maneira mais agradável possível para o leitor, sem ocultar o *pulo do gato*, nem exagerar em detalhes. Afinal, o papel do autor não é trilhar o caminho pelo leitor, mas sim indicá-lo para que ele possa construir suas próprias ideias e interpretações.

Graças a Diogo Soares Dórea da Silva, foi corrigida uma quantidade enorme de erros de digitação, de concordância verbal, de concordância nominal, de concordância de gênero, de lapsos em demonstrações, de enunciados equivocados, de respostas incorretas de exercícios e de falta de clareza. Por sua excelente revisão e sempre boas sugestões, meu sincero agradecimento. Agradeço também a Felipe Fonseca, que gentilmente cedeu um arquivo  $\text{\LaTeX}$  com soluções de alguns exercícios.

Por fim, agradeço à minha esposa Amanda, pelo apoio incomensurável. A redação deste material coincidiu com o feliz período da chegada de nosso filho Francisco e, entre fraldas e divertidas noites agitadas, aqui estamos.

Espero que o leitor desfrute do livro, total ou parcialmente, como melhor lhe convier. Boa leitura.

Salvador, 30 de Maio de 2018

# CAPÍTULO 1

## FERRAMENTAS BÁSICAS

Veremos neste capítulo ferramentas fundamentais que serão utilizadas por todo o livro.

### 1.1 Princípio de Indução

Neste livro, consideraremos o conjunto dos naturais como  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ . A seguir, apresentamos o Princípio de Indução, que é um dos Axiomas de Peano a respeito do conjunto dos números naturais. Não entraremos em detalhes sobre os Axiomas de Peano, tópico geralmente visto em um curso de Análise na Reta, apenas enunciaremos o Princípio de Indução e algumas de suas variantes, que serão utilizados para resolver problemas de naturezas diversas, nesta seção e em muitas outras.

**Axioma** (Princípio de Indução). Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{N}$  tal que

- (a)  $1 \in A$ .
- (b) Se  $n \in A$ , então  $n + 1 \in A$ .

Logo,  $A = \mathbb{N}$ .

Este axioma é equivalente ao Princípio da Boa Ordenação (todo subconjunto de  $\mathbb{N}$  possui um menor elemento), entre outros. Tais equivalências são geralmente vistas em curso de Análise na Reta.

Como usamos o axioma acima? Digamos que queremos provar uma certa afirmação, a qual depende de  $n \in \mathbb{N}$ . Por exemplo, digamos que queremos mostrar que  $2^n > n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $A$  o conjunto dos naturais para os quais esta afirmação é válida. Temos que

- (a) Como  $2^1 = 2 > 1$ , concluímos que  $1 \in A$ .

(b) Seja  $n \in A$ . Então  $2^n > n$ . Multiplicando esta inequação por 2, obtemos  $2^{n+1} > 2n = n + n \geq n + 1$ . Ou seja,  $n + 1 \in A$ .

Daí, pelo Princípio de Indução,  $A = \mathbb{N}$ .

Os passos envolvidos numa prova por indução como acima são nomeados da seguinte maneira: verificar a afirmação para o valor inicial (no caso acima, um) é chamado de *base de indução*; supor que a afirmação é válida para um certo  $n$  é chamado de *hipótese de indução*; e provar que a afirmação vale para  $n + 1$  a partir da hipótese de indução é chamado de *passo indutivo*.

Indução é uma técnica de prova onipresente em matemática. A seguir, vejamos um exemplo envolvendo geometria. Dizemos que uma região  $\mathcal{R}$  do plano é *convexa* se para quaisquer dois pontos  $A$  e  $B$  pertencentes a  $\mathcal{R}$ , o segmento de reta  $\overline{AB}$  ligando  $A$  a  $B$  estiver contido em  $\mathcal{R}$ .

**Problema 1.1.1.** Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados é igual a  $\pi(n - 2)$  (em radianos).

*Solução:* Como  $n$  é o número de lados do polígono, temos que  $n \geq 3$ . Para a base de indução, consideremos portanto  $n = 3$ . Sabemos que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a  $\pi = (3 - 2)\pi$ , o que nos dá a base de indução. Suponha que o resultado seja válido para um certo  $n$ , ou seja, para *qualquer* polígono convexo  $P$  de  $n$  lados, a soma de seus ângulos internos é igual a  $(n - 2)\pi$ .

Seja agora um polígono convexo  $P'$  de  $(n + 1)$  lados, e que terá portanto  $n + 1$  vértices consecutivos  $V_1, \dots, V_{n+1}$ . Como  $P'$  é convexo, temos que o segmento  $\overline{V_n V_1}$  estará contido em  $P'$ , veja a Figura 1.1.

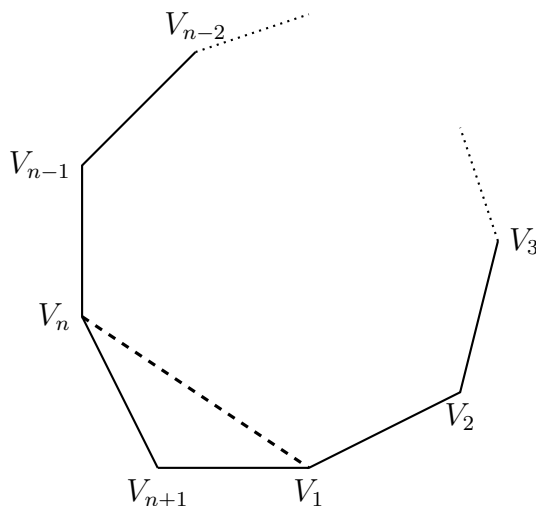


Figura 1.1. Ilustração do polígono convexo  $P'$  de  $n + 1$  vértices e  $(n + 1)$  lados.

Logo, o segmento  $V_n V_1$  separa o polígono  $P'$  em dois polígonos, o polígono de  $n$  lados  $\overline{V_1 \cdots V_n}$  e o triângulo  $\overline{V_n V_{n+1} V_1}$ . pela hipótese de indução, a soma dos



ângulos internos do polígono  $\overline{V_1 \cdots V_n}$  é igual a  $\pi(n-2)$ . Além disso, a soma dos ângulos internos do triângulo  $\overline{V_n V_{n+1} V_1}$  é igual a  $\pi$ . Logo, a soma dos ângulos internos do polígono  $P'$  será dada pela soma  $\pi(n-2) + \pi = \pi((n+1)-2)$ , que é a mesma fórmula do enunciado trocando  $n$  por  $n+1$ . Daí, pelo Princípio de Indução, concluímos que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo de  $n$  lados é igual a  $\pi(n-2)$ .  $\square$

Observamos que o resultado também é válido sem a hipótese de convexidade, mas não entraremos em detalhes.

O Princípio de Indução possui muitas variantes, todas equivalentes entre si. Por exemplo, poderíamos usar, como base de indução, um número natural  $k$  em vez de 1.

**Axioma** (Variante do Princípio de Indução). Seja  $A \subset \mathbb{N}$  tal que

- (a)  $k \in A$ ,
- (b) Se  $n \in A$ , então  $n+1 \in A$ .

Então  $A \supset \{k, k+1, k+2, k+3, \dots\}$ .

A variante abaixo é muito útil, também chamada de *Princípio de Indução Forte*. Nela, a hipótese de indução assume que a afirmação que deseja-se provar é válida para *todos* os naturais  $\{1, \dots, n\}$ .

**Axioma** (Princípio de Indução Generalizado). Seja  $A \subset \mathbb{N}$  tal que

- (a)  $k \in A$ ,
- (b) Se  $\{k, \dots, n\} \in A$ , então  $n+1 \in A$ .

Então  $A \supset \{k, k+1, k+2, k+3, \dots\}$ .

Vejamos uma aplicação clássica do Princípio de Indução Generalizado.

**Problema 1.1.2.** Prove que todo  $n \geq 2$  natural é primo ou pode ser escrito como produto de números primos.

*Solução:* Como  $n = 2$  é primo, temos a base de indução. Suponha que o resultado seja válido para quaisquer naturais no conjunto  $\{2, \dots, n\}$ , que é a chamada hipótese de indução. Considere o natural  $n+1$ . Se  $n+1$  é primo, temos o que se deseja provar. Se  $n+1$  não é primo, então é produto de dois naturais  $x$  e  $y$ , sendo  $2 \leq x \leq n$  e  $2 \leq y \leq n$ . Pela hipótese de indução,  $x$  e  $y$  são produtos de números primos e, por conseguinte,  $n+1 = x \cdot y$  também é produto de números primos. Portanto, pelo Princípio de Indução Generalizado, todo natural  $n \geq 2$  é primo ou é um produto de primos.  $\square$

É preciso tomar certos cuidados ao fazer uma prova por indução. Vejamos um exemplo sutil. Considere o seguinte problema:

**Problema 1.1.3.** Mostre que todo número natural  $n \geq 5$  pode ser escrito na forma  $n = 5a + 7b$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros não negativos.

Uma aparente solução, via o Princípio de Indução Generalizado, seria:

*“Para  $n = 5$ , temos que  $5 = 5 \cdot 1 + 7 \cdot 0$ , o que nos dá a base de indução. Suponha que a afirmação seja válida para qualquer natural no conjunto  $\{5, \dots, n\}$ , que é a hipótese de indução. Considere o natural  $n + 1$ . Temos que  $n + 1 = (n - 4) + 5$ . Como  $n - 4 \leq n$ , pela hipótese de indução, temos que  $n - 4 = 5a + 7b$  para certos inteiros não negativos  $a$  e  $b$ . Daí,  $n + 1 = 5a + 7b + 5 = 5(a + 1) + 7b$ . Assim, pelo Princípio de Indução Generalizado, temos que qualquer natural  $n \geq 5$  pode ser escrito na forma  $5a + 7b$  para certos  $a$  e  $b$  inteiros não negativos.”*

Notemos que  $n = 6$  não pode ser escrito como  $5a + 7b$ , com  $a$  e  $b$  inteiros não negativos. Logo, o enunciado do Problema 1.1.3 é falso! E, portanto, a solução acima está errada. Mas onde, exatamente?

Uma explicação para o erro na solução acima está na base de indução. Na aparente solução, escreveu-se  $n + 1 = (n - 4) + 5$  e, em seguida, foi aplicada a hipótese de indução em  $n - 4$ . Mas  $n - 4$  pode ser menor do que 5, e a base de indução foi verificada apenas para  $n = 5$ . Para que a demonstração estivesse correta, seria necessário verificar a afirmação para os valores  $n = 1, 2, 3, 4$ , e usá-los como base de indução, o que não é possível, pois a afirmação do enunciado não é verdadeira para nenhum destes valores.

Outro caminho seria usar como base de indução os valores  $n = 5, 6, 7, 8$  e aplicar a hipótese de indução para  $n \geq 9$ . Mas a afirmação do enunciado não é válida para  $n = 6$  nem para  $n = 8$ .

Um comentário importante: indução é um método de prova. Para buscar o enunciado correto a ser provado, é necessário buscá-lo por outros meios, tal como testes com valores pequenos de  $n$  e buscar um padrão que leve a uma conjectura; “chutar” que a fórmula buscada é de um certo tipo (polinomial, exponencial etc.) e usar valores baixos de  $n$  para encontrar as constantes na fórmula; ou usar outras ferramentas matemáticas.

## Exercícios

**Exercício 1.1.1.** Prove por indução a desigualdade de Bernoulli: dado  $a > -1$ , vale  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 1.1.2.** Conjecture uma fórmula para a soma dos  $n$  primeiros números ímpares:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1),$$

e depois prove-a por indução.

**Exercício 1.1.3.** Demonstre por indução que  $2^n < n!$  para  $n \geq 4$ .

**Exercício 1.1.4.** Demonstre por indução que  $2^n - 1$  é múltiplo de 3 para todo  $n$  natural par.

**Exercício 1.1.5.** Demonstre por indução que  $n^3 - n$  é múltiplo de 3 para todos  $n$  natural.

**Exercício 1.1.6.** Prove por indução que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2}$$

para  $n \geq 1$ .

**Exercício 1.1.7.** Prove por indução que  $8^n - 1$  é múltiplo de 7 para todo  $n \geq 0$ .

**Exercício 1.1.8.** Demonstre por indução que  $8^n - 7n - 1$  é múltiplo de 49 para todo inteiro  $n \geq 0$ .

**Exercício 1.1.9.** Demonstre por indução que  $10^{n+1} - 9n - 10$  é múltiplo de 9 para todo  $n$  natural.

**Exercício 1.1.10.** Seja  $q \neq 1$ .

a) Deduza a fórmula para a soma de uma progressão geométrica de razão  $q$ :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \forall n \geq 1.$$

**Dica:** Chame  $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$  e calcule  $S - qS$ .

b) Prove esta fórmula por indução.

**Exercício 1.1.11.** Seja  $N \geq 1$ . Prove que

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m > \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{m-1} - \frac{1}{N}, \quad \forall m \geq 2.$$

**Dica:** para  $N = 1$  a desigualdade é imediata. Suponha então que  $N > 1$  e use indução.

**Exercício 1.1.12.** Os *Números Harmônicos*  $H_k$  são definidos por

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}.$$

Prove por indução que

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Conclua a partir disso que a série harmônica é divergente, ou seja, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

**Exercício 1.1.13.** Os Números de Fibonacci (ou Sequência de Fibonacci) são os números da sequência  $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 44, \dots$  que é criada através da seguinte regra: os dois primeiros números são 0 e 1, e os demais são criados somando os dois números anteriores. Ou seja, os números são definidos de maneira recursiva, como escrito a seguir:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \geq 2, \\ f_0 = 0, \\ f_1 = 1. \end{cases}$$

Seja a matriz  $A$  dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Prove que, para qualquer  $n \geq 1$ ,

$$A^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}.$$

**Exercício 1.1.14.** O objetivo deste exercício é provar que

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.1)$$

a) Para chegar à fórmula (1.1), denote  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  e observe o padrão no desenho abaixo (qual a soma em cada coluna?).

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ + & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline \end{array}$$

b) Prove a fórmula obtida no item anterior por indução.

**Observação 1.1.4.** O leitor pode se perguntar se, depois de obter uma fórmula por um determinado método, é realmente necessário fazer indução? Bem, isso depende se o método utilizado seguiu passos lógicos rigorosos, ou se fez uso de “adivinhação”. No Exercício 1.1.14, não houve adivinhação, e todos os passos foram justificados. Ou seja, o item a) levou à fórmula desejada ao mesmo tempo provando-a ser correta, e o item b) está presente apenas para que o leitor pratique indução. No Exercício 1.1.15 a seguir veremos um caso onde a indução é indispensável, pois o método utilizado para obter a fórmula envolve fazer uma hipótese sem justificativa rigorosa (ou seja, um belo “chute”).

**Exercício 1.1.15.**

- a) Na fórmula (1.1), observa-se que o lado direito da igualdade é um polinômio de grau dois em  $n$ . Isso nos sugere chutar que a soma  $\sum_{k=1}^n k^2$  seja igual a um polinômio de grau 3, ou seja, que  $\sum_{k=1}^n k^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$ . Usando isto, chegue na conjectura

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- b) Prove a fórmula anterior por indução.

**Exercício 1.1.16.** Demonstre por indução que

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq n + 1$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercício 1.1.17.** Vamos provar o seguinte teorema: “Se numa sala com  $n$  pessoas há pelo menos um torcedor do Fluminense de Feira, então todos são torcedores do Fluminense de Feira”.

Demonstração: por indução. Para  $n = 1$ , só há uma pessoa na sala, então esta pessoa é torcedora do Fluminense de Feira.

Suponha o resultado válido para um certo  $n \in \mathbb{N}$ . Considere então uma sala com  $n + 1$  pessoas, onde pelo menos uma é torcedora, que chamaremos de pessoa  $A$ . Tire uma pessoa  $B$  da sala. Ficaram  $n$  pessoas, incluindo a pessoa  $A$ . Pela hipótese de indução, essas  $n$  são torcedoras. Tire uma pessoa qualquer da sala e coloque a pessoa  $B$  que estava fora para dentro. Aplicando novamente a hipótese de indução para  $n$ , concluímos que a pessoa  $B$  também é torcedora. Ou seja, todas as  $n + 1$  pessoas são torcedoras. Daí, pelo Princípio de Indução, concluímos que o resultado é válido para qualquer  $n \geq 1$ .

Bem, você deve ter desconfiado que esse teorema é falso. Encontre o erro na demonstração acima.

**Exercício 1.1.18.** Outro pseudo-teorema para você encontrar o erro na prova: “Todos os números naturais são ímpares”.

Demonstração: usemos o Princípio de Indução Generalizado. Para  $n = 1$ , todos os elementos do conjunto  $\{1\}$  são ímpares, logo temos a base de indução.

Suponha que o resultado seja válido para todos os números no conjunto  $\{1, \dots, n\}$ , ou seja, suponha que todos os números no conjunto  $\{1, \dots, n\}$  sejam ímpares. Em particular, temos que  $n - 1$  é ímpar. Logo,  $(n - 1) + 2 = n + 1$  também é ímpar, o que prova o resultado por indução.

**Exercício 1.1.19** (As Torres de Hanói). São dados três suportes  $A$ ,  $B$  e  $C$ . No suporte  $A$  estão encaixados  $n$  discos cujos diâmetros, de baixo para cima, estão em ordem estritamente decrescente. Mostre que é possível, com  $2^n - 1$  movimentos, transferir todos os discos para o suporte  $B$ , usando o suporte  $C$  como auxiliar, de modo que jamais, durante a operação, um disco maior fique sobre um disco menor.

**Exercício 1.1.20.** Duas pessoas,  $A$  e  $B$ , jogam o seguinte jogo: eles retiram moedas de uma pilha que contém  $n$  moedas. Os jogadores alternadamente retiram, em cada jogada, um número de moedas a seu gosto, de 1 a  $k$ . Ganha quem retira a última moeda, e  $A$  começa o jogo. Determine qual jogador pode assegurar a vitória, não importando como jogue o outro. Descreva uma estratégia vencedora e justifique sua afirmação.

**Dica:** Analise casos para valores de  $n$  pequenos para deduzir a estratégia vencedora. Feito isso, prove-a por indução.

**Exercício 1.1.21.** Luciana e Juarez jogam o seguinte jogo. Primeiro se escolhe um inteiro  $n \geq 2$ . A partir de então, os dois escolhem alternadamente inteiros positivos. Começa Luciana, que deve escolher um número menor do que  $n$  mas maior ou igual que  $\frac{n}{2}$ . Daí, em cada turno, se o último número escolhido (pelo oponente) foi  $k$ , então o seguinte deve ser estritamente menor do que  $k$ , mas maior ou igual a  $\frac{k}{2}$ . O ganhador é o que escolhe o número 1. Para cada valor inicial  $n$ , determine qual dos dois jogadores tem estratégia ganhadora e descreva qual é esta estratégia.

**Exercício 1.1.22.** Neste exercício, provaremos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, que é a seguinte. Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_1, \dots, a_n$  números reais não negativos. Então vale que

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

sendo que há igualdade se, e somente se,  $a_1 = \dots = a_n$ .

- Prove a afirmação para  $n = 2$  usando que  $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ .
- Prove a afirmação para potências de 2 usando indução.
- Seja  $n$  inteiro tal que  $2^{k-1} < n < 2^k$ . Para provar que a afirmação vale para este  $n$ , aplique a desigualdade do item anterior para os números  $a_1, \dots, a_n$  e  $2^k - n$  cópias do número  $a = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ .

**Exercício 1.1.23.** Em um certo programa de auditório, há dois participantes e  $n$  moedas sobre a mesa, sendo  $n \geq 2$ . Cada participante pode, em sua vez, escolher tirar uma moeda da mesa para si, passando a vez para o outro participante, ou tirar duas moedas da mesa para si, terminando o jogo. Suponha que os dois participantes atuem de maneira estritamente lógica e egocêntrica, buscando maximizar o ganho pessoal, e que ambos saibam disso. Mostre, por indução, que o jogo terminará no primeiro movimento, ou seja, o primeiro participante a jogar tirará duas moedas para si e terminará o jogo<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Eis um ótimo exemplo de que comportamentos absolutamente lógicos e individualistas podem levar a situações bizarras. No problema em questão, ainda que houvesse um milhão de moedas sobre a mesa, o primeiro participante tiraria duas moedas para si e terminaria o jogo. Se não fossem lógicos e individualistas, os dois participantes poderiam ficar com meio milhão de moedas cada um.

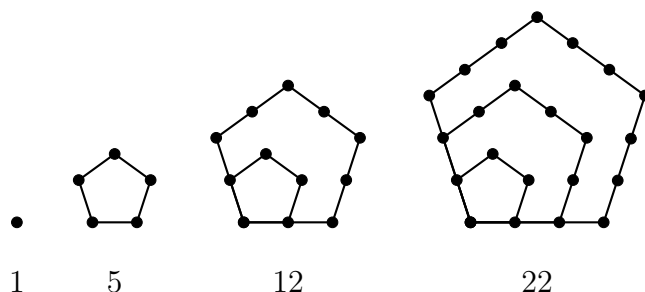


Figura 1.2. Números Pentagonais.

**Exercício 1.1.24** (Números Pentagonais). Os chamados *Números Pentagonais* 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, ... são obtidos seguindo a lógica da Figura 1.2. Prove, por indução, que o  $j$ -ésimo número pentagonal é dado por  $\frac{j(3j-1)}{2}$ .

**Exercício 1.1.25.** Mostre que

$$\sum_{\{a_1, \dots, a_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = n.$$

Note que a soma é feita sobre todos os subconjuntos não vazios de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Exercício 1.1.26.** Considere a sequência definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_n = 3a_{\lfloor n/2 \rfloor} + 4, \\ a_0 = 2, \\ a_1 = 6, \end{cases}$$

onde a função  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  é a chamada *função piso*, que nos dá o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Por exemplo,  $\lfloor 2,74 \rfloor = 2$  e  $\lfloor \pi \rfloor = 3$ . Prove que  $a_n$  é par para qualquer  $n \geq 0$ .

**Dica:** Use o Princípio de Indução Generalizado.

**Exercício 1.1.27.** Prove, por indução, que todo natural  $n \geq 8$  pode ser escrito como  $3a + 5b$ , onde  $a$  e  $b$  são inteiros não negativos.

**Dica:** Use o Princípio de Indução Generalizado. E atenção, apenas  $n = 8$  não será suficiente como base de indução.

**Exercício 1.1.28.** Assuma o seguinte resultado:

**Lema 1.1.5.** *Todo polígono (convexo ou não) possui uma diagonal contida em seu interior.*

Este resultado parece óbvio, mas não é tão fácil de provar, veja [Rosen, 2006, página 289] para uma demonstração. Como exemplo, vejamos a Figura 1.3. Como se pode observar, a diagonal  $\overline{BE}$  não é interior ao polígono  $\overline{ABCDEF}$ , mas a diagonal  $\overline{FC}$  é.

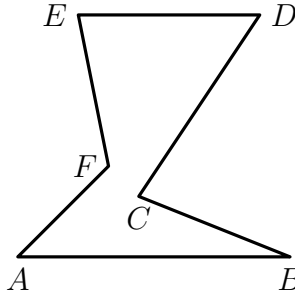


Figura 1.3. Polígono  $\overline{ABCDEF}$ .

Aceitando o Lema 2.8.4, prove pelo Princípio de Indução Generalizado que todo polígono pode ser triangulado em  $n - 2$  triângulos, ou seja, prove que podemos escolher certas diagonais internas do polígono que não se intersectam, e que separam o polígono em  $(n - 2)$  triângulos. A partir disso, deduza que a soma dos ângulos internos de qualquer polígono (convexo ou não) com  $n \geq 3$  lados é igual a  $\pi(n - 2)$ .

**Exercício 1.1.29.** O Teorema de Pick afirma que a área de um polígono sem auto-interseções  $P$  cujos vértices são todos pontos de  $\mathbb{Z}^2$  (isto é, têm coordenadas inteiras) é igual a  $I(P) + F(P)/2 - 1$ , onde  $I(P)$  and  $F(P)$  são os números de pontos de  $\mathbb{Z}^2$  no interior de  $P$  e sobre a fronteira de  $P$ , respectivamente. Por exemplo, na Figura 1.4, observamos o trapézio  $P = \overline{ABCD}$ , cuja área é dada pela fórmula  $\frac{(4+2) \cdot 3}{2} = 9$ . Por outro lado, há 5 pontos em seu interior, ou seja,  $I(P) = 2$  e há 10 pontos de fronteira, ou seja,  $F(P) = 10$ . Daí, pela fórmula do Teorema de Pick obtemos  $I(P) + F(P)/2 - 1 = 5 + 10/2 - 1 = 9$ .

Use o Princípio de Indução Generalizado no número de vértices de  $P$  para provar o Teorema de Pick.

**Dica:** para a base de indução, primeiro prove o resultado para retângulos, depois para triângulos retos, e depois para qualquer triângulo, notando que a área de um triângulo pode ser escrita como a área de um retângulo que o contém menos a área de dois triângulos. Para o passo de indução, aplique o Lema 1.1.5.

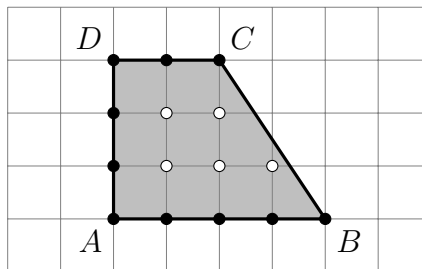


Figura 1.4. Trapézio  $\overline{ABCD}$  de coordenadas inteiras. Os pontos de  $\mathbb{Z}^2$  sobre a fronteira estão marcados com bolas pretas e os pontos de  $\mathbb{Z}^2$  no interior estão marcados com bolas brancas.



**Exercício 1.1.30.** Prove que, qualquer que seja a maneira de decompor um polígono de  $n$  lados em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectem, o número de diagonais utilizadas será  $n - 3$ .

**Dica:** Use o Princípio de Indução Generalizado.

## 1.2 Regra da Soma e do Produto

Nesta seção veremos a Regra da Soma e a Regra do Produto, que são resultados bastante intuitivos. No Ensino Médio, em geral, tais resultados são enunciados sem qualquer demonstração. O que faz certo sentido, demonstrá-los para alunos sem a devida maturidade pode se tornar enfadonho e mesmo acabar por perder o interesse da audiência. Mas do ponto de vista matemático, é necessário prová-los, o que serve também para exercitar a escrita de demonstrações por indução.

Começemos discutindo o que é a cardinalidade de um conjunto. Bem, é óbvio que o conjunto  $A = \{\text{gato}, \text{cachorro}, \text{pato}\}$  tem três elementos, ou seja, cardinalidade igual a três. Mas simplesmente dizer isso não é um argumento matemático. Este é um exemplo de que fatos óbvios podem requerer esforço para serem provados ou colocados de maneira rigorosa em termos de axiomas, definições e teoremas. Há vários exemplos assim. Por exemplo, como mostrar que  $1 + 1 = 2$ ? Ou  $1 + 1 = 2$  é uma definição? Como mostrar a comutatividade nos naturais, ou seja, que  $a + b = b + a$ ? Não é o objetivo deste livro adentrar este tema, que é usualmente visto na parte inicial de um curso de Análise na Reta (veja [Lima, 2017], por exemplo). Aqui nos restringiremos apenas à questão de definir a cardinalidade de conjuntos finitos.

**Definição 1.2.1.** Se existe uma bijeção  $h : A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , então dizemos que  $A$  tem  $n$  elementos ou que a cardinalidade de  $A$  é igual a  $n$ , o que será denotado por  $|A| = n$  ou  $\#A = n$ . Neste livro, usaremos principalmente  $|A|$  para a cardinalidade de  $A$ .

A proposição abaixo é conhecida como Regra da Soma ou Princípio Aditivo. Seu enunciado é tão intuitivo que dá a impressão de não necessitar de prova alguma. Entretanto, para uma demonstração rigorosa usaremos indução.

**Proposição 1.2.2** (Regra da Soma). *Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos disjuntos,  $|A \cup B| = |A| + |B|$ .*

*Demonstração.* Se alguns dos conjuntos é vazio, o resultado é imediato. Logo, assumamos que  $A$  e  $B$  são ambos não vazios. Aplicaremos o Princípio de Indução em  $k = |A| + |B|$ , para  $k \geq 2$ . Para  $k = 2$ , ambos os conjuntos são unitários,  $2 = |A \cup B| = |A| + |B|$ , o que nos dá a base de indução. Suponha que o resultado seja válido para um natural  $k$ , e sejam  $A$  e  $B$  conjuntos disjuntos tais que  $|A| + |B| = k + 1$ . Como  $B$  é não vazio, temos que existe  $b \in B$ . Assim,

$$|A \cup B| = |A \cup (B \setminus \{b\}) \cup \{b\}| = |A \cup (B \setminus \{b\})| + 1. \quad (1.2)$$

Como  $|A| + |B \setminus \{b\}| = k$ , podemos aplicar a hipótese de indução, que leva a

$$|A \cup (B \setminus \{b\})| = |A| + |B \setminus \{b\}| = |A| + |B| - 1.$$

Aplicando isto em (1.2), concluímos que

$$|A \cup B| = |A| + |B| - 1 + 1 = |A| + |B|.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, concluímos que  $|A \cup B| = |A| + |B|$  quaisquer que sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos disjuntos.  $\square$

Generalizando, temos que

**Proposição 1.2.3.** *Se  $A_1, \dots, A_n$  são conjuntos finitos disjuntos dois a dois, então  $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|$ .*

*Demonstração.* Basta fazer indução no número de conjuntos. Fica para os exercícios escrever a prova.  $\square$

A proposição abaixo é conhecida como Regra do Produto ou Princípio Multiplicativo. Mas na verdade não é nenhum dos dois, é uma proposição que decorre do Princípio de Indução.

**Proposição 1.2.4** (Regra do Produto). *Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos,  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ .*

*Demonstração.* Se alguns dos conjuntos é vazio, o resultado é imediato. Logo, assumamos que  $A$  e  $B$  são ambos não vazios.

A ideia da prova é fazer uma indução dentro de outra indução. Vejamos.

Primeiro, consideremos o caso em que o conjunto  $A$  é unitário, ou seja  $|A| = 1$ . Faremos indução para provar que o resultado vale para qualquer valor de  $|B|$ . Para  $|B| = 1$ , temos que  $|A \times B|$  é um conjunto unitário. Isso se deve ao fato que  $A = \{a\}$  e  $B = \{b\}$ . Portanto, só há um elemento em  $A \times B$ , que é o elemento  $(a, b)$ . Isso completa a base de indução.

Suponha que o resultado seja válido para um valor  $k$ . Ou seja, se  $|A| = 1$  e  $|B| = k$ , então  $|A \times B| = k$ . A partir disso, vamos provar que o resultado também deve valer para  $k + 1$ . Sejam portanto  $A$  um conjunto unitário e  $B$  um conjunto com  $k + 1$  elementos. Como  $B$  tem  $k + 1$  elementos, podemos escrever  $B = C \cup D$ , onde  $C = \{c\}$  é um conjunto unitário,  $|D| = k$ , e  $C$  e  $D$  são conjuntos disjuntos.

Não é difícil verificar que, se  $Y$  e  $Z$  são conjuntos disjuntos quaisquer, então  $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$ , sendo que os conjuntos  $X \times Y$  e  $X \times Z$  também são disjuntos, veja o Exercício 1.2.6.

Usando a observação acima, como os conjuntos  $C$  e  $D$  são disjuntos, deduzimos que

$$A \times B = A \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D).$$

Como  $A \times C$  e  $A \times D$  são disjuntos, pela Proposição 1.2.2, temos que

$$|A \times B| = |(A \times C) \cup (A \times D)| = |A \times C| + |A \times D|.$$

Como  $A$  e  $C$  são unitários, pela base de indução, temos que  $|A \times C| = 1$ . Além disso, como  $|A| = 1$  e  $|D| = k$ , pela hipótese de indução, temos que  $|A \times D| = k$ . Assim, concluímos que  $|A \times B| = k + 1$ , o que termina o passo indutivo. Portanto, aplicando o Princípio de Indução, concluímos que, se  $|A| = 1$  e  $|B| \in \mathbb{N}$ , então  $|A \times B| = |A| \times |B|$ .

A seguir, faremos indução na cardinalidade do conjunto  $|A|$  supondo ao mesmo tempo que a cardinalidade de  $B$  é qualquer (finita). Pela indução anterior, se  $|A| = 1$ , temos que  $|A \times B| = |B|$ , qualquer que seja  $B$  conjunto finito. Assim, já temos a base de indução.

Assuma que, para um certo  $k$  natural, se  $|A| = k$ , então  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ , qualquer que seja  $B$  conjunto finito. Esta é nossa hipótese de indução. Façamos o passo indutivo. Sejam  $A$  um conjunto com  $k + 1$  elementos e  $B$  um conjunto finito.

Como  $A$  tem  $k + 1$  elementos, então  $A = A' \cup \{a\}$ , com  $a \notin A'$  e  $|A'| = k$ . Daí,

$$|A \times B| = |A' \times B| + |\{a\} \times B|.$$

Como  $\{a\}$  é unitário, pela base de indução temos que  $|\{a\} \times B| = |B|$ . Como  $A'$  tem  $k$  elementos, pela hipótese de indução, temos que  $|A' \times B| = k|B|$ . Assim,

$$|A \times B| = k|B| + |B| = (k + 1) \cdot |B| = |A| \cdot |B|.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução, temos que  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  para quaisquer conjuntos finitos  $A$  e  $B$ , concluindo a demonstração.  $\square$

Generalizando, vale que

**Proposição 1.2.5.** Se  $A_1, \dots, A_n$  são conjuntos finitos, então  $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times \dots \times |A_n|$ .

*Demonstração.* Basta fazer indução no número de conjuntos. Fica para os exercícios escrever a prova.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 1.2.1.** Os ciclistas têm aversão ao número zero (porque é oval) e ao número oito (porque assim ficam as rodas após os acidentes). Quantos sócios podem se inscrever num clube de ciclistas se cada um deve possuir uma identificação de três dígitos, sem usar o dígito zero nem o dígito oito?

**Exercício 1.2.2.** Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão?

**Exercício 1.2.3.** Quantos são os números de até 3 dígitos que não possuem o zero?

**Exercício 1.2.4.** O código Morse usa “palavras” contendo de 1 a 4 “letras”, sendo que cada “letra” é um ponto ou um traço. Quantas palavras existem no código Morse?

**Exercício 1.2.5.** Quantas vezes o dígito zero aparece quando escrevemos os números de 1 a 222.222?

**Dica:** Conte quantas vezes o zero aparece nas unidades, quantas vezes aparece nas dezenas etc., e some tudo.

**Exercício 1.2.6.** Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  conjuntos quaisquer, sendo que  $Y$  e  $Z$  são disjuntos. Mostre que

a)  $X \times Y$  e  $X \times Z$  são disjuntos.

b)  $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$ .

**Exercício 1.2.7.** Escreva com detalhes a demonstração por indução da Proposição 1.2.3.

**Exercício 1.2.8.** Escreva com detalhes a demonstração por indução da Proposição 1.2.5.

## 1.3 Bijeções e Cardinalidade

Reiterando o que foi dito na seção anterior, usaremos a notação  $|\cdot|$  para cardinalidade. Por exemplo, se  $A = \{a, b, c\}$ , então  $|A| = 3$ . Dado um conjunto  $A$ , usaremos  $\mathcal{P}(A)$  para denotar o *conjunto das partes de  $A$* , que é o conjunto de todos os subconjuntos de  $A$ . Por exemplo, para  $A = \{a, b, c\}$ , temos que

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

**Proposição 1.3.1.** Se  $f : A \rightarrow B$  é uma bijeção, então  $|A| = |B|$ .

*Demonstração.* Suponha que  $|A| = n$ . Logo, existe bijeção  $h : A \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , que implica que  $h \circ f^{-1} : B \rightarrow \{1, \dots, n\}$  também é bijeção. Logo,  $|B| = n$ .  $\square$

Digamos que desejemos saber a cardinalidade de um conjunto  $A$ . Através da Proposição 1.3.1, se soubermos uma bijeção entre os conjuntos  $A$  e  $B$ , e soubermos contar os elementos de  $B$ , então saberemos quantos são os elementos de  $A$ . Esta é uma técnica básica de contagem que será usado muitas vezes no decorrer deste livro. Eis um exemplo clássico:

**Exemplo 1.3.2.** Mostremos que, se  $|A| = n$ , então  $\mathcal{P}(A) = 2^n$ . Para cada subconjunto de  $A$ , associamos uma sequência de 0's e 1's, onde uma entrada 1 na  $k$ -ésima entrada significa que o  $k$ -ésimo elemento de  $A$  está presente no subconjunto correspondente a sequência, e uma entrada 0 significa que o elemento não está presente. Logo, temos uma bijeção  $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1\}^n$ . Portanto,  $|\mathcal{P}(A)| = 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$  pela Regra do Produto.

**Observação 1.3.3.** Tendo como motivação o resultado do Exemplo 1.3.2, é comum usar a notação  $2^A$  para o conjunto das partes.

## Exercícios

**Exercício 1.3.1.** Quantos divisores (naturais) possui o inteiro 360? Quantos são pares?

**Exercício 1.3.2.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos tais que  $|A| = n$  e  $|B| = k$ . Quantas são as funções  $f : A \rightarrow B$ ? Quantas são as funções  $f : A \rightarrow A$ ?

## 1.4 Relações

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos quaisquer. Uma *relação binária*  $\mathcal{R}$  em  $A \times B$  é um subconjunto de  $A \times B$ . Embora possa parecer uma definição simples, até mesmo sem graça, a noção de relação é fundamental em Matemática, e serve como base para diversas definições, ferramentas, resultados e formalizações.

**Exemplo 1.4.1.** Sejam  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$ . O conjunto

$$\mathcal{R} = \{(a, 1), (a, 2), (c, 3)\}$$

é uma relação em  $A \times B$ .

Note que uma relação binária, sendo um subconjunto de  $A \times B$ , é um conjunto de pares ordenados. Nada impede que os conjuntos  $A$  e  $B$  sejam muito grandes ou infinitos. Mas no caso em que  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos (e não muito grandes!), frequentemente é útil representar uma relação usando pontos e flechas, o que ajuda na visualização, no aprendizado, e a obter intuições. Por exemplo, a relação binária do Exemplo 1.4.1 pode ser representada através da Figura 1.5. Esta representação gráfica de uma relação é usualmente chamada de *diagrama de Venn*. Eis uma utilidade básica da noção de relação binária: definir de maneira rigorosa a noção de função.

**Definição 1.4.2.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma relação binária  $\mathcal{R}$  em  $A \times B$  tal que, para cada  $a \in A$ , existe um único  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in \mathcal{R}$ .

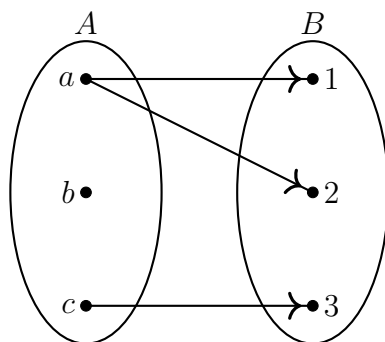


Figura 1.5. Exemplo de relação  $\mathcal{R}$  em  $A \times B$ .

Note que a relação  $\mathcal{R}$  do Exemplo 1.4.1 não é uma função. O elemento  $b \in A$  não está associado a nenhum elemento de  $B$  e, além disso, o elemento  $a \in A$  está associado a dois elementos diferentes em  $B$ .

Quando  $A = B = X$ , dizemos apenas que  $\mathcal{R}$  é uma relação em  $X$ , omitindo o termo *binário*, pois relações binárias são as mais comuns (nos exercícios desta seção veremos relações unitárias, ternárias etc.). Além disso, como há apenas um conjunto envolvido, podemos dispensar as regiões delimitando conjuntos como havia na Figura 1.5. Basta dispor os pontos no plano de maneira arbitrária e desenhar as flechas que correspondam a pares ordenados, sendo a fecha deve sair da primeira entrada do par ordenado e apontar para a segunda entrada do par ordenado. Por exemplo, a relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  definida por  $\mathcal{R} = \{(1, 4), (2, 2), (2, 4), (4, 2)\}$  pode ser representada como vemos na Figura 1.6.

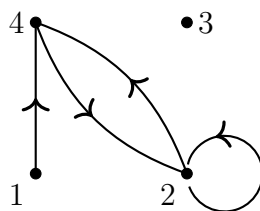


Figura 1.6. Exemplo de relação  $\mathcal{R}$  no conjunto  $X$ .

A seguir, listamos os principais tipos de relação. Uma relação  $\mathcal{R}$  em  $X$  é dita *reflexiva* se, para todo  $x \in X$ , vale que  $(x, x) \in \mathcal{R}$ . Por exemplo, a relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  dada por  $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (2, 4), (4, 4)\}$  é reflexiva. Conforme mostra a Figura 1.7, de cada ponto sai uma flecha que volta para o ponto de partida, que chamaremos de *laço*.

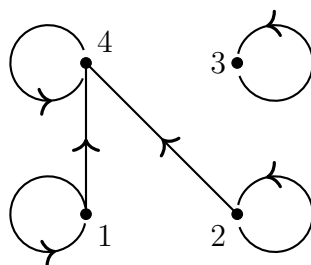


Figura 1.7. Exemplo de relação reflexiva: em cada ponto há um laço.

Uma relação  $\mathcal{R}$  em  $X$  é dita *antirreflexiva* se, para todo  $x \in X$ , vale que  $(x, x) \notin \mathcal{R}$ . Em outras palavras, uma relação é antirreflexiva se não contém laços. Por exemplo, a relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(x, y) \in X \times X : |y - x| = 1 \text{ e } y \neq 3\} \\ &= \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 4), (1, 4), (4, 1), \}\end{aligned}$$

é antirreflexiva, veja a Figura 1.8 para uma ilustração.

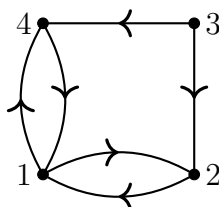


Figura 1.8. Exemplo de relação antirreflexiva: não há laços.

Note que uma relação pode não ser reflexiva nem antirreflexiva. Por exemplo, a relação do Exemplo 1.4.1 não é antirreflexiva, pois contém um laço, mas também não é reflexiva, pois não contém todos os laços.

Uma relação  $\mathcal{R}$  em  $X$  é dita *simétrica* se  $(a, b) \in \mathcal{R}$  implica em  $(b, a) \in \mathcal{R}$ . Em outras palavras, uma relação é simétrica se, sempre que há uma flecha saindo de um ponto e chegando em outro ponto distinto, a flecha no sentido contrário também está presente. Por exemplo, a relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  definida por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : \text{mdc}(x, y) > 1\} = \{(2, 2), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

é simétrica, veja a Figura 1.9 para uma ilustração. Note que se uma relação é simétrica, então, em sua representação gráfica, um ponto pode ter um laço ou não. Mas se uma flecha sai de um ponto para outro ponto distinto, então a flecha de volta estará presente.

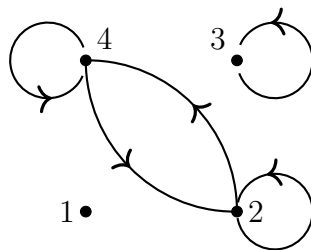


Figura 1.9. Exemplo de relação simétrica.

Uma relação  $\mathcal{R}$  em  $X$  é dita *antissimétrica* se  $(a, b) \in \mathcal{R}$  e  $a \neq b$  implicam em  $(b, a) \notin \mathcal{R}$ . Em outras palavras, uma relação é antissimétrica se, sempre que há uma flecha saindo de um ponto e chegando em outro ponto distinto do ponto de saída, a flecha no sentido contrário *não estará* presente. Por exemplo, a relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(x, y) \in X \times X : y = x + 1 \text{ ou } x = y = 4\} \\ &= \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}\end{aligned}$$

é antissimétrica, veja a Figura 1.10 para uma ilustração. Note que se uma relação é antissimétrica, então, em sua representação gráfica (caso tenha uma), um ponto pode ter um laço ou não. Mas se uma flecha sai de um ponto para outro ponto distinto, então a flecha de volta estará presente.

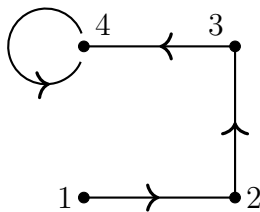


Figura 1.10. Exemplo de relação antissimétrica.

Uma relação  $\mathcal{R}$  em  $X$  é dita *transitiva* se  $(a, b) \in \mathcal{R}$  e  $(b, c) \in \mathcal{R}$  implicam em  $(a, c) \in \mathcal{R}$ . Graficamente, uma relação é transitiva se, sempre que há uma flecha saindo de um ponto  $a$  e chegando em  $b$ , e há uma flecha saindo de  $b$  e chegando em  $c$ , a flecha saindo de  $a$  e chegando em  $c$  estará presente. Por exemplo, a relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{(x, y) \in X \times X : x < y \text{ e } x, y \text{ têm a mesma paridade}\} \\ &= \{(1, 3), (3, 5), (1, 5), (2, 4), (4, 6), (2, 6)\}\end{aligned}$$

é transitiva, veja a Figura 1.11 para uma ilustração.



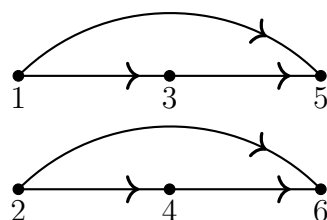


Figura 1.11. Exemplo de relação transitiva.

Relações são onipresentes em matemática. Vejamos alguns exemplos clássicos.

**Exemplo 1.4.3.** A relação  $<$  no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é uma relação antirreflexiva, antissimétrica e transitiva. De fato, para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , é falso que  $x < x$ , logo a relação é antirreflexiva. Sejam  $x \neq y$ . Se  $x < y$ , então é falso que  $y < x$ , logo a relação é antissimétrica. E se  $x < y$  e  $y < z$ , então é verdade que  $x < z$ , logo a relação é transitiva. Notemos não ser possível representar graficamente esta relação, pois o conjunto  $\mathbb{R}$  é infinito.

Tal o leitor tenha pensado haver uma redundância no Exemplo 1.4.3 quando tratamos da antissimetria. Afinal, se vamos considerar  $x < y$ , por que começar supondo que  $x \neq y$ ? Parece desnecessário. E de fato é, mas isso acontece *apenas quando a relação em questão é antirreflexiva*. Experimente analisar a relação  $\leq$  em  $\mathbb{R}$  e veja que neste caso é indispensável começar supondo  $x \neq y$  para provar a antissimetria.

**Exemplo 1.4.4.** A relação  $\subseteq$  no conjunto das partes<sup>2</sup>  $\mathcal{P}(U)$  de um conjunto  $U$  é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva. De fato, para todo  $A$  subconjunto de  $U$ , vale que  $A \subseteq A$ , logo a relação é reflexiva. Se  $A \neq B$  são subconjuntos de  $U$  tais que  $A \subset B$ , então concluímos que  $B \not\subseteq A$ , logo a relação é antissimétrica. E se  $A \subseteq B$  e  $B \subseteq C$ , então  $A \subseteq C$ , logo a relação é transitiva. Novamente não é possível representar graficamente esta relação, pois o conjunto  $U$  nem sequer foi fixado.

**Observação 1.4.5.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação. Muitos livros escrevem  $a\mathcal{R}b$  para denotar  $(a, b) \in \mathcal{R}$ . Tal notação é motivada pelo fato de que muitas relações famosas se escrevem assim. Por exemplo  $2 < 5$ ,  $A \subset B$ ,  $3 \leq 3$ ,  $0 = 0$ ,  $7 \equiv_2 3$  etc.

## Exercícios

**Exercício 1.4.1.** No texto definiu-se função através da noção de relação. Faça o mesmo com função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva (no estilo “uma função injetiva  $f : A \rightarrow B$  é uma relação binária  $\mathcal{R}$  em  $A \times B$  tal que...”). Ilustre tais noções em termos de uma representação gráfica similar a da Figura 1.5.

<sup>2</sup>O conjunto das partes de  $U$  é o conjunto de todos os subconjuntos de  $U$ .

**Exercício 1.4.2.** Considere a relação  $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a > 0 \text{ e } b < 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b > 0)\}$ . Classifique esta relação como simétrica, antissimétrica, reflexiva, antirreflexiva e/ou transitiva.

**Exercício 1.4.3.** Um relação *unitária*  $\mathcal{R}$  num conjunto  $A$  é um subconjunto  $\mathcal{R} \subset A$ . Uma relação unitária é chamada de *propriedade*. Você consegue explicar em palavras o porquê disso? Ilustre isso usando a noção de números primos.

**Exercício 1.4.4.** Uma relação  $n$ -ária  $\mathcal{R}$  em  $A_1 \times \cdots \times A_n$  é um subconjunto  $\mathcal{R} \subset A_1 \times \cdots \times A_n$ . Quando  $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = X$ , dizemos apenas que  $X$  é uma relação  $n$ -ária  $\mathcal{R}$  em  $X$ . Usando a Figura 1.12 para ter ideias, crie uma representação gráfica para relação ternária  $\mathcal{R} = \{(a, d, e), (b, c, e)\}$  no conjunto  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ .

**Atenção:** a representação gráfica que você imaginar deve determinar de maneira única cada trio  $(x, y, z)$ .

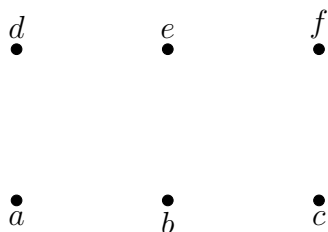


Figura 1.12. Desenhe uma representação gráfica para a relação ternária  $\mathcal{R} = \{(a, d, e), (b, c, e)\}$ .

**Exercício 1.4.5.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação binária em  $X$ . Definimos a relação inversa  $\mathcal{R}^{-1}$  como

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Considere também outra relação  $\mathcal{S}$  em  $X$ . Prove ou dê um contra-exemplo:<sup>3</sup>

- $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$ .
- $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}^{-1}$ .
- $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}$ .
- Se  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ , então  $\mathcal{S}^{-1} \subset \mathcal{R}^{-1}$ .
- Se  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$ , então  $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{S}^{-1}$ .

**Exercício 1.4.6.** Denotamos  $Id_X$  a relação em  $X$  dada por  $Id_X = \{(x, x) : x \in X\}$ , que é usualmente chamada de *relação identidade*. Por exemplo, lustramos na Figura 1.13 a relação identidade  $Id_X$  no caso em que  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ .

<sup>3</sup>Um *contra-exemplo* é um exemplo que mostra que a afirmação é falsa.

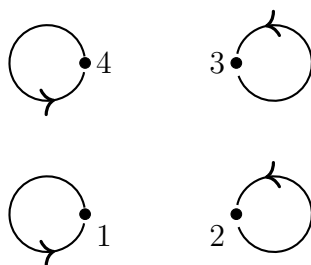


Figura 1.13. Exemplo de relação identidade  $Id_X$ . Há apenas laços.

- a) Mostre que  $\mathcal{R}$  é reflexiva se, e somente se,  $Id_X \subset \mathcal{R}$ .
- b) Mostre que  $\mathcal{R}$  é antirreflexiva se, e somente se,  $Id_X \cap \mathcal{R} = \emptyset$ .

**Exercício 1.4.7.** Dizemos que  $a$  divide  $b$  se  $a \neq 0$  e existe  $c$  tal que  $b = ac$ . Para denotar que  $a$  divide  $b$ , escrevemos  $a|b$ . Considere a relação  $\mathcal{R}$  definida por  $(a, b) \in \mathcal{R}$  se, e somente se,  $a|b$ . Mostre que  $\mathcal{R}$  é antissimétrica se considerarmos o conjunto dos números naturais, mas não é antissimétrica se considerarmos o conjunto dos números inteiros.

**Exercício 1.4.8.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação no conjunto  $X$  e reveja a definição de  $\mathcal{R}^{-1}$  no Exercício 1.4.5 e também a definição de  $Id_X$  no Exercício 1.4.6.

- a) Mostre que  $\mathcal{R}$  é simétrica se, e somente se,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$ .
- b) Mostre que  $\mathcal{R}$  é antissimétrica se, e somente se,  $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subset Id_X$ .

**Exercício 1.4.9.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação em  $X$  que é uma função.

- a) Mostre que se  $\mathcal{R}$  é reflexiva, então  $\mathcal{R} = Id_X$ .
- b) Mostre que se  $\mathcal{R}$  é simétrica, então  $\mathcal{R} = Id_X$ .

**Exercício 1.4.10.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação em  $X$ . A menor relação reflexiva que contém  $\mathcal{R}$  é o chamado *fecho reflexivo*<sup>4</sup> de  $\mathcal{R}$ . A menor relação simétrica que contém  $\mathcal{R}$  é o chamado *fecho simétrico* de  $\mathcal{R}$ . A menor relação simétrica e reflexiva que contém  $\mathcal{R}$  é o chamado fecho simétrico reflexivo de  $\mathcal{R}$ . Em termos de  $\mathcal{R}$ ,  $Id_X$  e  $\mathcal{R}^{-1}$ , determine

- a) O fecho reflexivo de  $\mathcal{R}$ .

<sup>4</sup>Quando dizemos “a menor relação reflexiva  $S$  que contém  $\mathcal{R}$ ” queremos dizer que  $S$  é uma relação reflexiva tal que  $\mathcal{R} \subset S$  e que, se  $\mathcal{T}$  é uma relação reflexiva tal que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$ , então  $S \subset \mathcal{T}$ . O enunciado para fecho simétrico é análogo. Aliás, aproveitamos para comentar que este termo *fecho* aparece em diferentes contextos em Matemática. Há sempre uma propriedade envolvida (simetria, reflexividade, transitividade, convexidade, entre inúmeras outras), e o fecho associado à propriedade tem definição similar: é o menor conjunto que contém o conjunto dado e que tem a tal propriedade.

- b) O fecho simétrico de  $\mathcal{R}$ .
- c) O fecho simétrico reflexivo de  $\mathcal{R}$ .

**Dica:** pense na representação gráfica para ter a intuição. O que precisamos desenhar para que uma relação se torne reflexiva? Para que se torne simétrica? Para que se torne simétrica e reflexiva?

**Exercício 1.4.11.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação binária em  $A \times B$  e  $\mathcal{S}$  uma relação binária em  $B \times C$ . Definimos a composição  $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$  como a relação em  $A \times C$  definida por

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, z) : \exists y \in B \text{ tal que } (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } (y, z) \in \mathcal{S}\}.$$

No caso em que  $\mathcal{R}$  é uma relação em  $X$ , definimos  $\mathcal{R}^{(n)} = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \dots \circ \mathcal{R}$ , onde  $\mathcal{R}$  aparece  $n$  vezes no lado direito da igualdade anterior.

- a) Reveja a definição de  $Id_X$  dada no Exercício 1.4.8. Seja  $\mathcal{R}$  uma relação em  $X$ . Determine  $\mathcal{R} \circ Id_X$  e também  $Id_X \circ \mathcal{R}$ .
- b) Para a relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ilustrada na Figura 1.14, determine  $\mathcal{R}^{(2)}$ ,  $\mathcal{R}^{(3)}$ ,  $\mathcal{R}^{(4)}$  e  $\mathcal{R}^{(5)}$ .

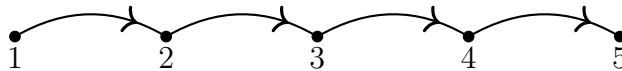


Figura 1.14. Relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- c) Dê uma interpretação para  $\mathcal{R}^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^{(n)}$ .

**Exercício 1.4.12.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação binária em  $A \times B$  e  $\mathcal{S}$  uma relação binária em  $B \times C$ . Suponha que  $\mathcal{R}$  corresponda a uma função  $f$  e  $\mathcal{S}$  corresponda a uma função  $g$ . Mostre que  $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  corresponde à função composta  $g \circ f$ .

**Observação:** o enunciado está correto. A ordem certa é  $g \circ f$  como escrito, e não  $f \circ g$ .

**Exercício 1.4.13.** Seja  $\mathcal{R}$  uma relação no conjunto  $X$ .

- a) Mostre que  $\mathcal{R}$  é transitiva se, e somente se,  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$ .
- b) Reveja a definição de  $\mathcal{R}^{(n)}$  no Exercício 1.4.11. Mostre que

$$\mathcal{R}^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^{(n)}$$

é uma relação transitiva que contém  $\mathcal{R}$ .

- c) Mostre que  $\mathcal{R}^*$  é a menor relação transitiva que contém  $\mathcal{R}$  (e por isso é chamada de *fecho transitivo* de  $\mathcal{R}$ ).
- d) Defina, usando o bom senso, o que é o *fecho reflexivo transitivo* de uma relação  $\mathcal{R}$ . Determine quem é o fecho reflexivo transitivo de uma relação  $\mathcal{R}$ .

## 1.5 Relações de Equivalência

A seguir, vejamos um tipo de relação importantíssima em Matemática, que será usada no Capítulo 2 para realizarmos contagens diversas.

**Definição 1.5.1.** Uma *relação de equivalência*  $\mathcal{R}$  em um conjunto  $X$  é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

Ou seja, conforme as definições da Seção 1.4, uma relação de equivalência é um subconjunto  $\mathcal{R} \subset X \times X$  satisfazendo às seguintes condições:

- a) (*Reflexividade*) Para todo  $a \in X$ , vale que  $(a, a) \in \mathcal{R}$ .
- b) (*Simetria*) Se  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , então  $(b, a) \in \mathcal{R}$ .
- c) (*Transitividade*) Se  $(a, b) \in \mathcal{R}$  e  $(b, c) \in \mathcal{R}$ , então  $(a, c) \in \mathcal{R}$ .

Se  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , escrevemos simplesmente  $a \sim b$ , sendo que este símbolo  $\sim$  é usualmente reservado a relações de equivalência. Assim, com esta notação  $\sim$ , podemos reescrever a definição acima como:

Uma relação de equivalência é um subconjunto  $\mathcal{R} \subset X \times X$  satisfazendo às seguintes condições:

- a) (*Reflexividade*) Para todo  $a \in X$ , temos que  $a \sim a$ .
- b) (*Simetria*) Se  $a \sim b$ , então  $b \sim a$ .
- c) (*Transitividade*) Se  $a \sim b$  e  $b \sim c$ , então  $a \sim c$ .

O conjunto  $\{b \in X : b \sim a\}$  é chamado a *classe de equivalência de  $a$* , o qual é frequentemente denotado por  $[a]$ . Observe que todo elemento pertence a alguma classe de equivalência e que todo elemento é equivalente a si mesmo, ou seja,  $a \sim a$  para todo  $a \in X$ .

Por exemplo, a relação  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  dada por

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X : 2 \text{ divide } y - x\}$$

é uma relação de equivalência. Para verificar isso, não é preciso listar todos os elementos de  $\mathcal{R}$ . Basta notar que 2 divide a diferença  $y - x$  se, e somente,  $x$  e  $y$  são ambos pares ou ambos ímpares. Com essa observação, fica fácil checar as propriedades. Como  $x$  tem a mesma paridade de si mesmo, a relação é reflexiva. Sejam  $x \neq y$ . Se  $x$  tem a mesma paridade de  $y$ , então  $y$  tem a mesma paridade de  $x$ , logo a relação é simétrica. E se  $x$  tem a mesma paridade de  $y$ , e  $y$  tem a mesma paridade de  $z$ , então  $x$  tem a mesma paridade de  $z$  e portanto a relação é transitiva. Veja na Figura 1.15 uma representação gráfica desta relação.

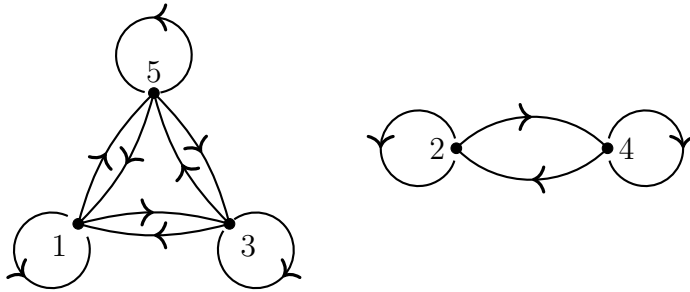


Figura 1.15. Exemplo de relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Pensando na representação gráfica, todas as conexões possíveis estão presentes dentro de cada classe de equivalência. Assim, podemos interpretar uma relação de equivalência como uma separação em grupos disjuntos, ou como uma “igualdade” ou como uma “classificação”. Esta ideia de que cada relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$  está unicamente associada a uma partição de  $X$  é enunciada de maneira rigorosa na próxima proposição.

**Proposição 1.5.2.** *Seja  $\mathcal{R}$  uma relação de equivalência no conjunto  $X$ . Então o conjunto das classes de equivalência constituem uma partição de  $X$ , ou seja,*

- Dadas duas classes de equivalência quaisquer  $[x]$  e  $[y]$ , então, ou  $[x] \cap [y] = \emptyset$ , ou  $[x] = [y]$ .*
- $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ .

*Reciprocamente, se duas relações de equivalência  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  em  $X$  determinam a mesma partição, então  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$ .*

*Finalmente, cada partição de  $X$  tem uma relação de equivalência associada a ela.*

**Demonstração.** Para o item a), basta mostrar que se  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ , então  $[x] = [y]$ . Bem, se  $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ , então existe um elemento  $a \in [x] \cap [y]$ . Pela definição de classe de equivalência,  $a \sim x$ . Mostremos que  $[x] \subset [y]$ . Se  $b \in [x]$ , então  $b \sim x$ . Como  $a \sim x$ , pela simetria,  $x \sim a$ . Logo, pela transitividade,  $b \sim a$ . Como  $a \in [y]$ , temos que  $a \sim y$ . Logo, pela transitividade,  $b \sim y$ , que implica em  $b \in [y]$ . Ou seja,  $[x] \subset [y]$ . A prova de que  $[y] \subset [x]$  é análoga. Assim, concluímos que  $[x] = [y]$ .

O item b) é imediato da reflexividade: para todo  $x \in X$ , temos que  $x \in [x]$ . Portanto,  $\bigcup_{x \in X} [x] \subset X$ . Mas temos também que  $\bigcup_{x \in X} [x] \supset X$ , logo  $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ .

Cada elemento da partição correspondente a uma classe de equivalência. Logo, se duas relações de equivalência têm as mesmas partições, elas são iguais.

Finalmente, considere uma partição de  $X$ , ou seja, considere uma coleção de conjuntos disjuntos  $A_\lambda$  com  $\lambda \in \Lambda$  tal que<sup>5</sup>  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = X$ . Dados  $x, y \in X$ , defina

<sup>5</sup>Aqui  $\Lambda$  é um conjunto de índices, que pode ser  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$  ou qualquer conjunto.

$x \sim y$  se  $x$  e  $y$  pertencem a um mesmo conjunto  $A_\lambda$ . Fica para o leitor verificar que isso define uma relação de equivalência.  $\square$

Por exemplo, se quisermos classificar o conjunto de pessoas  $X = \{ \text{Torquato, Ana, Igor, Joana, Gabriela, Elias} \}$  de acordo com o número de vogais no nome, notamos que o número de vogais no nome caracteriza uma relação de equivalência. Vejamos, cada pessoa  $x$  tem o mesmo número de vogais no nome que ela própria. Se  $x$  tem o mesmo número de vogais no nome que  $y$ , então  $y$  tem o mesmo número de vogais no nome que  $x$ . E se  $x$  tem o mesmo número de vogais no nome que  $y$ , e  $y$  tem o mesmo número de vogais no nome que  $z$ , então  $x$  tem o mesmo número de vogais no nome que  $z$ . Assim, podemos considerar a relação de equivalência

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \{ & (\text{Igor, Igor}), (\text{Igor, Ana}), (\text{Ana, Igor}), (\text{Ana, Ana}), \\ & (\text{Joana, Joana}), (\text{Joana, Elias}), (\text{Elias, Joana}), (\text{Elias, Elias}), \\ & (\text{Gabriela, Gabriela}), (\text{Gabriela, Torquato}), \\ & (\text{Torquato, Gabriela}), (\text{Torquato, Torquato}) \}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Entretanto, esta forma de descrever uma relação de equivalência é pouco prática para os fins que desejamos. Usando a Proposição 1.5.2 vamos descrever (ou desenhar) uma relação de equivalência como uma partição do conjunto original, ou seja, uma separação do conjunto em subconjuntos disjuntos. Por exemplo, a relação de equivalência anterior pode ser descrita de maneira mais sucinta como

$$\mathcal{R} = \{ \{ \text{Igor, Ana} \}, \{ \text{Joana, Elias} \}, \{ \text{Gabriela, Torquato} \} \}. \quad (1.4)$$

Na igualdade anterior ocorreu o que em Matemática chama-se *abuso de notação*. Um mesmo símbolo (no caso,  $\mathcal{R}$ ) foi usado para duas coisas diferentes: em (1.3) foi usado para uma coisa, e em (1.4) para outra! Por outro lado, pela Proposição 1.5.2, a partição determinada pela relação de equivalência a caracteriza unicamente. Assim, como em muitos outros textos de Matemática, seguiremos em frente sem nos importar com o uso duplo do mesmo símbolo, pois este não leva a absurdos ou ambiguidades.

Motivados então pela Proposição 1.5.2, podemos representar  $\mathcal{R}$  graficamente como ilustrado na Figura 1.16 a seguir.

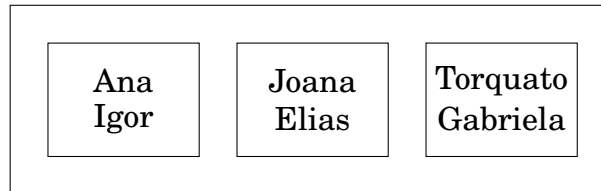


Figura 1.16. Representação gráfica da relação de equivalência  $\mathcal{R}$  (específica para relações de equivalência).

Observe que na relação de equivalência  $\mathcal{R}$  acima há três classes de equivalência, cada uma com dois elementos, e que  $|X| = 6$ . Isso nos leva a pensar na próxima proposição. Antes, é importante frisar que

**Observação 1.5.3.** Daqui em diante, dada uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$ , usaremos  $|\mathcal{R}|$  para denotar o número de classes de equivalência de  $\mathcal{R}$ .

**Proposição 1.5.4.** *Seja  $X$  conjunto finito munido de relação de equivalência  $\mathcal{R}$ . Se todas as classes de equivalência têm cardinalidade  $k$ , então o número de classes de equivalência é dado por  $|\mathcal{R}| = \frac{|X|}{k}$ .*

*Demonstração.* Pela Regra da Soma,  $|X| = \sum_{j=1}^{|\mathcal{R}|} k = |\mathcal{R}| \cdot k$ . Logo,  $|\mathcal{R}| = \frac{|X|}{k}$ .  $\square$

Apesar de sua simplicidade, a Proposição 1.5.4 será muito útil nas contagens do Capítulo 2.

## Exercícios

**Exercício 1.5.1.** Descreva paridade no conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  como relação de equivalência em cada uma das três maneiras citadas no texto.

**Exercício 1.5.2.** Considere a relação  $\mathcal{R}$  no conjunto  $\mathbb{Z}$  dada por

$$\mathcal{R} := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a \geq 0 \text{ e } b \geq 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b < 0)\}.$$

Classifique esta relação como simétrica, antissimétrica, reflexiva, antirreflexiva, transitiva e/ou de equivalência.

**Exercício 1.5.3.** Descreva uma relação de equivalência no conjunto  $X = \{\text{João, Ana, Pedro, Paulo, Hugo, Tatiana, Elias, Ricardo, José, Amanda, Tertuliano e Francisco}\}$  que separe os nomes de acordo com o número de vogais. Quantas são as classes de equivalência?

**Exercício 1.5.4.** De quantas maneiras podemos escolher duas pessoas de um grupo de  $n$  pessoas? Use pares ordenados e depois uma relação de equivalência (sobre o conjunto de pares ordenados).

**Exercício 1.5.5.** De quantas maneiras podemos separar um grupo de 4 pessoas em dois grupos de 2 pessoas? Use quádruplas ordenadas e depois uma relação de equivalência (sobre o conjunto de quádruplas ordenadas).

**Exercício 1.5.6.** Uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$  pode ser uma função? Sob quais condições?



**Exercício 1.5.7.** Encontre a falha na prova a seguir da afirmação “se  $\mathcal{R}$  é uma relação em  $X$  que é simétrica e transitiva, então  $\mathcal{R}$  é uma relação de equivalência”.

Sejam  $x, y \in X$  tais que  $(x, y) \in \mathcal{R}$ . Pela simetria, concluímos que  $(y, x) \in \mathcal{R}$ . Daí, pela transitividade, concluímos que  $(x, x) \in \mathcal{R}$  e, portanto, a relação  $\mathcal{R}$  é reflexiva. Ou seja, é uma relação de equivalência, pois já tínhamos simetria e transitividade.

Depois de encontrar a falha no argumento acima, dê um exemplo de uma relação que é simétrica e transitiva mas não é uma relação de equivalência.

**Exercício 1.5.8.** Seja  $U$  um conjunto. Para  $A, B \subset U$ , defina  $A \sim B$  se  $(A - B) \cup (B - A)$  for um conjunto finito. Mostre que  $\sim$  é uma relação de equivalência nos subconjuntos de  $U$ .

**Exercício 1.5.9.** Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Escrevemos  $a|b$  para dizer que  $a$  divide  $b$ . Seja  $p$  um número natural. Definimos a relação de congruência módulo  $p$  em  $\mathbb{Z}$  por  $a \equiv b \pmod{p}$  se  $p|a - b$ .

- Mostre que  $a \equiv b \pmod{p}$  se  $p|a - b$  se, e somente se,  $a$  e  $b$  deixam o mesmo resto quando divididos por  $p$ .
- Mostre que a congruência módulo  $p$  é uma relação de equivalência.
- Quantas são as classes de equivalência na congruência módulo  $p$ ?

**Exercício 1.5.10.** Seja  $X$  um conjunto finito com  $n$  elementos munido da relação de equivalência  $\mathcal{R}$ . Prove que

$$|\mathcal{R}| = \sum_{k=1}^n \frac{|A_k|}{k},$$

onde  $A_k = \{x \in X : |[x]| = k\}$ , o que generaliza a Proposição 1.5.4.

**Dica:** a notação talvez tenha inibido o leitor. Entretanto, o exercício é mais fácil do que parece. Basta separar as classes de equivalência por tamanho.

## 1.6 Probabilidade (espaços equiprováveis)

Seja  $\Omega$  um conjunto finito, que representa o conjunto de possíveis resultados de um sorteio. Por exemplo, para o lançamento de um dado, seria natural escolher  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Para o lançamento de uma moeda honesta, seria natural escolher  $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ . Definimos a probabilidade de um conjunto  $A \subset \Omega$  por

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (1.5)$$

Em outras palavras, definimos a probabilidade de um conjunto (também chamado de evento) como a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos (também conhecida como *probabilidade de Laplace*<sup>6</sup>).

Nem sempre esta definição dada por (1.5) é adequada. Imagine, por exemplo, uma moeda desonesta, ou seja, uma moeda cuja probabilidade de mostrar cara ao ser lançada é  $p$  e cuja probabilidade de mostrar coroa é  $1 - p$ , sendo  $p \in [0, 1]$  e  $p \neq 1/2$ . Neste caso, a definição acima não se aplica.

Outro exemplo onde a definição de probabilidade acima não se aplica é o caso  $|\Omega| = \infty$ . Se tentássemos aplicar a definição acima nesta situação, sendo  $A$  é um conjunto finito, teríamos  $\mathbb{P}(A) = 0$ . E sendo  $A$  um conjunto com um número infinito de elementos, então teríamos  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\infty}{\infty}$  que nos dá uma indeterminação. E não é difícil de deparar com um modelo no qual  $\Omega$  é um conjunto infinito. Por exemplo, joguemos uma moeda honesta repetidamente e observemos o número de vezes necessário para se observar cara pela primeira vez. Este número é aleatório e pertence ao conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , que é infinito.

Resumindo, a probabilidade de Laplace se aplica apenas a casos com um número finito de possíveis resultados, e também é necessário assumir que todos os resultados tenham a mesma chance de ocorrer.

Salvo menção em contrário, a probabilidade em um certo problema será a probabilidade de Laplace definida em (1.5), também chamada de probabilidade *equiprovável*. No Capítulo 5 veremos a definição moderna de probabilidade, que se aplica a moedas desonestas e muito mais. Mas até lá usaremos a definição acima. Vejamos um exemplo para clarear ideias:

**Problema 1.6.1.** Dois dados são lançados. Qual a probabilidade de que a soma dos dados seja igual a 2?

*Interpretação e bom senso* são ferramentas importantes em problemas envolvendo probabilidade. Para começar, vejamos uma solução equivocada do problema acima:

“A soma dos dados pode ser qualquer número no conjunto  $\{2, \dots, 12\}$ . Ou seja,  $\Omega = \{2, \dots, 12\}$ . Queremos a probabilidade de sair 2, ou seja, queremos saber a probabilidade do conjunto unitário  $A = \{2\}$ . Usando a definição (1.5), temos que  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{11}$ .”

O valor acima obtido,  $1/11$ , é incorreto. Podemos ter uma intuição disso pelo seguinte argumento. Para se obter um resultado igual a 2, há apenas uma possibilidade, que ambos os dados mostrem 1. Por outro lado, para se obter um resultado 7, digamos, os dados podem mostrar vários diferentes: um dado pode mostrar 1 e o outro 6, um dado pode mostrar 2 e o outro 5 etc. Outra maneira de argumentar que  $1/11$  não é a resposta do problema é fazer um teste prático: lancemos muitas vezes dois dados, e façamos uma tabela com os resultados da soma das faces observadas. Lançar dados seguidamente pode fazer mal às costas

<sup>6</sup>Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

(o autor já passou por isso). Assim, usemos de computação para lançar os dados. Por exemplo, podemos usar algum site sobre simulações probabilísticas, tal como <http://www.randomservices.org/random/apps/CoinSampleExperiment.html> ou <https://www.random.org/dice/>, ou algum programa como Mathematica, R, Maple, ou mesmo uma calculadora científica. No caso de uma calculadora científica, há um botão geralmente chamado de RND (abreviação de *random*), o qual fornece um número aleatório entre 0 e 1. Para usar este resultado para simular lançamento de um dado, olhe para primeira casa após a vírgula: se o dígito ali estiver entre 1, ..., 6, use este dígito como o resultado do dado. Caso contrário, se o dígito for 0, 7, 8 ou 9, descarte o resultado e aperte o botão novamente<sup>7</sup>. Na

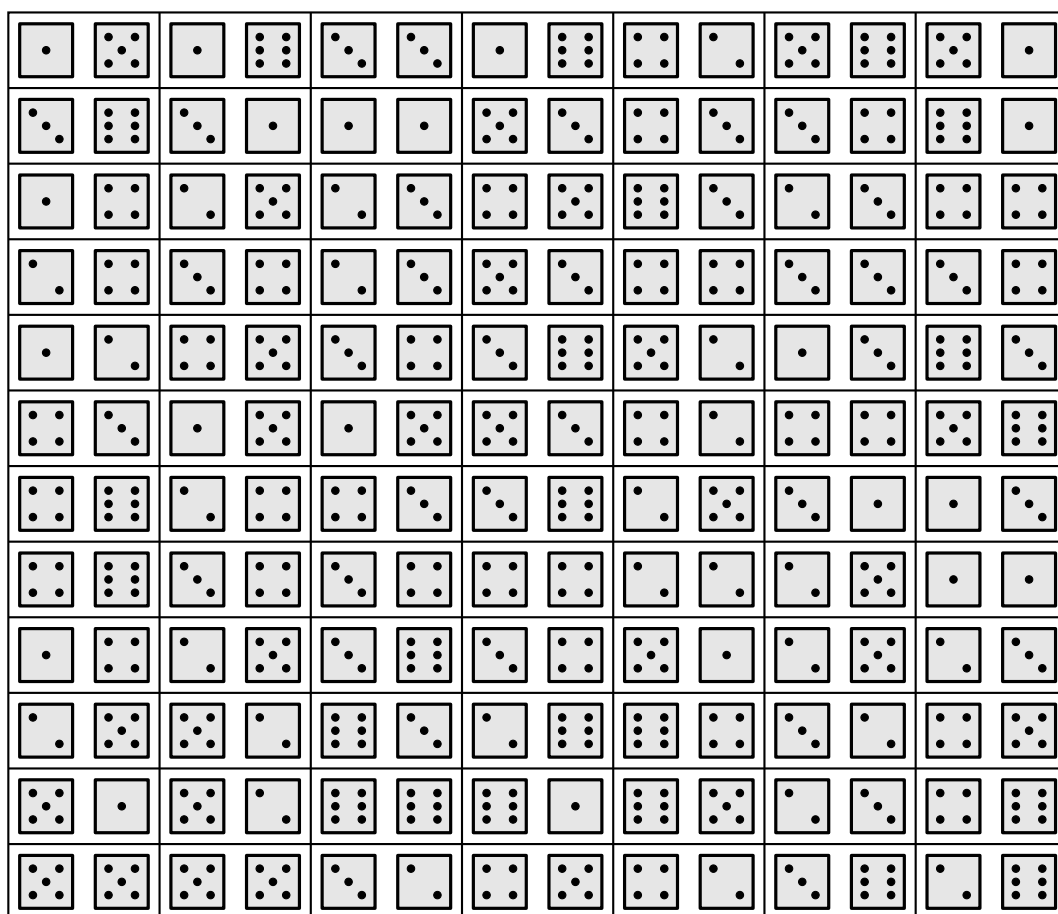


Figura 1.17. 84 sorteios de pares de dados.

Figura 1.17, vemos 84 lançamentos ao acaso de um par de dados honestos. O leitor deve *aceitar* que tais lançamentos foram feitos ao acaso. De fato, é muito difícil reconhecer aleatoriedade apenas olhando para uma sequência de resultados, pois a mente humana tende a buscar padrões, veja o livro [Mlodinow, 2008] para interessantes histórias relacionadas ao tema.

<sup>7</sup>Esta ideia de descartar os resultados que não interessam, e repetir o experimento aleatório até que apareça o resultado de interesse é, essencialmente, o chamado *Método de Rejeição*.

Como podemos observar na Figura 1.17, a frequência com o que a soma dos resultados dos dados foi igual a dois é dada por  $2/84 = 1/42$ , bem diferente da fração  $1/11$ , o que não prova, mas nos dá indícios de que tal resposta é equivocada. Este tipo de teste tem a ver com a chamada *Lei dos Grandes Números*, a ser vista nas Seções 6.2 e 6.3.

Resumindo, o modelo em questão não é equiprovável. O que fazer então? Temos que refazer o modelo de maneira que o espaço *seja equiprovável*. O que podemos assumir, usando o bom senso, que é equiprovável neste modelo? Podemos assumir que *o resultado de cada dado é equiprovável*. Afinal, se nada foi dito em contrário, é porque os dados são honestos. Isto é a parte de interpretação no problema. E se cada dado é equiprovável, é razoável intuir que o par ordenado cujas entradas são os resultados de cada dado também deve ser equiprovável.

Motivados pela discussão prévia, vamos considerar então como espaço amostral o conjunto

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\} \\ &= \{(a, b) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\}.\end{aligned}$$

Em palavras, o conjunto  $\Omega$  é o conjunto dos pares ordenados nos quais a primeira entrada representa o resultado de um dado e a segunda entrada representa o resultado do outro dado. Pela Regra do Produto, temos que  $|\Omega| = 6 \times 6 = 36$ . O conjunto  $A$  para o qual desejamos calcular a probabilidade é conjunto dos pares cuja soma é 2, ou seja,  $A = \{(1, 1)\}$ . Assim,  $|A| = 1$  e a definição (1.5) nos dá  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$ , que é a resposta correta do Problema 1.6.1.

## Exercícios

**Exercício 1.6.1.** Um dado é lançado. Qual a probabilidade do resultado ser um número primo?

**Exercício 1.6.2.** Seja  $\Omega$  um conjunto finito, e sejam  $A_1, \dots, A_n$  subconjuntos de  $\Omega$ , todos finitos e disjuntos entre si, ou seja, tais que a intersecção de quaisquer dois subconjuntos é vazia. Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

**Exercício 1.6.3.** Seja  $\Omega$  um conjunto finito. Quanto é  $\mathbb{P}(\emptyset)$ ? Quanto é  $\mathbb{P}(\Omega)$ ? Qual a probabilidade de um subconjunto unitário de  $\Omega$ ? A probabilidade de um subconjunto de  $\Omega$  pode ser igual a  $\sqrt{2}/2$ ?

**Exercício 1.6.4.** Lança-se uma moeda três vezes. Qual a probabilidade que o total de caras observado seja maior ou igual a dois?

**Exercício 1.6.5.** Uma carta é retirada ao acaso de um baralho. Em seguida, a carta é devolvida ao baralho e novamente uma carta é retirada ao acaso. Qual a probabilidade de que nas duas retiradas o naipe observado tenha sido o mesmo?

**Exercício 1.6.6.** Uma moeda e um dado são lançados e escolhe-se uma carta do baralho. Qual a probabilidade de que o resultado seja a tripla dada por (cara, 6, rei de copas)?

**Exercício 1.6.7.** Lançam-se dois dados. Qual a probabilidade de que a soma dos dados seja igual a 6 ou 7?

**Exercício 1.6.8** (Problema de Monty Hall). Este problema baseia-se em um caso real. Em um certo programa de auditório, há três portas fechadas. Sabe-se que atrás de uma das portas há um carro, e atrás das outras duas há um bode em cada uma. Você participa do seguinte jogo, e seu objetivo é ganhar o carro (mesmo não tendo nada contra bodes). Inicialmente, você escolhe uma porta. Em seguida, o apresentador (que sabe onde o carro e os bodes estão) abre outra porta, diferente da porta que você escolheu, e mostra um bode. Restaram, portanto, duas portas fechadas. O apresentador pergunta a você se quer continuar com a porta escolhida inicialmente ou prefere passar para a outra porta ainda fechada.

Digamos que a sua estratégia seja mudar de porta. Seguindo tal estratégia, qual a probabilidade de você ganhar o carro?

**Exercício 1.6.9.** Imaginemos a seguinte variação do Problema de Monty Hall. Em vez de 3 portas, consideremos 1000 portas, sendo que atrás de apenas uma há um carro, e atrás das demais há bodes. Inicialmente, você escolhe uma porta. O apresentador abre então 998 portas mostrando bodes, deixando fechadas apenas duas portas, a que você escolheu inicialmente e mais uma.

Digamos que a sua estratégia seja mudar de porta. Seguindo tal estratégia, qual a probabilidade de você ganhar o carro?



## CAPÍTULO 2

# CONTAGEM VIA RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Neste capítulo, estudaremos não apenas o conteúdo básico de contagem como permutações, arranjos e combinações, mas também problemas envolvendo classes de equivalência de tamanhos variados, como o leitor verá na Seção 2.7. Na Seção 2.8 veremos uma maneira geral de tratar tais problemas através do Lema de Burnside. E na Seção 2.9 aplicaremos o Lema de Burnside a uma classe específica e interessante de problemas envolvendo simetrias: o de pinturas de poliedros. Além disso, na Seção 2.6 veremos a noção de *contagem dupla*, que frequentemente é confundida com a noção de relação de equivalência.

## 2.1 Permutações e Arranjos

Vejamos o problema clássico de permutações. Começemos com um problema simples.

**Problema 2.1.1.** De quantas maneiras podemos fazer uma fila com 4 pessoas?

Analisemos a seguinte resposta, bastante comum:

*“Para a escolha da primeira pessoa na fila, temos 4 possibilidades. Como não podemos repetir pessoas, restam 3 possibilidades de escolha para a segunda pessoa. Para a terceira pessoa na fila, restam 2 possibilidades, e para a quarta pessoa na fila, resta apenas uma possibilidade de escolha. Portanto, pela Regra do Produto (também conhecido como Princípio Multiplicativo), temos como resposta  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  filas possíveis.”*

A resposta obtida, 24, é correta, mas há uma falha no argumento acima, que é a seguinte: a Regra do Produto se refere à cardinalidade de um produto cartesiano. E o conjunto de todas as filas que se pode formar com estas quatro pessoas não é

um produto cartesiano! De fato, chamemos o conjunto destas quatro pessoas de  $M = \{A, B, C, D\}$ . O conjunto das possíveis filas pode ser escrito como

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) ; \forall i, x_i \in M \text{ e } \forall i \neq j, \text{ vale } x_i \neq x_j\}. \quad (2.1)$$

Temos que  $X$  é um subconjunto do produto cartesiano  $M \times M \times M \times M = M^4$ , mas  $X$  não é um produto cartesiano de conjuntos pois, caso contrário,  $X$  teria quádruplas com entradas repetidas. Portanto, não é correto aplicar diretamente a Regra do Produto. Por outro lado, uma pequena modificação corrige o argumento. Vejamos.

**1ª Solução do Problema 2.1.1.** Para a escolha da primeira pessoa na fila, temos 4 possibilidades. Logo, podemos dividir o conjunto  $X$  das permutações descrito em (2.1) em quatro conjuntos, a depender da primeira pessoa na fila. Note que estes quatro conjuntos são disjuntos. Pela *Regra da Soma* (também conhecida como Princípio Aditivo), o número total de filas é igual à soma das cardinalidades de cada um desses quatro conjuntos, os quais têm todos a mesma cardinalidade, igual à quantidade de permutações de 3 elementos. Logo,  $|X|$  é igual a 4 vezes a quantidade de permutações de três elementos. Pelo mesmo argumento, a quantidade de permutações de três elementos é igual a 3 vezes a quantidade de permutações de dois elementos. Novamente, pelo mesmo argumento, a quantidade de permutações de dois elementos é igual a 2 vezes a quantidade de permutações de um elemento. E a quantidade de permutações de um elemento é igual a um. A partir das observações anteriores, concluímos que  $|X| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .  $\square$

A seguir, eis uma segunda solução do problema.

**2ª Solução do Problema 2.1.1.** Criaremos uma bijeção  $\phi$  entre o conjunto  $X$  das permutações de  $M = \{A, B, C, D\}$  e um conjunto  $Y = Y_4 \times Y_3 \times Y_2 \times Y_1$ , sendo que  $|Y_i| = i$ . Vejamos a ideia para definir esta função  $\phi : X \rightarrow Y$ . Seja  $Y_i = \{1, \dots, i\}$ , e considere a ordem alfabética no conjunto  $M = \{A, B, C, D\}$ . Dada uma permutação em  $X$ , digamos  $(B, D, A, C)$ , associaremos esta permutação a um elemento  $(y_4, y_3, y_2, y_1)$  de  $Y$  da seguinte maneira: a primeira entrada  $y_4$  será a posição alfabética da primeira entrada da permutação. No caso de  $(B, D, A, C)$ , teremos  $y_4 = 2$ , pois  $B$  é a segunda letra na ordem alfabética. A segunda entrada  $y_3$  será a posição relativa da segunda entrada da permutação, excluindo-se a primeira entrada. Por exemplo, no caso analisado, a segunda entrada da permutação é  $D$  que, dentre  $\{A, C, D\}$ , é terceira letra, e assim por diante. Por exemplo, no caso analisado,  $\phi((B, D, A, C)) = (2, 3, 1, 1)$ . Como  $\phi$  é uma bijeção, a Proposição 1.3.1 nos diz que  $|X| = |Y|$ . Como o conjunto  $Y$  é um produto cartesiano, temos que  $|Y| = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  pela Regra do Produto. Assim, concluímos que  $|X| = 24$ .  $\square$

Vários nomes diferentes são utilizados para representar o mesmo conceito, como lista, fila, e o mais usual deles: *permutação*. Para uma demonstração geral do número de permutações de  $n$  elementos, usaremos indução, como veremos na proposição a seguir. Motivados pelo Problema 2.1.1, definimos  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 2 \cdot 1$ , que é chamado de *fatorial de  $n$*  ou  *$n$  fatorial*.



**Proposição 2.1.2.** *O número de permutações de  $n$  objetos distintos é igual a  $n!$ .*

Poderíamos adaptar a primeira ou a segunda solução do Problema 2.1.1, mas faremos a prova por indução, que é um caminho curto e elegante.

*Demonstração.* Para  $n = 1$ , o conjunto tem em questão apenas um elemento. Logo, existe apenas uma permutação. Como  $1! = 1$ , temos a base de indução.

Suponha que o resultado seja válido para um certo  $n$ , ou seja, suponha que o número de permutações de qualquer conjunto com  $n$  elementos seja igual a  $n!$ .

Considere agora um conjunto  $M$  com  $n + 1$  elementos. Analogamente ao que escrevemos em (2.1), uma permutação dos elementos de  $M$  é uma  $(n + 1)$ -upla  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  cujas entradas são todos elementos de  $X$ , e não há repetições. Contemos quantas são as permutações de  $X$ . Para a escolha da primeira entrada,  $x_1$ , há  $n + 1$  possibilidades. Para cada uma dessas possibilidades, restam  $n$  elementos a serem distribuídos nas entradas restantes. Pela hipótese de indução, o número de arrumações dos  $n$  elementos restantes é igual a  $n!$ . Logo, pela *Regra da Soma*, temos que o total de permutações em  $X$  é igual a  $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ .

Assim, pelo Princípio de Indução, concluímos que o número de permutações de  $n$  objetos distintos é igual a  $n!$  para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

A seguir, vejamos a fórmula para o número de maneiras de se escolher, com ordem,  $k$  objetos dentre  $n$  objetos, que chamaremos de *arranjo* de  $k$  objetos escolhidos dentre  $n$ , ou *arranjo de  $n$  escolhe  $k$* , com  $1 \leq k \leq n$ . Note que um arranjo de  $n$  objetos escolhidos dentre  $n$  é uma permutação. Ou seja, permutação é um caso particular de arranjo. Observamos que alguns livros não utilizam o termo arranjo, sendo o termo *permutação* utilizado para ambos, arranjo e permutação.

**Proposição 2.1.3.** *Seja  $A$  conjunto com  $|A| = n$ . Então o número de  $k$ -uplas ordenadas  $(a_1, \dots, a_k) \in A \times \dots \times A$  sem elementos repetidos é igual a*

$$(n)_k := n(n - 1) \cdots (n - k + 1).$$

Há várias notações diferentes na literatura para  $(n)_k$ , como  $A_n^k$  ou  $P(n, k)$ . Escolhemos a notação  $(n)_k$ , que é comum em ciência da computação, por uma razão mnemônica: ela nos lembra de começar com  $n$  e ir multiplicando, por  $k$  vezes, o resultado pelo número anterior subtraído de um. Como o leitor pode observar, há  $k$  fatores em  $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ .

*Demonstração.* Fixando um  $k \in \mathbb{N}$  qualquer, pode-se fazer a prova por indução em  $n$ , para  $n \geq k$ . Como a prova é bastante similar à da Proposição 2.1.2, será omitida aqui. Fica para o leitor diligente escrevê-la em detalhes.  $\square$

A expressão do enunciado

$$n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$$

não é muito elegante, pois envolve reticências... Para melhorá-la esteticamente, vamos escrevê-la em termos da função fatorial. Multiplicando e dividindo por  $(n - k)!$ , temos que

$$n(n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n(n - 1) \cdots (n - k + 1) \cdot (n - k)!}{(n - k)!} = \frac{n!}{(n - k)!},$$

que é uma fórmula mais sucinta do que  $n(n - 1) \cdots (n - k + 1)$ . Além disso, para que a fórmula acima faça sentido quando  $k = n$ , é necessário definir  $0! = 1$ . Em resumo, escreveremos sempre

$$(n)_k = \frac{n!}{(n - k)!}, \text{ para quaisquer } 0 \leq k \leq n \text{ inteiros,}$$

que também é chamado de número de *arranjos* de  $k$  elementos dentre  $n$  objetos distintos. Um caso particular importante é o caso  $k = n$  visto anteriormente, que é o número de maneiras para colocar  $n$  elementos em  $n$  posições numa fila, dado por  $(n)_n = n!$ .

É comum omitir detalhes quando se escreve uma solução que faz uso da Regra do Produto, para evitar que a leitura se torne enfadonha. Por exemplo, vejamos o seguinte problema:

**Problema 2.1.4.** No jogo de xadrez, a torre ataca todas as casas em sua coluna e linha. De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e uma torre preta no tabuleiro de forma que elas não se ataquem? Veja a Figura 2.1 para uma ilustração.

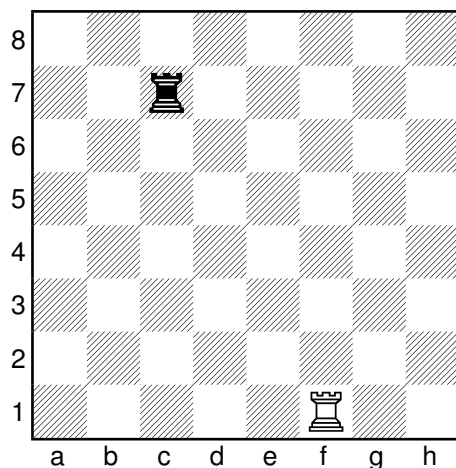


Figura 2.1. Torres que não se atacam.

Uma solução deste problema pode ser simplesmente: para escolher a posição da torre branca, temos 64 possibilidades. Escolhida a posição da torre branca, restam  $64 - 15 = 49$  posições possíveis para a torre preta (são 15 casas excluídas

pela linha e coluna que a torre branca ocupa). Logo, temos  $64 \cdot 49 = 3136$  maneiras de dispor as torres no tabuleiro.

Note que, na solução acima, todos os detalhes tais como feito na primeira ou segunda solução do Problema 2.1.1 foram omitidos. Mas atenção! É preciso tomar uma precaução: checar que, qualquer que seja a posição do primeiro objeto (no caso, a torre branca), haja sempre o mesmo número de possibilidades para o segundo objeto (no caso, as 49 possibilidades da torre preta), e assim por diante, caso seja um produto com mais fatores. Por exemplo, vejamos o problema a seguir.

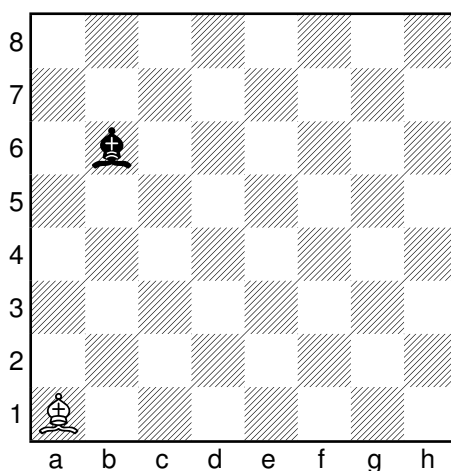


Figura 2.2. Bispos que não se atacam.

**Problema 2.1.5.** No jogo de xadrez, o bispo ataca e se movimenta por todas as casas que estejam em alguma diagonal da casa onde ele estiver. Note que, se um bispo começar numa casa de uma certa cor, então permanecerá para sempre em casas desta cor inicial. Na Figura 2.2 são mostrados dois bispos, um de cor branca, e outro de cor preta, os quais não se atacam, sendo que ambos caminham por casas de cor preta. De quantas maneiras podemos colocar um bispo branco e um bispo preto, ambos de casas pretas, de maneira que eles não se ataquem?

Um leitor afobado talvez apresentasse a seguinte solução equivocada:

*“Para a escolha da posição do bispo branco, temos 42 possibilidades. Escolhida a posição do bispo branco, como ilustrado na Figura 2.2, restam  $42 - 8 = 34$  casas para colocar o bispo preto. Logo, temos como resposta  $42 \cdot 34 = 1428$  modos de colocar os dois bispos de maneira que eles não se ataquem.”*

A falha no argumento acima está no fato que, diferentemente do Problema 2.1.4 a respeito de torres, o número de casas que o bispo branco alcança *depende* de sua posição. Na Figura 2.2, o bispo branco na casa a1 alcança oito casas (incluindo a casa onde ele está). Logo, nesta situação, restam 34 casas para colocar

o bispo preto. Entretanto, como se pode ver na Figura 2.3, o bispo branco na casa d4 ataca 14 casas (incluindo a casa onde ele está). Por isso, o argumento anterior é falho. Para corrigir o argumento e chegar à resposta correta, veja o Exercício 2.1.8.

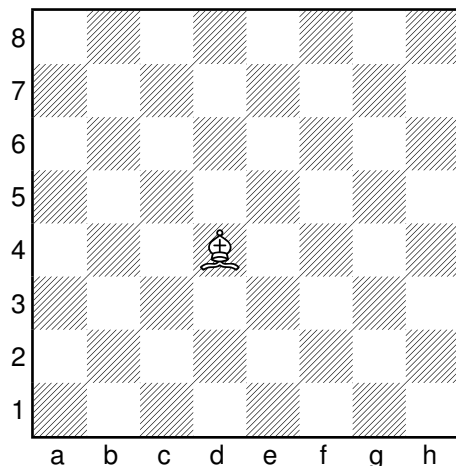


Figura 2.3. Bispo branco em d4 alcança 14 casas.

## Exercícios

**Exercício 2.1.1.** De quantas maneiras podemos fazer uma fila com  $n$  pessoas?

**Exercício 2.1.2.** Seja  $A$  conjunto com  $n$  elementos. Quantas são as funções sobrejetoras  $f : A \rightarrow A$ ? Quantas são as funções injetoras  $f : A \rightarrow A$ ? Quantas são as funções bijetoras  $f : A \rightarrow A$ ?

**Exercício 2.1.3.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos. Quantas são as funções injetoras  $f : A \rightarrow B$ ?

**Exercício 2.1.4.** Um campeonato é disputado por 12 clubes em rodadas de 6 jogos cada. De quantos modos é possível realizar a primeira rodada?

**Dica:** comece colocando os times em uma fila.

**Exercício 2.1.5.** Seja  $n \geq 4$ . Quantas são as permutações dos números  $1, 2, \dots, n$  tais que o número que ocupa a  $k$ -ésima posição é inferior ou igual a  $k + 4$ , para todo  $k$ ?

**Exercício 2.1.6.** Seja  $n \geq 3$ . Quantas são as permutações dos números  $1, 2, \dots, n$  tais que o número que ocupa a  $k$ -ésima posição é estritamente maior do que  $k - 3$ , para todo  $k$ ?

**Exercício 2.1.7.** Numa corrida de Fórmula Indy há 27 carros, sendo três de cada equipe (ou seja, há 9 equipes). A largada é feita com três filas paralelas de nove carros. Sabendo que cada cada equipe deve ter um de seus carros em cada fila, de quantos modos a largada pode ser feita? Considere os carros distintos.

**Exercício 2.1.8.** Encontre a resposta correta do Problema 2.1.5.

**Dica:** Separe em casos de acordo com a posição do, digamos, bispo branco, e aplique a Regra da Soma.

**Exercício 2.1.9.** No xadrez, o cavalo se move ou ataca da seguinte maneira: uma casa em diagonal e, em seguida, uma casa na horizontal ou vertical. Por exemplo, o cavalo em e6 da Figura 2.4 ataca as casas c5, c7, d4, d8, f4, f8, g5 e g7. O bispo, como já dissemos, se move para ou ataca qualquer casa em sua diagonal. Considere um bispo preto que ande em casas pretas, e um cavalo branco (que pode estar em casas de qualquer cor). De quantas maneiras podemos dispor este bispo e este cavalo no tabuleiro de maneira que eles não se ataquem?

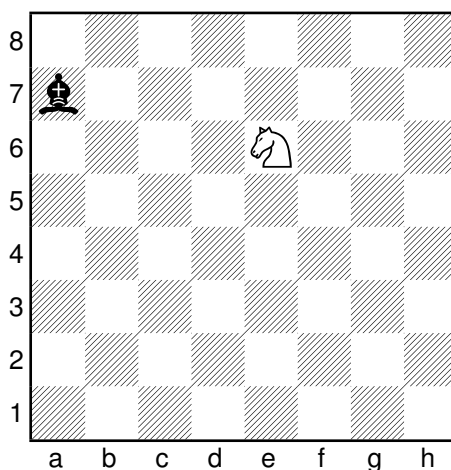


Figura 2.4. Bispo preto e cavalo branco.

## 2.2 Permutações com Repetição

Por *anagrama* de uma certa palavra entendemos uma permutação qualquer das letras desta palavra, ainda que esta permutação não tenha sentido algum. Por exemplo, LIVRES é um anagrama de SERVIL, bem como EILSVR, sendo que este último não é uma palavra encontrada no dicionário.

**Problema 2.2.1.** Quantos são os anagramas da palavra TATU?

**Solução:** Temos quatro letras na palavra TATU. Entretanto, a resposta não é 4!, pois temos duas letras T repetidas. Começaremos portanto “distinguindo” estas letras T repetidas. Assim, teremos as letras  $\{T_1, A, T_2, U\}$ . Definamos  $X$  como o conjunto das permutações destas quatro letras,  $T_1, A, T_2$  e  $U$ . Ou seja,

$$X = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \{T_1, A, T_2, U\} \text{ para } i = 1, \dots, 4 \text{ e } x_j \neq x_i \text{ para } i \neq j \right\}.$$

Da seção anterior, sabemos que  $|X| = 4!$ . Nosso objetivo agora é definir uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$  tal que cada classe de equivalência de  $\mathcal{R}$  corresponda a um anagrama da palavra TATU. Sejam  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  e  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  elementos de  $X$ . Diremos que

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \sim (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

se

$$\forall i = 1, \dots, 4, \quad x_i \in \{T_1, T_2\} \iff y_i \in \{T_1, T_2\}.$$

Pode parecer confusa à primeira vista, mas esta definição é simplesmente a seguinte: duas permutações em  $X$  estarão na mesma classe de equivalência se têm o  $T_1$  possivelmente trocado por  $T_2$ , e as demais letras nas mesmas posições. Por exemplo,

$$(T_1, A, U, T_2) \sim (T_2, A, U, T_1),$$

e também

$$(A, U, T_1, T_2) \sim (A, U, T_2, T_1),$$

e assim por diante. Notemos também que  $(T_1, A, U, T_2) \sim (A, U, T_1, T_2)$ . Bem, cada classe de equivalência representa *um* anagrama da palavra TATU. Como  $X$  tem  $4! = 24$  elementos, e cada classe de equivalência tem dois elementos, pela Proposição 1.5.4, há  $24/2 = 12$  classes de equivalência, que é a resposta do problema. Veja a Figura 2.5.  $\square$

$(A, T_2, T_1, U)$ $(A, T_1, T_2, U)$	$(U, T_2, T_1, A)$ $(U, T_1, T_2, A)$	$(T_2, T_1, A, U)$ $(T_1, T_2, A, U)$	$(T_2, A, T_1, U)$ $(T_1, A, T_2, U)$
$(A, T_2, U, T_1)$ $(A, T_1, U, T_2)$	$(U, A, T_2, T_1)$ $(U, A, T_1, T_2)$	$(T_2, A, U, T_1)$ $(T_1, A, U, T_2)$	$(T_2, T_1, U, A)$ $(T_1, T_2, U, A)$
$(A, U, T_2, T_1)$ $(A, U, T_1, T_2)$	$(U, T_2, A, T_1)$ $(U, T_1, A, T_2)$	$(T_2, U, A, T_1)$ $(T_1, U, A, T_2)$	$(T_2, U, T_1, A)$ $(T_1, U, T_2, A)$

Figura 2.5. Relação de equivalência  $\mathcal{R}$ : cada classe de equivalência corresponde a um anagrama da palavra TATU.

**Problema 2.2.2.** Quantos são os anagramas da palavra *banana*?

*Solução:* Para resolver este problema, vamos começar fazendo uma distinção de cada letra repetida. Por exemplo:

$$b \ a_1 \ n_1 \ a_2 \ n_2 \ a_3$$

Se as letras fossem diferentes, como acima, o total de permutações seria  $6!$ , pois são seis letras. Entretanto, essa ainda não é a resposta. De fato,  $6!$  é maior do que o número de anagramas desejado. Por exemplo,  $a_1 \ a_2 \ a_3 \ b \ n_1 \ n_2$  e  $a_1 \ a_2 \ a_3 \ b \ n_2 \ n_1$  foram contados como diferentes em  $6!$ , mas na verdade correspondem ao *mesmo* anagrama  $aaabnn$ . Assim, pela Proposição 1.5.4, temos como resposta  $\frac{6!}{2!3!}$ .  $\square$

**Proposição 2.2.3.** Considere  $n$  objetos, sendo  $j_1$  objetos do tipo 1, ..., até  $j_k$  objetos do tipo  $k$ , valendo que  $j_1 + \dots + j_k = n$ . O número de permutações destes  $n$  objetos é dado por

$$\binom{n}{j_1, \dots, j_k} := \frac{n!}{j_1! \dots j_k!}.$$

*Demonstração.* Mesma ideia dos problemas anteriores.  $\square$

**Observação.** A notação  $\binom{n}{j_1, \dots, j_k}$  para permutação de  $n$  objetos com repetições  $j_1, \dots, j_k$  não é uma unanimidade na literatura, mas tem suas vantagens.

## Exercícios

**Exercício 2.2.1.** Quantas são as permutações da palavra *Mississipi*? Quantos são os anagramas da palavra PINDAMONHANGABA?

**Exercício 2.2.2.** Uma formiga vai de  $A$  a  $B$  seguindo sempre para cima ou para a direita, andando sempre sobre os elos de um quadriculado  $10 \times 10$ , veja o desenho da Figura 2.6. Quantos são os caminhos possíveis? Quantos são os caminhos possíveis passando por  $C$  e  $D$ ?

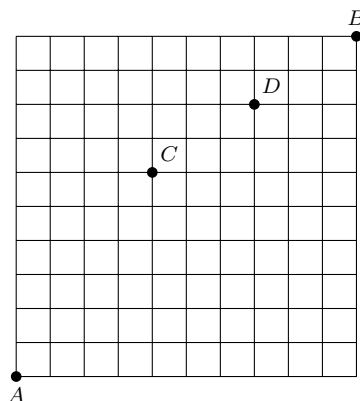


Figura 2.6. Formiga vai de  $A$  a  $B$  no reticulado.

**Exercício 2.2.3.** Uma formiga está no vértice  $A$  de um cubo  $10 \times 10 \times 10$ , veja a Figura 2.7, e vai para o vértice oposto  $B$  andando sobre o elos nos quadriculados sobre a superfície do cubo, sem nunca diminuir a distância ao seu ponto de partida  $A$ . Quantos são os percursos possíveis?

**Dica:** cuidado para não contar uma mesma trajetória mais de uma vez.

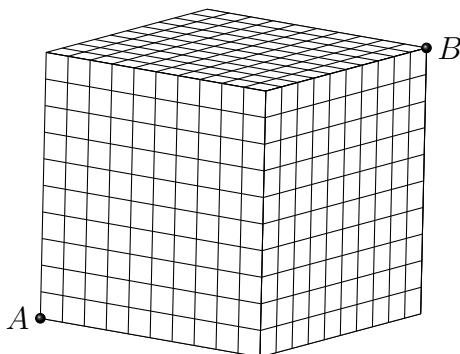


Figura 2.7. Formiga vai de  $A$  a  $B$  no cubo.

**Exercício 2.2.4.** Agora imagine o cubo  $10 \times 10 \times 10$  da Figura 2.7 como elos ligando pontos de  $\mathbb{Z}^3$ . A formiga está no vértice  $A$  e vai para o vértice oposto  $B$  andando sobre o elos de  $\mathbb{Z}^3$  que pertencem ao cubo, ou seja, a formiga pode entrar no cubo. Supondo novamente que ela nunca diminui a distância ao seu ponto de partida  $A$ , quantos são os percursos possíveis?

**Exercício 2.2.5.** Aplicamos a propriedade distributiva e fazemos todos os produtos possíveis em

$$(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b).$$

Feito isso, aplicamos a propriedade comutativa e agrupamos os termos iguais. Ao final, qual será o coeficiente de  $a^2b^3$ ?

**Exercício 2.2.6.** Aplicamos a propriedade distributiva e fazemos todos os produtos possíveis em

$$(a + b)^{28}.$$

Feito isso, aplicamos a propriedade comutativa e agrupamos os termos iguais. Ao final, qual será o coeficiente de  $a^{11}b^{17}$ ?

**Exercício 2.2.7.** Qual o coeficiente de  $x^2y^5z^3$  na expansão de  $(x + y + z)^{10}$ ?

**Exercício 2.2.8.** Qual o coeficiente de  $a^ib^jc^k$  na expansão de  $(a + b + c)^n$ ? Dê a resposta em função de  $i, j, k$ .

**Exercício 2.2.9.** De quantas maneiras podemos separar um grupo de  $n$  pessoas em  $k$  grupos, sendo que o primeiro grupo deve ter  $n_1$  pessoas, o segundo grupo deve ter  $n_2$  pessoas, e assim por diante? Assuma que cada grupo tenha um nome diferente.



**Exercício 2.2.10.** Prove que

$$\frac{(k!)!}{(k!)^{k-1}}$$

é um número inteiro. **Dica:** conte o número de permutações de objetos de  $(k-1)!$  tipos diferentes, sendo  $k$  objetos de cada tipo.

**Exercício 2.2.11.** Seja  $n, n_1, \dots, n_k$  naturais tais que  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Prove a igualdade

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

de duas maneiras, usando a definição de combinação e via um argumento combinatório.

**Observação:** para a noção de argumento combinatório, veja a Seção 2.4.

**Exercício 2.2.12.** Quantas são as permutações de quatro letras escolhidas dentre as letras da palavra Mississippi?

## 2.3 Permutações Circulares

**Problema 2.3.1.** De quantas maneiras podemos colocar quatro pessoas numa mesa redonda?

A solução deste problema segue a mesma ideia de antes: encontrar um conjunto  $X$  munido de uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$  tal que cada *classe de equivalência* de  $\mathcal{R}$  corresponda a uma maneira de dispor as quatro pessoas na mesa. Bem, aqui não há repetição de pessoas, pois cada pessoa é única, mas em certo

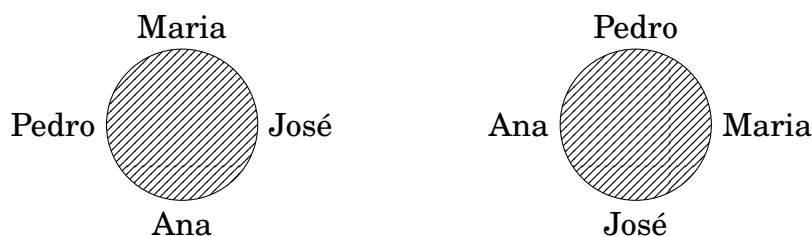


Figura 2.8. Uma mesma disposição das pessoas na mesa.

sentido há repetição de, digamos, “arrumações”. Digamos que as pessoas sejam Pedro, Maria, José e Ana. Observe que os desenhos na Figura 2.8 correspondem à *mesma* disposição das pessoas, pois as posições relativas são iguais, e não existe *canto* ou *cabeceira* numa mesa redonda. Não estava inteiramente claro no enunciado que só interessavam as posições relativas, mas subentende-se isto

pelo uso da expressão *mesa redonda*. Uma parte das questões de análise combinatória frequentemente consiste em interpretação do enunciado, em deduzir o que se pede através do bom senso.

Para contar quantas são as configurações desejadas, vamos começar numerando as cadeiras no sentido, digamos, anti-horário. Veja a Figura 2.9.

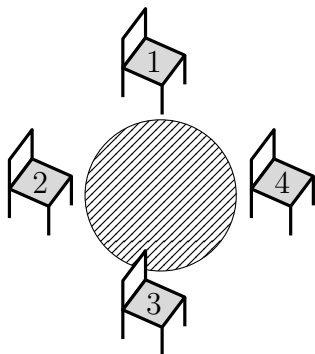


Figura 2.9. Cadeiras numeradas.

Para facilitar a escrita, vamos representar cada nome pela sua letra inicial. José será representado por J, Ana será representada por A e assim por diante. Considerando as cadeiras numeradas, o conjunto de configurações será dado por

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) ; x_i \in \{J, A, P, M\} \text{ e } x_i \neq x_j \text{ para todos } i \neq j\}.$$

Por exemplo, o elemento  $(P, M, J, A) \in X$  corresponde a Pedro estar sentado na cadeira 1, Maria estar sentada na cadeira 2, José estar sentado na cadeira 3 e Ana estar sentada na cadeira 4.

Pelos resultados da seção anterior sobre permutações,  $|X| = 4! = 24$ . Queremos agora criar uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$  tal que cada classe de equivalência represente *uma* disposição das pessoas em torno da mesa. Para isso, devemos nos perguntar: quando duas configurações em  $X$  representam uma mesma disposição das pessoas em torno da mesa? A resposta é: quando uma configuração puder ser obtida a partir de uma “rotação” da outra.

Por exemplo,  $(J, A, P, M)$ ,  $(A, P, M, J)$ ,  $(P, M, J, A)$  e  $(M, J, A, P)$  são elementos distintos em  $X$  que representam *a mesma disposição* de pessoas em torno da mesa. Note que em qualquer destas configurações, as posições *relativas* são as mesmas: Maria estará do lado esquerdo de José, que estará do lado esquerdo de Ana, que estará do lado esquerdo de Pedro.

**Problema 2.3.2.** De quantas maneiras podemos fazer uma ciranda com  $n$  crianças?

**Solução:** Agora que já temos o exemplo anterior, basta mudar os valores.  $X$  será o conjunto de permutações de  $n$  elementos, logo  $|X| = n!$ . Sejam  $x, y \in X$ , ou seja,  $x$  e  $y$  são configurações das crianças numerando-se as cadeiras. A relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$  será definida por  $x \sim y$  se, e somente se, a arrumação  $x$

(J, A, P, M)	(J, P, M, A)	(J, M, P, A)
(A, P, M, J)	(P, M, A, J)	(M, P, A, J)
(P, M, J, A)	(M, A, J, P)	(P, A, J, M)
(M, J, A, P)	(A, J, P, M)	(A, J, M, P)
(J, A, M, P)	(J, P, A, M)	(J, M, A, P)
(A, M, P, J)	(P, A, M, J)	(M, A, P, J)
(M, P, J, A)	(A, M, J, P)	(A, P, J, M)
(P, J, A, M)	(M, J, P, A)	(P, J, M, A)

Figura 2.10. Relação de equivalência  $\mathcal{R}$ : cada classe de equivalência corresponde a uma disposição das quatro pessoas em torno da mesa redonda.

puder ser obtida a partir de uma rotação da arrumação  $y$  no sentido do exemplo anterior.

Como são  $n$  rotações possíveis, cada classe de equivalência em  $\mathcal{R}$  terá  $n$  elementos. Logo, pela Proposição 1.5.4, teremos  $\frac{n!}{n} = (n-1)!$  classes de equivalência, que é a resposta do problema.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 2.3.1.** De quantas maneiras podemos posicionar 15 pessoas em uma mesa redonda de modo que certas duas pessoas não fiquem juntas?

**Exercício 2.3.2.** De quantos modos podemos fazer uma pulseira com as pedras topázio, turmalina, ametista e quartzo se

- a pulseira pode entrar no braço nos dois sentidos?
- a pulseira tem um relógio?

**Exercício 2.3.3.** De quantas maneiras podemos pintar as faces de um dodecaedro regular usando doze cores distintas, sem repetir cores? Veja a Figura 2.11 para uma ilustração de um dodecaedro.

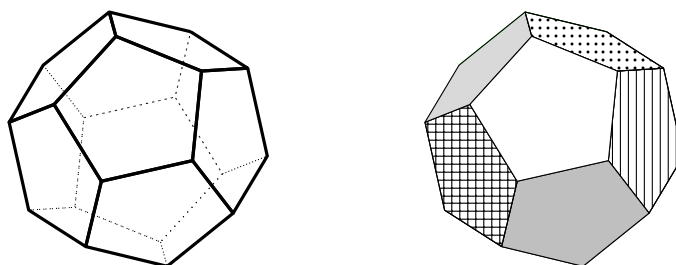


Figura 2.11. Dodecaedro.

**Dica:** A resposta *não* é  $\frac{12!}{12}$ .

**Exercício 2.3.4.** De quantas maneiras podemos pintar as faces de um icosaedro regular usando vinte cores distintas, sem repetir cores? Veja a Figura 2.12 para uma ilustração de um icosaedro.

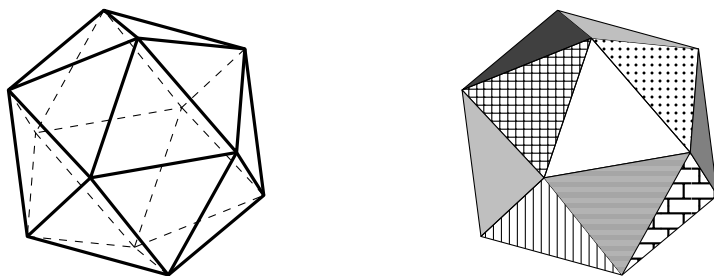


Figura 2.12. Icosaedro.

**Exercício 2.3.5.** De quantas maneiras podemos fazer uma pulseira que contenha as seguintes pedras: duas esmeraldas, três ametistas e quatro safiras, assumindo que a pulseira pode entrar no braço de dois modos?

**Exercício 2.3.6.** Defina, usando o bom senso, o que seria um *anagrama circular* de uma palavra. Quantos são os anagramas circulares da palavra MISSISSIPI?

## 2.4 Combinações e Argumentos Combinatórios

Estudemos agora a questão de escolher objetos sem que a ordem de escolha importe.

**Problema 2.4.1.** De quantas maneiras podemos escolher uma comissão de 3 pessoas escolhidas de um conjunto de 5 pessoas?

*Solução:* Digamos que as cinco pessoas sejam Ana, Bruno, Carlos, Daniela e Eduardo, que representaremos pelas letras A, B, C, D e E.

Seja  $X$  o conjunto de permutações de três elementos dentre estes cinco. Em outras palavras,

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) : \text{para todo } i, x_i \in \{A, B, C, D, E\} \text{ e } x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}.$$

Pelos resultados da Seção 2.1, sabemos que  $|X| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ . Entretanto, esta não é a resposta do problema. Por exemplo, em  $X$  as configurações (A,B,C) e (B,A,C) são distintas, mas correspondem ao mesmo grupo de pessoas.

Criamos então a seguinte relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$ . Dois elementos  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(y_1, y_2, y_3)$  do conjunto  $X$  serão equivalentes se existe uma bijeção  $h : \{x_1, x_2, x_3\} \rightarrow \{y_1, y_2, y_3\}$ . Em outras palavras, este dois elementos de  $X$

estarão na mesma classe de equivalência se  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(y_1, y_2, y_3)$  são as mesmas letras em posições possivelmente diferentes. Por exemplo,  $(A, B, C) \sim (B, A, C)$ , mas  $(A, B, C) \not\sim (A, B, E)$ .

Resta contar quantas são as classes de equivalência. O número de elementos em uma classe de equivalência qualquer é dado pelo número de permutações de 3 elementos, ou seja,  $3! = 6$ . Portanto, pela Proposição 1.5.4, o número de classes de equivalência é dado por

$$\frac{|X|}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 10.$$

Veja a Figura 2.13 para uma ilustração das classes de equivalência. □

(A, B, C)	(A, B, E)	(A, C, E)	(B, C, D)	(B, D, E)
(A, C, B)	(A, E, B)	(A, E, C)	(B, D, C)	(B, E, D)
(B, A, C)	(B, A, E)	(C, A, E)	(C, B, D)	(D, B, E)
(B, C, A)	(B, E, A)	(C, E, A)	(C, D, B)	(D, E, B)
(C, A, B)	(E, A, B)	(E, A, C)	(D, B, C)	(E, B, D)
(C, B, A)	(E, B, A)	(E, C, A)	(D, C, B)	(E, D, B)
(A, B, D)	(A, C, D)	(A, D, E)	(B, C, E)	(C, D, E)
(A, D, B)	(A, D, C)	(A, E, D)	(B, E, C)	(C, E, D)
(B, A, D)	(C, A, D)	(D, A, E)	(C, B, E)	(D, C, E)
(B, D, A)	(C, D, A)	(D, E, A)	(C, E, B)	(D, E, C)
(D, A, B)	(D, A, C)	(E, A, D)	(E, B, C)	(E, C, D)
(D, B, A)	(D, C, A)	(E, D, A)	(E, C, B)	(E, D, C)

Figura 2.13. Relação de equivalência  $\mathcal{R}$ : cada classe de equivalência corresponde a uma escolha de três pessoas.

**Proposição 2.4.2.** *O número de maneiras de escolher  $k$  objetos dentre  $n$ , com  $0 \leq k \leq n$ , é igual a*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* A demonstração deste resultado é a mesma do problema anterior: basta trocar 5 por  $n$  e 3 por  $k$ . □

Uma outra notação comum na literatura (embora com certo desuso atualmente) para o número de combinações  $\binom{n}{k}$  é dada por  $C_n^k$ .

Escolher objetos sem ordem (e sem repetição), como fizemos, pode ser refra-seado como escolher subconjuntos. Em outras palavras, a Proposição 2.4.2 pode ser reescrita como

**Proposição 2.4.3.** *Seja  $A$  um conjunto com  $n$  elementos, e seja  $0 \leq k \leq n$ . O número de subconjuntos de  $A$  com  $k$  elementos dentre  $n$  é igual a*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

**Observação 2.4.4.** Para  $0 \leq n < k$  inteiros definiremos  $\binom{n}{k} = 0$ , o que simplifica consideravelmente diversas fórmulas por vir. E é uma definição razoável, afinal quantas são as formas de se escolher digamos, cinco objetos dentre três disponíveis? Nenhuma.

**Observação 2.4.5.** Para  $k \geq 0$  inteiro e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , define-se “ $\alpha$  escolhe  $k$ ” da seguinte maneira:

$$\binom{\alpha}{k} := \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} & , \text{ para } k > 0, \\ 1 & , \text{ para } k = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Claro, não há um sentido combinatório para esta definição, pois não faz sentido dizer “escolha três objetos dentre quatro e meio objetos disponíveis”. Por outro lado, esta definição é útil e simplifica certas fórmulas, como veremos no Capítulo 3.

Vejamos agora um resultado de fundamental importância envolvendo combinações, que é chamado por alguns autores de *Identidade de Pascal*.

**Proposição 2.4.6** (Relação de Stifel). *Sejam  $n \geq k \geq 1$  naturais. Então*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \quad (2.4)$$

Daremos duas demonstrações desta importante identidade. Aproveitamos para comentar que *identidade* é um sinônimo de *fórmula*, *igualdade*. Também se usa a palavra *relação* como outro sinônimo de identidade, como na *Relação de Stifel* acima, mas não confunda este uso da palavra relação com o termo relação da forma que foi apresentada na Seção 1.5. Estes são usos diferentes da mesma palavra.

*1ª Demonstração.* Basta aplicar a fórmula de combinação e fazer algumas con-

tas. Começemos pelo lado direito de (2.4).

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\
 &= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k!} \\
 &= \frac{n!(n+1)}{(n-k+1)!k!} \\
 &= \binom{n+1}{k},
 \end{aligned}$$

como queríamos. □

**2ª Demonstração.** Faremos esta segunda demonstração via um *argumento combinatório*. Em palavras, vamos encontrar, de duas maneiras distantes, a resposta para um problema de combinatória. Como estas são duas respostas para um mesmo problema, elas devem ser iguais! Vejamos.

Vamos contar de quantas maneiras podemos escolher uma comissão de  $k$  pessoas dentre  $n+1$  pessoas disponíveis. Uma resposta é

$$\binom{n+1}{k},$$

pelo que vimos anteriormente. Agora vamos resolver este problema de outra maneira. Fixemos uma pessoa neste grupo, que chamaremos de Euclides, sem perda de generalidade.

O número total de comissões, pela Regra da Soma, é igual ao número de comissões nas quais Euclides *participa*, mais o número de comissões nas quais Euclides *não participa*. Contemos a quantidade de cada tipo de comissão.

O número de comissões nas quais Euclides participa é igual a  $\binom{n}{k-1}$ , pois basta escolher  $k-1$  das  $n$  pessoas distintas de Euclides.

O número de comissões nas quais Euclides não participa é igual a  $\binom{n}{k}$ , pois precisamos escolher  $k$  pessoas para compor a comissão, e há  $n$  pessoas disponíveis (Euclides não participará).

Assim, como  $\binom{n+1}{k}$  e  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$  são duas respostas para um mesmo problema (e ambas estão corretas!), concluímos que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$

como queríamos. □

A seguir, apresentamos um breve roteiro de como proceder para obter uma prova combinatória de um problema:

- (1) Encontre um problema de combinatório relacionado à fórmula que se deseja provar (esta é a parte que envolve imaginação). Em geral, um dos membros da fórmula nos dá pistas de qual deve ser este problema.
- (2) Encontre a resposta deste problema de duas maneiras distintas.
- (3) Conclua que as duas respostas são iguais, obtendo assim a fórmula desejada.

Por fim, comentamos que argumentos combinatórios não necessariamente envolvem combinações, embora isso aconteça com frequência. Um argumento de combinatório pode envolver permutações, permutações circulares, arranjos, permutações com repetição etc.

## Exercícios

**Exercício 2.4.1.** Verifique que, para  $\alpha \in \mathbb{N}$ , a definição (2.3) coincide com a definição (2.2) e também está de acordo com a Observação 2.4.4.

**Exercício 2.4.2.** Prove a Relação de Stifel no caso de combinação com  $\alpha$  real, ou seja, mostre que

$$\binom{\alpha + 1}{k} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k - 1}.$$

para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e todo inteiro  $k \geq 1$ .

**Exercício 2.4.3.** Prove que

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n - 1}{k - 1}$$

de duas maneiras distintas: usando a fórmula de combinação e usando um argumento combinatório.

**Dica:** considere  $n$  pessoas. Conte o número de comissões compostas por  $k$  pessoas, sendo que uma comissão deve ter um presidente.

**Exercício 2.4.4.** Prove que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}$$

de duas maneiras distintas: usando a fórmula de combinação e usando um argumento combinatório.

**Dica:** considere um grupo de  $n$  pessoas. Faça uma bijeção entre o conjunto das comissões com  $k$  pessoas e o conjunto das comissões com  $n - k$  pessoas.



**Exercício 2.4.5.** Em um certo hospital, trabalham os seguintes funcionários:

Sara Dores da Costa: reumatologista

Iná Lemos: pneumologista

Ester Elisa: enfermeira

Ema Thomas: traumatologista

Ana Lisa: psicanalista

K. Godói: proctologista

Inácio Filho: obstetra

De quantas maneiras os funcionários podem fazer uma fila? De quantas maneiras os funcionários podem sentar numa mesa redonda? De quantas maneiras os funcionários podem compor uma comissão formada por presidente, vice-presidente e suplente? De quantas maneiras os funcionários podem compor uma comissão de três pessoas sem distinção de cargo?

**Exercício 2.4.6.** Prove que

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

de duas maneiras, usando a definição de combinação, e via um argumento combinatório.

**Exercício 2.4.7.** Nas perguntas a seguir, assuma que os grupos não têm nomes.

- a) De quantas maneiras podemos separar 12 pessoas em dois grupos de 6 pessoas? **Dica:** a resposta *não* é  $\binom{12}{6}$ .
- b) De quantas maneiras podemos separar 30 pessoas em 6 grupos de 5 pessoas?
- c) De quantas maneiras podemos separar 30 pessoas em quatro grupos, sendo dois grupos de 6 pessoas, e dois grupos de 9 pessoas?

**Exercício 2.4.8.** Em um torneio de tênis com  $n$  jogadores, cada jogador joga com todos os outros adversários exatamente uma vez. Quantas são as partidas neste torneio?

**Exercício 2.4.9.** De quantas formas podemos pintar as faces de um cubo se são disponíveis trinta cores distintas, e não podemos pintar duas faces diferentes com a mesma cor?

**Exercício 2.4.10.** De quantas maneiras podemos pintar o paralelepípedo da Figura 2.14, cujas faces menores são quadrados congruentes e cujas faces maiores são retângulos congruentes, usando  $n \geq 6$  cores distintas, sem repetir cores?

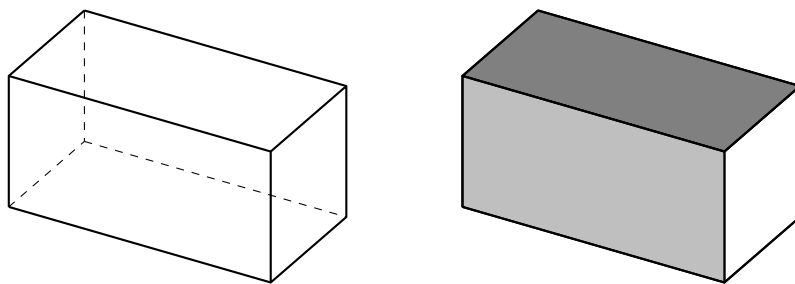


Figura 2.14. Paralelepípedo.

**Exercício 2.4.11.** Um homem tem 5 amigas e 7 amigos. Sua esposa tem 7 amigas e 5 amigos. De quantos modos eles podem convidar 6 amigos e 6 amigas, se cada um deve convidar 6 pessoas?

**Dica:** Regra da Soma ajuda.

**Exercício 2.4.12.** Reveja a definição de relação e tipos de relação na Seção 1.4. Seja  $X$  um conjunto com  $n$  elementos. Quantas são as relações  $\mathcal{R}$  em  $X$  tais que

- $\mathcal{R}$  é reflexiva?
- $\mathcal{R}$  é antirreflexiva?
- $\mathcal{R}$  é simétrica?
- $\mathcal{R}$  é antissimétrica?
- $\mathcal{R}$  é reflexiva e simétrica?
- $\mathcal{R}$  é antirreflexiva e simétrica?
- $\mathcal{R}$  é reflexiva e antissimétrica?
- $\mathcal{R}$  é antirreflexiva e antissimétrica?

**Observação 2.4.7.** O leitor talvez tenha se perguntado algo como “e quantas são as relações transitivas?”. E também “quantas são as relações de equivalência?”. O número de relações de equivalência será estudado no Exercício 3.1.17. Já a quantidade de relações transitivas não será estudada aqui, veja [Sloane, 1995] para mais informações.

**Exercício 2.4.13.** Sejam  $a, b \leq n$  naturais. Considere  $2n$  pessoas na fila de uma sorveteria que oferece dois sabores,  $A$  e  $B$ . Dessas  $2n$  pessoas,  $a$  pessoas preferem o sabor  $A$ ,  $b$  pessoas preferem o sabor  $B$  e as outras não têm preferência. São entregues, de maneira aleatória,  $n$  sorvetes do sabor  $A$  e  $n$  sorvetes do sabor  $B$  às pessoas na fila. Mostre que a probabilidade de que todos saiam satisfeitos é

$$\frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}$$

de duas maneiras distintas:

- a) Colocando as pessoas na fila numa certa ordem e supondo que o sorveteiro distribua os sorvetes de maneira aleatória.
- b) Supondo que o sorveteiro distribua os sorvetes numa certa ordem e que as pessoas cheguem aleatoriamente na sorveteria.

**Exercício 2.4.14.** Encontre o erro na solução a seguir do problema: *De um baralho, três cartas são retiradas ao acaso. Qual a probabilidade de não obter ases?*  
 Solução: o total de casos é dado por  $\binom{52}{3}$ . Para não se retirar um ás da primeira vez, há 48 possibilidades. Para não se retirar um ás da segunda, há 47 possibilidades. Para não se retirar um ás da terceira, 46. Logo, a resposta é  $\frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{\binom{52}{3}}$ .

**Exercício 2.4.15.** Mostre, por um argumento combinatório similar ao da Relação de Stifel, a chamada *Identidade de Vandermonde*:

$$\binom{B+V}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{B}{k} \binom{V}{p-k}. \quad (2.5)$$

**Dica:** Conte quantas são as comissões de  $p$  pessoas escolhidas em um grupo de  $n$  pessoas. Suponha que neste grupo de  $n$  pessoas, há  $B$  que torcem para o Bahia e  $V$  que torcem para o Vitória.

**Exercício 2.4.16.** A fórmula do exercício anterior, além de ser chamada de Identidade de Vandermonde, também é conhecida como Fórmula de Euler. A partir dela demonstre a chamada Fórmula de Lagrange:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

**Exercício 2.4.17.** Duas pessoas jogam, cada uma,  $n$  vezes uma moeda honesta. Mostre que a probabilidade do número de caras obtidas pelas duas pessoas ser a mesma é igual a

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

**Exercício 2.4.18.** Mostre, por um argumento combinatório, que

$$\sum_{\substack{0 \leq j, \ell, k \leq p \\ j+\ell+k=p}} \binom{a}{j} \binom{b}{\ell} \binom{c}{k} = \binom{a+b+c}{p}.$$

**Exercício 2.4.19.** Mostre, por um argumento combinatório, que

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

**Exercício 2.4.20.** Mostre de duas maneiras, por indução e via um argumento combinatório, que

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! = n! - 1.$$

**Dica:** para a prova via argumento combinatório, conte o número de permutações de  $\{1, \dots, n\}$  que têm alguma  $k$ -ésima entrada diferente de  $k$ . Note que uma forma de contar tais permutações é separando-as de acordo com a primeira vez que o número que aparece na  $k$ -ésima entrada não é o número  $k$  (ou seja, as anteriores são  $1, \dots, k-1$ , nessa ordem, e a entrada a seguir não é  $k$ ).

**Exercício 2.4.21.** Prove de duas maneiras, por indução e via um argumento combinatório, que

$$2^n - 1 = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}.$$

**Dica:** conte o número de subconjuntos não vazios de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , separando-os de acordo com o maior elemento.

**Exercício 2.4.22.** Prove, por um argumento combinatório, que

$$2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1.$$

**Exercício 2.4.23.** Prove a identidade

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

via um argumento combinatório.

**Dica:** conte o número de comissões de  $n$  pessoas escolhidas num grupo de  $n$  professores de matemática e  $n$  professores de física, sendo que a comissão deve ter um presidente, e este deve ser professor de física.

**Exercício 2.4.24.** Prove que

$$\sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^{p-k} \binom{n}{k} \binom{n}{j} \binom{n}{p-k-j} = \binom{3n}{p}.$$

**Exercício 2.4.25.** Mostre, fazendo contas, que

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3 \binom{n+1}{4}.$$

Agora prove o mesmo resultado via um argumento combinatório.

**Dica:** pense no conjunto de pares não-ordenados de pares não-ordenados.

**Exercício 2.4.26.** Três vértices distintos são escolhidos ao acaso dentre os vértices de um cubo. Qual a probabilidade de que estes três vértices formem um triângulo equilátero? Veja a Figura 2.15 para uma ilustração.

**Exercício 2.4.27.** Prove que

$$\binom{n+2}{p+2} = \binom{n}{p} + 2 \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p+2}$$

de duas maneira distintas. Uma fazendo contas e outra seguindo um argumento combinatório semelhante ao da Relação de Stifel.

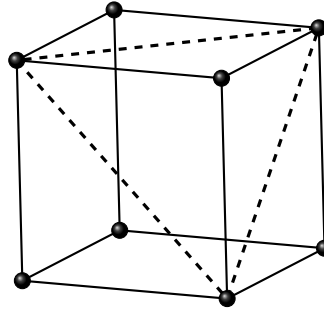


Figura 2.15. Exemplo de vértices formando um triângulo equilátero.

**Exercício 2.4.28.** Mostre, por um argumento combinatório, que  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

**Dica:** conte o número de subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$ .

**Exercício 2.4.29.** Prove que

$$\binom{n+3}{p+3} = \binom{n}{p} + 3\binom{n}{p+1} + 3\binom{n}{p+2} + \binom{n}{p+3}$$

via um argumento combinatório.

**Exercício 2.4.30.** Mostre que o produto de  $k$  números consecutivos é sempre divisível por  $k!$ .

**Dica:** mostre que o quociente desejado é uma combinação.

**Exercício 2.4.31.** Sejam  $m \leq k \leq n$ . Prove de duas maneiras, por um argumento combinatório e fazendo contas, que

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}.$$

**Exercício 2.4.32.** Quantas são as funções estritamente crescentes  $f : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ?

**Exercício 2.4.33.** Prove, por um argumento combinatório, que

$$\binom{N+1}{M+1} = \sum_{p=0}^N \binom{p}{q} \binom{N-p}{M-q},$$

para qualquer  $q \in \{0, \dots, M\}$ .

**Dica:** conte quantos são os subconjuntos de  $M+1$  elementos do conjunto  $\{1, 2, \dots, N+1\}$ , e não se esqueça da convenção  $\binom{n}{k} = 0$  para  $k > n$ .

## 2.5 Combinações com Repetição

**Problema 2.5.1.** Uma fábrica produz 4 tipos de bombons que são vendidos em caixas de 10 bombons (podem ser de um mesmo tipo ou não). Quantas caixas diferentes podem ser formadas?

*Solução:* Façamos uma bijeção entre cada escolha possível e uma configuração de “palitinhos e sinais de mais”. Por exemplo,

$$++ | +++ | +++ | ++$$

representa dois bombons do tipo 1, três do tipo 2, três do tipo 3 e dois do tipo 4. Note que são apenas três palitinhos. Por que não colocar palitinhos nos extremos? Simplesmente porque não é necessário. Observe, por exemplo, como se faz a separação silábica de uma palavra de quatro sílabas: *per-mu-ta-ção*. São necessários apenas três hífen.

Agora que temos uma bijeção, pela Proposição 1.3.1 sabemos que o número buscado é o de permutações de  $10 + 4 - 1 = 13$  objetos com repetição de 10 e  $4 - 1 = 3$ . Pela Proposição 2.2.3 a respeito de permutações com repetição, obtemos como resposta  $\frac{13!}{10!3!}$ .

□

**Proposição 2.5.2.** O número de maneiras de escolher  $k$  objetos dentre  $n$  tipos possíveis de objetos é igual a

$$\binom{n}{k} := \frac{(k + n - 1)}{k!(n - 1)!}.$$

*Demonstração.* O argumento é exatamente o mesmo do problema anterior. Primeiro notamos que cada possível escolha corresponde a uma solução, em inteiros não negativos, da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k,$$

onde  $x_i$  representa o número de objetos do tipo  $i$ . Daí, para calcular o número de soluções da equação acima, fazemos a bijeção citada com o conjunto das permutações (com repetição) de  $k$  palitinhos e  $n - 1$  sinais de mais, cuja quantidade total é dada por

$$\frac{(k + n - 1)}{k!(n - 1)!}.$$

□

Note a semelhança nas notações  $\binom{n}{k}$  e  $\binom{n}{k}$ , a qual é intencional. O símbolo  $\binom{n}{k}$  denota o total de maneiras de se escolher  $k$  objetos dentre  $n$  objetos distintos, e o símbolo  $\binom{n}{k}$  denota o total de maneiras de se escolher  $k$  objetos dentre  $n$  tipos de objetos disponíveis.

## Exercícios

**Exercício 2.5.1.** De quantas formas podemos pintar 24 bolas idênticas com as cores ciano, magenta e ocre?

**Exercício 2.5.2.** Quantas são as soluções em inteiros não negativos de

$$x + y + z + w = 28 ?$$

**Exercício 2.5.3.** Quantas são as soluções em inteiros *positivos* de

$$x + y + z + w = 28 ?$$

**Exercício 2.5.4.** Quantas são as soluções em inteiros não negativos de

$$x + y + z + w \leq 28 ?$$

**Dica:** Faça  $x + y + z + w = t$ , com  $0 \leq t \leq 28$ . Depois disso, escreva  $x + y + z + w + (28 - t) = 28$  e faça uma mudança de variáveis, chamando  $28 - t = s$ .

**Exercício 2.5.5.** Quantas são as soluções em inteiros não negativos de

$$x + y + z + w < 28 ?$$

**Exercício 2.5.6.** Quantas são as soluções em inteiros não negativos de

$$14 \leq x + y + z + w \leq 28 ?$$

**Exercício 2.5.7.** Mostre que

$$\left(\left(\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right)\right) = \left(\left(\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right)\right) + \left(\left(\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix}\right)\right)$$

de duas maneiras, fazendo contas e via um argumento combinatório. Note que a fórmula acima é um análogo da Relação de Stifel para combinações com repetição.

**Exercício 2.5.8.** Mostre de duas maneiras, via a fórmula de combinação com repetição, e via uma bijeção entre conjuntos, que

$$\left(\left(\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right)\right) = \left(\left(\begin{matrix} k=1 \\ n-1 \end{matrix}\right)\right).$$

**Dica:** para a bijeção, transforme palitinhos em sinais de mais e sinais de mais em palitinhos!

**Exercício 2.5.9.**

- a) De quantas maneiras podemos distribuir  $k$  partículas distintas em  $n$  níveis de energia distintos? (Esta distribuição de partículas em níveis de energia é chamada, em Física, de Estatística de Boltzmann).

- b) De quantas maneiras podemos distribuir  $k$  partículas indistinguíveis em  $n$  níveis de energia distintos? (Esta distribuição de partículas em níveis de energia é chamada, em Física, de Estatística de Bose-Einstein).
- c) De quantas maneiras podemos distribuir  $k$  partículas indistinguíveis em  $n$  níveis de energia distintos se cada nível pode conter no máximo uma partícula? (Esta distribuição de partículas em níveis de energia é chamada, em Física, de Estatística de Fermi-Dirac).

**Exercício 2.5.10.** Uma fábrica produz caixas contendo 20 bombons e 10 balas. Há 6 tipos de bombons disponíveis e 3 tipos de balas. Qual o número de caixas distintas que a fábrica pode produzir?

**Exercício 2.5.11.** Encontre o erro na solução a seguir do problema: *De um baralho, três cartas são escolhidas com reposição. Qual a probabilidade de que essas cartas sejam, em alguma ordem, o ás de espadas, o rei de copas e a dama de ouros?* Solução: o total de combinações de três elementos, com repetição, escolhidos dentre as 52 cartas, é  $\binom{52+3-1}{3} = \binom{54}{3}$ . Logo, a chance de se retirar uma certa combinação de três cartas é  $1/\binom{54}{3}$ , que é a resposta do problema.

**Exercício 2.5.12** (OBM-2002). Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces equiprováveis numeradas de 1 a 6). Calcule a probabilidade de que a soma dos 10 resultados seja igual a 20.

**Exercício 2.5.13.** Prove que, para  $|x| < 1$ , vale

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k.$$

**Dica:** Use a soma de uma progressão geométrica, e depois aplique a propriedade distributiva (sem se importar que seja uma soma infinita).

## 2.6 Contagem Dupla

Contagem dupla refere-se à técnica de contar pares da forma  $(a, b)$  de dois modos: primeiro somar a quantidade de pares que existem para cada  $a$ , e depois somar a quantidade de pares que existem para cada  $b$ . A igualdade entre os dois resultados (que são a quantidade total de pares) nos fornece então informação útil para resolver problemas de contagem.

De modo mais rigoroso, considere um conjunto de pares ordenados  $\mathcal{C} \subset A \times B$ . Logo, para contar quantos elementos tem o conjunto  $\mathcal{C}$ , podemos contar, para cada  $a \in A$ , quantos pares ordenados da forma  $(a, b)$  pertencem a  $\mathcal{C}$ . Ou podemos contar, para cada  $b \in B$ , quantos pares da forma  $(a, b)$  pertencem a  $\mathcal{C}$ . Em resumo,

$$|\mathcal{C}| = \sum_{a \in A} |\{(a, b) \in \mathcal{C} : b \in B\}| = \sum_{b \in B} |\{(a, b) \in \mathcal{C} : a \in A\}|. \quad (2.6)$$



Observamos ser muito comum confundir a ideia de contagem dupla com relação de equivalência. Na verdade, contagem dupla tem a ver com contagem de pares, como descrito acima e, em sua essência, tem a ver com o chamado Teorema de Fubini, assunto de um curso de cálculo ou de Teoria da Medida.

**Problema 2.6.1.** Uma bola de futebol é feita costurando-se 12 pentágonos e 20 hexágonos regulares de mesmo lado. Chamamos de junção a costura entre lados de diferentes polígonos. Quantas junções tem a bola de futebol?

*Primeira solução:* Cada junção não é nada mais do que uma aresta do poliedro que forma a bola de futebol. Cada um dos vinte hexágonos tem seis arestas, e cada um dos doze pentágonos, cinco. Logo, temos, por ora, um total de  $12 \times 5 + 20 \times 6$  arestas. Entretanto, nesta contagem, cada aresta foi contada *duas* vezes, pois cada aresta pertence a duas faces. Logo, o número de arestas deve ser metade do número anterior, ou seja,  $\frac{12 \times 5 + 20 \times 6}{2} = \frac{180}{2} = 90$ .  $\square$

A solução acima é correta, mas não dá a ideia de contagem dupla.

*Segunda solução:* Seja  $A$  o conjunto de arestas do poliedro,  $B$  o conjunto de faces do poliedro, e  $C$  o conjunto de pares ordenados  $(a, b)$ , onde  $a$  é uma aresta do poliedro,  $b$  é uma face do poliedro, tais que a aresta  $a$  pertence à face  $b$ .

O primeiro somatório em (2.6) corresponde a quantas faces há para cada aresta. Bem, cada aresta pertence a duas faces. Logo, o primeiro somatório em (2.6) é igual a  $2x$ , onde  $x$  é o número de arestas (que queremos calcular).

O segundo somatório em (2.6) corresponde a quantas arestas há para cada face. Bem, temos dois tipos de faces, pentágonos e hexágonos. Cada pentágono tem cinco arestas e cada hexágono, seis. Como são 12 pentágonos e 20 hexágonos, o segundo somatório em (2.6) é igual a  $12 \times 5 + 20 \times 6 = 180$ . Igualando, temos que  $2x = 180$ , logo  $x = 90$ .  $\square$

Note que a geometria do poliedro, ou seja, a forma como pentágonos e hexágonos são encaixados, não importou em nada na solução do problema. Vejamos outro problema.

**Problema 2.6.2 (OBM).** O professor Piraldo aplicou uma prova de 6 questões para 18 estudantes. Cada questão vale 0 ou 1 ponto; não há pontuações parciais. Após a prova, Piraldo elaborou uma tabela como a seguinte para organizar as notas, em que cada linha representa um estudante e cada coluna representa uma questão.

Piraldo constatou que cada estudante acertou exatamente 4 questões e que cada questão teve a mesma quantidade  $m$  de acertos. Qual é o valor de  $m$ ?

*Solução:* Vamos contar a quantidade de pares (questão, estudante) tais que a questão foi respondida corretamente pelo estudante. Em outras palavras, vamos contar o número de uns na Tabela 2.1. Para cada questão, houve  $m$  acertos, logo temos um total de  $6m$  pares. Por outro lado, cada estudante acertou 4 questões. Portanto, temos um total de  $18 \times 4$  pares. Igualando,  $6m = 18 \times 4$  nos dá  $m = 12$ .  $\square$

	1	2	3	4	5	6
Arnaldo	0	1	1	1	0	1
Bernaldo	1	0	1	0	1	1
Cernaldo	0	0	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 2.1. Tabela de pontos obtidos pelos estudantes.

Observamos que geralmente o passo mais difícil numa solução por contagem dupla é descobrir qual é o tipo de par que deve ser contado.

**Problema 2.6.3.** Quantas diagonais tem um  $n$ -ágono regular?

*Solução:* Este problema, na verdade, não tem a ver com contagem dupla, mas com relação de equivalência, e está presente nesta seção para reforçar a diferença entre as técnicas. Vejamos: seja  $X$  o conjunto de pares  $(u, v)$  tais que  $u$  e  $v$  são vértices não vizinhos do polígono de  $n$  lados. Para escolher  $u$ , temos  $n$  possibilidades. Escolhido  $u$ , temos  $n - 3$  possibilidades para  $v$ . Daí,  $|X| = n(n - 3)$ .

Por outro lado, uma diagonal no polígono pode ser associada tanto a  $(u, v)$  quanto a  $(v, u)$ . Assim, considere a relação de equivalência em  $X$  dada por  $(u, v) \sim (x, y)$  se, e somente se,  $u = x$  e  $v = y$ , ou  $u = y$  e  $v = x$ . Cada classe de equivalência em  $X$  representa uma diagonal do polígono. Além disso, cada classe de equivalência em  $X$  tem cardinalidade dois. Portanto, pela Proposição 1.5.4, o número de classes de equivalências em  $X$  é igual a  $\frac{n(n-3)}{2}$ , que é a resposta do problema.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 2.6.1.** Quantas diagonais internas (que não pertencem a nenhuma face) tem um icosaedro regular? Veja a Figura 2.16 para uma ilustração do icosaedro regular.

**Dica:** temos que usar contagem dupla ou relação de equivalência?

**Exercício 2.6.2.** Um truncamento de um poliedro é o processo de “cortar suas pontas” usando planos. Assuma que os novos vértices originados por este processo são distintos (e que os planos não se intersectam dentro do poliedro). Para se ter uma ideia, vemos na Figura 2.17 o poliedro originado pelo truncamento de um cubo. Calcule o número de arestas de:

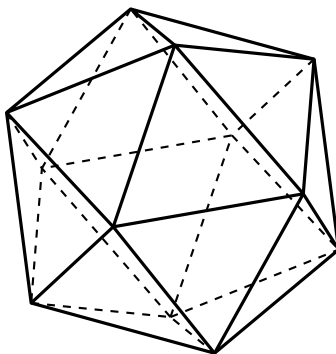


Figura 2.16. Icosaedro regular.

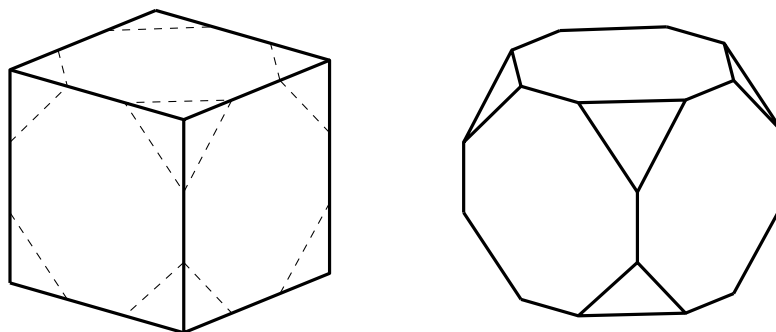


Figura 2.17. Cubo e cubo truncado.

- a) O poliedro originado pelo truncamento de um dodecaedro.
- b) O poliedro originado pelo truncamento de um icosaedro.

**Exercício 2.6.3.** Prove a fórmula (2.6) citada no texto.

**Exercício 2.6.4.** Em um comitê, cada membro pertence a exatamente três subcomitês e cada subcomitê tem exatamente três membros. Prove que a quantidade de membros é igual à quantidade de subcomitês.

**Dica:** conte o número de pares (membro, subcomitê) tais que o membro pertence ao subcomitê.

**Exercício 2.6.5.** Um grafo  $(V, A)$  é um conjunto  $V$  de vértices (pontos) sendo que cada par de pontos pode estar ou não ligado por uma aresta, sendo o conjunto de arestas denotado por  $A$ . Um certo grafo  $G$  tem  $n$  vértices e de cada vértice saem  $d$  arestas. Quantas arestas tem este grafo?

**Exercício 2.6.6 (IMO-1998).** Num concurso, há  $m$  candidatos e  $n$  juízes, onde  $n \geq 3$  e  $n$  é ímpar. Cada candidato é avaliado por cada juiz, podendo ser aprovado ou reprovado. Sabe-se que os julgamentos de cada par de juízes coincidem em no máximo  $k$  candidatos. Prove que

$$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}.$$

**Dica:** imagine uma tabela e faça contagem dupla!

**Exercício 2.6.7** (IMC). Duzentos estudantes participaram de uma competição de Matemática. A prova tinha seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido por pelo menos 120 participantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.

**Dica:** Suponha que não houvesse tais estudantes. Imagine uma tabela, faça contagem dupla, e chegue numa contradição.

## 2.7 Classes de Equivalência de Tamanhos Variados

**Problema 2.7.1.** Quantas peças tem um jogo de dominó? Para quem não sabe, as peças de um jogo de dominó são retângulos divididos em dois quadrados, e dentro de cada quadrado há um inteiro que pode ir de 0 a 6. Veja a Figura 2.18.

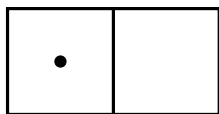
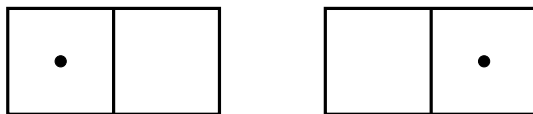


Figura 2.18. Ilustração de uma peça de dominó.

*Solução:* Este problema pode ser resolvido de diversas formas (jogadores experientes de dominó certamente terão esta resposta na ponta da língua, sem precisar pensar). Mas usar uma relação de equivalência nos mostrará o caminho para diversos outros problemas mais complexos.

Sabemos que em cada quadrado de uma peça de dominó há um número do conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Logo, poderíamos pensar que o conjunto de peças de dominó está em bijeção com  $X = \{0, \dots, 6\} \times \{0, \dots, 6\}$ , e teríamos  $|X| = 7^2 = 49$  peças. Mas esta *não* é a resposta correta! De fato, se procedêssemos desta maneira, contaríamos algumas peças duas vezes. Por exemplo:



representam a *mesma* peça de dominó, e foram contadas uma vez cada em  $|X| = 49$ , uma vez como  $(1, 0)$ , e uma vez como  $(0, 1)$ . A próxima tentação é pensar algo do tipo

*“Como os dois elementos acima  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  representam a mesma peça, diremos que  $(a, b) \sim (c, d)$  se os pares forem iguais, ou se  $a = d$  e  $b = c$ . Isso nos dá uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$ . Cada*

*classe de equivalência de  $\mathcal{R}$  representará portanto uma peça de dominó. Como cada classe de equivalência tem 2 elementos, invocando a Proposição 1.5.4, o número de peças de dominó será dado por  $\frac{|X|}{2} = \frac{49}{2}$ .*

Ops,  $49/2$  nem sequer é um número inteiro. Logo, o raciocínio acima está indubitavelmente errado. Mas onde, exatamente? As classes de equivalência de  $\mathcal{R}$  de fato representam, cada uma, uma peça de dominó, essa parte está correta. O problema no argumento acima é que não podemos aplicar a Proposição 1.5.4, pois as classes de equivalência de  $\mathcal{R}$  *não têm* todas o mesmo número de elementos! Por exemplo,  $\{(0, 1), (1, 0)\}$  é uma classe de equivalência de tamanho 2, mas as chamadas “buchas” são todas classes de equivalência de tamanho um, a dizer,  $\{(0, 0)\}, \{(1, 1)\}, \dots, \{(6, 6)\}$ .

Tendo isso em mente, podemos contar corretamente quantas são as classes de equivalência de  $\mathcal{R}$ . De tamanho 1, são 7 classes de equivalência, as quais já foram listadas acima. Para contar quantas são as classes de equivalência de tamanho 2, basta encontrar quantos *elementos* de  $X$  pertencem a classes de equivalência de tamanho 2, e dividir o resultado por 2. Bem, o número de configurações de  $X$  que pertencem a classes de equivalência de tamanho 2 será  $49 - 7 = 42$ . Dividindo por 2, temos  $42/2 = 21$  classes de equivalência de tamanho 2. E, no total, temos  $21 + 7 = 28$  classes de equivalências, que é o número correto de peças do jogo de dominó.  $\square$

**Problema 2.7.2.** Uma roleta de seis compartimentos é pintada com três cores, azul, vermelho e branco, sendo permitida a repetição de cores. Mostre que o número de maneiras de fazer esta pintura é 130.

*Solução:* Uma tentação é dizer que a resposta é  $3^6/6$ . Vejamos: podemos pintar cada compartimento de três maneiras, e a roleta tem seis rotações. Logo, por um argumento similar ao de permutações circulares, obteremos  $3^6/6$ . Bem, este número nem sequer é inteiro, pois  $3^6$  é ímpar e 6 é par! Portanto, não pode ser a resposta correta.

Onde está o erro no argumento acima? Novamente, a peça-chave é o fato das classes de equivalência não terem todas o mesmo tamanho. No caso de permutações circulares, todas as classes de equivalência de fato tinham tamanho  $n$ , mas o mesmo não acontece aqui. Definamos

$$X = \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) ; \forall i, a_i \in \{\text{branco, azul, vermelho}\} \right\}, \quad (2.7)$$

que representa as possíveis pinturas da roleta numerando-se os compartimentos. Pela Regra do Produto, temos que  $|X| = 3^6$ . Se rodarmos a roleta, a pintura não muda. Assim, consideraremos a relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$  obtida por rotações. Por exemplo, as 6-uplas

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \sim (a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1)$$

representam a mesma pintura, ou seja, pertencem à mesma classe de equivalência. Duas 6-uplas pertencerão a uma mesma classe de equivalência se uma 6-upla puder ser obtida a partir de rotações da outra. Usando desenhos (assaz mais ilustrativos), vejamos algumas classes de equivalência de tamanhos variados:

De tamanho 1 temos apenas três classes de equivalência, que são:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 1} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 2} \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 3} \end{array} \right\}.$$

De tamanho 2, temos apenas as seguintes três classes de equivalência:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 4} \\ \text{Diagrama 5} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 6} \\ \text{Diagrama 7} \end{array} \right\} \text{ e } \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 8} \\ \text{Diagrama 9} \end{array} \right\}.$$

De tamanho 3, há várias. Por exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 10} \\ \text{Diagrama 11} \\ \text{Diagrama 12} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 13} \\ \text{Diagrama 14} \\ \text{Diagrama 15} \end{array} \right\},$$

entre outras.

De tamanho 6 também há várias. Por exemplo,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama 16} \\ \text{Diagrama 17} \\ \text{Diagrama 18} \\ \text{Diagrama 19} \\ \text{Diagrama 20} \\ \text{Diagrama 21} \end{array} \right\},$$

entre muitas outras.

Para descobrir quantas são as classes de equivalência de um certo tamanho  $k$ , basta contar quantos são os *elementos* de  $X$  que estão nestas classes de tamanho  $k$ , e depois dividir por  $k$ .

Para  $k = 1$ , são três elementos. Dividindo por 1, temos

$$\frac{3}{1} = 3$$

classes de equivalência de tamanho um.

Para  $k = 2$ , temos que escolher uma das três cores para um compartimento, e depois uma das duas cores restantes para o compartimento vizinho (os demais compartimentos alternam as cores). Dividindo por 2, obtemos

$$\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

classes de equivalência.

Para  $k = 3$ , temos que compartimentos opostos devem ter mesma cor, o que nos daria  $3^3$ . Porém devemos subtrair as pinturas em que a roleta está toda de uma mesma cor, pois estes já foram contados em  $k = 1$ . Isso nos dá  $3^3 - 3$ . Dividindo pelo tamanho  $k = 3$ ,

$$\frac{3^3 - 3}{3} = 8$$

classes de equivalência.

Finalmente, quantos são os elementos de  $X$  que estão em classes de equivalência de tamanho 6? Quase todos. A maneira mais fácil de contar isso é subtrair de  $|X| = 3^6$  as configurações que estão nas *outras* classes de equivalência. Isso nos dá  $3^6 - 3 - 3 \cdot 2 - (3^3 - 3)$ . Dividindo por 6, obtemos

$$\frac{3^6 - 3 - 6 - 24}{6} = 116$$

classes de equivalência de tamanho 6.

Logo, no total, temos  $3 + 3 + 8 + 116 = 130$  classes de equivalência.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 2.7.1.** Em Cuba é muito popular uma versão similar ao do dominó jogado no Brasil, a qual também utiliza peças retangulares, mas cujos números vão de 0 a 9. Quantas peças tem esta versão do dominó?

**Exercício 2.7.2.** Um certo jogo de triminó usa peças retangulares com três números representados, que variam de 0 a 6 (veja figura abaixo). Quantas são as peças deste jogo?



**Dica:** Não se esqueça de usar o bom senso. Quando dois desenhos distintos correspondem a uma mesma peça deste triminó?

**Exercício 2.7.3.** As peças de um triminó triangular têm números que vão de 0 a 6 (podendo haver números repetidos). A Figura 2.19 ilustra uma peça do triminó.

Quantas são as peças de um triminó se:

- a) A ordem (horária ou anti-horária) como os números estão dispostos importa?  
Por exemplo, as peças abaixo são distintas.

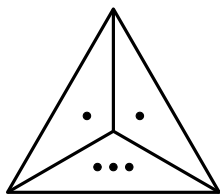
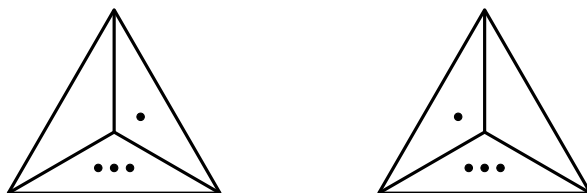


Figura 2.19. Triminó triangular.



- b) A ordem (horária ou anti-horária) como os números estão dispostos não importa? Por exemplo, os desenhos acima representam a mesma peça do triminó.

**Exercício 2.7.4.** Considere os algarismos indo-arábicos de 0 a 9, escritos com a grafia da Figura 2.20.

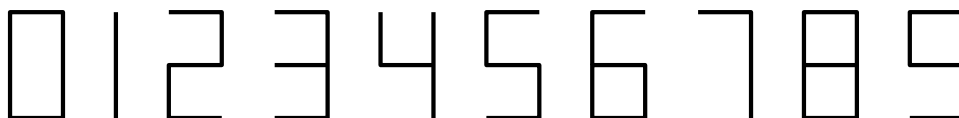


Figura 2.20. Algarismos indo-arábicos.

Alguns deles, após uma rotação de  $180^\circ$  no plano, não fazem sentido. Outros algarismos, após tal rotação, se transformam em um algarismo diferente. E outros algarismos são invariantes por tal rotação. Denote por  $X$  o conjunto de números de cinco algarismos, onde permitimos zeros à esquerda. Por exemplo,  $00236 \in X$ . Logo,  $|X| = 10^5$ . Dois elementos de  $X$  são ditos equivalentes se um deles pode ser transformado no outro através de uma rotação de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  no plano. Quantas classes de equivalência existem em  $X$ ?

**Exercício 2.7.5.** Seja  $n \geq 4$ . Suponha que seja possível usar qualquer tipo de átomo dentre  $n$  diferentes tipos para formar uma molécula na disposição de um tetraedro regular, veja a Figura 2.21.



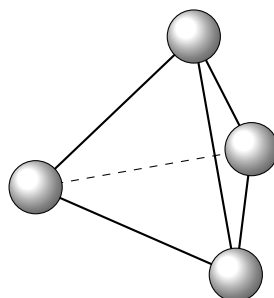


Figura 2.21. Molécula com quatro átomos.

- a) Quantas são as diferentes moléculas que podemos formar, assumindo que não podemos repetir átomos?
- b) Quantas são as diferentes moléculas que podemos formar, assumindo que podemos repetir átomos?

**Dica:** para facilitar a contagem, classifique as classes de equivalência por quantidade de átomos de cada tipo.

- c) Isômeros, *grosso modo*, são moléculas (espacialmente) diferentes, mas de mesma composição química, veja um exemplo na Figura 2.22. Quantos são os pares de isômeros para este tipo de molécula? Você consegue imaginar alguma conexão entre isômeros e classes de equivalência?

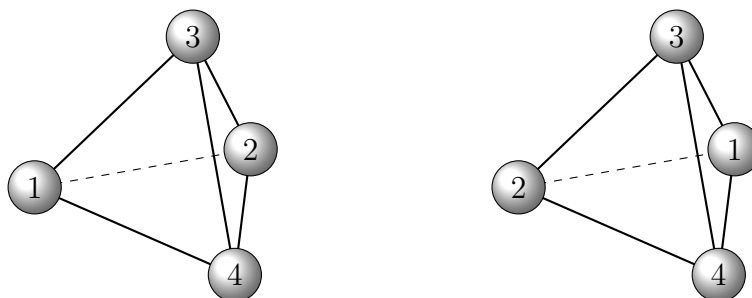


Figura 2.22. Isômeros.

**Exercício 2.7.6.** De quantas maneiras podemos pintar as faces de uma pirâmide regular de base quadrada se estão disponíveis  $n$  cores, e faces distintas podem ter a mesma cor? Veja a Figura 2.23 para uma ilustração.

**Exercício 2.7.7.** Faça um exercício análogo ao anterior, pintando os *vértices* da pirâmide em vez das faces.

**Exercício 2.7.8.**

- a) De quantas maneiras podemos pintar uma roleta de oito compartimentos com  $n$  cores disponíveis, sendo  $n \geq 8$ , se não podemos repetir cores?

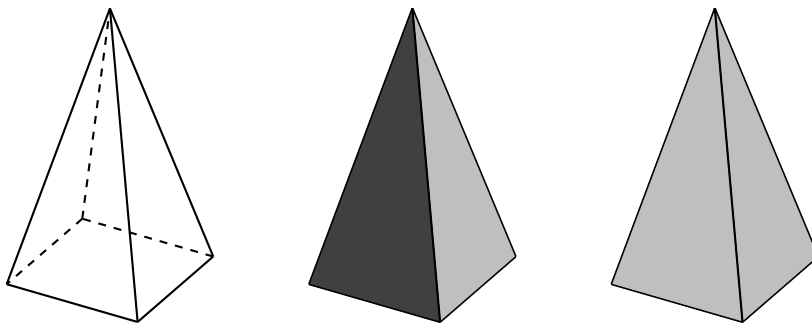


Figura 2.23. Pirâmide: neste problema, faces distintas podem ter a mesma cor.

- b) De quantas maneiras podemos pintar uma roleta de oito compartimentos com  $n$  cores disponíveis, sendo  $n \geq 1$ , se podemos repetir cores? Veja a Figura 2.24 para uma ilustração.

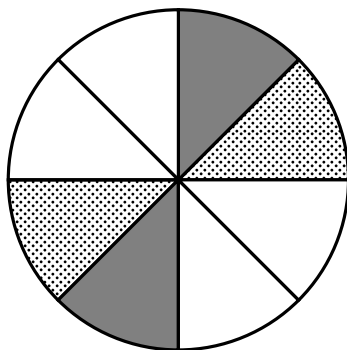


Figura 2.24. Exemplo de pintura da roleta, sendo permitido repetição de cores.

**Exercício 2.7.9.** De quantas maneiras podemos pintar uma roleta de  $p$  compartimentos com  $a$  cores, onde  $p$  é primo? Deduza a partir disso o Pequeno Teorema de Fermat, o qual diz: “Se  $p$  é primo e  $a \in \mathbb{N}$ , então  $p$  divide  $a^p - a$ ”.

**Exercício 2.7.10.** Seja  $p \geq 3$  número primo e considere  $a_1, \dots, a_p$  pontos igualmente espaçados sobre uma circunferência. Seja  $X$  o conjunto dos  $p$ -ágono (polígonos de  $p$  lados) com vértices  $a_1, \dots, a_p$ , sendo que os polígonos não precisam ser convexos e cruzamentos de arestas são permitidos. Por exemplo, na Figura 2.25, vemos todos os polígonos no caso  $p = 5$ .

- a) Mostre que  $|X| = \frac{p!}{2p}$ .

- b) Considere agora a seguinte relação de equivalência em  $X$ . Diremos que dois  $p$ -polígonos em  $X$  serão equivalentes se um puder ser obtido a partir de uma rotação do outro. Veja a Figura 2.25 e separe os polígonos para  $p = 5$  em classes de equivalência.

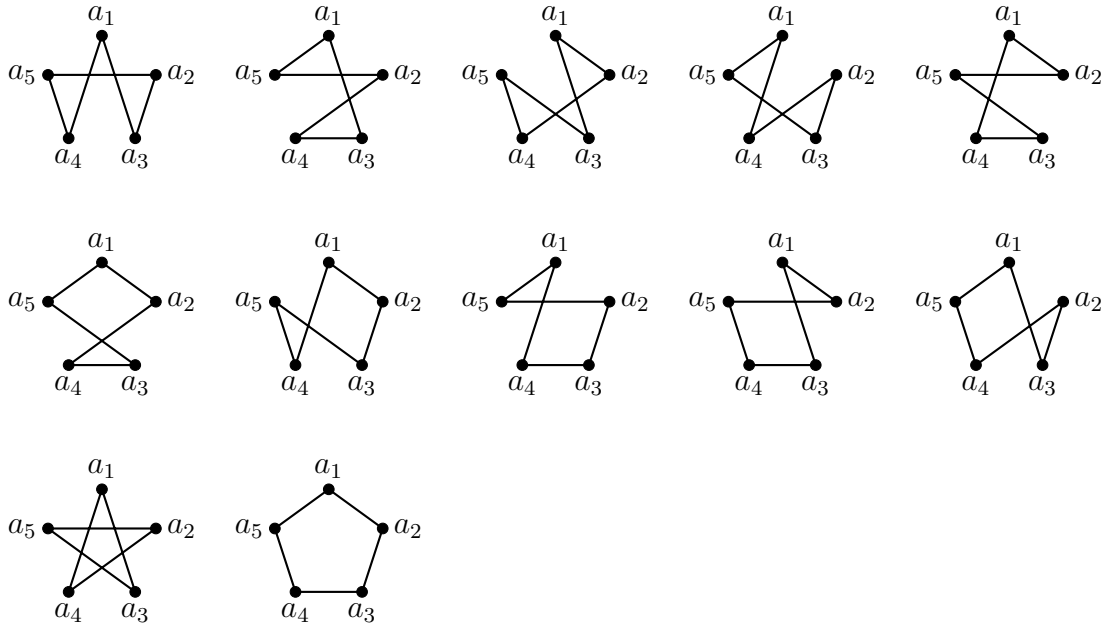


Figura 2.25. Pentágonos.

- c) Lembrando que  $p$  é primo, argumente porque as classes de equivalência em  $X$  têm tamanho 1 ou  $p$ .
- d) Mostre que o número de classes de equivalência é igual a

$$\frac{\frac{p!}{2p} - \frac{p-1}{2}}{p} + \frac{p-1}{2}.$$

- e) Usando o item anterior, prove o Teorema de Wilson: “Se  $p$  é primo, então  $p$  divide o número  $(p-1)! + 1$ ”.

## 2.8 Lema de Burnside

Em problemas que envolvem mais simetrias do que simplesmente uma rotação (como rotação e reflexão, ou movimentos rígidos no espaço), pode ser bastante cansativo aplicar o método da Seção 2.7. Nesta seção, que pode ser omitida numa primeira leitura, deduziremos a fórmula geral para problemas envolvendo classes de equivalência de tamanhos variados, conhecida por Lema de Burnside, que se aplica facilmente a problemas com simetrias quaisquer. Para clarear ideias, usaremos como referência o mesmo problema da seção anterior:

**Problema 2.8.1.** De quantas maneiras pode-se pintar uma roleta de seis compartimentos, dispondo apenas das cores branco, azul e vermelho?

Para resolver este problema, começamos com a noção de grupo:

**Definição 2.8.2.** Um grupo finito  $G$  é um conjunto finito sobre o qual existe uma operação  $*$  que satisfaz as propriedades:

- a) (*Associatividade*) Para todos  $a, b, c \in G$ , vale  $a * (b * c) = (a * b) * c$ .
- b) (*Elemento neutro*) Existe um elemento  $e \in G$  tal que  $a * e = e * a = a$  para todo  $a \in G$ .
- c) (*Elemento inverso*) Todo elemento  $a$  possui um chamado *elemento inverso*, denotado por  $a^{-1}$ , tal que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

No nosso caso, o grupo é o das rotações dessa roleta, que chamaremos de  $G = \{g_0, g_1, \dots, g_5\}$ , onde  $g_0$  é uma rotação de zero graus,  $g_1$  uma rotação de 60 graus,  $g_2$  uma rotação de 120 graus,  $g_3$  é uma rotação de 180 graus,  $g_4$  é uma rotação de 240 graus e  $g_5$  é uma rotação de 300 graus. Neste grupo, a operação é a composição de rotações. Por exemplo,  $g_1 * g_1 = g_2$ . Além disso, o elemento neutro é dado por  $g_0$ .

**Definição 2.8.3.** Uma *ação* de um grupo  $G$  sobre um conjunto  $X$  é uma função que a cada  $g \in G$  e a cada  $x \in X$ , associa um único elemento de  $X$ , denotado por  $g \cdot x$ , tal que:

- a) Se  $e$  é o elemento neutro de  $G$ , então  $e \cdot x = x$  para todo  $x \in X$ .
- b) Se  $g_1$  e  $g_2$  são elementos de  $G$ , e  $g_1 g_2$  é o produto em  $G$ , então, para todo  $x \in X$ :

$$(g_1 * g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

Vamos numerar as casas da roleta. Seja portanto  $X$  o conjunto das possíveis pinturas numerando-se cada compartimento, veja (2.7). Pela Regra do Produto, temos que  $|X| = 3^6$ . Vamos colocar a seguinte relação de equivalência  $\mathcal{R}$  em  $X$ : dois elementos de  $X$  estarão em uma mesma classe de equivalência se um deles puder ser obtido a partir de alguma rotação do outro.

Dado um  $x \in X$  fixo, o conjunto de todos os elementos de  $X$  que se obtêm a partir de  $g \cdot x$  variando  $g \in G$  é chamado de *órbita* de  $x$  sob  $G$ , isto é:

$$G \cdot x = \{g \cdot x ; g \in G\}.$$

Observe que a órbita  $G \cdot x$  é exatamente a classe de equivalência que contém  $x$ . Assim, o número que procuramos é o número de classes de equivalência, ou seja, o número de órbitas. Para obtê-lo, estudaremos a quantidade de soluções da equação

$$g \cdot x = x \tag{2.8}$$

para  $g \in G$  e  $x \in X$  fazendo uma *contagem dupla* (veja a Seção 2.6). Ou seja, vamos contar o número de soluções de (2.8) de dois modos: primeiro contaremos quantos  $x$  existem para cada  $g$  fixo, e depois contaremos quantos  $g$  existem para cada  $x$  fixo.

Para cada  $g \in G$  fixo, o conjunto dos elementos  $x \in X$  que satisfazem a equação (2.8) chama-se o *fixador de  $g$* , denotado por  $\text{Fix}(g)$ . Em outras palavras,

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X; g \cdot x = x\}.$$

Para  $x \in X$  fixo, o conjunto dos elementos  $g \in G$  que satisfazem a equação (2.8) chama-se o *estabilizador de  $x$  em  $G$* , e é denotado por  $\text{Est}(x)$ . Em outras palavras,

$$\text{Est}(x) = \{g \in G; g \cdot x = x\}.$$

Daí, concluímos que

$$\sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\text{Est}(x)|. \quad (2.9)$$

Vamos precisar dos próximos dois lemas.

**Lema 2.8.4.** *Se  $x_1, x_2 \in X$  estão numa mesma órbita, então*

$$|\text{Est}(x_1)| = |\text{Est}(x_2)|.$$

*Demonstração.* Se  $x_1, x_2 \in X$  estão numa mesma órbita, então  $x_1 = g \cdot x_2$  para algum  $g \in G$ . Seja  $h \in G$ . Daí,

$$\begin{aligned} h \in \text{Est}(x_1) &\iff h \cdot x_1 = x_1 \\ &\iff h \cdot (g \cdot x_2) = g \cdot x_2 \\ &\iff (h * g) \cdot x_2 = g \cdot x_2 \\ &\iff (g^{-1} * h * g) \cdot x_2 = x_2 \\ &\iff g^{-1} * h * g \in \text{Est}(x_2). \end{aligned}$$

Como a função  $h \mapsto g^{-1} * h * g$  é uma bijeção (verifique), concluímos que  $|\text{Est}(x_1)| = |\text{Est}(x_2)|$ .  $\square$

**Lema 2.8.5.** *Para qualquer  $x \in X$ ,*

$$|\text{Est}(x)| \cdot |G \cdot x| = |G|.$$

*Demonstração.* Como  $\text{Est}(x)$  é um subgrupo de  $G$  e a órbita  $G \cdot x$  está em bijeção com as classes laterais do subgrupo  $\text{Est}(x)$ , o enunciado do lema decorre imediatamente do Teorema de Lagrange a respeito de grupos. Detalhes são omitidos aqui.  $\square$

Relembre agora a Observação 1.5.3: dada uma relação de equivalência  $\mathcal{R}$ , usaremos  $|\mathcal{R}|$  para denotar o número de classes de equivalência de  $\mathcal{R}$ .

**Proposição 2.8.6** (Lema de Burnside). <sup>1</sup> *A quantidade de classes de equivalência sobre um conjunto  $X$  obtidas através da ação de um grupo  $G$  sobre  $X$  é dada por*

$$|\mathcal{R}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

*Demonstração.* Escolheremos um elemento de cada órbita. Deste modo, seja  $\{x_1, \dots, x_\ell\}$  subconjunto de  $X$  tal que cada  $x_i$  pertence a uma órbita (classe de equivalência) diferente e  $\ell = |\mathcal{R}|$  é o número total de órbitas.

Agrupando os  $x$  que pertencem a uma mesma órbita, pelo Lema 2.8.4 temos que

$$\sum_{x \in X} |\text{Est}(x)| = |\text{Est}(x_1)| \cdot |G \cdot x_1| + \dots + |\text{Est}(x_\ell)| \cdot |G \cdot x_\ell|,$$

onde  $\ell$  é o número de órbitas. Daí, pelo Lema 2.8.5, concluímos que

$$\sum_{x \in X} |\text{Est}(x)| = \ell \cdot |G|.$$

Pela contagem dupla (2.9), concluímos então que

$$\ell = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|,$$

concluindo a prova da proposição. □

Agora que já obtivemos a fórmula necessária, voltemos à roleta. É fácil verificar que:

$$\begin{aligned} |\text{Fix}(g_0)| &= 3^6, & |\text{Fix}(g_3)| &= 3^3, \\ |\text{Fix}(g_1)| &= 3, & |\text{Fix}(g_4)| &= 3^2, \\ |\text{Fix}(g_2)| &= 3^2, & |\text{Fix}(g_5)| &= 3. \end{aligned} \tag{2.10}$$

E o número de roletas é dado por:

$$|\mathcal{R}| = \frac{3^6 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^2 + 3}{6} = 130,$$

que é a mesma resposta obtida na seção anterior.

<sup>1</sup> Como acontece com certa frequência, o nome associado ao resultado não é de seu autor. Em seu livro sobre grupos finitos de 1897, William Burnside enuncia e prova este lema, atribuindo sua autoria a Frobenius, no ano de 1887. Entretanto, tal fórmula era certamente conhecida por Cauchy (em uma forma similar) desde 1845. Mais recentemente, tal lema aparece também associado a Pólya. Por outro lado, não é à toa que o nome seja associado a Burnside: este, por sua vez, provou vários resultados associados ao tema, veja o artigo [Neumann, 1979].

## Exercícios

**Exercício 2.8.1.** Verifique as contagens em (2.10).

**Exercício 2.8.2.** De quantas maneiras podemos fazer uma pulseira com seis pedras preciosas dentre rubis, esmeraldas e diamantes? Assuma que a pulseira possa entrar no braço nos dois sentidos.

**Exercício 2.8.3.** De quantas maneiras podemos pintar as *arestas* de uma pirâmide regular de base octogonal se estão disponíveis  $n$  cores, e arestas distintas podem ter a mesma cor?

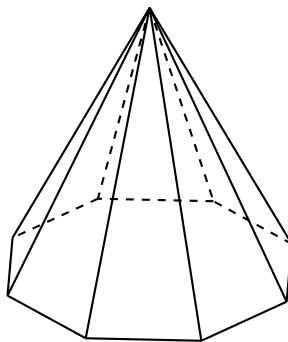


Figura 2.26. Pirâmide regular de base octogonal.

**Exercício 2.8.4.** Para o leitor que já estudou um pouco de grupos, preencha os detalhes que faltam na demonstração do Lema 2.8.5, ou seja:

- Mostre que  $\text{Est}(x)$  é um subgrupo de  $G$ .
- Mostre que há uma bijeção entre a órbita  $G \cdot x$  e as classes laterais do subgrupo  $\text{Est}(x) \subset G$ .

**Exercício 2.8.5.** Seja  $G$  um grupo com a operação  $*$ , e fixe  $g \in G$ . Mostre que a função  $\phi(h) = g^{-1} * h * g$  é uma bijeção (a qual é chamada de *conjugação*).

## 2.9 Movimentos Rígidos

Nesta seção veremos um pouco sobre movimentos rígidos de um poliedro e como isso pode ser usado juntamente com o Lema de Burnside para contagem de pinturas. Analisemos um caso específico para clarear ideias.

**Problema 2.9.1.** De quantas maneiras podemos pintar os vértices de um cubo se  $n$  cores estão disponíveis e podemos repetir cores?

Seja  $V = \{v_1, \dots, v_8\}$  o conjunto dos vértices do cubo, veja a Figura 2.27.

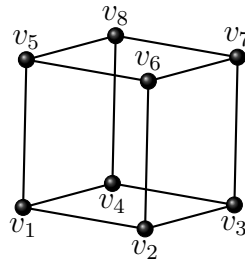


Figura 2.27. Cubo com vértices rotulados.

Um *movimento rígido* no cubo, em palavras, é uma bijeção  $\phi : V \rightarrow V$  que corresponda a um movimento do cubo no espaço. Por exemplo, a bijeção

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= v_1, & \phi(v_2) &= v_4, & \phi(v_3) &= v_8, & \phi(v_4) &= v_5, \\ \phi(v_5) &= v_2, & \phi(v_6) &= v_3, & \phi(v_7) &= v_7, & \phi(v_8) &= v_6, \end{aligned} \quad (2.11)$$

é um movimento rígido, o qual corresponde a uma rotação de 120 graus do cubo em torno da reta que liga o vértice  $v_1$  ao vértice  $v_7$ , veja a Figura 2.28.

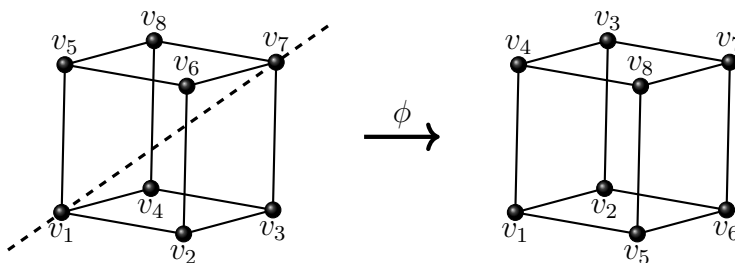


Figura 2.28. Ilustração do movimento rígido  $\phi$  em torno da reta  $\overline{v_1 v_7}$ . Note que  $v_2$  é levado em  $v_4$ ,  $v_4$  é levado em  $v_5$  e  $v_5$  é levado em  $v_2$ .

Podemos listar os possíveis movimentos rígidos da seguinte maneira: escolhemos primeiro para onde irá o vértice  $v_1$ . Em seguida, escolhemos uma das três formas possíveis de escolher para onde irão os vértices vizinhos de  $v_1$ . Por exemplo, no caso do movimento rígido  $\phi$ , o vértice  $v_1$  foi levado nele mesmo. Depois disso, havia três opções: o vértice  $v_2$  podia ser levado nele mesmo, em  $v_4$  ou em  $v_5$ . No caso da bijeção  $\phi$ , o vértice  $v_2$  foi levado em  $v_4$ .

Pelo argumento acima, concluímos que há  $8 \times 3 = 24$  movimentos rígidos no cubo. Outra forma de realizar a contagem de movimentos rígidos é usando as faces. Fixe uma face, que denotaremos por  $F$ . Um movimento rígido consiste em levar esta face  $F$  na posição de alguma das seis faces (incluindo ela própria) e depois escolher uma das quatro rotações possíveis. Logo, obtemos novamente um total de  $6 \times 4 = 24$  movimentos rígidos para o cubo.

Seja  $X$  o conjunto de pinturas rotulando-se os vértices do cubo dispondo de  $n$  cores. Ou seja,

$$X = \{(a_1, a_2, \dots, a_8) : \forall i, a_i \in \{1, \dots, n\}\},$$



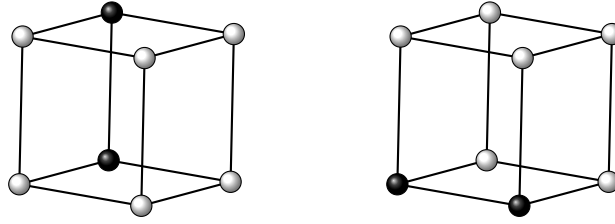


Figura 2.29. Dois elementos em  $X$  que estão numa mesma classe de equivalência, ou seja, representam a mesma pintura.

onde  $\{1, \dots, n\}$  representa o conjunto das  $n$  cores disponíveis. Diremos que dois elementos em  $X$  são equivalentes se é possível levar um no outro através de um movimento rígido do cubo. Por exemplo, as duas pinturas da Figura 2.29, que usam somente as cores preto e branco, correspondem a elementos equivalentes em  $X$ .

Em outras palavras, o conjunto de movimentos rígidos é um grupo que atua sobre o conjunto  $X$ , e o número de órbitas desta ação de grupos é o número de diferentes pinturas dos vértices do cubo. Logo, podemos usar o Lema de Burnside (Proposição 2.8.6) para realizar a contagem de diferentes pinturas. Listar os 24 movimentos rígidos e calcular quantos elementos há no fixador de cada um deles pode ser um pouco trabalhoso. Vamos diminuir o trabalho listando os movimentos rígidos por tipo:

- Identidade.* Este movimento rígido  $\phi_0$  na verdade não faz nada, ele é o elemento identidade do grupo de movimentos rígidos. Neste caso,  $|\text{Fix}(\phi_0)| = n^8$ .
- Rotação em torno de uma reta passando pelos centros de faces opostas.* Neste caso, temos três eixos possíveis, e cada eixo tem três rotações possíveis, de 90, 180 e 270 graus (a rotação de zero graus é a identidade, que já foi considerada na letra a). Portanto, temos  $3 \times 3 = 9$  movimentos rígidos deste tipo, veja a Figura 2.30 para uma ilustração.

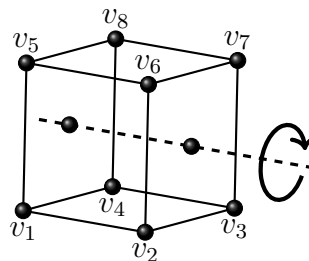
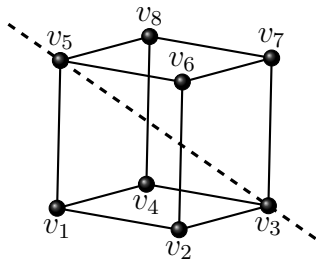


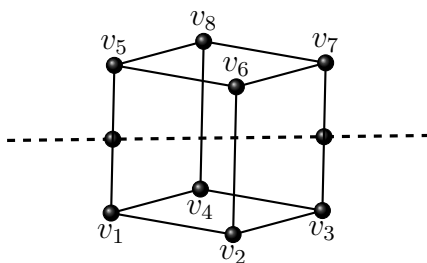
Figura 2.30. Exemplo de rotação em torno de uma reta passando pelos centros de faces opostas.

Os fixadores de rotações de 90, 180 e 270 graus têm  $n^2$ ,  $n^4$  e  $n^2$  elementos, respectivamente.

- c) *Rotação em torno de uma diagonal do cubo.* Neste caso, temos quatro pares de vértices diametralmente opostos, e para cada par de vértices deste tipo, temos duas rotações, a de 120 e a de 240 graus. Logo, no total temos  $4 \times 2 = 8$  movimentos rígidos deste tipo.



- d) *Rotação em torno de uma reta passando pelos pontos médios de lados diametralmente opostos.* Neste caso, temos seis escolhas para pares de lados diametralmente opostos, e para cada par de lados deste tipo, temos uma rotação, a de 180 graus. Logo, temos  $6 \times 1 = 6$  movimentos rígidos deste tipo.



Como sabemos que contamos todos os movimentos rígidos na lista acima? Basta notar que todos os movimentos listados são distintos, e que a soma é o total de movimentos rígidos. De fato,  $1 + 9 + 8 + 6 = 24$ . Com esta classificação dos movimentos rígidos, é fácil aplicar o Lema de Burnside para calcular o total de pinturas, veja o Exercício 2.9.1.

**Observação.** Definimos acima movimentos rígidos como uma classe de bijeções dos vértices. Se o problema pedisse contagem de pinturas de faces, definiríamos um movimento rígido como uma classe de bijeções das faces; se o problema pedisse contagem de pinturas de arestas, definiríamos como uma classe de bijeções de arestas etc. Note entretanto que tais classes de bijeções são todas determinadas pelos mesmos movimentos do cubo no espaço. E para um poliedro qualquer um raciocínio análogo se aplica (com diferentes simetrias, claro).

## Exercícios

**Exercício 2.9.1.** Calcule os fixadores de todos os movimentos rígidos do cubo (com respeito à pintura dos vértices) e aplique o Lema de Burnside para concluir

a solução do Problema 2.9.1.

**Dica:** Um teste rápido para ver se você errou alguma conta é verificar a fórmula que você obteve para  $n = 1$ . Neste caso, só há uma pintura, logo a fórmula deve dar 1 como resposta. Mas cuidado, esse teste é uma condição necessária para que a fórmula esteja certa, mas não suficiente.

**Exercício 2.9.2.** Calcule o número de maneiras com que podemos pintar as *faces* de um cubo com  $n$  cores disponíveis, podendo repetir cores.

**Dica:** Você não precisa encontrar os movimentos rígidos, pois estes já foram descritos na solução do Problema 2.9.1. Só o que muda são o espaço  $X$  de configurações e os fixadores correspondentes.

**Exercício 2.9.3.** Calcule  $|\text{Fix}(\phi)|$ , onde  $\phi$  é o movimento rígido definido em (2.11).

**Exercício 2.9.4.** Olhe para os desenhos da Figura 2.29. Qual é o movimento rígido que leva um desenho no outro?

**Exercício 2.9.5.** Quantos são os movimentos rígidos de um dodecaedro regular? Faça esta contagem de três maneiras diferentes, via vértices, via faces e via arestas. Veja a Figura 2.31 (à esquerda) para uma ilustração de vértices, arestas e faces do dodecaedro regular.

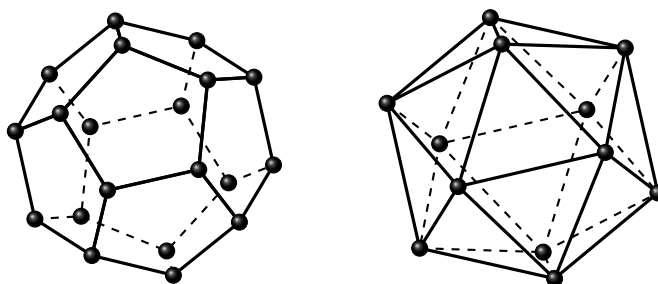


Figura 2.31. Arestas, vértices e faces de um dodecaedro regular e de um icosaedro regular.

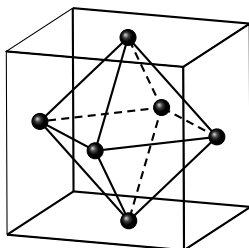
**Exercício 2.9.6.** Quantos são os movimentos rígidos de um icosaedro regular? Faça esta contagem de três maneiras diferentes, via vértices, via faces e via arestas. Veja a Figura 2.31 (à direita) para uma ilustração de vértices, arestas e faces do icosaedro regular.

**Exercício 2.9.7.**

- Quantos são os movimentos rígidos de um tetraedro regular? Faça a contagem de três maneiras, via faces, via vértices e via arestas.
- Descreva os movimentos rígidos de um tetraedro regular através de reflexões em torno de retas.

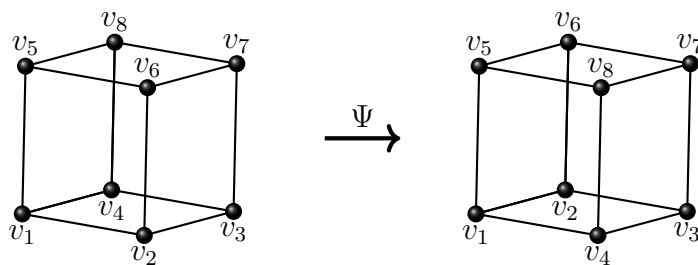
- c) Usando o Lema de Burnside, calcule o número de maneiras de pintar as faces de um tetraedro regular usando  $n$  cores, sendo permitida a repetição de cores.

**Exercício 2.9.8.** Um poliedro regular  $P$  é dito dual de outro poliedro regular  $Q$  se podemos obter  $P$  ligando o centro das faces de  $Q$ . Por exemplo, o octaedro regular é dual de um cubo, veja a figura a seguir.



- a) Qual o poliedro dual de um tetraedro regular? Qual o poliedro dual de um octaedro regular?
- b) Seja  $P$  dual de  $Q$ . Qual a relação entre as pinturas das faces de  $P$  e as pinturas dos vértices de  $Q$ ?
- c) Usando o item anterior e usando a ajuda de exercícios anteriores, calcule sem fazer contas
- O número de pinturas com  $n$  cores dos vértices de um octaedro.
  - O número de pinturas com  $n$  cores das faces de um octaedro.
  - O número de pinturas com  $n$  cores dos vértices de um tetraedro.

**Exercício 2.9.9.** A figura a seguir ilustra uma bijeção entre os vértices que preserva as arestas mas não é um movimento rígido!



- a) Imagine que você tenha em mãos um cubo igual ao cubo da esquerda. Como conseguir o cubo da direita a partir dele de maneira prática?
- b) Se considerarmos, além dos movimentos rígidos, também bijeções como  $\Psi$  que preservam distâncias mas não preservam orientação, temos o chamado *grupo de simetrias* do cubo. Quantos elementos tem o grupo de simetrias do cubo? E do tetraedro?

- c) (Para quem já estudou um pouco de grupos). Mostre que o conjunto dos movimentos rígidos é um subgrupo normal do grupo de simetrias.

**Exercício 2.9.10.** Um certo tipo de cristal (hipotético) tem moléculas com o formato da Figura 2.32, onde cada átomo pode ser do tipo  $A$ ,  $B$  ou  $C$ , e todos os ângulos entre arestas são retos. Quantos são os diferentes tipos de moléculas para este cristal?

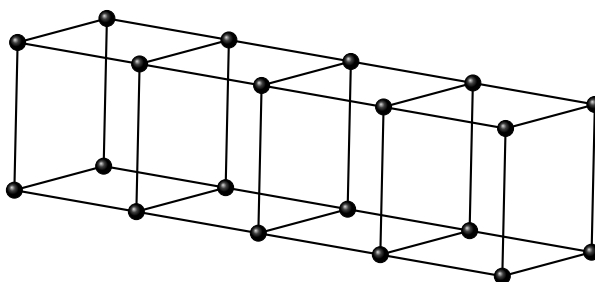


Figura 2.32. Molécula de um cristal hipotético.



## CAPÍTULO 3

# COISAS FÁCEIS E DIFÍCEIS DE CONTAR VIA RECORRÊNCIA

Quando um problema de contagem envolve simetrias (repetição de elementos, simetrias por rotação, reflexão etc.), faz sentido usar relações de equivalência, como vimos no capítulo anterior. Contudo, não é sempre que simetrias estão presentes de maneira explícita.

Neste capítulo apresentamos variadas e importantes técnicas de contagem. Uma delas é o Princípio de Inclusão-Exclusão, que se faz necessário com mais frequência do que a princípio possa parecer (com o perdão do trocadilho). Outra é a poderosa técnica de *recorrência*, também chamada de equação de recorrência ou relação de recorrência. Dentre as técnicas para resolução de equações de recorrência, veremos um método muito geral, que são as *funções geradoras*.

O título deste capítulo merece que tenhamos alguns comentários. Opções alternativas de títulos (que alguns livros sobre contagem usam) seriam algo como “*técnicas avançadas de contagem*” ou “*miscelânea de técnicas de contagem*”. A primeira opção não nos pareceu adequada pois dá a impressão que o Capítulo 2, que precede o presente capítulo, seria composto por técnicas básicas de contagem. Bem, soa um pouco arrogante chamar o Lema de Burnside (Proposição 2.8.6), visto na Seção 2.8 de técnica *básica*. E muitos problemas envolvendo simetrias podem não ser triviais. Por isso, evitamos a primeira opção como título. A segunda opção talvez fosse mais adequada, pois este capítulo tem um quê de miscelânea: cada seção descreve uma técnica. Por outro lado, recorrência é uma ferramenta de enorme abrangência. Tão poderosa, que, como o leitor poderá perceber mais adiante, ao enfrentar um problema de contagem, por vezes há uma decisão inicial a ser feita: usar ou não recorrência. Entretanto, nem sempre usar recorrência é o caminho mais adequado, ou mais fácil.

E de tudo isso escolhemos o título deste capítulo. Uma ressalva: em Matemática, tudo pode se misturar. Assim, a possibilidade de que múltiplas técnicas sejam necessárias para resolver um problema nunca deve ser excluída.

### 3.1 Princípio de Inclusão-Exclusão

Apresentamos aqui o Princípio de Inclusão-Exclusão, que é uma generalização da Regra da Soma, usado para contagem via separação em casos *não disjuntos*. Começemos com um caso simples.

**Proposição 3.1.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos. Então  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .*

A intuição é a seguinte: quando fazemos  $|A| + |B|$  estamos somando os elementos da intersecção duas vezes, então precisamos retirá-los uma vez para obter  $|A \cup B|$ , veja a Figura 3.1. Uma demonstração seria:

*Demonstração.* Temos que

$$|A \cup B| = |A \cup (B - A)| = |A| + |B - A|, \quad (3.1)$$

onde na última igualdade usamos a Regra da Soma, pois  $A$  e  $B - A$  são disjuntos. Novamente pela Regra da Soma,  $|B - A| = |B| - |B \cap A|$ . Substituindo isto na igualdade (3.1), concluímos que  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .  $\square$

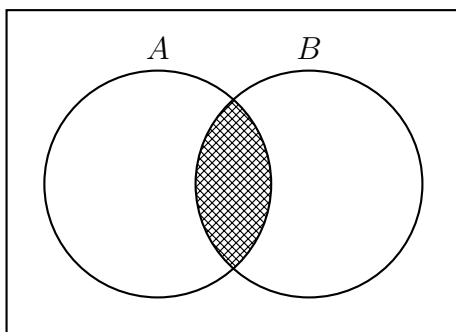


Figura 3.1. Se  $A$  e  $B$  não são disjuntos, não podemos aplicar a Regra da Soma.

Para três conjuntos, a intuição é parecida: queremos calcular  $|A \cup B \cup C|$ . Na soma  $|A| + |B| + |C|$  as interseções dois a dois aparecem repetidas, então bastaria subtraí-las? Quase isso. Em  $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$  a intersecção  $|A \cap B \cap C|$  dos três conjuntos foi somada três vezes e subtraída três vezes. Logo, ainda falta adicioná-la, veja a fórmula (3.2).

**Proposição 3.1.2.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos. Então*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \quad (3.2)$$

*Demonstração.* Decompondo cada um dos conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  nas regiões hachuradas/pintadas da Figura 3.2, a verificação da igualdade (3.2) se torna fácil. Deixamos isso a cargo do leitor.  $\square$



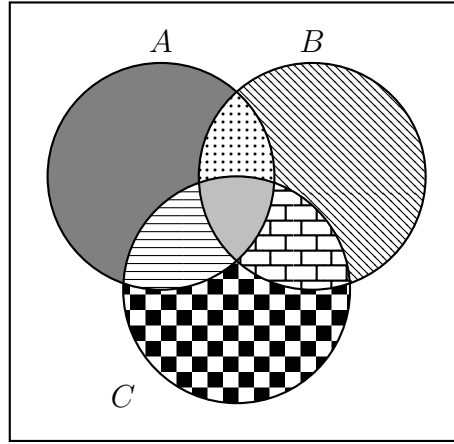


Figura 3.2. Conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não necessariamente disjuntos.

**Exemplo 3.1.3.** Quantos são os números entre 1 e 1000 (incluindo 1 e 1000) que são múltiplos de 2, 5 ou 7?

Sejam  $A = \{2, 4, 6, \dots, 1000\}$  o conjunto dos múltiplos de 2 menores ou iguais a 1000,  $B = \{5, 10, 15, \dots, 1000\}$  o conjunto dos múltiplos de 5 menores ou iguais a 1000, e  $C = \{7, 14, 21, \dots, 994\}$  o conjunto dos múltiplos de 7 menores ou iguais a 1000. Nosso objetivo é calcular  $|A \cup B \cup C|$ . Como os conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são disjuntos, não podemos usar a Regra da Soma. Usaremos portanto a Proposição 3.1.2.

Começamos afirmando que o número de múltiplos de um número  $k$  de 1 a 1000 é igual a  $\lfloor \frac{1000}{k} \rfloor$ , onde  $\lfloor \cdot \rfloor$  é a função piso, ou seja,  $\lfloor x \rfloor$  é o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Por exemplo,  $\lfloor 3,1415 \rfloor = 3$ . Para ver isso, basta dividir 1000 por  $k$ , que nos dá  $1000 = qk + r$ , onde  $0 \leq r \leq k - 1$ . Dividindo por  $k$ , concluímos que  $\frac{1000}{k} = q + \frac{r}{k}$ . E como  $0 \leq \frac{r}{k} < 1$ , deduzimos que  $\lfloor \frac{1000}{k} \rfloor = q$ , que é o número de múltiplos de  $k$  de 1 a 1000 (incluindo 1000, possivelmente). Fica para o leitor verificar que o argumento vale para um natural qualquer no lugar de 1000.

Pela fórmula citada acima, temos que  $|A| = \lfloor \frac{1000}{2} \rfloor = 500$ ,  $|B| = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$  e  $|C| = \lfloor \frac{1000}{7} \rfloor = 142$ . Além disso, como  $A \cap B$  é o conjunto dos múltiplos de 10, temos que  $|A \cap B| = \lfloor \frac{1000}{10} \rfloor = 100$ . Analogamente,  $|A \cap C| = \lfloor \frac{1000}{14} \rfloor = 71$ ,  $|B \cap C| = \lfloor \frac{1000}{35} \rfloor = 28$  e  $|A \cap B \cap C| = \lfloor \frac{1000}{70} \rfloor = 14$ . Aplicando a Proposição 3.1.2.,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 500 + 200 + 142 - 100 - 71 - 28 + 14 = 657. \end{aligned}$$

A seguir, o caso geral:

**Proposição 3.1.4.** *Sejam  $A_1, \dots, A_n$  conjuntos finitos. Então*

$$\begin{aligned}
 \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| &= \sum_{k=1}^n |A_k| \\
 &\quad - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} |A_{k_1} \cap A_{k_2}| \\
 &\quad + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}| \\
 &\quad - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leq n} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3} \cap A_{k_4}| \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

*Demonstração.* Indução no número de conjuntos. □

Uma forma muito elegante e sucinta de se escrever a fórmula de Inclusão-Exclusão é dada por

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

Verifique que a expressão acima coincide com a fórmula (3.3). Vejamos uma aplicação clássica do Princípio de Inclusão-Exclusão. Uma permutação dos números  $\{1, \dots, n\}$  é dita caótica se todos os números estão fora de suas posições originais. Por exemplo, para  $n = 4$ , a permutação 2413 é caótica, mas a permutação 2431 não é, pois o número 3 está na terceira posição.

**Proposição 3.1.5.** *O número de permutações caóticas dos números  $\{1, \dots, n\}$  é dado por*

$$D_n = n! \left[ \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right].$$

*Demonstração.* Seja  $A_i$  o número de permutações que têm o número  $i$  em sua posição original e note que estes conjuntos não são disjuntos. Usando o Princípio de Inclusão-Exclusão, contaremos  $\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right|$ , que é o número de permutações não caóticas. Depois calcularemos o número de permutações caóticas subtraindo este número do total de permutações.

Se uma permutação está em  $A_i$ , então o  $i$ -ésimo número está em sua posição original. Para os demais, temos  $(n-1)!$  escolhas. Logo,  $|A_i| = (n-1)!$ .

Sejam  $i \neq j$ . Se uma permutação está em  $A_i \cap A_j$ , então os números  $i$  e  $j$  estão em suas posições originais, e os demais em quaisquer posições. Logo,  $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$  e assim por diante.

Calculemos cada um dos somatórios que aparecem na fórmula (3.3). O primeiro é

$$\sum_{k=1}^n |A_k| = n \cdot (n-1)! = n!.$$

O segundo é

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} |A_{k_1} \cap A_{k_2}| = \binom{n}{2} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}.$$

O terceiro é

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} |A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}| = \binom{n}{3} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!},$$

e assim por diante, até o último termo, que é

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = 1 = \frac{n!}{n!}.$$

Aplicando o Princípio de Inclusão-Exclusão (Proposição 3.1.4), temos que

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{n!}.$$

Como o total de permutações é  $n!$ , temos que o número de permutações caóticas é dado por

$$\begin{aligned} D_n &= n! - \left[ n! - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \frac{n!}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{n!} \right] \\ &= n! - n! + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left[ \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

concluindo a demonstração. □

**Observação.** Como  $0! = 1$ , poderíamos fazer um cancelamento e escrever  $D_n = n! \left[ \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$ . É costume colocar  $D_n$  no formato (3.4), começando do zero, apenas por uma questão estética.

## Exercícios

**Exercício 3.1.1.** Escreva os detalhes que faltam na prova da Proposição 3.1.2 e escreva a indução na prova da Proposição 3.1.4.

**Exercício 3.1.2.** Numa sala há 6 filas de 6 cadeiras. Nestas cadeiras há o nome de 36 alunos, um em cada cadeira. Estes 36 alunos chegam e sentam ao acaso. Qual é a probabilidade de que em alguma fila todos se sentem na cadeira contendo o seu respectivo nome?

**Exercício 3.1.3.** Quantos são os inteiros entre 1 e 3000 que são divisíveis por 2, 3 ou 5?

**Exercício 3.1.4.** Quantos são os anagramas de AAABBBCCC que não têm três letras consecutivas iguais?

**Exercício 3.1.5.** Calcule a probabilidade  $p_n$  do sorteio de um amigo secreto com  $n$  pessoas dar errado. Usando a Fórmula de Taylor, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 - e^{-1}.$$

**Observação:** o resultado acima não é intuitivo! Imagine realizar um amigo secreto com um milhão de pessoas. Seria muito provável dar errado ou seria muito provável dar certo? Este problema mostra que a resposta não é nenhuma das duas.

**Exercício 3.1.6.** Quantos são os números entre 1 e 100.000 (incluindo este último) que são divisíveis por pelo menos um desses números: 7 ou 11?

**Exercício 3.1.7.** Quantos são os inteiros entre 1 e 100.000 (incluindo este último) que são divisíveis por 5, 7 ou 11?

**Exercício 3.1.8.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ , considere a função  $\varphi$  de Euler, ou seja,  $\varphi(n)$  é igual à quantidade de números entre 1 e  $n$  que são coprimos com  $n$ . Por exemplo, os números naturais menores ou iguais a doze que são coprimos com 12 são  $\{1, 5, 7, 11\}$ . Logo,  $\varphi(12) = 4$ . Seja

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

a decomposição de  $n$  como produto de potências de primos distintos. Aplique o Princípio de Inclusão-Exclusão para provar que a função  $\varphi$  tem a seguinte expressão:

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

**Exercício 3.1.9.** Seis casais estão em uma mesa redonda. De quantas maneiras é possível que ninguém esteja ao lado do seu par original?

**Exercício 3.1.10.** Uma “mão de pôquer” é um conjunto de 5 cartas do baralho. Calcule a probabilidade de que um jogador receba uma mão de pôquer contendo todos os naipes.

**Exercício 3.1.11.** Num certo grupo de pessoas,  $m$  delas estão de camiseta branca,  $n$  delas estão de camiseta verde e  $k$  delas de camiseta azul. As pessoas se organizam ao acaso fazendo uma fila. Qual a probabilidade de que, para alguma cor, todas as pessoas com camisetas dessa cor sejam vizinhas?

**Exercício 3.1.12.** Um certo jogo de bilhar se inicia com dez bolas de bilhar arrumadas como mostra a Figura 3.3. Se arrumarmos as bolas ao acaso, qual a probabilidade de que pelo menos uma fila (na horizontal) tenha todas as bolas na posição correta?

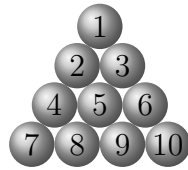


Figura 3.3. Bolas na posição correta.

**Exercício 3.1.13.** Numa corrida da hipotética Fórmula-T há 12 carros, sendo três de cada de cada equipe (ou seja, há 4 equipes). A largada é feita com três colunas paralelas de quatro carros. Não é permitido que nenhuma equipe tenha seus três carros emparelhados numa mesma linha, e cada equipe deve ter pelo menos um carro em cada coluna. De quantos modos a largada pode ser feita? Considere os carros distintos.

**Exercício 3.1.14.** Uma urna contém  $n$  bolas numeradas de 1 a  $n$ . As bolas são retiradas ao acaso, uma a uma, até esvaziar a urna. Se a  $k$ -ésima bola é retirada na  $k$ -ésima extração, dizemos que houve um encontro. Qual a probabilidade de que haja pelo menos um encontro?

**Exercício 3.1.15.** Quantas são as funções  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  tais que a equação  $f(k) = k$  tem solução?

**Exercício 3.1.16.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos tais que  $|A| = n$  e  $|B| = k$ .

a) Mostre que o número de funções sobrejetoras  $f : A \rightarrow B$  é igual a

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

**Dica:** conte primeiro quantas são as funções que *não são* sobrejetoras.

b) Os *Números de Stirling de segunda ordem*, denotados por  $S(n, k)$ , são definidos como o número de maneiras de distribuir  $n$  objetos distinguíveis (numerados) em  $k$  urnas indistinguíveis de tal modo que não haja urnas vazias. Usando o item anterior, calcule  $S(n, k)$ .

- c) Os *Números de Bell*, denotados por  $B_n$ , são definidos como o número de maneiras de particionar um conjunto com  $n$  elementos em subconjuntos não vazios. Por exemplo, o conjunto  $\{1, 2, 3\}$  pode ser particionado das seguintes maneiras:

$$\begin{aligned} & \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \\ & \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{1, 2, 3\}\}. \end{aligned}$$

Portanto,  $B_3 = 5$ . Você consegue deduzir uma relação entre os Números de Stirling de segunda ordem e os Números de Bell?

**Exercício 3.1.17.** Antes de fazer este exercício, resolva o anterior.

- a) Quantas são as possíveis relações de equivalência  $\mathcal{R}$  com exatamente  $k$  classes de equivalência em um conjunto  $X$  com  $n$  elementos?
- b) Quantas são as possíveis relações de equivalência  $\mathcal{R}$  em um conjunto  $X$  com  $n$  elementos?
- c) Um *esquema de rimas* é uma sequência de  $n$  letras dentre  $n$  letras disponíveis, com possíveis repetições, indicando, em um poema de  $n$  versos, quais versos devem rimar com quais versos. Por exemplo, para  $n = 5$ ,  $ABABB$  é um esquema de rimas, o qual indica que o primeiro verso deve rimar com o terceiro, e o segundo, quarto e quinto versos devem rimar entre si. Note que as letras em particular escolhidas não importam. Por exemplo,  $ABABB$  e  $CDCDD$  representam o mesmo esquema de rimas. Quantos são os possíveis esquemas de rimas para um poema com  $n$  linhas?
- d) De quantas maneiras podemos distribuir  $n$  bolas numeradas em  $n$  urnas idênticas?
- e) Dizemos que  $n$  é um número natural *livre de quadrados* se em sua fatoração em potências de primos aparecem apenas números primos distintos. Por exemplo,  $30 = 2 \times 3 \times 5$  é um número livre de quadrados. Quantas são as fatorações de um número livre de quadrados? Por exemplo, para  $n = 30$ , as possíveis fatorações são  $2 \times 3 \times 5$ ,  $2 \times 15$ ,  $6 \times 5$ ,  $3 \times 10$  e  $30$ .

**Exercício 3.1.18.** Prove as chamadas Desigualdades de Bonferroni:

$$\begin{aligned} \text{Para } \ell \text{ ímpar,} \quad & \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|, \\ \text{e para } \ell \text{ par,} \quad & \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| \geq \sum_{k=1}^{\ell} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|. \end{aligned}$$

As desigualdades de Bonferroni podem ser resumidas de forma simples: truncando a soma do Princípio de Inclusão-Exclusão num sinal mais, temos uma cota superior para a quantidade de elementos da união. E truncando num sinal menos, temos uma cota inferior.

**Dica:** É mais simples do que parece. Faça indução em  $\ell$ , mas em pares: mostre que o par de desigualdades correspondentes a  $\ell$  e  $\ell + 1$  implicará o par de desigualdades correspondente a  $\ell + 2$  e  $\ell + 3$ .

**Exercício 3.1.19** (OBM-2004). Quantas triplas ordenadas  $(A, B, C)$  de subconjuntos do conjunto  $\{1, \dots, n\}$  existem para as quais  $A \cap B \cap C = \emptyset$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$  e  $A \cap C \neq \emptyset$ ?

## 3.2 Lemas de Kaplansky

Nesta seção, estudaremos a questão de contar o número de subconjuntos de um certo conjunto que satisfaçam a restrição de não possuírem elementos vizinhos. Começemos com um problema simples para fixar ideias:

**Problema.** Quantos são os subconjuntos de 3 elementos do conjunto  $\{1, \dots, 8\}$  sem elementos consecutivos?

Um exemplo de subconjunto assim é  $\{1, 4, 7\}$ . Para resolver esse problema, primeiro fazemos uma bijeção entre os possíveis subconjuntos e sequências de zeros e uns, de oito entradas. Colocaremos um 1 se o elemento estiver presente e 0 se não estiver. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\{1, 4, 7\} &\mapsto 10010010, \\ \{2, 4, 6\} &\mapsto 01010100, \\ \{3, 5, 8\} &\mapsto 00101001.\end{aligned}$$

Bem, nem todas as sequências de zeros e uns com oito entradas correspondem a um subconjunto. É necessário que a sequência de zeros e uns tenha exatamente três uns e que não haja uns vizinhos. Façamos então outra bijeção, agora partindo das possíveis sequências de zeros e uns.

Cada sequência tem exatamente cinco zeros. Vamos desenhá-los abaixo, colocando espaços entre os zeros e nos extremos também:

$$\text{— } 0 \text{ — } 0 \text{ — } 0 \text{ — } 0 \text{ — } 0 \text{ —}$$

Em cada espaço podemos colocar um dígito 1, ou não colocar nada. Por exemplo, se não colocarmos nada nos três primeiros espaços obteremos 00010101, que por sua vez corresponde ao subconjunto  $\{4, 6, 8\}$ .

Logo, o número de possibilidades para tais subconjuntos é igual ao número de maneiras de escolher quais dos seis espaços terão um 1, que é  $\binom{6}{3}$ .

**Proposição 3.2.1** (Primeiro Lema de Kaplansky). *Dizemos que um subconjunto é um  $p$ -subconjunto se tem  $p$  elementos. O número de  $p$ -subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  sem elementos consecutivos é igual a  $f(n, p) := \binom{n-p+1}{p}$ .*

*Demonstração.* Vamos repetir *ipsis litteris* o argumento do problema anterior. Teremos então  $n - p$  zeros. Colocando espaços entre os zeros e nos extremos, teremos  $n - p + 1$  espaços. Em cada espaço podemos colocar um 1 ou não colocar nada. Como são  $p$  uns, temos de escolher  $p$  espaços dentre  $n - p + 1$  para colocar uns, sendo no máximo um 1 por espaço. Daí, obtemos  $\binom{n-p+1}{p}$ .  $\square$

Uma observação: se  $p$  for muito grande, não será possível escolher um  $p$ -subconjunto de  $\{1, \dots, n\}$  sem elementos consecutivos. Para quais valores de  $p$  existe pelo menos um  $p$ -subconjunto sem elementos consecutivos?

Como o número de  $p$ -subconjuntos é  $\binom{n-p+1}{p}$ , a resposta para esta questão é obtida simplesmente fazendo  $n - p + 1 \geq p$ , que nos dá  $p \leq \frac{n+1}{2}$ . Isso também motiva uma convenção útil, que simplifica consideravelmente diversas fórmulas: se  $k > n$ , então dizemos que

$$\binom{n}{k} = 0.$$

Reveja a Observação 2.4.4 a respeito.

**Proposição 3.2.2** (Segundo Lema de Kaplansky). *O número  $p$ -subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$  sem elementos consecutivos, considerando o número 1 como consecutivo de  $n$ , é igual a  $g(n, p) := \frac{n}{n-p} \binom{n-p}{p}$ .*

*Demonstração.* Vamos separar os  $p$ -subconjuntos em dois tipos. Os  $p$ -subconjuntos que têm o elemento 1 e os  $p$ -subconjuntos que não têm o elemento 1.

**1º caso:** Como o 1 está presente, nem o 2 nem o  $n$  podem estar presentes no  $p$ -subconjunto, pois são vizinhos deste. Logo, precisamos escolher outros  $p - 1$  elementos do conjunto  $\{3, \dots, n - 1\}$ . Pela proposição anterior, o número de maneiras para fazer isso é

$$f(n - 3, p - 1) = \binom{(n - 3) - (p - 1) + 1}{p - 1} = \binom{n - p - 1}{p - 1}.$$

**2º caso:** Como o 1 não está presente, precisamos escolher  $p$  elementos do conjunto  $\{2, \dots, n\}$ . Pela proposição anterior, o número de maneiras para isso é

$$f(n - 1, p) = \binom{(n - 1) - p + 1}{p} = \binom{n - p}{p}.$$

Daí, somando os resultados de cada caso e fazendo algumas contas, obtemos

$$\binom{n - p - 1}{p - 1} + \binom{n - p}{p} = \frac{n}{n - p} \binom{n - p}{p}.$$

$\square$



## Exercícios

**Exercício 3.2.1.** De quantos modos podemos colocar 40 meninas e 10 meninos em uma ciranda se meninos não podem se sentar juntos?

**Exercício 3.2.2.** Quantos são os anagramas de uma palavra com 40 letras  $A$ , 50 letras  $B$ , 60 letras  $C$  e 70 letras  $D$  que não têm letras  $A$  adjacentes?

**Exercício 3.2.3.** Quantos são os quadriláteros (convexos) cujos vértices são vértices não adjacentes de um icosaágono regular?

**Exercício 3.2.4.** Quantas são as permutações de  $\{1, 2, \dots, pn\}$  que não têm múltiplos de  $p$  adjacentes?

**Exercício 3.2.5.** Mostre, por um argumento combinatório, que  $f(n+1, p) = f(n, p) + f(n-1, p-1)$ .

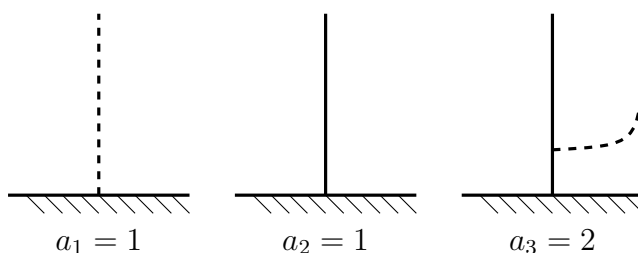
**Exercício 3.2.6 (IME).** Doze cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos doze cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa, sendo que nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

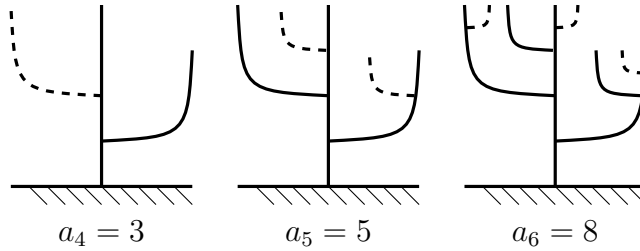
## 3.3 Recorrência

Em soluções via uma *equação de recorrência* (dizemos também *relação de recorrência*, ou simplesmente *recorrência*) escrevemos a resposta do problema, que depende de um natural  $n$ , em termos da resposta do mesmo problema para valores menores. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 3.3.1.** Um certo tipo de árvore é tal que cada um de seus galhos, após dois meses de existência, gera um novo galho e, a partir disso, gera um galho novo todo mês. No tempo inicial há um galho, que esperará dois meses para gerar o próximo. Esta árvore terá quantos galhos após 11 meses?

Façamos alguns desenhos para ilustrar o crescimento dos galhos. Em traçado desenhamos os galhos que ainda não estão prontos para gerar um novo galho.





Logo, obtemos a equação de recorrência

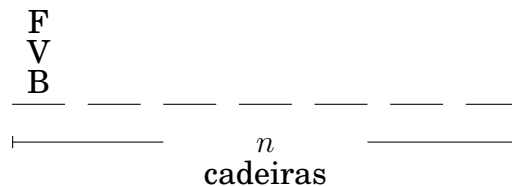
$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 1, \end{cases}$$

que é a famosa *sequência de Fibonacci*, ou *sucessão de Fibonacci*. Na próxima seção veremos como resolver equações de recorrência. Nesta seção nos dedicaremos exclusivamente a encontrar a recorrência para um dado problema.

**Observação 3.3.2.** Por vezes dizemos que a sequência de Fibonacci é 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... e por vezes iniciamos de zero, ou seja, dizemos que a sequência de Fibonacci é 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

**Exemplo 3.3.3.** De quantas maneiras podemos colocar torcedores do Bahia, Vitória e Feirense em uma fila de  $n$  cadeiras numeradas se torcedores do Bahia não podem se sentar ao lado de torcedores do Vitória?

Seja  $a_n$  a resposta do problema no caso de  $n$  cadeiras. Obtenhamos então uma recorrência para  $a_n$ . Para isso, vamos separar as possíveis configurações de acordo com torcedor sentado na posição mais à esquerda (poderíamos também ter escolhido a posição mais à direita). Representaremos cada torcedor pela primeira letra de seu clube, B, F ou V.



Analisemos: se o primeiro torcedor é B então o torcedor ao seu lado é B ou F. Analogamente, se o primeiro torcedor é V então o torcedor ao seu lado é V ou F. E se o primeiro torcedor é F, não há restrição para o torcedor ao lado, podendo ser B, F ou V.

Seja  $a_n$  a resposta do problema, que claramente depende de  $n$ , a quantidade de cadeiras. Pela Regra da Soma,  $a_n$  é igual a quantidade de sequências começando de B, mais a quantidade de sequências começando de V, mais a quantidade

de sequências começando de F. Tenha em mente que todas as sequências referidas aqui satisfazem à condição de não ter B ao lado de V.

A quantidade de sequências começando de F é  $a_{n-1}$ , pois há uma cadeira a menos, e a presença de F nesta cadeira não afeta as cadeiras seguintes.

Analisemos as sequências começando de B: ao lado de B, deve haver B ou F. Para BF, temos  $a_{n-2}$  possibilidades. Para BB, temos que separar em dois casos: ou a próxima letra é B ou F. Se for F, temos  $a_{n-3}$  possibilidades. Se for B, novamente separamos em dois casos e assim por diante. Além disso, notemos que a quantidade de sequências começando por B é igual à quantidade de sequências começando por V, por simetria.

Continuando com este argumento, podemos concluir que  $a_n$  satisfaz a recorrência

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_1 + 2), \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Note que  $a_n$  depende de todos os termos anteriores  $a_1, \dots, a_{n-1}$ , o que pode dificultar sua resolução (lembrando que técnicas de resolução serão vistas apenas na próxima seção).

Podem-se obter diferentes recorrências para um mesmo problema: e recorrências distintas podem ter graus de dificuldade de resolução muito diferentes. Busquemos agora uma outra recorrência para o problema acima.

Chamemos de  $a_n$  o número de sequências (sempre satisfazendo a condição de não haver B ao lado de V) que começam com F, e de  $b_n$  o número de sequências possíveis que começam com B ou V.

Seguindo um raciocínio similar ao anterior podemos verificar que

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}, \\ a_1 = 1, \\ b_1 = 2. \end{cases} \quad (3.5)$$

que é um chamado *sistema de recorrências*. Note que resposta do problema é dada por  $a_n + b_n$ .

**Exemplo 3.3.4.** De quantas maneiras podemos cobrir uma caixa  $2 \times n$  com  $n$  retângulos  $2 \times 1$ ?

Após colocarmos os retângulos sobre a caixa, temos duas possibilidades para o lado direito da caixa: ou há um retângulo em pé ou dois retângulos deitados, veja a Figura 3.4 para um exemplo.



Figura 3.4. Duas formas para guardar os retângulos numa caixa  $2 \times 7$ . Na da esquerda há dois retângulos deitados no extremo à direita da caixa.

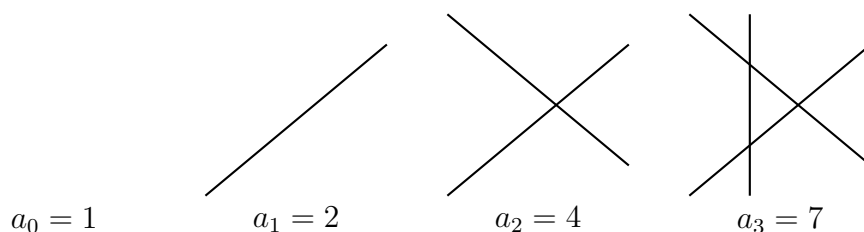
Daí, podemos deduzir que

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \end{cases}$$

que é a novamente a sequência de Fibonacci. Observe que poderíamos ter escrito  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 1$ , o que corresponderia à mesma recorrência.

**Exemplo 3.3.5.** São desenhadas  $n$  retas no plano. Qual o número máximo de regiões (possivelmente infinitas) que estas retas podem delimitar?

Façamos alguns casos particulares para ter uma ideia:



Como deduzir a equação de recorrência? Para isto, contemos quantas novas regiões são criadas quando desenhamos uma nova reta a partir da quantidade de interseções desta reta com as anteriores. Veja a figura abaixo, onde em hachurado temos as “novas regiões”. Suponha que  $n - 1$  é o número de retas que já estavam no plano.

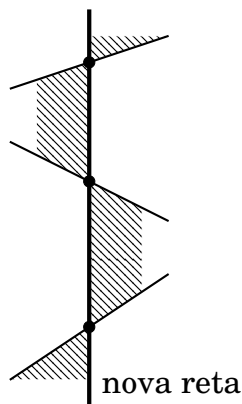


Figura 3.5. A reta em linha grossa é a reta adicionada ao plano.

O número de novas regiões é igual ao número de interseções mais um. Por exemplo, na Figura 3.5, são três pontos de interseção, e quatro novas regiões. Bem, como o número de interseções é igual ao número de retas que já estavam

no plano, ou seja,  $n - 1$ , concluímos que  $a_n = a_{n-1} + (n - 1) + 1 = a_{n-1} + n$ . Ou seja,

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n, \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

é a equação de recorrência desejada.

**Exemplo 3.3.6.** Seja  $a_n$  o número maneiras de abrir e fechar  $n$  pares de parênteses. Observemos que para  $n = 2$ , por exemplo, a sequência

$$()()$$

é permitida, mas

$$)()$$

não é, pois neste último caso fechamos um parêntese antes de abri-lo. Analisemos alguns casos pequenos.

Para  $n = 1$ , só há uma maneira possível de abrir e fechar um par de parênteses, que é  $()$ . Logo,  $a_1 = 1$ .

Para  $n = 2$ , há duas possibilidades,  $()()$  ou  $(())$ . Assim,  $a_2 = 2$ .

Para  $n = 3$ , temos as possibilidades  $()()()$ ,  $(())()$ ,  $()(())$ ,  $((()))$  e  $((() ))$ . Logo,  $a_3 = 5$ .

Como obter uma relação de recorrência para  $a_n$ ? Para isso, vamos olhar o primeiro parêntese que foi aberto (o que está mais à esquerda) e o parêntese que o fecha. Daí, olharemos o que está dentro dele e o que está à direita dele. Se não houver nada dentro dele, podemos desenhar um conjunto vazio  $\emptyset$  para ilustrar. Por exemplo, em  $n = 3$ , temos os casos:

$$(\emptyset)()(), (\emptyset)(()), (())(), ((\emptyset)), ((() )).$$

Se dentro do par de parênteses fixado (o primeiro) não temos nada, de quantas maneiras podemos arrumar os parênteses à direita dele? Bem, como são 2 pares de parênteses, temos  $a_2$  possibilidades. Se houver um par dentro e um par fora? Teremos  $a_1 a_1$  possibilidades. E se houver dois dentro e nenhum fora, novamente temos  $a_2$  possibilidades. Ou seja,

$$a_3 = a_2 + a_1 a_1 + a_2.$$

Para  $n = 0$  não faz muito sentido falar de zero pares de parênteses. Mas podemos definir  $a_0 = 1$  para termos uma fórmula elegante:

$$a_3 = a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0.$$

Generalizando esta ideia, podemos concluir que

$$\begin{cases} a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-2} a_1 + a_{n-1} a_0, \\ a_0 = 1, \end{cases}$$

é a relação de recorrência procurada. Note que ela envolve *todos* os termos anteriores a  $a_n$ .

**Observação.** Com certa frequência, é conveniente começar uma recorrência do termo  $a_0$ . Caso a recorrência obtida não comece deste termo, basta deduzir qual deve ser o termo  $a_0$  (ou mais termos iniciais) para se obter a mesma recorrência. Por exemplo, considere

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 1, \end{cases}$$

que começa de  $a_0$ . Pela recorrência dada, temos que  $a_2 = a_1 + a_0$ . Logo,  $1 = 1 + a_0$ , que implica  $a_0 = 0$  e podemos reescrever a recorrência acima como

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_0 = 0, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

## Exercícios

**Exercício 3.3.1.** Um esporte pouco conhecido é o de subir escadas. Encontre uma relação de recorrência para o número de maneiras  $a_n$  de se subir  $n$  degraus de uma escada, se a cada passo pode-se escolher subir um ou dois degraus. E se considerarmos a questão de iniciar com o pé direito ou esquerdo, como ficará a recorrência?

**Exercício 3.3.2.** Seja  $a_n$  o número de maneiras de se cobrir uma caixa  $1 \times n$  com retângulos  $1 \times 1$ ,  $1 \times 2$  e  $1 \times 3$ . Obtenha uma relação de recorrência para  $a_n$ .

**Exercício 3.3.3.** Seja  $a_n$  o número de maneiras de se cobrir uma caixa  $3 \times n$  com retângulos  $1 \times 2$  (você pode colocar cada dominó na horizontal ou vertical). Obtenha uma relação de recorrência para  $a_n$ .

**Exercício 3.3.4.** Encontre uma recorrência para  $a_n$ , o número de seqüências de  $n$  letras dentre  $a, b, c$  ou  $d$ , que não têm letras  $a$  vizinhas.

**Exercício 3.3.5.** Uma triangulação de um polígono convexo  $P_n$  é uma divisão de  $P_n$  em triângulos usando algumas de suas diagonais de modo que suas diagonais não se intersectem, veja a Figura 3.6.

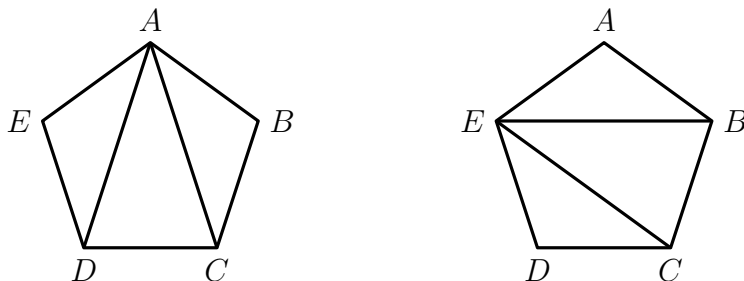


Figura 3.6. Duas triangulações diferentes do pentágono  $ABCDE$ .

Encontre uma relação de recorrência para  $a_n$ , onde  $a_n$  denota o número de triangulações de um polígono convexo de  $n$  lados.

**Dica:** para ajudar na contagem, fixe um lado do polígono e o triângulo que contém esse lado, e faça a contagem. Depois some sobre todos os triângulos possíveis que contém esse lado.

**Exercício 3.3.6.** Seja  $P_n$  o número de permutações de  $\{1, \dots, n\}$ . Sem usar que  $P_n = n!$ , deduza a equação de recorrência

$$\begin{cases} P_n = nP_{n-1}, \\ P_1 = 1. \end{cases}$$

**Exercício 3.3.7.** Seja  $D_n$  o número de permutações caóticas de  $\{1, \dots, n\}$ . Sem usar a fórmula para  $D_n$ , deduza a equação de recorrência

$$\begin{cases} D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), \\ D_1 = 0, \\ D_2 = 1. \end{cases}$$

**Exercício 3.3.8.** Obtenha uma relação de recorrência para o problema das Torres de Hanói apresentado no Exercício 1.1.19.

**Exercício 3.3.9.** Considere o conjunto das seqüências de tamanho  $n$  tais que cada entrada pertence a  $\{0, 1, 2, 3\}$  e entradas vizinhas sempre diferem por 1 em módulo. Descreva um sistema de equações de recorrência para resolver este problema.

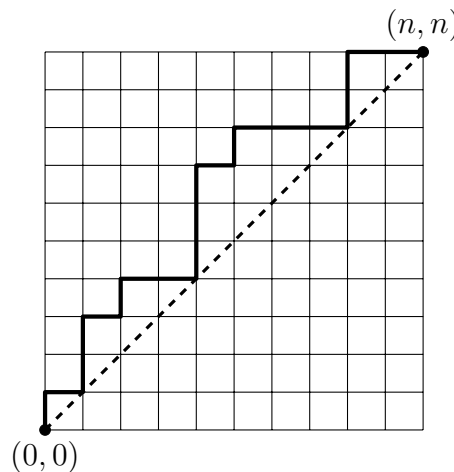


Figura 3.7. Exemplo de trajetória permitida.

**Exercício 3.3.10.** Considere um reticulado  $n \times n$ . Vamos chamar de *trajetória permitida* um caminho poligonal que sai de  $(0,0)$ , chega em  $(n,n)$ , nunca toca pontos abaixo da diagonal e a cada passo sobe uma unidade ou anda para a direita uma unidade, veja a Figura 3.7. Seja  $a_n$  o número de trajetórias permitidas. Determine uma relação de recorrência para  $a_n$ .

**Exercício 3.3.11.**

- a) No Exercício 3.1.16, definimos os Números de Stirling de segunda ordem  $S(n, k)$  como o número de maneiras de distribuir  $n$  bolas numeradas em  $k$  urnas indistinguíveis, sem que nenhuma urna fique vazia. Sem utilizar a fórmula obtida no Exercício 3.1.16, ou seja, apresentando um argumento combinatorio, mostre que os Números de Stirling de segunda ordem satisfazem à recorrência

$$S(n, k) = k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1).$$

**Dica:** considere  $n$  bolas numeradas em  $k$  urnas indistinguíveis. Há dois casos, ou a bola  $n$  está sozinha em uma urna, ou não.

- b) Uma permutação dos números  $\{1, \dots, n\}$  pode ser representada por uma composição de ciclos. Por exemplo, para  $n = 7$ , a notação  $(142)(3)(576)$  representa a permutação  $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 7\}$  tal que  $f(1) = 4$ ,  $f(4) = 2$  e  $f(2) = 1$ , o que completa o primeiro ciclo. Depois, temos que  $f(3) = 3$ , que é um ciclo de tamanho 1. Por fim,  $f(5) = 7$ ,  $f(7) = 6$  e  $f(6) = 5$ . Os *Números de Stirling de primeira ordem sem sinal*, geralmente denotados por  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ , são definidos como o número de permutações de  $n$  elementos cuja decomposição em ciclos tem exatamente  $k$  ciclos. Por exemplo, a permutação  $(142)(3)(576)$  anterior tem três ciclos. Mostre que os Números de Stirling de primeira ordem sem sinal satisfazem à recorrência

$$\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = (n-1) \cdot \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right] + \left[ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right].$$

**Dica:** considere uma permutação de  $n$  elementos com  $k$  ciclos. Há dois casos, ou o  $n$ -ésimo elemento está num ciclo de tamanho um, ou não.

**Observação.** A título de curiosidade, comentamos aqui que os Números de Stirling de primeira ordem com sinal (ou simplesmente Números de Stirling de primeira ordem) são definidos por  $s(n, k) = (-1)^{n-k} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ . E os nomes *de primeira ordem* e *de segunda ordem* se devem a uma conexão entre estes dois tipos de números, a chamada *transformada de Stirling*. A transformada de Stirling é a operação que leva uma sequência  $a_n$  na sequência  $b_n$  definida por

$$b_n = \sum_{k=1}^n S(n, k) a_k,$$



onde  $S(n, k)$  são os Números de Stirling de segunda ordem. Curiosamente, a inversa da transformada de Stirling é a operação que leva uma sequência  $a_n$  na sequência  $b_n$  definida por

$$b_n = \sum_{k=1}^n s(n, k) a_k,$$

onde  $s(n, k)$  são os Números de Stirling de primeira ordem (com sinal).

**Exercício 3.3.12.** Reveja a definição de Números de Bell  $B_n$  no Exercício 3.1.16. Mostre a seguinte recorrência:

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

**Dica:** note que o número de Bell  $B_n$  é o número de possíveis relações de equivalência um conjunto  $X$ , sendo  $|X| = n$ . Fixe então um elemento de  $X$  e denote por  $k$  o número de elementos da classe de equivalência que contém esse elemento.

## 3.4 Métodos de Resolução de Recorrências

Existem variadas técnicas para obter soluções de equações de recorrência. Veremos três técnicas para casos particulares (que ocorrem com frequência), a dizer, substituição reversa, soma telescópica e equação característica, e uma técnica geral extremamente poderosa: função geradora.

### Substituição Reversa

Começamos com o método mais básico possível, substituir a recorrência nela mesma repetidamente. Vejamos:

**Problema 3.4.1.** Resolva a equação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1, \\ a_1 = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

*Solução:* Façamos substituições “para trás” reiteradamente:

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ &= 2(2a_{n-2} + 1) + 1 \\ &= 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2 (2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 \\ &= 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1} a_1 + (2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1). \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1. \end{aligned}$$

Daí, aplicando a fórmula para soma de uma progressão geométrica (veja o Exercício 1.1.10), obtemos  $a_n = 2^n - 1$ .  $\square$

Uma observação importante é que o método de substituição reversa na verdade nos fornece apenas um *candidato* a solução do problema. Mas é fácil verificar que tal candidato é de fato a solução do problema, basta substituí-lo na recorrência e ver que a igualdade é satisfeita. Por exemplo, no caso da fórmula para  $a_n = 2^{n-1} - 1$  obtida no Problema 3.4.1, temos que  $a_1 = 2^1 - 1 = 1$ , o que nos dá a condição inicial correta. E também temos que  $2a_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1 = a_n$ , mostrando que esta é de fato a solução da recorrência (3.6). E também vale a pena comentar que o método não é uma panaceia<sup>1</sup>, pois não é sempre que este método leva a um candidato. Por exemplo:

**Exemplo 3.4.2.** Tentemos resolver, via substituição reversa, a recorrência

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_0 = 0, \\ a_1 = 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Fazendo substituição reversa, temos que

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ &= (a_{n-2} + a_{n-3}) + (a_{n-3} + a_{n-4}) \\ &= a_{n-2} + 2a_{n-3} + a_{n-4} \\ &= (a_{n-3} + a_{n-4}) + 2(a_{n-4} + a_{n-5}) + (a_{n-5} + a_{n-6}) \\ &= a_{n-3} + 3a_{n-4} + 3a_{n-5} + a_{n-6} \\ &= (a_{n-4} + a_{n-5}) + 3(a_{n-5} + a_{n-6}) + 3(a_{n-6} + a_{n-7}) + (a_{n-7} + a_{n-8}) \\ &= a_{n-4} + 4a_{n-5} + 6a_{n-6} + 4a_{n-7} + a_{n-8}, \end{aligned}$$

e nenhum padrão claro emerge<sup>2</sup> para realizarmos uma soma e conjecturarmos qual seria a expressão para  $a_n$ .

Mais adiante veremos como resolver a recorrência (3.7) via outros métodos. Grosso modo, podemos dizer que substituição reversa é, *em geral*, mais útil em recorrências de primeira ordem, onde o termo  $a_n$  depende apenas de  $a_{n-1}$ , do que em recorrência de segunda ordem, nas quais o termo  $a_n$  depende de  $a_{n-1}$  e  $a_{n-2}$ , ou recorrências de ordens maiores, cuja definição é análoga. Vejamos outro problema:

<sup>1</sup>Panaceia (do grego *panákeia*, onde que pan significa “todo” e ákos significa “remédio”) é uma palavra usada para designar uma planta ou substância que curaria todas as doenças. Na mitologia grega, Panaceia era a deusa da cura, irmã de Hígia, deusa da saúde e higiene.

<sup>2</sup>Talvez o leitor tenha notado que os coeficientes que surgem na substituição reversa parecem ser os coeficientes das linhas no Triângulo de Pascal (a ser visto na Seção 4.2). Isto é verdade, mas tal padrão não nos dá nenhuma pista de uma fórmula para  $a_n$ .

**Problema 3.4.3.** Resolva a equação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2^n, \\ a_1 = 7. \end{cases}$$

*Solução:* Analogamente ao que fizemos na solução do problema anterior, temos que

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2^n \\ &= 3(3a_{n-2} + 2^{n-1}) + 2^n \\ &= 3^2a_{n-2} + 3^1 \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ &= 3^2(3a_{n-3} + 2^{n-2}) + 3^1 \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ &= 3^3a_{n-3} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + 3^1 \cdot 2^{n-1} + 2^n \\ &\vdots \\ &= 3^{n-1}a_1 + (3^{n-2} \cdot 2^2 + 3^{n-3} \cdot 2^3 + \dots + 3^1 \cdot 2^{n-1} + 3^0 \cdot 2^n) \\ &= 3^{n-1} \cdot 7 + (3^{n-2} \cdot 2^2 + 3^{n-3} \cdot 2^3 + \dots + 3^1 \cdot 2^{n-1} + 3^0 \cdot 2^n). \end{aligned}$$

Note que a soma entre parênteses é a soma de uma progressão geométrica de razão  $2/3$ . Aplicando a fórmula correspondente (Exercício 1.1.10), obtemos

$$a_n = 7 \cdot 3^{n-1} + (3^{n-2} \cdot 2^2 + 3^{n-3} \cdot 2^3 + \dots + 3^1 \cdot 2^{n-1} + 3^0 \cdot 2^n).$$

□

Para encontrar a solução de uma recorrência via substituição reversa é comum realizar uma soma do tipo

$$\sum_{k=0}^n k^{\ell-1} q^k \tag{3.8}$$

(assuma  $\ell$  natural,  $q \neq 1$  e  $0^0 = 1$ ). Note que para  $\ell = 1$  a soma em (3.8) é simplesmente a soma de uma progressão geométrica, cuja bem conhecida fórmula é

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Para  $\ell = 2$ , a soma em (3.8) se torna  $\sum_{k=0}^n kq^k$ , que é conhecida como a soma de uma *progressão geométrica de segunda ordem*. De maneira geral, a soma em (3.8) é conhecida como a soma de uma progressão geométrica de ordem  $\ell$ . O fato que este tipo de soma (3.8) aparece com frequência no método de substituição reversa nos motiva a estudá-la. Vejamos um método para calcular a soma de uma maneira mais prática e geral do que a que foi feita na solução do Problema 3.4.3. Neste método, vamos utilizar derivadas para obter somatórios! Eis mais uma interessante conexão entre cálculo e contagem.

## Exercícios

**Exercício 3.4.1.** Use substituição reversa para deduzir que a solução de

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2, \\ a_0 = 0, \end{cases}$$

é dada por  $a_n = 3^n - 1$ .

**Exercício 3.4.2.** Use substituição reversa para resolver a equação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 2, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

**Exercício 3.4.3.** Use substituição reversa para encontrar a solução de

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 2^n, \\ a_0 = 6, \end{cases}$$

**Exercício 3.4.4.** Use substituição reversa para encontrar a solução de

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + n, \\ a_0 = 6, \end{cases}$$

**Exercício 3.4.5.** Um sistema de computador considera uma entrada válida se esta for uma sequência de  $n$  dígitos na qual há um número par de dígitos zero. Por exemplo, 013450179 é uma entrada válida, mas 1234567890 não é uma entrada válida.

- Seja  $a_n$  o número de entradas válidas com  $n$  dígitos. Encontre uma recorrência para  $a_n$ .
- Usando substituição reversa, resolva a recorrência anterior e determine  $a_n$ .

**Exercício 3.4.6.** Usando a técnica de substituição reversa, mostre que a solução da recorrência

$$\begin{cases} a_n = ra_{n-1} + g(n), \\ a_0 = b \end{cases}$$

é dada por  $a_n = r^n b + \sum_{k=1}^n r^{n-k} g(k)$ .

## Soma Telescópica

Uma soma é dita *telescópica* se é da forma  $\sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_{j-1}$ . O nome se deve ao fato de uma soma deste tipo ser igual à diferença entre os termos extremos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_{j-1} &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_n - a_0. \end{aligned}$$

O nome *soma telescópica* é uma alusão a uma luneta, cujas peças se encaixam uma dentro da outra, e cuja espessura depende apenas da peça mais externa e da peça mais interna. Para resolver uma equação de recorrência via somas telescópicas, somamos (se factível for) diferenças de maneira adequada.

**Problema 3.4.4.** Resolvamos a equação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n, \\ a_0 = 1, \end{cases}$$

que se refere ao número máximo de regiões que  $n$  retas delimitam no plano, tratado no Exemplo 3.3.5.

*Solução:* Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_{j-1} &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, sendo a soma telescópica, temos também que  $\sum_{j=1}^{n-1} a_j - a_{j-1} = a_n - a_0$ . Portanto,  $a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ . □

A ideia de soma telescópica, além de resolver recorrências, também serve para calcular somas. Para este fim, basta escrever o somando como uma diferença. Por exemplo, vejamos como calcular

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Temos que  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ . Logo,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

## Exercícios

**Exercício 3.4.7.** Usando uma soma telescópica, resolva a recorrência

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

**Dica:** Multiplique as igualdades relativas a  $j = 1, \dots, n$  por valores adequados para obter uma soma telescópica.

**Exercício 3.4.8.** Usando a técnica de soma telescópica, calcule as somas

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}, \quad \text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{2}{3^k}.$$

## Equação Característica

Começemos com a definição de recorrência linear homogênea.

**Definição 3.4.5.** Uma recorrência é dita linear homogênea se é da forma

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, \\ a_0 = A_0, \\ a_1 = A_1, \\ \vdots \\ a_{k-1} = A_{k-1}, \end{cases} \quad (3.9)$$

onde  $c_1, \dots, c_k$  e  $A_0, \dots, A_{k-1}$  são constantes, com  $c_k \neq 0$ .

Em palavras, uma recorrência é dita linear homogênea se cada termo é uma combinação linear finita dos anteriores. A seguir, vejamos a chamada *equação característica* associada a uma equação linear homogênea.

**Definição 3.4.6.** Considere uma recorrência linear homogênea, com a mesma notação de (3.9). Em palavras, a equação característica associada a esta recorrência é a equação polinomial que obtemos substituindo  $a_n$  por  $x^n$  e depois dividindo a equação pela maior potência de  $x$ , de modo a ainda termos uma equação polinomial. Ou seja, primeiro trocamos  $a_n$  por  $x^n$  na primeira equação de (3.9), obtendo

$$x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \dots - c_k x^{n-k} = 0.$$

E depois fazemos um cancelamento para chegar a

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_{k-1} x - c_k = 0,$$

que é a equação característica.

**Teorema 3.4.7.** *Considere uma recorrência linear homogênea com a notação de (3.9). Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$  as raízes distintas e não nulas (possivelmente complexas) da equação característica, de multiplicidades  $m_1, \dots, m_\ell$  respectivamente. Então existem polinômios  $p_1, \dots, p_\ell$  de graus  $m_1 - 1, \dots, m_\ell - 1$ , respectivamente, tais que a solução da equação de recorrência é*

$$a_n = p_1(n) \cdot \lambda_1^n + \dots + p_\ell(n) \cdot \lambda_\ell^n.$$

Para uma prova desse resultado, veja [Keller e Trotter, 2015, Capítulo 9]. Como exemplo de aplicação, obteremos a fórmula geral para a sequência de Fibonacci, dada por

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_0 = 0, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Para obter a equação característica: primeiro olhamos para  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , trocamos cada termo por uma potência de  $x$ , resultando em  $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$ , e depois simplificamos a equação, chegando a

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

As raízes desta equação são:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como as duas raízes são distintas e têm multiplicidade um, pelo Teorema 3.4.7, o termo geral da sequência é dado por

$$a_n = A \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes a serem determinadas. Usando as condições iniciais da recorrência (que são  $a_0 = 0$  e  $a_1 = 1$ ), obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) A + \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) B = 1, \end{cases}$$

cujas soluções são  $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$  e  $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Portanto, a fórmula para o termo geral da sequência de Fibonacci é

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad (3.10)$$

conhecida como *Fórmula de Binet*. Pode parecer estranho à primeira vista que a expressão acima envolva raiz de cinco, já que a sequência de Fibonacci é de números inteiros. Entretanto, fazendo a expansão da potência, as raízes de cinco acabam se cancelando e o resultado final é sempre inteiro. Faça o teste para valores de  $n$  pequenos.

## Exercícios

**Exercício 3.4.9.** Usando a equação característica, resolva a seguinte equação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \\ a_0 = 1, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

**Exercício 3.4.10.** Usando a equação característica, resolva a seguinte equação de recorrência

$$\begin{cases} a_n - 7a_{n-1} + 15a_{n-2} - 9a_{n-3} = 0, \\ a_0 = 1, \\ a_1 = 2, \\ a_2 = 3. \end{cases}$$

**Dica:** Neste caso temos uma raiz com multiplicidade diferente de um. Não se esqueça dos polinômios no enunciado do Teorema 3.4.7.

**Exercício 3.4.11.** Resolva a equação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), \\ a_0 = 1, \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

**Dica:** No final, para deixar a resposta mais arrumada, use a decomposição trigonométrica de um número complexo. Ou seja, se  $z = x + iy$ , então  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , onde  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  e  $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

**Exercício 3.4.12.** Uma faixa horizontal  $1 \times n$  será completamente coberta por azulejos, que podem ter dois formatos retangulares,  $1 \times 1$  ou  $1 \times 2$ . Cada azulejo  $1 \times 1$  pode ser cinza ou branco, e cada azulejo  $1 \times 2$  é preenchido com um padrão pontilhado, quadriculado ou de retas inclinadas. A Figura 3.8 ilustra uma possível maneira de cobrir a faixa horizontal. Seja  $a_n$  o número de maneiras de cobrir a faixa horizontal.

a) Encontre uma recorrência para  $a_n$ .

b) Resolva a recorrência e encontre uma fórmula para  $a_n$ .

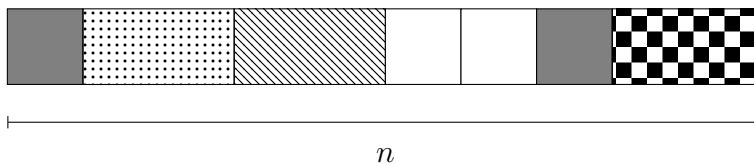


Figura 3.8. Exemplo de cobertura.



**Exercício 3.4.13.** Encontre o número de sequência ternárias (cujas entradas são 0, 1 ou 2) de comprimento  $n$  que não contêm a subsequência 012 (de maneira consecutiva). Por exemplo, 00100211001 é uma destas sequências, mas 01200000000 não é.

**Exercício 3.4.14.** Seja  $a_n$  o determinante da seguinte matriz  $n \times n$ :

$$A_n = \begin{bmatrix} p & p-q & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & p & p-q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & p-q & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & p & p-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & p & p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & p \end{bmatrix}.$$

Verifique que  $a_n$  satisfaz a relação de recorrência

$$a_n = p a_{n-1} - (p-q) q a_{n-2}.$$

- a) Suponha que  $p \neq 2q$ . Resolva a equação de recorrência via a equação característica para obter

$$a_n = \frac{(p-q)^{n+1} - q^{n+1}}{p-2q}.$$

- b) Suponha que  $p = 2q$ . Resolva a equação de recorrência via a equação característica para obter

$$a_n = (1+n)q^n.$$

**Exercício 3.4.15.** Quantas são as sequências de zeros e uns, de tamanho  $n$ , que não têm uns consecutivos?

**Exercício 3.4.16.** Neste exercício, provaremos o Teorema 3.4.7 em um caso particular. Suponha que a equação característica referente à relação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, \\ a_0 = A_0, \\ a_1 = A_1, \end{cases}$$

tenha apenas duas raízes distintas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

- a) Usando a equação característica, mostre que  $a_n - \lambda_1 a_{n-1} = \lambda_2 (a_{n-1} - \lambda_1 a_{n-2})$ .
- b) Defina  $b_n = a_n - \lambda_1 a_{n-1}$  e encontre uma expressão para  $b_n$ .
- c) Agora que já temos uma expressão para  $b_n$ , resolva a recorrência  $a_n = b_n + \lambda_1 a_{n-1}$ .

**Exercício 3.4.17.** O *Número Áureo*  $\phi$  (ou *Razão Áurea*) é definido a partir da ideia de que, numa razão supostamente ideal, “o todo deve estar para a parte maior assim como a parte maior deve estar para a parte menor”. Denotamos por  $\phi$  a razão entre a parte maior e a parte menor. Este número  $\phi$  é uma razão frequentemente usada em arte plásticas e arquitetura desde a antiguidade, com extensa literatura a respeito.

a) Mostre que  $\phi$  é uma das raízes de  $x^2 - x - 1 = 0$  e deduz que  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

b) Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \phi,$$

onde  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da sequência de Fibonacci.

## Função Geradora

Vamos usar livremente o seguinte fato da vida:

**Teorema 3.4.8** (Fórmula de Taylor). *Seja  $f : (-a, a) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função infinitas vezes diferenciável. Então existe um  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

para todo  $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Como veremos, o valor de  $\varepsilon$  (chamado raio de convergência) não é realmente importante em resolução de equações de recorrência. Não nos preocuparemos portanto com ele.

**Exemplo 3.4.9.** Seja  $f(x) = e^x$ . Como a derivada da exponencial é ela própria, temos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

**Exercício 3.4.18.** Usando a Fórmula de Taylor, verifique que

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

**Exemplo 3.4.10.** Seja  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Usando a soma de uma progressão geométrica de razão  $x$ , temos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \quad (3.11)$$

que coincide com a Fórmula de Taylor. Apenas como observação, o raio de convergência para a função  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  acima é  $\varepsilon = 1$ .

Usando a soma de progressão geométrica acima, podemos obter várias fórmulas sem ter o trabalho de calcular as derivadas na Fórmula de Taylor. Por exemplo, substituindo  $x$  por  $x^2$  na fórmula acima, obtemos

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots \quad (3.12)$$

De maneira geral, como consequência do Teorema 3.4.8, temos

**Corolário 3.4.11.** Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , vale

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4 + \dots$$

para todo  $|x| < 1$ .

*Demonstração.* Calcule as derivadas e substitua na Fórmula de Taylor.  $\square$

A igualdade do Corolário 3.4.11 motiva a definição vista na Observação 2.4.5, que é a seguinte: para  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & , \text{ para } n > 0, \\ 1 & , \text{ para } n = 0. \end{cases}$$

Com esta definição, o Corolário 3.4.11 pode ser reescrito simplesmente como

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

**Definição 3.4.12.** Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência. A função geradora (ou função geratriz) associada a esta sequência é a *série formal*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Observe que não há razão alguma para que a soma acima convirja. Por isso usamos este nome *série formal*, que denota uma soma que possivelmente não faça sentido. Mas não fazer sentido a princípio não nos impede de seguir em frente!

A seguir, um roteiro para obter a solução de uma recorrência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  usando funções geradoras:

- (1) Use a relação de recorrência para obter uma equação funcional para a função geradora  $f$ .
- (2) Resolva esta equação para obter a expressão de  $f$ .
- (3) Aplique a Fórmula de Taylor (ou soma de P.G.) na expressão de  $f$  para encontrar os coeficientes  $a_n$ .

Eis um exemplo simples.

**Problema 3.4.13.** Resolva a seguinte equação de recorrência:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1}, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

*Solução:* A função geradora para  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é dada por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \quad (3.13)$$

Usando a relação de recorrência, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + 2a_3x^4 + \cdots \\ &= a_0 + 2x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) \\ &= 1 + 2xf(x). \end{aligned}$$

Ou seja,  $f(x) = 1 + 2xf(x)$ . Resolvendo esta equação, obtemos  $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ . Por Taylor (ou pela soma de uma progressão geométrica de razão  $2x$ ),

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + (2x)^3 + (2x)^4 + \cdots \\ &= 1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \cdots \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de (3.13) com os coeficientes acima, concluímos que  $a_n = 2^n$ . □

Note que em momento algum provamos que este método de resolução de recorrências via funções geradoras leva à solução do problema. É possível, mas não o faremos aqui. E de um ponto de vista prático, isto nem sequer é necessário. Ao final do processo, basta substituir na recorrência a fórmula obtida por este método para verificar que ela é, de fato, solução do problema.

A seguir, outro exemplo. Novamente, eis a sequência de Fibonacci:

**Problema 3.4.14.** Usando funções geradoras, obtenha a expressão geral para o termo  $a_n$  da recorrência

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \\ a_0 = 0, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

*Solução:* Definindo a função geradora e já aplicando a recorrência, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \\ &= a_0 + a_1x + (a_0 + a_1)x^2 + (a_1 + a_2)x^3 + (a_2 + a_3)x^4 + \cdots \\ &= x + x^2f(x) + xf(x). \end{aligned}$$

Portanto, resolvendo a equação para  $f(x)$ ,

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1}.$$

Aplicar a Fórmula de Taylor a esta função seria tedioso. Em vez disso, vamos decompor esta função aplicando a técnica de frações parciais (comum em cursos de Cálculo) e depois aplicar a fórmula para a soma de progressão geométrica.

Sejam  $\lambda_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  as duas raízes de  $x^2 + x - 1 = 0$ . Assuma, por ora, que

$$f(x) = \frac{a}{\lambda_1 - x} + \frac{b}{\lambda_2 - x}.$$

Substituindo a expressão de  $f$ , temos que

$$\frac{-x}{x^2 + x - 1} = \frac{-x}{(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)} = \frac{a}{\lambda_1 - x} + \frac{b}{\lambda_2 - x},$$

que leva a

$$x = a(x - \lambda_2) + b(x - \lambda_1).$$

Comparando os coeficientes de cada membro da equação polinomial acima, obtemos o sistema

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ \lambda_2 a + \lambda_1 b = 0, \end{cases}$$

cujas soluções são dadas por  $a = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$  e  $b = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$ . Logo,

$$f(x) = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}{\lambda_1 - x} + \frac{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}{\lambda_2 - x}. \quad (3.14)$$

Usando a fórmula da soma de uma progressão geométrica, temos que

$$\frac{1}{\lambda - x} = \frac{1}{\lambda(1 - \frac{x}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{x}{\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2} + \cdots \right).$$

Aplicando isto em (3.14), obtemos

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\lambda_1} + \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{x^3}{\lambda_1^3} + \cdots \right) - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\lambda_2} + \frac{x^2}{\lambda_2^2} + \frac{x^3}{\lambda_2^3} + \cdots \right).$$

Comparando a expressão anterior com

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$

concluimos que

$$a_n = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \frac{1}{\lambda_1^n} - \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \frac{1}{\lambda_2^n}. \quad (3.15)$$

Substituindo valores, notamos que  $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$ . Além disso, como  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes de  $x^2 + x - 1 = 0$ , temos que  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ . Portanto,

$$\frac{1}{\lambda_1} = -\lambda_2 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\lambda_2} = -\lambda_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Aplicando estas observações em (3.15), obtemos novamente a Fórmula de Binet:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n. \quad (3.16)$$

□

Na Tabela 3.1, vemos algumas das expansões de Taylor frequentemente utilizadas e suas respectivas sequências associadas. Na Tabela 3.2, vemos algumas

Sequência	Expansão de Taylor	Função Geradora
$a_n = \frac{1}{n!}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$f(x) = e^x$
$a_n \equiv 1$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$f(x) = \frac{1}{1-x}$
$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$	$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ divide } n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}$	$f(x) = \frac{1}{1-x^k}$
$a_n = n + 1$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$	$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
$a_n = \alpha^n$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n$	$f(x) = \frac{1}{1-\alpha x}$
$a_n = \binom{\alpha}{n}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$f(x) = (1+x)^\alpha$
$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ para $n \geq 1$	$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$	$f(x) = \log(1+x)$
$a_n = \frac{1}{n}$ para $n \geq 1$	$f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$f(x) = \log(1-x)$

Tabela 3.1. Algumas sequências e funções comuns.

das operações mais comuns com funções geradoras e o que acontece com seus coeficientes.

## Exercícios

**Exercício 3.4.19.** Aplique o Corolário 3.4.11 para obter novamente as fórmulas (3.11) e (3.12).

**Operações comuns com**  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  e  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

$$\begin{aligned}
 f(\alpha x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n x^n \\
 x^k f(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} x^n \\
 Af(x) + Bg(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (Aa_n + Bb_n) x^n \\
 f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n \\
 \frac{f(x)}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) x^n \\
 x f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n \\
 \int f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}
 \end{aligned}$$

Tabela 3.2. Operações úteis para resolver recorrências.

**Exercício 3.4.20.** Para cada sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  da Tabela 3.1, deduza uma recorrência correspondente. Por exemplo, para a sequência  $a_n = \frac{1}{n!}$ , uma recorrência correspondente seria

$$\begin{cases} a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

**Exercício 3.4.21.** Use funções geradoras para deduzir que a solução de

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 2, \\ a_0 = 0, \end{cases}$$

é dada por  $a_n = 3^n - 1$ .

**Exercício 3.4.22.** Resolva a recorrência

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 2^n, \\ a_0 = 6, \end{cases}$$

**Exercício 3.4.23.** Resolva

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n, \\ a_0 = 0, \\ a_1 = 5. \end{cases}$$

**Exercício 3.4.24.** Seja  $a_n$  o número de sequências quinárias (que usam os dígitos de 0 a 4) de tamanho  $n$  que têm pelo menos um dígito 1 e não têm dígitos 0 em nenhuma posição à esquerda do primeiro 1. Mostre que  $a_n$  satisfaz a relação de recorrência

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5^{n-1}, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

e encontre  $a_n$ .

**Exercício 3.4.25.** Seja  $a_n$  o número de sequências quinárias (que usam os dígitos de 0 a 4) de tamanho  $n$  que não têm dígitos 0 em posições à direita de nenhum 1. Encontre  $a_n$ .

**Exercício 3.4.26** (Permutações Caóticas via Recorrência). O objetivo deste exercício é obter novamente a fórmula para  $D_n$ , o número de permutações caóticas de  $n$  elementos. Como foi visto no Exercício 3.3.7, vale a recorrência

$$\begin{cases} D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}), \\ D_1 = 0, \\ D_2 = 1. \end{cases}$$

Esta recorrência não é muito fácil de resolver. Façamos então o seguinte:

a) Deduza que  $D_n - nD_{n-1} = (-1)(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$ .

b) Mostre que  $D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$ .

c) Conclua que vale a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \\ D_1 = 0. \end{cases}$$

d) Divida a recorrência anterior por  $n!$ , ou seja, considere a relação de recorrência

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}, \\ p_1 = 0, \end{cases}$$

onde  $p_n = D_n/n!$ . Seja  $f$  a função geradora associada à sequência  $p_n$ . Mostre que  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ .

e) Usando as Tabelas 3.1 e 3.2, reobtenha a fórmula para  $D_n$  encontrada na Proposição 3.1.5.



**Exercício 3.4.27** (Números de Catalan). Neste exercício, vamos resolver o problema dos parênteses, que é a recorrência

$$\begin{cases} a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-2} a_1 + a_{n-1} a_0, \\ a_0 = 1, \end{cases}$$

apresentada no Exemplo 3.3.6.

a) Seja  $f$  a função geratriz da sequência  $a_n$ . Usando a Tabela 3.2, mostre que  $x(f(x))^2 - f(x) + 1 = 0$  para todo  $x$  no domínio de  $f$ .

b) Resolva a equação anterior para obter

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Despreze (por bom senso) uma das duas soluções acima. **Dica:** calcule o limite  $x \rightarrow 0^+$  e veja qual das soluções não faria sentido.

c) Usando o Corolário 3.4.11, obtenha a expansão:

$$\sqrt{1 - 4x} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k.$$

d) Aplique o resultado anterior para obter

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} x^k.$$

e) Conclua que a solução da recorrência dos parênteses é dada por

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

que são os chamados *Números de Catalan*<sup>3</sup>.

**Exercício 3.4.28.** A chamada *função geradora exponencial* associada a uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é a função  $f(x) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots$ . Use a função geradora exponencial para encontrar o número de sequência ternárias (que usam os dígitos 0, 1 e 2) de tamanho  $n$  que contém um número par de zeros.

**Exercício 3.4.29.** Determine o valor da soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{na_n}{3^n}$$

onde  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da sequência de Fibonacci, ou seja,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  e  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  para  $n \geq 2$ .

**Dica:** A soma em questão pode ser escrita como uma certa função geradora avaliada em  $x = 1/3$ .

<sup>3</sup>Eugène Charles Catalan (1814–1894).

## Sistemas de equações de recorrência

Ferramentas usuais de resolução de sistemas de equações lineares, como o método de substituição ou escalonamento, podem ser empregadas para resolver sistemas de equações de recorrência.

**Problema 3.4.15.** Resolva o seguinte sistema de equações de recorrência:

$$\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} - 4b_{n-1} = 0, \\ b_n + 5a_{n-1} - 7b_{n-1} = 0, \\ a_1 = 4, \\ b_1 = 1. \end{cases}$$

*Solução:* Da primeira equação, temos que

$$b_{n-1} = \frac{a_n + 2a_{n-1}}{4},$$

que é o mesmo que

$$b_n = \frac{a_{n+1} + 2a_n}{4}. \quad (3.17)$$

Substituindo isto na segunda equação, chegamos a

$$\frac{a_{n+1} + 2a_n}{4} + 5a_{n-1} - 7 \cdot \frac{a_n + 2a_{n-1}}{4} = 0,$$

que podemos reescrever como

$$a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 0.$$

A equação característica da recorrência acima tem como raízes 2 e 3. Portanto,  $a_n = A2^n + B3^n$ . Substituindo isso em (3.17), obtemos  $b_n = \frac{1}{4}(4A2^n + 5B3^n)$ . Como  $a_1 = 4$  e  $b_1 = 1$ , temos que

$$\begin{cases} 2A + 3B = 4, \\ 2A + \frac{15}{4}B = 1, \end{cases}$$

o nos leva a  $A = 8$  e  $B = -4$ . Portanto, a solução procurada é

$$\begin{cases} a_n = 2^{n+3} - 4 \cdot 3^n, \\ b_n = 2^{n+3} - 5 \cdot 3^n. \end{cases}$$

□

## Exercícios

**Exercício 3.4.30.** Resolva:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - b_n, \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n, \\ a_0 = -1, \\ b_0 = 5. \end{cases}$$

**Exercício 3.4.31.** Resolva o sistema de recorrências (3.5) do Exemplo 3.3.3.

**Exercício 3.4.32.** Resolva:

$$\begin{cases} 3a_n - 2a_{n-1} - b_{n-1} = 0, \\ 3b_n - a_{n-1} - 2b_{n-1} = 0, \\ a_0 = 2, \\ b_0 = -1. \end{cases}$$

**Exercício 3.4.33.** Quantas são as sequências ternárias de tamanho  $n$  que não têm 0 e 2 como entradas vizinhas?

**Dica:** monte um sistema de recorrências!

## 3.5 Princípio da Reflexão

O Princípio da Reflexão é uma interessante ideia geométrica para resolver problemas de contagem envolvendo restrições do tipo “a trajetória deve ter (ou não deve) atingir um valor máximo (ou mínimo)”. Como o leitor notará mais à frente, o Princípio da Reflexão está relacionado aos Números de Catalan. Além disso, o Princípio da Reflexão resolve problemas que, via recorrências, teriam soluções muito mais trabalhosas. Ou seja, tal técnica evidencia que nem sempre recorrência é o caminho mais elegante para um problema de contagem.

Começemos com um problema específico para fixar ideias.

**Problema 3.5.1.** Quantos são os caminhos poligonais saindo de  $(0, 0)$  e chegando em  $(a, b)$  tais que

- (i)  $a, b$  são inteiros positivos de mesma paridade;
- (ii) a trajetória é composta por segmentos de reta que ligam  $(x, y)$  a  $(x+1, y \pm 1)$ ;
- (iii) a trajetória nunca intersecta a reta  $y = c$ , com  $c$  inteiro,  $c > b$ .

Veja o desenho a seguir para uma ilustração:

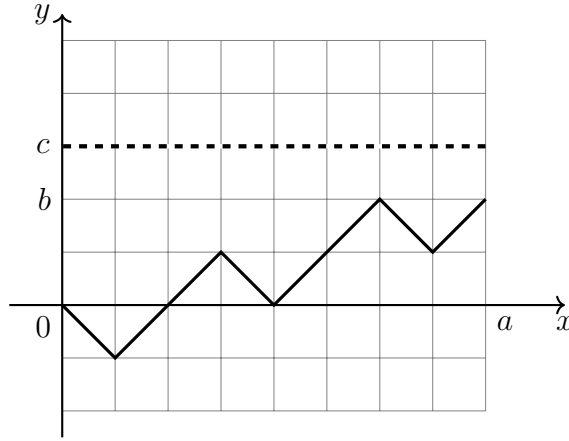


Figura 3.9. Exemplo de trajetória com  $a = 8$ ,  $b = 2$  e  $c = 3$ .

*Demonstração.* Para resolver este problema, primeiro recordemos quantos são os caminhos ligando  $(0,0)$  a  $(a,b)$ , não importando se a trajetória intersecta ou não a reta  $y = c$ . Seja  $T_{a,b}$  a quantidade de tais caminhos.

Bem, cada caminho pode ser representado por uma sequência de letras  $S$  ou  $D$ , onde  $S$  representa “sobe” e  $D$  representa “desce”. Por exemplo, a trajetória da Figura 3.9 pode ser representada por

$$DSSDSSDS$$

Para que uma trajetória termine na altura  $b$ , é necessário que a quantidade  $x$  de letras  $S$  e a quantidade  $y$  de letras  $D$  sejam tais que  $x - y = b$ . Além disso, o número de passos é dado por  $x + y = a$ . Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

obtemos  $x = \frac{a+b}{2}$  e  $y = \frac{a-b}{2}$ .

Observe que é necessário que  $a$  e  $b$  tenham mesma paridade para que o problema faça sentido. Vejamos: no primeiro passo subimos ou descemos uma unidade e saímos do zero. Assim, no tempo 1, as posições possíveis são  $\pm 1$ ; no tempo 2 as posições possíveis são  $2, 0, -2$ ; no tempo 3, as posições possíveis são  $3, 1, -1, -3$ ; e assim por diante. Em resumo, nos tempos pares a altura é par e nos tempos ímpares a altura é ímpar, o que é fácil formalizar por indução.

Voltemos ao cálculo de  $T_{a,b}$ . Como cada trajetória corresponde a uma permutação de  $x$  letras  $S$  e  $y$  letras  $D$  (permutação com repetição), temos que

$$T_{a,b} = \frac{a!}{\left(\frac{a+b}{2}\right)! \left(\frac{a-b}{2}\right)!}.$$

Vamos calcular agora o número de trajetórias (terminando em  $(a,b)$ ) que tocam a reta  $y = c$ . A resposta para o problema será portanto o total  $T_{a,b}$  menos este valor.

Dada uma trajetória que toca a reta  $y = c$ , fazamos uma reflexão em torno da reta  $y = c$  a partir da primeira vez que a trajetória toca esta altura. Veja um exemplo na Figura 3.10. Observe que a trajetória refletida sempre termina na altura  $c + (c - b) = 2c - b$ . Como a reflexão é uma bijeção, basta contar quantas são

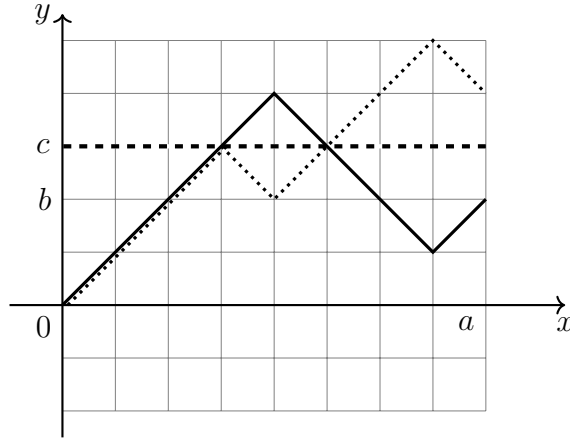


Figura 3.10. Trajetória que toca a reta  $y = c$  e sua reflexão em linha pontilhada.

as trajetórias refletidas. Bem, o número de trajetórias refletidas é exatamente o número de trajetórias que saem de  $(0, 0)$  e terminam em  $(a, 2c - b)$ . Pela fórmula obtida anteriormente, isso é

$$T_{a, 2c-b} = \frac{a!}{\left(\frac{a+2c-b}{2}\right)! \left(\frac{a-2c+b}{2}\right)!}.$$

Assim, a resposta desejada é

$$T_{a,b} - T_{a, 2c-b} = \frac{a!}{\left(\frac{a+b}{2}\right)! \left(\frac{a-b}{2}\right)!} - \frac{a!}{\left(\frac{a+2c-b}{2}\right)! \left(\frac{a-2c+b}{2}\right)!}.$$

□

O problema anterior e sua solução resumem bem a ideia do Princípio da Reflexão: através da reflexão em torno da primeira vez que a trajetória toca o valor exigido, transformamos um problema com restrição em um problema sem restrição, simples de calcular a resposta. A seguir, vamos para os exercícios, nos quais você deve aplicar ou adaptar a ideia acima.

## Exercícios

**Exercício 3.5.1.** Calcule o número de trajetórias que saem de  $(0, 0)$ , terminam em  $(2n, 0)$  e nunca tocam a reta  $y = -1$ . Como se chama este número?

**Exercício 3.5.2.** Numa eleição, o candidato  $A$  obtém 40 votos e o candidato  $B$  obtém 31 votos. Suponha que a contagem seja feita voto a voto. Qual a probabilidade de que, durante a apuração dos votos, o candidato  $B$  em algum momento fique à frente do candidato  $A$ ?

**Exercício 3.5.3.** Resolva o mesmo problema do exercício anterior, agora supondo que o candidato  $A$  teve  $n + k$  votos e o candidato  $B$  teve  $n$  votos. Calcule o limite da resposta obtida quando  $n \rightarrow \infty$ . Interprete porque o limite obtido faz sentido.

**Exercício 3.5.4.** De quantas maneiras podemos abrir e fechar  $n$  pares de parênteses? Observe que para  $n = 3$ , por exemplo, a sequência

$$(( ))( )()$$

é permitida, mas

$$)(( ))( )()$$

não é, pois neste último caso fechamos um parêntese antes de abri-lo. Note que este problema já foi resolvido na Seção 3.4 via recorrências e funções geradoras.

**Exercício 3.5.5.** Mostre que o número de maneiras de abrir e fechar  $n$  pares de parênteses e  $n$  pares de colchetes é

$$\binom{2n}{n} \cdot \left[ \binom{4n}{2n} - \binom{4n}{2n-1} \right].$$

Observação: não há restrição sobre abrir um parêntese antes de um colchete. Por exemplo, para  $n = 1$ , a sequência  $([ ])$  é permitida, bem como  $[( )]$ . Entretanto, não podemos fechar um parêntese com um colchete ainda aberto (ou fechar um colchete com um parêntese ainda aberto). Por exemplo,  $([ )]$  não é permitido.

**Exercício 3.5.6.** Resolva um exercício análogo ao anterior, agora com parênteses, colchetes e chaves.

**Exercício 3.5.7.** Num cinema, há 60 pessoas na fila. Quarenta delas têm uma nota de R\$ 5,00 e vinte delas têm uma nota de R\$ 10,00. O ingresso custa R\$ 5,00 e a bilheteria começa inicialmente sem dinheiro algum. Qual a probabilidade de que a bilheteria não fique sem troco em nenhum momento?

**Exercício 3.5.8.** Calcule quantos são os caminhos poligonais saindo de  $(0, 0)$  e chegando em  $(80, 20)$  tais que

- (i) a trajetória é composta por segmentos que ligam  $(x, y)$  a  $(x + 1, y \pm 1)$  e
- (ii) a trajetória intersecta a reta  $y = -2$  em algum momento, e depois disso em algum momento intersecta a reta  $y = 24$ .

### 3.6 Partições

Para certos problemas em Combinatória, não é possível, em princípio, obter uma solução direta via permutações, combinações etc., mas *é possível obter diretamente a função geradora associada ao problema*. Isso é especialmente importante no caso de problemas envolvendo *partições* de números naturais.

Começemos revisitando três problemas discutidos em seções anteriores. A seguir, quando usarmos o adjetivo *distinguíveis* entenda-se que podemos diferenciar cada objeto (pense que cada objeto esteja numerado, por exemplo).

**Problema 3.6.1.** De quantas maneiras podemos distribuir  $n$  bolas *distinguíveis* em  $n$  urnas *distinguíveis*?

*Solução:* Começemos numerando as bolas e as urnas. A cada configuração de bolas podemos associar um elemento de  $X = \{1, \dots, n\}^n$  da seguinte maneira: a  $i$ -ésima entrada de um elemento em  $X$  representará em qual urna estará a  $i$ -ésima bola. Por exemplo, para  $n = 3$ , o elemento  $(2, 3, 3)$  representa a configuração na qual a primeira bola está na segunda urna, a segunda bola estará na terceira urna, assim como a terceira bola. Como esta é uma bijeção entre as configurações das bolas nas urnas e  $X$ , temos que a resposta do problema é  $|X|$ . E pela Regra do Produto, temos que  $|X| = n^n$ .  $\square$

**Problema 3.6.2.** De quantas maneiras podemos distribuir  $n$  bolas *indistinguíveis* em  $n$  urnas *distinguíveis*?

*Solução:* Seja  $x_i$  a quantidade de bolas na  $i$ -ésima urna. Como são  $n$  bolas,  $x_1 + \dots + x_n = n$ . Temos então que o conjunto de configurações de bolas em urnas está em bijeção com o conjunto de soluções em inteiros não negativos da equação  $x_1 + \dots + x_n = n$ . Pela técnica de bijeção com palitinhos e sinais de mais vista na Seção 2.5, temos como resposta  $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$ .  $\square$

**Problema 3.6.3.** De quantas maneiras podemos distribuir  $n$  bolas *distinguíveis* em  $n$  urnas *indistinguíveis*?

*Solução:* Como visto no Exercício 3.1.16, se supusermos que são  $k$  urnas e que nenhuma urna esteja vazia, a resposta será dada pelo Número de Stirling de segunda ordem, a dizer:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

Daí, para um número  $n$  de urnas (sem supor que sejam não vazias), a resposta é dada pelo chamado Número de Bell:

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

$\square$

**Problema 3.6.4.** De quantas maneiras podemos distribuir  $n$  bolas *indistinguíveis* em  $n$  urnas *indistinguíveis*?

Apesar do enunciado simples, o problema acima é *bastante* complexo. Começemos observando que cada possibilidade de distribuição das bolas corresponde a uma partição do natural  $k$  como soma de naturais, onde não importa a ordem da soma. Por exemplo, supondo que temos 3 bolas e 3 caixas, a partição  $3 = 2 + 1$  corresponderá à configuração onde uma caixa tem duas bolas, uma caixa tem uma bola, e uma caixa está vazia. Na Tabela 3.3 vemos as possíveis partições dos números 3, 4 e 5. Denotaremos por  $p(n)$  o número de partições do número na-

3	4	5
$2 + 1$	$3 + 1$	$4 + 1$
$1 + 1 + 1$	$2 + 2$	$3 + 2$
	$2 + 1 + 1$	$3 + 1 + 1$
	$1 + 1 + 1 + 1$	$2 + 2 + 1$
		$2 + 1 + 1 + 1$
		$1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Tabela 3.3. Partições dos números 3, 4 e 5.

tural  $n$ . Por exemplo, conforme mostra a Tabela 3.3,  $p(3) = 3$ ,  $p(4) = 5$  e  $p(5) = 7$ . Pela bijeção que acabamos de descrever,  $p(n)$  é a resposta do Problema 3.6.4.

A título de curiosidade, citamos aqui uma fórmula explícita para  $p(n)$  obtida por Rademacher, que por sua vez se baseou em um resultado desenvolvido por Hardy e Ramanujan (veja o livro [Andrews, 1976] sobre o assunto).

**Teorema 3.6.5** (Hardy-Ramanujan-Rademacher).

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n) \sqrt{k} \left[ \frac{d}{dx} \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k} \sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{x - \frac{1}{24}}} \right]_{x=n}, \quad (3.18)$$

onde

$$A_k(n) = \sum_{\substack{h \bmod k \\ \text{mdc}(h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{-2\pi i n h/k},$$

e  $\omega_{h,k}$  é uma das raízes complexas 24-ésimas de 1.

Omitimos acima a fórmula para  $\omega_{h,k}$ . Mesmo sem ela, o leitor já deve ter imaginado que a demonstração deste resultado não é nada trivial e foge ao escopo deste livro. Assim como o Problema 3.6.4, muitos problemas envolvendo partições não tem solução simples.

Ainda que uma fórmula explícita para tais problemas seja em geral muito difícil, obter a função geradora é relevante, pois leva a aplicações tanto práticas, como estimativas ou cálculo da resposta do problema para um dado  $n$  de maneira recursiva (veja o Exercício 3.6.15), quanto teóricas, como a impressionante



fórmula (3.18). Portanto, nosso principal objetivo nesta seção será obter a função geradora associada a cada problema. Por exemplo,

**Teorema 3.6.6.** *A função geradora  $f$  associada à sequência  $p(n)$ , onde  $p(n)$  é o número de partições do número natural  $n$ , é dada por*

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}, \quad \text{para } |x| < 1. \quad (3.19)$$

*Demonstração.* Pela fórmula da soma de uma progressão geométrica, temos que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Substituindo  $x$  por  $x^k$  na equação acima obtemos

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots$$

Deste modo, podemos reescrever a função  $f$  definida em (3.19) como o seguinte produto infinito:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + x^{1+1+1+1} + \dots\right) \\ &\times \left(1 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + x^{2+2+2+2} + \dots\right) \\ &\times \left(1 + x^3 + x^{3+3} + x^{3+3+3} + x^{3+3+3+3} + \dots\right) \\ &\times \left(1 + x^4 + x^{4+4} + x^{4+4+4} + x^{4+4+4+4} + \dots\right) \\ &\times \left(1 + x^5 + x^{5+5} + x^{5+5+5} + x^{5+5+5+5} + \dots\right) \\ &\times \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

Aceitaremos sem discussão o seguinte

**Fato da vida:** *para se obter a expansão em série de potência de  $f$  como acima, basta aplicar a propriedade distributiva e somar todos os produtos possíveis, escolhendo como fatores uma parcela de cada par de parênteses. Além disso, um produto infinito destas parcelas é não nulo se, e somente se, apenas um número finito das parcelas escolhidas é diferente de um.*

Para clarear as ideias, calculemos o coeficiente de  $x^5$  após realizar todos os produtos. Uma forma de se obter  $x^5$  é escolhendo 1 no primeiro par de parênteses, 1 no segundo, 1 no terceiro, 1 no quarto,  $x^5$  no quinto, e depois sempre 1 nos subsequentes. Ou seja,

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^5 \cdot 1 \cdot 1 \dots$$

A outras formas seriam:

$$\begin{aligned}
 & x^1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x^4 \cdot 1 \cdot 1 \cdots, \\
 & 1 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots, \\
 & x^{1+1} \cdot 1 \cdot x^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots, \\
 & x^1 \cdot x^{2+2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots, \\
 & x^{1+1+1} \cdot x^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots, \\
 & x^{1+1+1+1+1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots.
 \end{aligned}$$

Façamos uma bijeção entre o conjunto destes produtos e o conjunto de partições de 5. Por exemplo, o produto  $x^{1+1+1} \cdot x^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots$  corresponderá à partição  $5 = 1 + 1 + 1 + 2$ , enquanto  $x^1 \cdot x^{2+2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots$  corresponderá à partição  $5 = 2 + 2 + 1$ . Concluimos deste modo que o coeficiente de  $x^5$  é igual a  $p(5)$ , e o mesmo argumento vale para mostrar que o coeficiente de qualquer  $x^n$  é  $p(n)$ . Assim,

$$f(x) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \cdots,$$

ou seja,  $f$  é a função geradora da sequência  $p(n)$ . □

**Problema 3.6.7.** De quantas maneiras podemos colocar  $n$  bolas indistinguíveis em  $n$  urnas também indistinguíveis se as urnas não vazias devem ter quantidades *distintas* de bolas?

Começemos observando que este problema equivale a calcular o número  $q(n)$  de partições do número  $n$  como soma de naturais *distintos*. Como já foi exemplificado pela Teorema 3.6.5, fórmulas explícitas para problemas envolvendo partições são difíceis. A seguir, deduziremos apenas a função geradora para a sequência  $q(n)$ .

Voltando à prova do Teorema 3.6.6, note que a função  $\frac{1}{1-x^k} = (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots)$  controla *quantas* urnas terão  $k$  bolas. Por exemplo, se a parcela escolhida dentro deste par de parênteses for  $x^{3k}$ , isso significa que 3 urnas terão  $k$  bolas. Bem, no nosso problema, no máximo *uma* urna pode ter  $k$  bolas dentro dela. Logo, conjecturamos que a função geradora para  $q(n)$  será dada por

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k).$$

A verificação de que a função acima é de fato a função geradora associada à sequência  $q(n)$  segue o mesmo argumento do Teorema 3.6.6.

**Problema 3.6.8.** De quantas maneiras podemos distribuir  $n$  bolas indistinguíveis em  $n$  urnas indistinguíveis se nenhuma urna pode conter mais do que  $M$  bolas?

$$f(x) = \prod_{k=1}^M \frac{1}{1-x^k}. \quad (3.21)$$

A esta altura já deve estar clara a bijeção entre problemas relacionados à bolas indistinguíveis em urnas indistinguíveis e partições de números naturais. Vejamos agora a noção de *diagrama de Ferrers*, que não é nada mais do que uma representação gráfica de uma partição através de pontinhos. Num diagrama de Ferrers, em cada linha colocamos, da esquerda para a direita, um número de pontinhos igual a cada parcela, veja a Figura 3.11.

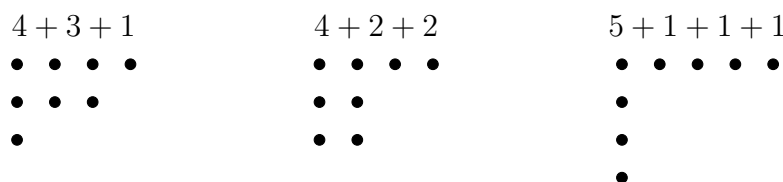


Figura 3.11. Exemplos de diagramas de Ferrers.

Fica como exercício para o leitor deduzir qual o equivalente do enunciado acima em termos de bolas e urnas.

*Demonstração.* Vamos definir a operação *conjugação* entre partições via diagramas de Ferrers. A operação conjugação leva um diagrama de Ferrers em outro diagrama de Ferrers trocando linhas por colunas. Por exemplo, na Figura 3.12 vemos uma partição e sua partição conjugada.

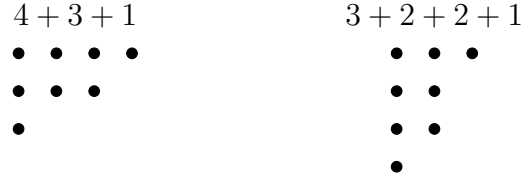


Figura 3.12. Partição e sua partição conjugada.

Como podemos deduzir a partir da Figura 3.12, se uma partição tiver a primeira linha com  $k$  pontinhos, então sua conjugada terá  $k$  linhas. Ou seja, a operação conjugação é uma bijeção entre o conjunto das partições que têm  $k$  como maior parcela e o conjunto das partições que têm exatamente  $k$  parcelas. Logo,  $q(n) = r(n)$ .  $\square$

**Proposição 3.6.10.** *Seja  $q^{\text{par}}(n)$  o número de partições do natural  $n$  em um número par de parcelas distintas, e seja  $q^{\text{ímpar}}(n)$  o número de partições de  $n$  em um número ímpar de parcelas distintas. Então*

$$q^{\text{par}}(n) - q^{\text{ímpar}}(n) = \begin{cases} (-1)^j, & \text{se } n = \frac{j(3j \pm 1)}{2}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.22)$$

*Demonstração.* Dada uma partição na qual todas as parcelas são distintas (não se preocupe se a quantidade de parcelas é par ou ímpar), definimos  $A$  como o conjunto de pontos na menor parcela, e  $B$  como o conjunto de pontos na reta de inclinação  $45^\circ$  passando pelo ponto mais à direita em cima, veja a Figura 3.13. Note que  $A$  e  $B$  podem ter, no máximo, um ponto de interseção.

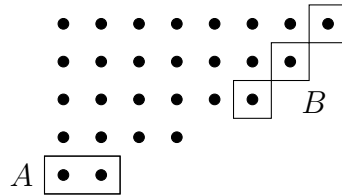


Figura 3.13. Definição de  $A$  e  $B$ .

Seja  $D(n)$  o conjunto de todas as partições de  $n$  em parcelas distintas. Considere a operação  $\Psi : D(n) \rightarrow D(n)$  que, se  $|A| \leq |B|$ , apaga os pontos de  $A$  e os coloca “ao lado” da reta de inclinação  $45^\circ$  que passa por  $B$  e, se  $|A| > |B|$ , apaga os pontos de  $B$  e os coloca “abaixo” da reta horizontal que passa por  $|A|$ . Veja as Figuras 3.14, 3.15 e 3.16 para exemplos.

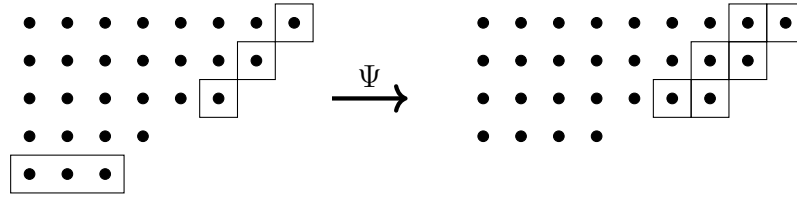


Figura 3.14. Exemplo da operação  $\Psi$  no caso  $|A| \leq |B|$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

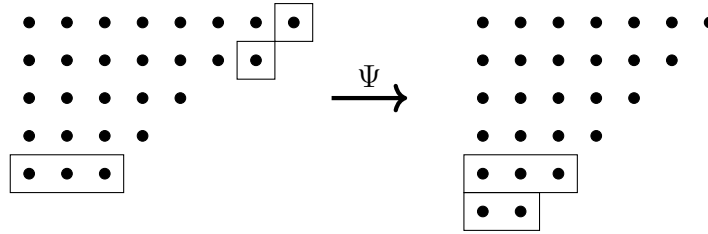


Figura 3.15. Exemplo da operação  $\Psi$  no caso  $|A| > |B|$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

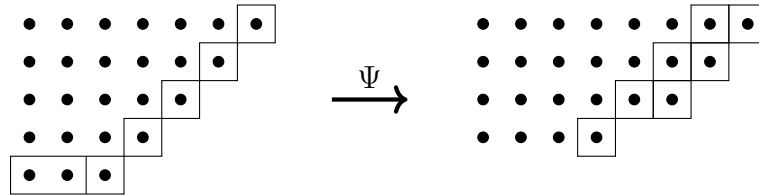


Figura 3.16. Exemplo da operação  $\Psi$  no caso  $|A| \leq |B|$  e  $A \cap B \neq \emptyset$ . Note que o ponto de interseção foi movido de posição.

Previamente escrevemos  $\Psi : D(n) \rightarrow D(n)$ , mas isto estava errado! Existem duas situações para as quais a operação  $\Psi$  não está definida (talvez o leitor atento tenha percebido). Veja as Figuras 3.17 e 3.18.

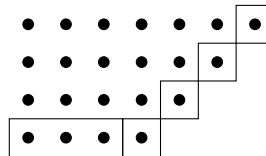


Figura 3.17.  $\Psi$  não está definida no caso  $|A| = |B|$  e  $A \cap B \neq \emptyset$ .

No caso da Figura 3.17, os pontos de  $A$  não cabem ao lado da reta que contém  $B$ , e no caso da Figura 3.18, colocar os pontos de  $B$  abaixo da reta que contém  $A$  geraria duas parcelas iguais.

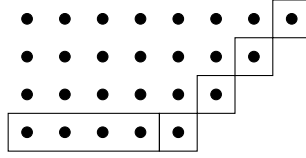


Figura 3.18.  $\Psi$  não está definida no caso  $|A| = |B| + 1$  e  $A \cap B \neq \emptyset$ .

A seguir, vamos deduzir quais são os naturais  $n$  para os quais estas duas situações ocorrem. Primeiramente, notemos que de maneira geral,  $A \cap B \neq \emptyset$  pode ocorrer se, e somente se, o total de pontos for dado por

$$n = |A| + (|A| + 1) + \cdots + (|A| + |B| - 1) = \frac{|B| \cdot (2|A| + |B| - 1)}{2}. \quad (3.23)$$

Portanto, a situação da Figura 3.17 ocorre se, e somente se,  $n = \frac{|B| \cdot (3|B| - 1)}{2}$  para algum valor  $|B|$  natural, e a situação da Figura 3.18 ocorre se, e somente se,  $n = \frac{|B| \cdot (3|B| + 1)}{2}$  para algum valor  $|B|$  natural.

Atentemos agora para o fato que a operação  $\Psi$ , quando definida, muda em  $\pm 1$  o número de parcelas da partição. Logo, leva uma partição com um número par de parcelas distintas em uma partição com um número ímpar de parcelas distintas e vice-versa. Assim, para  $n \in \mathbb{N}$  que *não* é da forma  $\frac{j(3j \pm 1)}{2}$ , a operação  $\Psi$  é uma bijeção entre o conjunto das partições em um número par de parcelas distintas e o conjunto das partições em um número ímpar de parcelas distintas. Ou seja, para  $n$  que não é da forma  $\frac{j(3j \pm 1)}{2}$ , vale

$$q^{\text{par}}(n) = q^{\text{ímpar}}(n).$$

Quando  $n$  é da forma  $\frac{j(3j-1)}{2}$ , existe exatamente uma partição de  $n$  para a qual a operação  $\Psi$  não está definida, que está ilustrada na Figura 3.17. E esta partição terá um número par de parcelas se  $j$  for par, e um número ímpar de parcelas se  $j$  for ímpar. Ou seja, se  $n$  é da forma  $\frac{j(3j-1)}{2}$ , então

$$q^{\text{par}}(n) = q^{\text{ímpar}}(n) + (-1)^j.$$

O raciocínio anterior vale também para o caso em que  $n$  é da forma  $\frac{j(3j+1)}{2}$ , o que implica (3.22) e conclui a demonstração.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 3.6.1.** Seja  $q(n)$  o número de maneiras de distribuir  $n$  bolas indistinguíveis em  $n$  urnas indistinguíveis com certa restrição. Encontre a função geradora associada à sequência  $q(n)$  em cada uma das restrições a seguir:

- a) Cada urna não vazia deve ter um número primo de bolas.
- b) Cada urna não vazia deve ter um número ímpar de bolas.
- c) Cada urna não vazia deve ter um número ímpar de bolas e urnas não vazias devem ter quantidades distintas de bolas.
- d) Cada urna deve ter um número par de bolas.
- e) Cada urna deve ter um número par de bolas e urnas não vazias devem ter quantidades distintas de bolas.
- f) Cada urna deve ter um número de bolas que é um quadrado.
- g) Cada urna deve ter um número de bolas que é um quadrado, e urnas não vazias devem ter quantidades distintas de bolas.
- h) Cada urna deve ter um número de bolas que é um cubo.
- i) Cada urna deve ter um número de bolas que é um cubo, e urnas não vazias devem ter quantidades distintas de bolas.
- j) Cada urna pode ter zero, uma, ou duas bolas.
- k) Cada urna deve ter um número par de bolas não superior a  $M$ .
- l) Cada urna não vazia deve ter um número ímpar de bolas não inferior a  $M$ .

**Exercício 3.6.2.** Seja

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

Dê uma interpretação combinatória para o coeficiente de  $x^4$  na expansão da função acima.

**Observação.** O próximo exercício usa o Binômio de Newton, a ser visto no Capítulo 4, Proposição 4.2.1.

**Exercício 3.6.3.** Seja  $r \in \mathbb{N}$  e denote por  $q(n)$  o número de soluções da equação  $x_1 + \cdots + x_r = n$  tais que cada  $x_i$  é igual a zero ou um.

- a) Calcule  $q(n)$  usando as técnicas de contagem do Capítulo 1 (permutações, combinações etc.).
- b) Deduza a função geradora  $f$  para a sequência  $q(n)$ , obtenha a expansão em série de potências de  $f$  e encontre novamente a expressão de  $q(n)$ .

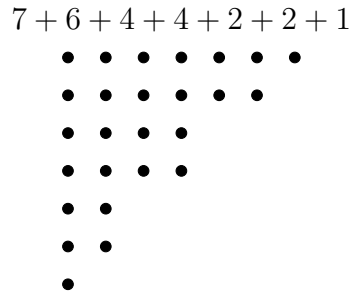
**Observação.** O próximo exercício usa o Multinômio de Leibniz, a ser visto no Capítulo 4, Proposição 4.3.1.

**Exercício 3.6.4.** Seja  $r \in \mathbb{N}$  e denote por  $q(n)$  o número de soluções da equação  $x_1 + \cdots + x_r = n$  tais que cada  $x_i$  é igual a um, três, quatro ou seis. Encontre a função geradora  $f$  para a sequência  $q(n)$ , obtenha a expansão em série de potências de  $f$  e deduza daí a expressão de  $q(n)$ .

**Exercício 3.6.5.** Seja  $q(n)$  o número de partições do natural  $n$  tais que cada parcela aparece pelo menos duas vezes e seja  $r(n)$  o número de partições do natural  $n$  cujas parcelas são maiores ou iguais a dois e não há parcelas que sejam inteiros consecutivos. Prove que  $q(n) = r(n)$ .

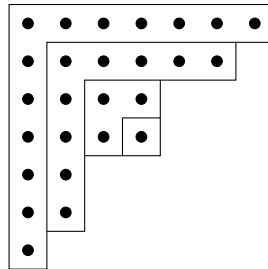
**Exercício 3.6.6.** Seja  $q(n)$  o número de maneiras de distribuir  $n$  bolas indistinguíveis em  $n$  urnas indistinguíveis tais que cada urna pode ter no máximo  $k$  bolas, e seja  $r(n)$  o número de maneiras de distribuir  $n$  bolas indistinguíveis em  $k$  urnas indistinguíveis. Prove que  $q(n) = r(n)$ .

**Exercício 3.6.7.** Dizemos que uma partição é *autoconjugada* se ela é igual à sua conjugada. Por exemplo, a partição abaixo é autoconjugada:



Mostre que o número de partições autoconjugadas de  $n \in \mathbb{N}$  é igual ao número de partições de  $n$  em ímpares distintos.

**Dica:** que bijeção o desenho abaixo sugere?



**Exercício 3.6.8.** Como consequência do exercício anterior, encontre a função geradora associada à sequência  $q(n)$ , onde  $q(n)$  é o número de partições autoconjugadas do natural  $n$ .

**Exercício 3.6.9.** Seja  $q(n)$  o número de partições de  $n \in \mathbb{N}$  tais que pelo menos uma parcela é igual a  $j \in \mathbb{N}$  e seja  $p(n)$  o número total de partições de  $n$ . Mostre que  $q(n) = p(n - j)$ .



**Exercício 3.6.10.** Seja  $q(n)$  o número de partições de  $n \in \mathbb{N}$  como soma de potências de 2 distintas.

- Encontre a função geradora  $f$  associada à sequência  $q(n)$ .
- Mostre que a função  $f$  obtida no item anterior é igual a  $\frac{1}{1-x}$ .
- Obtenha a expansão em série de potências de  $f$ .
- Deduz que todo número natural é escrito de maneira única como soma de potências distintas de 2.

**Exercício 3.6.11.** Seja  $q(n)$  o número de partições de  $n \in \mathbb{N}$  como soma de parcelas distintas e seja  $r(n)$  o número de partições de  $n$  como soma de parcelas ímpares. Mostre que  $q(n) = r(n)$ .

**Dica:** verifique que a função geradora da sequência  $q(n)$  é

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k),$$

que a função geradora da sequência  $r(n)$  é

$$g(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k-1}},$$

e mostre que  $f = g$ .

**Exercício 3.6.12.** Mostre que o número de partições de  $n \in \mathbb{N}$  em parcelas distintas não múltiplas de 3 é igual ao número de partições de  $n$  em parcelas da forma  $6k - 1$  ou  $6k - 5$ .

**Exercício 3.6.13.** O leitor questionador pode ter se perguntado que garantia temos de que o produto infinito em (3.19) é convergente. Ou seja, que garantia temos que a função  $f$  em (3.19) esteja bem-definida? Nenhuma, é necessário assegurar isso. Este é o tema deste exercício, que usa um pouco de Análise na Reta. Abaixo, considere sempre  $|x| < 1$ .

- Defina a sequência  $y_\ell$  por  $y_\ell = \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{1 - x^k}$  e verifique que

$$\log(y_\ell) = \sum_{k=1}^{\ell} \log\left(\frac{1}{1 - x^k}\right).$$

- Use a fórmula (6.5) da Seção 6.4 para deduzir que

$$\log\left(\frac{1}{1 - x^k}\right) = x^k + \frac{x^{2k}}{2} + \frac{x^{3k}}{3} + \frac{x^{4k}}{4} + \dots$$

c) Mostre que

$$\left| \log \left( \frac{1}{1-x^k} \right) \right| \leq |x|^k \left( \frac{1}{1-|x|^k} \right).$$

d) Prove que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left( \frac{1}{1-x^k} \right)$$

é absolutamente convergente para qualquer  $x \in (-1, 1)$ .

e) Conclua que

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} := \lim_{\ell \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\ell} \frac{1}{1-x^k}$$

existe para qualquer  $x \in (-1, 1)$ .

**Exercício 3.6.14.** Usando a Proposição 3.6.10, prove a chamada Fórmula de Euler<sup>4</sup>:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( x^{\frac{j(3j+1)}{2}} + x^{\frac{j(3j-1)}{2}} \right).$$

**Dica:** note que  $\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n)$  é a função geradora para o número de partições em parcelas distintas. Qual a relação entre as expansões em série de potências das funções  $\prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n)$  e  $\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)$ ?

**Exercício 3.6.15.** Recorde que  $p(n)$  denota o número total de partições de  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos  $p(0) = 1$  e  $p(j) = 0$  se  $j \in \mathbb{Z}$  e  $j < 0$ . Prove que

$$\begin{aligned} p(n) &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \left[ p\left(n - \frac{j(3j-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{j(3j+1)}{2}\right) \right] \\ &= p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) \\ &\quad + p(n-12) + p(n-15) - p(n-22) - p(n-26) + \dots \end{aligned}$$

Note que a soma acima é finita, pois apenas finitos termos são não nulos.

**Dica:** usando o Exercício 3.6.14, mostre que

$$\left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( x^{\frac{j(3j+1)}{2}} + x^{\frac{j(3j-1)}{2}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right] = 1,$$

e compare os coeficientes de cada lado da equação polinomial acima.

**Observação.** O resultado deste exercício é uma maneira prática de calcular  $p(n)$ , tendo sido usada por MacMahon no começo do século XX (antes do advento dos computadores) para calcular  $p(n)$  para  $n \leq 200$ . Por curiosidade,

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$$

é um número consideravelmente grande para ser calculado sem um computador.

<sup>4</sup>Também conhecida por Teorema dos Números Pentagonais por envolver os números pentagonais  $\frac{j(3j-1)}{2}$ , veja o Exercício 1.1.24.

## CAPÍTULO 4

# EXISTÊNCIA, APLICAÇÕES E GRAFOS

Neste capítulo veremos aspectos diversos e interessantes: técnicas para assegurar existência via o Princípio das Casas dos Pombos, cálculo de somatórios via o Triângulo de Pascal e uma breve introdução a grafos.

### 4.1 Princípio das Casas dos Pombos

Nesta seção estudaremos o Princípio das Casas dos Pombos (PCP), também chamado de Princípio das Gavetas ou Princípio de Dirichlet.

**Teorema 4.1.1** (PCP). *Se  $n + 1$  pombos estão em  $n$  casas, então há pelo menos uma casa com pelo menos dois pombos.*

Note que o enunciado acima é simplesmente a versão intuitiva de “Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos tais que  $|A| > |B|$ . Então não existe nenhuma função injetiva  $f : A \rightarrow B$ ”. Apesar de um tanto informal, o enunciado do Teorema 4.1.1 é mais fácil de memorizar e ajuda muito a organizar as ideias na resolução de problemas, e por isso é apresentado desta maneira. A seguir, vejamos o chamado Princípio das Casas dos Pombos Generalizado.

**Teorema 4.1.2** (PCP Generalizado). *Sejam  $k, r \geq 1$ . Se  $kn + r$  pombos estão em  $n$  casas, então há pelo menos uma casa com pelo menos  $k + 1$  pombos.*

Note que o PCP generalizado acima implica o Princípio das Casas dos Pombos anterior: basta escolher  $k = r = 1$ .

*Demonstração.* Suponha que o enunciado fosse falso, isto é, para algum  $n$  e algum  $k \geq 1$ , pudéssemos distribuir  $kn + r$  pombos em  $n$  casas sem que nenhuma casa tivesse mais do que  $k$  pombos. Neste caso, como são  $n$  casas, cada uma contendo no máximo  $k$  pombos, pela Regra da Soma teríamos no máximo  $nk$  pombos, contradição.  $\square$

**Problema 4.1.3.** Escolhem-se cinco pontos quaisquer dentro de um quadrado de lado 2. Mostre que dentre estes cinco pontos, há dois pontos cuja distância entre eles é menor ou igual a  $\sqrt{2}$ .

*Solução:* A maior distância em um quadrado é a sua diagonal. Pelo Teorema de Pitágoras, para um quadrado de lado 2, a sua diagonal é  $2\sqrt{2}$ , veja a Figura 4.1.

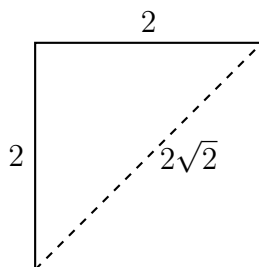
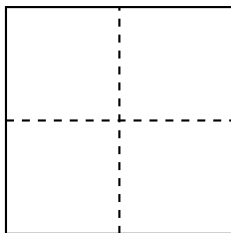


Figura 4.1. Quadrado de lado 2 e sua diagonal.

Vamos dividir o quadrado em quatro quadrados menores de lado um:



Como são cinco pontos e quatro subquadrados de lado 1, pelo Princípio das Casas dos Pombos, em algum dos subquadrados haverá pelo menos dois pontos. Como a diagonal de um subquadrado é  $\sqrt{2}$ , a distância entre estes dois pontos que estão num mesmo subquadrado será menor ou igual a  $\sqrt{2}$ , concluindo a solução.  $\square$

Um roteiro que clarifica bastante os passos a serem feitos é o seguinte:

- (1) Quem são os pombos?
- (2) Quantas (no máximo) são as casas?
- (3) Quem são as casas?

Por exemplo, no problema anterior, os pombos eram os pontos. Como eram cinco “pombos”, o número de casas deveria ser no máximo quatro. Por fim, cada subquadrado correspondeu a uma “casa de pombo”. Note que a segunda pergunta do roteiro se refere à quantidade de casas! Apenas no final nos perguntamos

quem são as casas. Este último passo é o que geralmente demanda um pouco de criatividade.

É bom enfatizar que o roteiro acima é apenas um método para organizar as ideias, não um método de prova. Na hora de escrever a solução, tal roteiro não deve ser incluído.

Vejamos mais um problema com sua respectiva solução.

**Problema 4.1.4.** Prove que em qualquer conjunto  $R$  de 17 inteiros há um subconjunto  $S$  de 5 elementos com a seguinte propriedade: para qualquer par de elementos em  $S$ , a soma ou diferença deles é divisível por 7.

Primeiro vamos seguir o roteiro apresentado para organizar os passos, e só depois escreveremos a prova.

A primeira pergunta do roteiro é “*Quem são os pombos?*”. Os pombos serão os 17 números inteiros do conjunto  $R$ , que queremos mostrar quem satisfazem a uma certa propriedade.

A segunda pergunta do roteiro é “*Quantas são as casas?*”. Bem, se queremos mostrar que 5 elementos de  $R$  satisfazem a uma certa propriedade, precisamos que sempre haja pelo menos 5 pombos em uma mesma casa. Para que isso aconteça, quantas devem ser as casas? Para calcular o número de casas, fazemos a divisão de 17 por 5, que nos dá  $17 = 5 \times 3 + 2$ . O número de casas deve ter então o quociente mais um, que é  $3 + 1 = 4$ . Vejamos, se tivermos 4 casas, então pelo menos alguma casa deve ter 5 pombos. Caso contrário, haveria no máximo 4 pombos por casa, que dariam um total de no máximo  $4 \times 4 = 16$  pombos, que é menor do que 17, um absurdo. Logo, o número de casas deve ser igual a 4.

A terceira pergunta do roteiro é “*Quem são as casas?*”. Esta é a parte que envolve imaginação, arte, engenhosidade. É necessário definir as casas de modo que, se 5 pombos caíam numa mesma casa, então a propriedade pedida no enunciado acontecerá. A propriedade que deve acontecer é “*a soma ou diferença deles é divisível por 7*”. Pensemos nos restos na divisão por 7, os quais são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Sejam  $x$  e  $y$  dois números inteiros quaisquer e estudemos o que é necessário para que sua soma ou diferença seja divisível por 7. Olhemos para a divisão de  $x$  e  $y$  por 7. Temos que

$$\begin{aligned}x &= 7q_1 + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 \leq 6, \\y &= 7q_2 + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 \leq 6.\end{aligned}$$

Como o leitor pode checar, para que diferença  $x - y$  seja divisível por 7, é preciso que os restos  $r_1$  e  $r_2$  sejam iguais, e para que a soma  $x + y$  seja divisível por 7, é preciso que os restos somem 7 ou sejam ambos iguais a 0. Isso nos sugere criar as casas de pombo de acordo com o resto na divisão por 7. As casas estão ilustradas de maneira pitoresca na Figura 4.2.

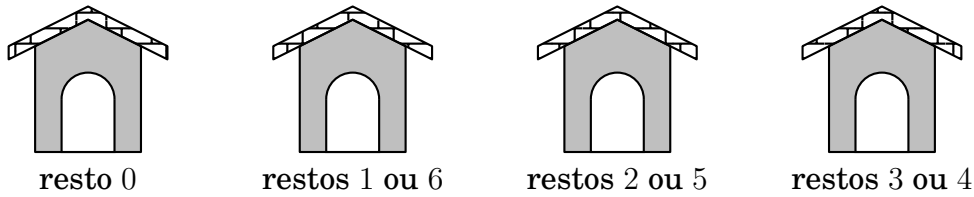


Figura 4.2. Casas de Pombos.

Vejam: quando dois números  $x$  e  $y$  caem na mesma casa, sua soma ou diferença será divisível por 7. De fato, se os dois números caem na casa de resto zero, ambos são divisíveis por 7, e tanto  $x-y$  quanto  $x+y$  serão divisíveis por 7. Se os dois números caem na casa de restos 1 ou 6, então há três possibilidades. Se os dois deixam resto 1, então  $7|x-y$ . Se os dois deixam resto 6, então  $7|x-y$ . E se um tem resto 1, e o outro resto 6, então  $7|x+y$ . A análise das demais casas é a mesma. Note que todo número inteiro necessariamente cairá em alguma caixa, pois os restos na divisão por 7 são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Estamos prontos para escrever uma solução do problema. Para facilitar, usaremos a notação  $x \equiv r \pmod{7}$  para dizer que  $x$  deixa resto  $r$  na divisão por 7.

*Solução do Problema 4.1.4:* Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} R_1 &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod{7}\} \\ R_2 &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 \pmod{7} \text{ ou } x \equiv 6 \pmod{7}\} \\ R_3 &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod{7} \text{ ou } x \equiv 5 \pmod{7}\} \\ R_4 &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 3 \pmod{7} \text{ ou } x \equiv 4 \pmod{7}\}. \end{aligned}$$

Como os restos na divisão por 7 são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, temos que  $\mathbb{Z} = \bigcup_{i=1}^4 R_i$ . Ou seja, todo número inteiro pertence a algum desses quatro conjuntos.

Afirmamos que se dois inteiros  $x, y \in R_i$ , então  $7|x+y$  ou  $7|x-y$ . De fato, se  $x, y \in R_1$ , então  $x = 7q_1$  e  $y = 7q_2$ , logo  $x \pm y = 7(q_1 \pm q_2)$ . Ou seja, tanto a soma quanto a diferença são divisíveis por 7. Se  $x, y \in R_i$ , com  $i \in \{2, 3, 4\}$ , então há duas possibilidades: ou  $x = 7q_1 + r$  e  $y = 7q_2 + r$ , ou  $x = 7q_1 + r$  e  $y = 7q_2 + (7-r)$ . No primeiro caso, a diferença será divisível por 7 e, no segundo caso, a soma será divisível por 7.

Como são 4 conjuntos,  $S$  tem 17 inteiros que pertencem à união destes conjuntos, e  $17 = 4 \times 4 + 1$ , pelo Princípio das Casas do Pombos Generalizado, há pelo menos 5 inteiros de  $S$  num mesmo conjunto  $R_i$ . Ou seja, há pelo menos 5 elementos de  $S$  tais que qualquer dois deles têm a soma ou diferença divisíveis por 7.  $\square$

Para finalizar a seção, uma curiosidade a respeito da origem do nome “Princípio das Casas dos Pombos”. Este vem de “*Pigeonhole Principle*” no inglês britânico, onde “*pigeonhole*” é comumente usado para designar um pequeno compartimento ou cubículo (apesar de sua tradução literal ser “caixa de pombo” ou “buraco de pombo”). Ou seja, o nome original é mais próximo de “Princípio das

Gavetas” ou “Princípio das Caixas”, e foi criado com referência a distribuir objetos em caixas. E faz até mais sentido do que pombos, os quais têm vontades próprias.

Entretanto, nos Estados Unidos, o termo “*pigeonhole*” é pouco usado no sentido britânico, e remete de fato a pombos. Esta ambiguidade na tradução fez com que o nome “Princípio das Casas do Pombos” se mantivesse ao longo do tempo.

## Exercícios

**Exercício 4.1.1.** Mostre que dados dez pontos em um retângulo  $3 \times 1$ , há um subconjunto de quatro pontos tal que quaisquer dois pontos nele distam no máximo  $\sqrt{2}$  entre si. Mostre que dados treze pontos em um hexágono regular de lado 1, há um subconjunto de três pontos tal que quaisquer dois pontos nele distam no máximo 1 entre si.

**Exercício 4.1.2.** Mostre que dados seis inteiros entre 1 e 10 (incluindo 1 e 10 possivelmente) há dois deles que são consecutivos.

**Exercício 4.1.3.** Qual o número mínimo de pessoas para o qual temos certeza de que há sempre duas que fazem aniversário no mesmo mês? E se for no mesmo dia do ano?

**Exercício 4.1.4.** Numa gaveta há seis meias pretas e seis meias brancas. Qual o número mínimo de meias que devemos retirar (no escuro) para ter certeza que

a) As meias retiradas contenham um par da mesma cor?

b) As meias retiradas contenham um par da cor branca?

**Exercício 4.1.5.** Em uma reunião, há 6 pessoas. Mostre que, necessariamente, há 3 que se conhecem mutuamente ou 3 que não se conhecem mutuamente. Observação: naturalmente, se  $A$  conhece  $B$ , então  $B$  conhece  $A$ .

**Dica:** desenhe um hexágono e use linhas cheias para ligar pessoas que se conhecem e linhas tracejadas para ligar pessoas que não se conhecem. Use o PCP para garantir que saindo de um vértice há três linhas do mesmo tipo.

**Observação.** O próximo exercício é um bom exemplo de que nem sempre os valores são “justos”, no sentido que podemos ter mais pombos do que o necessário, sendo necessário estimar corretamente o número de casas. Não se esqueça de seguir o roteiro de perguntas.

**Exercício 4.1.6.** Mostre que dados 800 pontos num cubo de aresta 10, há pelo menos dois deles que distam no máximo 2 entre si.

**Exercício 4.1.7.** Prove que qualquer conjunto com 118 números inteiros tem um subconjunto  $S$  de 10 elementos com a seguinte propriedade: a diferença entre quaisquer dois números em  $S$  é sempre divisível por 13.

**Exercício 4.1.8.** Mostre que em todo subconjunto de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  com  $n + 1$  elementos há dois elementos neste subconjunto tais que um deles é múltiplo do outro.

**Dica:** Use que todo número natural pode ser escrito na forma  $2^k m$ , com  $m$  ímpar.

**Exercício 4.1.9.** Mostre que em todo subconjunto de  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  com  $n + 1$  elementos há um par de elementos primos entre si neste subconjunto.

**Dica:** Não tente usar a dica do exercício anterior.

**Exercício 4.1.10** (IMO-1972). Prove que em um conjunto de 10 números inteiros positivos de dois dígitos cada há sempre dois subconjuntos disjuntos cuja soma de seus elementos é a mesma.

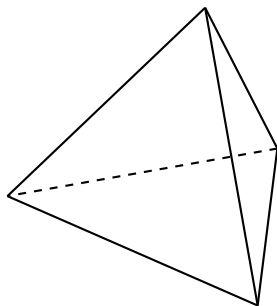
**Dica:** Primeiro obtenha dois subconjuntos, não necessariamente disjuntos, que tenham a mesma soma. A partir daí pense como obter subconjuntos disjuntos de mesma soma.

**Exercício 4.1.11.** Considere nove pontos de coordenadas inteiras no  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que o ponto médio de um dos segmentos de reta definidos por estes pontos também tem coordenadas inteiras.

**Exercício 4.1.12.** Prove que em qualquer conjunto de 35 inteiros há dois números cuja soma ou diferença é divisível por 67.

**Exercício 4.1.13.** Mostre que em qualquer coleção de  $n$  inteiros existe um par cuja soma ou diferença é divisível por  $n$ .

**Exercício 4.1.14.** Dados 9 pontos na superfície de um tetraedro de aresta 2, prove que há dois desses pontos cuja distância entre eles mede no máximo 1.



**Dica:** pense espacialmente. Qual a maior distância entre dois pontos quaisquer sobre a superfície de um tetraedro de lado  $\ell$ ?

**Exercício 4.1.15.** Em uma reunião há  $n$  pessoas presentes. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de outros participantes (admita que “conhecer” seja uma relação simétrica, ou seja, se  $a$  conhece  $b$ , então  $b$  conhece  $a$ ).

**Dica:** note não ser possível que, simultaneamente, haja uma pessoa que conheça todas as outras e outra que não conheça ninguém.



**Exercício 4.1.16.** Mostre que existem infinitos números da forma  $3636 \cdots 3636$  que são divisíveis por 19.

**Dica:** Use os restos na divisão por 19. Além disso, se existem infinitos pombos e são finitas casas, então em alguma casa haverá...

**Exercício 4.1.17.** (*Banco de questões IMO Bulgária 1979*) Dados  $4n + 1$  reis em um tabuleiro de xadrez infinito, prove que existe um subconjunto de  $n + 1$  reis que não se atacam. Observação: um rei ataca suas casas vizinhas, incluindo as casas em diagonal.

**Dica:** pinte as casas deste tabuleiro de maneira adequada.

## 4.2 Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

**Proposição 4.2.1** (Binômio de Newton). *Sejam  $a, b$  números reais (ou complexos). Então*

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

*1ª Demonstração:* Por indução. Para  $n = 1$ , temos

$$(a + b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a^1 b^0 + \binom{1}{1}a^0 b^1 = \sum_{k=0}^1 a^k b^{1-k}.$$

Suponha agora que a afirmação seja verdadeira para um certo  $n$ , ou seja, que

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

e provemos que a afirmação será válida para  $n + 1$ . Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por  $(a + b)$ , obtemos

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Fazendo mudança de variáveis no primeiro somatório do último membro, podemos reescrever a última expressão acima como

$$\begin{aligned} &a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Usando a Relação de Stifel provada no Exercício 2.4.6, concluímos que a expressão acima é igual a

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

concluindo a demonstração.  $\square$

2ª Demonstração: Claramente

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ vezes}}.$$

Quando aplicamos a propriedade distributiva, cada  $a$  e cada  $b$  em cada parêntese será multiplicado com todos os outros. A questão é encontrar o coeficiente de cada monômio da forma  $a^k b^{n-k}$ .

Por exemplo, para obter o monômio  $a^n b^0$  há apenas uma maneira possível: multiplicar cada  $a$  dentro de cada par de parênteses. Logo, o coeficiente de  $a^n b^0$  será igual a  $1 = \binom{n}{0}$ .

Para obter um monômio da forma  $a^{n-1} b^1$ , precisamos multiplicar o  $a$  em  $n-1$  parênteses e um  $b$ . Poderíamos por exemplo, escolher o  $b$  no primeiro par de parênteses e depois apenas  $a$ 's. De quantas maneiras podemos fazer isso? De  $n$  maneiras, que é o mesmo que  $\binom{n}{1}$ .

Para obter um monômio da forma  $a^k b^{n-k}$ , precisamos multiplicar  $k$   $a$ 's e  $n-k$   $b$ 's. De quantas maneiras podemos fazer isso? Permutação de  $n$  objetos com repetição de  $k$  e  $n-k$ , o que nos dá  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ , que pode ser escrito de maneira elegante simplesmente como  $\binom{n}{k}$ .

Em resumo,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n,$$

como queríamos.  $\square$

**Definição 4.2.2.** O Triângulo de Pascal é o seguinte arranjo triangular infinito cujas entradas na  $n$ -ésima linha são os coeficientes do Binômio de Newton:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} \\ & & & & & & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ & & & & & & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ & & & & & & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ & & & & & & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\ & & & & & & \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\ & & & & & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \end{array}$$

A Relação de Stifel nos dá um fácil algoritmo para encontrar os coeficientes acima: cada entrada é a soma da entrada acima com a entrada acima à esquerda. Por exemplo, podemos obter rapidamente as primeiras 8 linhas como mostramos abaixo. Note que chamamos a primeira linha de linha “número zero”.

$n = 0$	1							
$n = 1$	1	1						
$n = 2$	1	2	1					
$n = 3$	1	3	3	1				
$n = 4$	1	4	6	4	1			
$n = 5$	1	5	10	10	5	1		
$n = 6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n = 7$	1	7	21	35	35	21	7	1

Figura 4.3. Primeiras linhas do Triângulo de Pascal. Cada entrada é soma da entrada acima com a entrada acima à esquerda.

**Proposição 4.2.3** (Teorema das Linhas). *Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

*ou seja, a soma das entradas na  $n$ -ésima linha do Triângulo de Pascal é  $2^n$ .*

*Demonstração.* Façamos uma demonstração combinatória. O lado direito,  $2^n$ , é o número de subconjuntos de um conjunto com  $n$  elementos, veja o Exemplo 1.3.2. O lado esquerdo é a soma do número de subconjuntos com zero elementos, mais o número de subconjuntos unitários, mais o número de subconjuntos com dois elementos etc. Ou seja, também é o total de subconjuntos, o que leva à igualdade pedida.  $\square$

**Proposição 4.2.4** (Teorema das Colunas). *Para cada  $n, p \in \mathbb{N}$ ,*

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}.$$

*Demonstração.* Indução e Relação de Stifel.  $\square$

Veja abaixo uma ilustração do Teorema das Colunas.



via o Teorema das Colunas. Para isso, vamos escrever  $k^2$  como soma de produtos de inteiros consecutivos, ou seja, como

$$k^2 = Ak(k+1) + Bk + C.$$

Para obter os coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , podemos simplesmente substituir valores para  $k$ . Por exemplo, substituindo  $k = 0$ , obtemos  $C = 0$ . Substituindo  $k = -1$  obtemos então  $B = -1$ , e substituindo  $k = 1$  obtemos  $A = 1$ . Logo,

$$k^2 = k(k+1) - k$$

e, portanto,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k(k+1) - \sum_{k=1}^n k.$$

Observemos agora que o produto de números consecutivos é quase uma combinação, pois

$$\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)!}{2!(k-1)!} = \frac{(k+1)k}{2}$$

e

$$\binom{k}{1} = k.$$

Assim, para transformar os somandos em combinações, basta multiplicar e dividir a primeira soma por 2, ou seja,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} - \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \binom{k+1}{2} - \sum_{k=1}^n \binom{k}{1}. \end{aligned}$$

Aplicando agora o Teorema das Colunas em cada um dos somatórios, obtemos

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 2 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

## Exercícios

**Exercício 4.2.1.** Calcule  $1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$ .

**Exercício 4.2.2.** Calcule  $50 \cdot 51 + 51 \cdot 52 + 52 \cdot 53 + \dots + 1000 \cdot 1001$ .

**Exercício 4.2.3.** Calcule  $\sum_{k=1}^n k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k$ .

**Exercício 4.2.4.** Calcule  $\sum_{k=1}^n k^5$ .

**Exercício 4.2.5.** Calcule

a)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$       b)  $\sum_{k=1}^n (k+1) \binom{n}{k}$       c)  $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$

**Exercício 4.2.6.** Calcule  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$  via um argumento combinatório.

**Dica:** pense em comissões de  $k$  pessoas com um presidente.

**Exercício 4.2.7.** Resolva novamente o Exercício 2.4.15, ou seja, mostre a Fórmula de Euler

$$\binom{n}{k} = \sum_{p=0}^n \binom{q}{p} \binom{n-q}{k-p},$$

agora igualando os coeficientes de grau  $k$  em  $(1+x)^n = (1+x)^q(1+x)^{n-q}$ .

**Exercício 4.2.8.** Usando o Binômio de Newton, mostre que  $2^n - 1$  é múltiplo de 3 para todo  $n$  natural par.

**Exercício 4.2.9.** Usando o Binômio de Newton, mostre que  $10^{n+1} - 9n - 10$  é múltiplo de 9 para todo  $n$  natural.

**Exercício 4.2.10.** Calcule a soma

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^p \binom{n}{p}.$$

**Dica:** Relação de Stifel.

**Exercício 4.2.11.** Sejam  $m < n$ . Mostre que

$$\sum_{k=m}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = 0.$$

**Exercício 4.2.12.** Mostre que, para todo  $n \geq 2$ , vale

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2.$$

**Exercício 4.2.13.** Calcule

a)  $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$       b)  $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots$

**Exercício 4.2.14.** Mostre que os coeficientes binomiais crescem até o meio da linha e depois decrescem, ou seja,

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \binom{n}{2} < \cdots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$$

e

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} > \binom{n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}.$$

**Dica:** Para  $k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , mostre que  $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} > 1$ .

**Exercício 4.2.15.** Qual o resto de  $47^{47} + 77^{77}$  na divisão por 4?

**Exercício 4.2.16.** Você talvez tenha notado que há uma bijeção entre colunas e diagonais (observe as Figuras 4.4 e 4.5). Com essa ideia em mente, mostre que o Teorema das Colunas é equivalente ao Teorema das Diagonais, isto é, o enunciado de cada um implica o enunciado do outro.

**Exercício 4.2.17.** Seja  $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$  o número de maneiras de escolher  $k$  objetos dentre  $n$  tipos possíveis de objetos (combinação com repetição). Calcule

$$\left(\!\!\binom{n}{0}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{1}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{2}\!\!\right) + \cdots + \left(\!\!\binom{n}{p}\!\!\right).$$

**Exercício 4.2.18 (OBM-2008).** Esmeralda passeia pelos pontos de coordenadas inteiras do plano. Se, num dado momento, ela está no ponto  $(a, b)$ , com um passo ela pode ir para um dos seguintes pontos:  $(a+1, b)$ ,  $(a-1, b)$ ,  $(a, b-1)$  ou  $(a, b+1)$ . De quantas maneiras Esmeralda pode sair do  $(0, 0)$  e andar 2008 passos terminando no  $(0, 0)$ ?

**Dica:** você vai precisar de uma identidade vista anteriormente.

**Exercício 4.2.19.** Faça uma demonstração por indução do Teorema das Linhas.

**Exercício 4.2.20.** Neste exercício, obteremos um “Teorema das Diagonais Invertidas” no Triângulo de Pascal. Seja  $S_n$  a soma da  $n$ -ésima diagonal invertida no Triângulo de Pascal. Veja a Figura 4.6 para uma ilustração dos primeiros valores de  $S_n$ . Por uma questão de notação, impusemos  $S_0 = \binom{1}{0}$  como mostra a figura. Mas enfatizamos que isto é apenas uma convenção arbitrária.

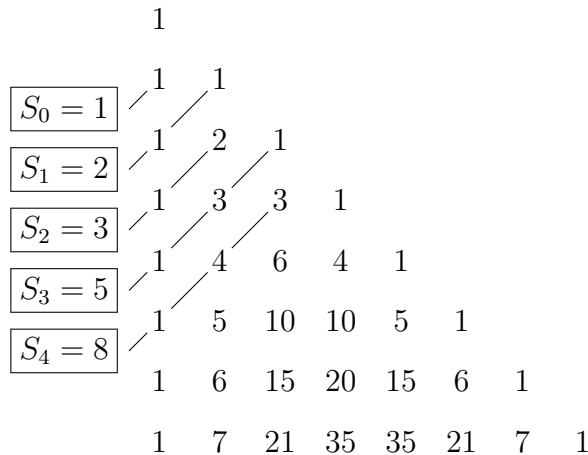


Figura 4.6. Somas em diagonais invertidas e Fibonacci.

a) Convença-se da igualdade

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k}. \quad (4.1)$$

**Dica:** veja a Observação 2.4.4.

b) Mostre que a soma  $S_n$  na  $n$ -ésima diagonal invertida segue a sequência de Fibonacci, ou seja, que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k+1}{k} = F_n, \quad (4.2)$$

onde  $F_n$  é solução de

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \\ F_0 = 1, \\ F_1 = 2. \end{cases}$$

**Dica:** Relação de Stifel.

**Exercício 4.2.21.** Prove a identidade (4.2) do exercício anterior de outra maneira: use o Exercício 3.4.15 e a Proposição 3.2.1 (Primeiro Lema de Kaplansky).

**Exercício 4.2.22 (Lema de Sperner).** Um família  $A_1, \dots, A_N$  de subconjuntos de um conjunto  $\Omega$  é dita um *sistema de Sperner* se nenhum destes subconjuntos está contido em outro, ou seja, para quaisquer  $i \neq j$ , tem-se que  $A_i \not\subseteq A_j$ . Assuma que  $|\Omega| = n$ . Vamos mostrar neste exercício o chamado *Lema de Sperner*, cujo enunciado é o seguinte: dado um sistema de Sperner como acima, vale

$$N \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$



- a) Uma sequência de subconjuntos  $B_1, \dots, B_n$  de  $\Omega$  é dita uma cadeia maximal se  $B_i \subset B_{i+1}$  e  $|B_i| = i$ . Mostre que o número de cadeias maximais é  $n!$ .
- b) Se  $A$  é um subconjunto não vazio de  $\Omega$ , mostre que o número de cadeias maximais que contém  $A$  é igual a  $(|A|)!(n - |A|)!$ .
- c) Mostre que

$$n! \geq \sum_{i=1}^N (|A_i|)!(n - |A_i|)! \geq N \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)!(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!,$$

e obtenha o Lema de Sperner.

**Exercício 4.2.23.** Mostre que

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

**Dica:** Defina  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$ . Calcule então  $S_n - S_{n-1}$ .

**Exercício 4.2.24.** Vamos provar neste exercício o Pequeno Teorema de Fermat, cujo enunciado é: “Se  $p$  é primo e  $a$  é inteiro não negativo, então  $p$  divide  $a^p - a$ ”.

- a) Mostre que se  $p$  é primo e  $0 < k < p$ , então  $p$  divide  $\binom{p}{k}$ .
- b) Mostre que o enunciado do Pequeno Teorema de Fermat é válido para  $a = 0$ .
- c) Usando o Binômio de Newton, prove o Pequeno Teorema de Fermat por indução para  $a \geq 0$ .
- d) Estenda o resultado anterior para qualquer  $a \in \mathbb{Z}$ . **Dica:** separe nos casos em que  $p$  é par ou ímpar.

## 4.3 Multinômio de Leibniz

Estenderemos agora o caso do binômio de Newton para uma soma de mais de duas ou mais parcelas. Por exemplo, qual seria uma fórmula para  $(a + b + c)^n$ ? Claramente

$$(a + b + c)^n = \underbrace{(a + b + c)(a + b + c)(a + b + c) \cdots (a + b + c)}_{n \text{ vezes}}.$$

Para calcular  $(a + b + c)^n$ , usamos novamente a propriedade distributiva, fazendo todos os produtos possíveis (tomando um termo de cada par de parênteses).

Por exemplo, qual o coeficiente de  $a^n$ ? Bem, a única maneira de se obter  $a^n$  é fazendo o produto de cada  $a$  em cada par de parênteses. Como só há uma única maneira de se fazer isso, o coeficiente será igual a 1.

Outro exemplo, qual será o coeficiente de  $a^2b^3c^{n-5}$ ? Bem, nesse caso precisamos escolher dois parênteses onde pegar um  $a$ , três parênteses onde pegar um  $b$ , e  $n - 5$  parênteses onde pegar um  $c$ . A resposta será portanto uma permutação de dois  $a$ 's, três  $b$ 's e  $n - 5$   $c$ 's:

$$\frac{n!}{2!3!(n-5)!}.$$

Generalizando o argumento acima,

**Proposição 4.3.1** (Multinômio de Leibniz). *Para quaisquer  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) e  $n \in \mathbb{N}$ , vale*

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \geq 0 \\ j_1 + \dots + j_k = n}} \frac{n!}{j_1! \dots j_k!} a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k}.$$

Omitiremos a demonstração da proposição acima, que segue o mesmo argumento acima apresentado. Recordemos a notação para permutação de  $n$  elementos com repetições  $j_1, \dots, j_k$ :

$$\binom{n}{j_1, \dots, j_k} := \frac{n!}{j_1! \dots j_k!}.$$

Com ela, a fórmula do Multinômio de Leibniz se escreve de maneira similar ao Binômio de Newton:

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \geq 0 \\ j_1 + \dots + j_k = n}} \binom{n}{j_1, \dots, j_k} a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k}.$$

Por causa disso,  $\binom{n}{j_1, \dots, j_k}$  são usualmente chamados de *coeficientes multinomiais*.

## Exercícios

**Exercício 4.3.1.** Calcule a soma dos coeficientes na expansão de

$$\left(x + \frac{1}{2y} + 3z + w^2\right)^{28}.$$

**Exercício 4.3.2.** Encontre o termo de grau zero na expansão de

$$\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^7.$$

**Exercício 4.3.3.** Encontre o termo de grau 11 na expansão de

$$(x + x^2 + x^3)^8.$$

**Exercício 4.3.4.** Encontre o termo de grau 15 na expansão de

$$(x + x^4 + x^6)^{12}.$$

**Exercício 4.3.5.** Mostre que

$$\binom{n}{a, b, c} = \binom{n}{a} \binom{n-a}{b}$$

de duas maneiras, via argumento combinatório e via as definições.

**Exercício 4.3.6.** Demonstre de duas maneiras o “Teorema das Linhas” para o Multinômio de Leibniz:

$$\sum_{\substack{0 \leq j_1, \dots, j_k \leq n \\ j_1 + \dots + j_k = n}} \frac{n!}{j_1! \cdots j_k!} = k^n.$$

**Dica:** Uma demonstração é de apenas meia linha. Uma outra demonstração pode ser via argumento combinatório.

**Exercício 4.3.7.** Qual o número de termos distintos na expansão de  $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n$ ?

**Exercício 4.3.8.** Mostre de duas maneiras, via argumento combinatório e via contas, o análogo para coeficientes multinomiais da Relação de Stifel:

$$\binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_k} = \binom{n-1}{j_1-1, j_2, \dots, j_k} + \binom{n-1}{j_1, j_2-1, \dots, j_k} + \dots + \binom{n-1}{j_1, j_2, \dots, j_k-1},$$

sendo  $j_1 + \dots + j_k = n$ .

## 4.4 Noções de Grafos I

**Definição 4.4.1.** Um grafo é um par ordenado  $(V, A)$ , onde  $V$  é um conjunto finito<sup>1</sup> e  $A$  é um subconjunto de  $V \times V$  tal que  $(a, b) \in A$  implica  $(b, a) \in A$ . O conjunto  $V$  é chamado de conjunto de *vértices* e  $A$  é chamado de conjunto de *arestas* (ou *elos*).

Esta é a definição matematicamente rigorosa, mas a ideia essencial é simplesmente a seguinte: *um grafo é um conjunto de vértices onde cada par de vértices pode estar ligado ou não por uma aresta*. Representamos cada vértice por um ponto. Se um par de pontos estiver conectado, desenhamos uma aresta ligando estes pontos, a qual não precisa ser um segmento de reta, pode ser uma linha curva qualquer, de modo a facilitar a apresentação. Além disso, arestas podem se cruzar. Por exemplo:

<sup>1</sup>Em geral, não necessariamente  $V$  é finito.

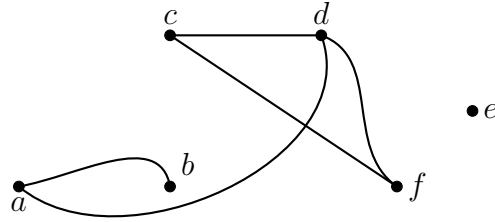


Figura 4.7. Exemplo de grafo. No caso, o conjunto de vértices é  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ .

Quando dois vértices  $u, v \in V$  estiverem ligados por uma aresta, denotaremos  $u \sim v$ . Por exemplo, no grafo da Figura 4.7, temos  $a \sim b$ , mas  $a \not\sim c$ . Note também que o vértice  $e$  não está conectado a nenhum vértice. A menos que seja dito algo em contrário, não consideraremos ligações de um vértice a ele próprio, os chamados *loops* (ou laços).<sup>2</sup>

Para o leitor que leu a Seção 1.4, podemos dizer que um grafo é uma relação simétrica em  $V$  e, que, a menos que seja dito algo em contrário, também é uma relação antirreflexiva. Mas onde estão as flechas usadas na Seção 1.4? Bem, se uma relação é simétrica, sempre que há uma flecha saindo de um ponto para outro ponto distinto, haverá também a flecha no sentido contrário. Logo, como as flechas entre pontos distintos virão em pares, em vez de desenhar duas flechas, uma indo e outra voltando, desenharemos apenas uma aresta ligando os dois pontos em questão.

**Definição 4.4.2.** O grau de um vértice  $v$  é o número de arestas conectadas a ele, que denotaremos por  $\text{gr}(v)$ . Por exemplo, na Figura 4.7, temos que  $\text{gr}(a) = 2$ ,  $\text{gr}(d) = 3$ ,  $\text{gr}(e) = 0$  etc.

**Definição 4.4.3.** Um multigrafo, em palavras, é um grafo onde é permitido haver mais do que uma conexão entre dois pontos quaisquer. Por exemplo:

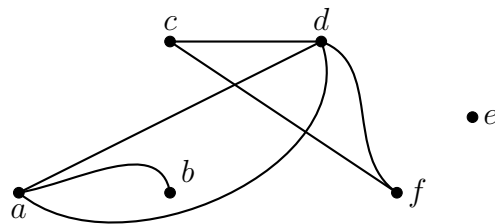
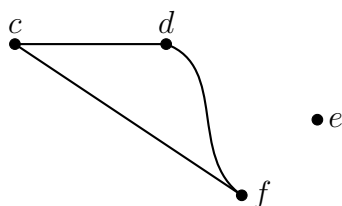


Figura 4.8. Exemplo de multigrafo.

Note que todo grafo é um multigrafo, mas a recíproca não é verdadeira.

<sup>2</sup>Em uma convenção diferente mas bastante comum, *loops* são permitidos, e grafos sem *loops* são chamados de *grafos simples*.

**Definição 4.4.4.** Um subgrafo de um grafo  $G = (V, A)$ , como o nome sugere, é um grafo  $G' = (V', A')$  tal que  $V' \subset V$  e  $A' \subset A$ . Por exemplo,



é um subgrafo do grafo da Figura 4.7.

**Definição 4.4.5.** Um caminho em um grafo é uma sequência de vértices  $x_0, x_1, \dots, x_n \in V$  tal que  $x_i \sim x_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, n-1$ . Em outras palavras, é um caminho através das arestas. Note que podemos repetir vértices no caminho.

**Definição 4.4.6.** Um multigrafo é dito conexo se entre dois vértices quaisquer há sempre um caminho que os liga. Em palavras, o grafo é conexo se é composto de um único “pedaço”. Uma componente conexa de um multigrafo  $G$  é um sub-multigrafo *maximal* conexo. Por *maximal* entenda-se que o sub-multigrafo em questão não pode estar contido estritamente em um sub-multigrafo também conexo.

**Definição 4.4.7.** Um ciclo em um grafo é um caminho fechado, ou seja, um caminho cujo vértice inicial é também o vértice final.

**Definição 4.4.8.** Uma árvore é um grafo conexo sem ciclos. Por exemplo:

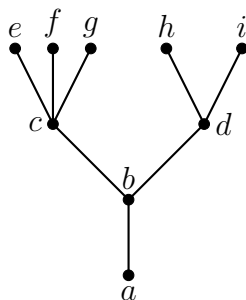


Figura 4.9. Exemplo de árvore.

**Definição 4.4.9.** Uma floresta é um grafo cujas componentes conexas são árvores.

**Definição 4.4.10.** Um grafo  $G = (V, A)$  é dito completo se todos os seus vértices estão conectados. Denotamos o grafo completo de  $n$  vértices por  $K_n$ . Também costuma-se chamar um grafo completo de *clique*.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>A notação  $K_n$  é uma homenagem ao matemático Kasimir Kuratowski (1896–1980).

**Proposição 4.4.11.** *Seja  $G = (V, A)$  um multigrafo. Então a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de elos, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} \text{gr}(v) = 2|A|.$$

*Demonstração.* Quando somamos os graus de todos os vértices, cada aresta é contada duas vezes.  $\square$

**Proposição 4.4.12.** *Seja  $G = (V, A)$  um multigrafo. O número de vértices em  $G$  de grau ímpar é par.*

*Demonstração.* Pela Proposição 4.4.11, temos que

$$\sum_{\substack{v \in V \\ \text{gr}(v) \text{ é ímpar}}} \text{gr}(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ \text{gr}(v) \text{ é par}}} \text{gr}(v) = 2|A|.$$

Como a paridade do segundo somatório é sempre par (pois é soma de números pares), o primeiro somatório deve ser par também. Como o primeiro somatório é soma de ímpares, para que ele seja par, obrigatoriamente o número de vértices com grau ímpar deve ser par.  $\square$

**Exemplo 4.4.13** (O Problema das Pontes de Konisberg). Este é um dos primeiros registros de problemas envolvendo grafos. Na cidade de Konisberg, passa o Rio Pregel. Sobre o rio, há duas ilhas, as quais estão ligadas entre si e às margens por sete pontes, conforme mostra a Figura 4.10 à esquerda. O *Problema das Pontes de Konisberg* consistia em obter uma maneira de passar por cada uma das pontes exatamente uma vez e ao fim do caminho retornar ao ponto de partida. Veja a Figura 4.10 à esquerda. Euler<sup>4</sup> em 1736 mostrou a impossibilidade de

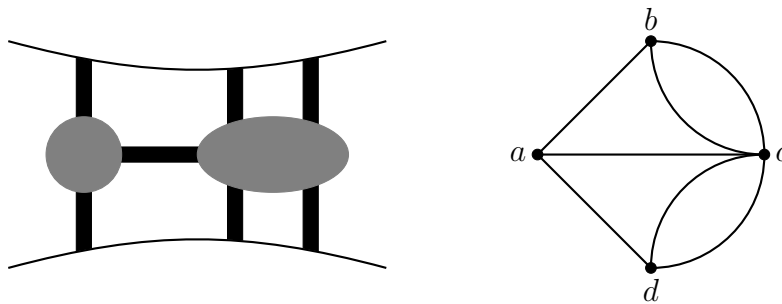


Figura 4.10. Pontes de Konisberg sobre o Rio Pregel e multigrafo correspondente.

tal caminho através do seguinte raciocínio: primeiro, observou que o caminho dentro das ilhas e nas margens não é relevante. Logo, podemos representar o mapa pelo multigrafo da Figura 4.10 à direita, onde os vértices  $a$  e  $c$  representam

<sup>4</sup>Leonhard Euler (1707-1787).

as ilhas, os vértices  $b$  e  $d$  representam as margens, e as arestas representam as pontes. Segundo, se existisse tal caminho, seria necessário entrar e sair de cada vértice do grafo um número par de vezes. Como nem todo vértice do grafo tem grau par (na verdade, nenhum deles, mas bastaria que apenas um tivesse grau ímpar), tal caminho não existe.

O exemplo anterior motiva a próxima definição.

**Definição 4.4.14.** Um *ciclo euleriano* em um multigrafo  $G$  é um ciclo que passa por todas as arestas de  $G$ , e passa por cada aresta apenas uma vez. Dizemos que um multigrafo que tenha um ciclo euleriano é um *multigrafo euleriano*.

Muitas das provas em grafos são construtivas e se assemelham a algoritmos. Eis um ótimo exemplo disso.

**Teorema 4.4.15.** Um multigrafo conexo  $G$  é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices têm grau par.

*Demonstração.* Suponha que  $G$  seja um multigrafo euleriano. Logo ele contém um ciclo euleriano. Seja  $v$  um vértice nesse ciclo. Imagine que comecemos de  $v$  e seguimos o ciclo em uma das duas direções possíveis neste ciclo, tanto faz qual. Como é um ciclo, ao final do caminho terminaremos em  $v$ . Portanto, o grau de  $v$  deve ser par.

Suponha agora que todos os vértices de  $G$  tenham grau par. Seja  $v_1$  um vértice do multigrafo. A partir de  $v_1$ , iniciamos um caminho que não passe duas vezes pela mesma aresta. Como o grau de cada vértice é par, se entramos nele, podemos sair. Como o grafo é finito, então alguma hora retornaremos ao vértice  $v_1$ , obtendo assim um ciclo  $C_1$  que não repete arestas. Se este ciclo  $C_1$  for o multigrafo todo, terminamos. Se não for, existirá um vértice  $v_2$  neste ciclo que está ligado a uma aresta que não pertence a  $C_1$ , pois o multigrafo é conexo. Considere então o ciclo  $C_2$  obtido pelo mesmo argumento anterior começando de  $v_2$ , evitando os vértices de  $C_1$ . O caminho que parte de  $v_2$  percorre  $C_1$ , volta a  $v_2$ , percorre  $C_2$  e volta a  $v_2$  é um ciclo que não repete arestas. Se este caminho for o multigrafo todo, acabou. Se não for, então existirá um vértice  $v_3$  em  $C_1 \cup C_2$  que está ligado a uma aresta que não pertence a  $C_1 \cup C_2$ . Repetimos o argumento, obtendo um ciclo  $C_3$ , que parte e termina em  $v_3$ , e é disjunto de  $C_1 \cup C_2$ . Como o multigrafo é finito, este processo terminará em algum momento, resultando em um ciclo euleriano  $C_1 \cup \dots \cup C_n$ .

□

**Definição 4.4.16.** Um *ciclo hamiltoniano* em um grafo  $G$  é um ciclo que passa por todos os vértices de  $G$  exatamente uma vez.

São conhecidas algumas maneiras de determinar se um grafo possui um ciclo hamiltoniano. Porém, nenhuma condição necessária e suficiente é conhecida, e as condições suficientes não são satisfatórias em certo sentido. Obter um algoritmo em tempo polinomial para determinar se um dado grafo é hamiltoniano é um dos chamados *Problemas do Milênio*, veja [Clay Inst., 2017].

**Teorema 4.4.17.** *Seja  $G = (V, A)$  um grafo com  $n$  vértices tal que o grau de qualquer vértice é maior ou igual a  $n/2$ . Então  $G$  tem (pelo menos) um ciclo hamiltoniano.*

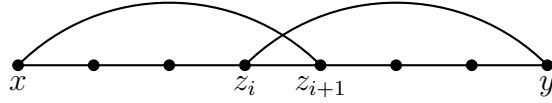


Figura 4.11. Ciclo hamiltoniano em  $G'$ .

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $G$  não tivesse ciclos hamiltonianos. Primeiro, adicionemos arestas a  $G$  até obter um grafo  $G' = (V, A')$  tal que, para qualquer aresta que adicionemos a  $G'$ , passamos a ter um ciclo hamiltoniano. Note que todos os vértices de  $G'$  também têm grau pelo menos  $n/2$ , e que  $G'$  não tem ciclos hamiltonianos.

Considere  $x$  e  $y$  vértices não conectados por aresta em  $G'$ . Se acrescentássemos a aresta  $(x, y)$ , então  $G'$  passaria a ter um ciclo hamiltoniano. Logo, existe um caminho  $x = z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = y$  ligando  $x$  a  $y$  em  $G'$ . Os vértices  $x$  e  $y$  têm, juntos, pelo menos  $n$  vizinhos. Afirmamos agora que existem  $z_i$  e  $z_{i+1}$  no caminho anterior tais que  $x \sim z_{i+1}$  e  $y \sim z_i$  (veja a Figura 4.11). De fato, sejam

- $E_x$  o conjunto de elos  $(z_j, z_{j+1})$  tais que  $(x, z_{j+1}) \in A'$  e
- $E_y$  o conjunto de elos  $(z_j, z_{j+1})$  tais que  $(y, z_j) \in A'$ .

Pela hipótese do teorema,  $|E_x| + |E_y| \geq n$ . Como são  $n - 1$  elos no caminho ligando  $x$  a  $y$ , concluímos que a interseção de  $E_x$  e  $E_y$  é não vazia, o que prova a afirmação.

Logo, existe um ciclo hamiltoniano em  $G'$  (veja a Figura 4.11 e encontre o ciclo hamiltoniano), o que é uma contradição. Logo, o grafo  $G$  tinha um ciclo hamiltoniano. □

## Exercícios

**Exercício 4.4.1.** Mostre que numa festa com 9 pessoas, é impossível que cada pessoa conheça exatamente outras três.

**Exercício 4.4.2.** Por que ciclos eulerianos interessam a inspetores de estradas e ciclos hamiltonianos interessam a representantes de vendas? Por que ciclos hamiltonianos são definidos em grafos, não em multigrafos? Por que ciclos eulerianos são definidos em multigrafos, não em grafos?

**Dica:** use o bom senso.



**Exercício 4.4.3.** Qual o número máximo e mínimo de arestas que um grafo com  $n$  vértices pode ter? Quantos subgrafos completos de tamanho  $k$  tem um grafo completo de tamanho  $n$ ? Quantas arestas tem o grafo  $K_n$ ?

**Exercício 4.4.4.** Para o leitor que leu a Seção 1.4: um grafo completo com laços em todos os pontos corresponde a qual tipo de relação?

**Exercício 4.4.5.** Seja  $G = (V, A)$  um grafo tal que  $|V| \geq 2$ . Mostre que  $G$  tem dois vértices de mesmo grau.

**Exercício 4.4.6.** Prove que um grafo com  $n$  vértices e mais do que  $\binom{n-1}{2}$  arestas é sempre conexo.

**Dica:** Faça por contradição. Sem perda de generalidade, comece supondo que  $G$  tem duas componentes conexas de tamanho  $k$  e  $n - k$ .

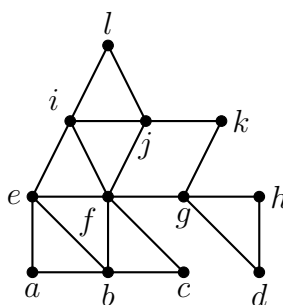
**Exercício 4.4.7.** Seja  $G$  um grafo conexo tal que duas arestas quaisquer têm sempre uma extremidade em comum. Mostre que o  $G$  é  $K_3$ , o grafo completo com três vértices, ou é uma estrela (usando o bom senso, defina quando um grafo é uma estrela).

**Exercício 4.4.8.** Um caminho auto-evitante em um grafo é um caminho que não repete vértices. Seja  $G$  um grafo conexo que não é um caminho auto-evitante. Prove que  $G$  tem pelo menos três vértices tais que, se retirarmos qualquer um desses vértices, o grafo resultante também é conexo.

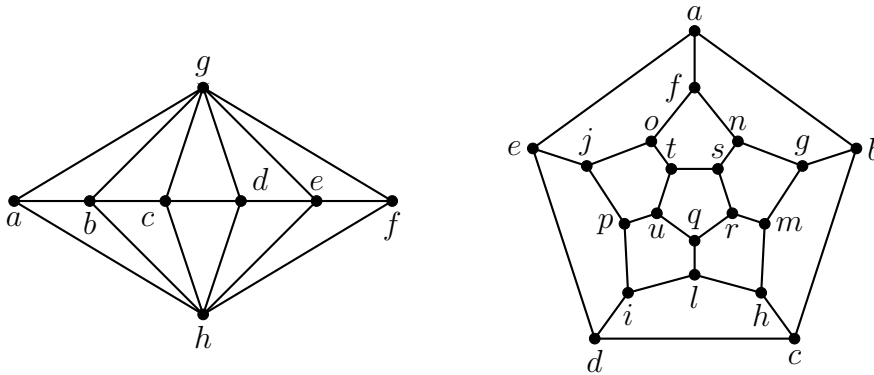
**Exercício 4.4.9.** É verdade que

- a) Se um grafo tem um ciclo euleriano, então tem um ciclo hamiltoniano?
- b) Se um grafo tem um ciclo hamiltoniano, então tem um ciclo euleriano?

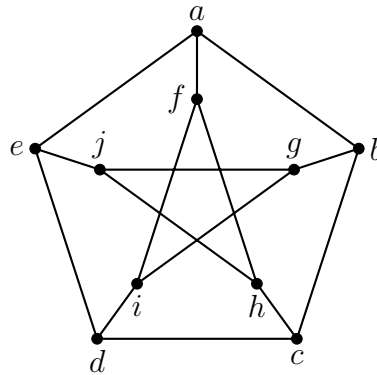
**Exercício 4.4.10.** Encontre um ciclo euleriano no grafo abaixo:



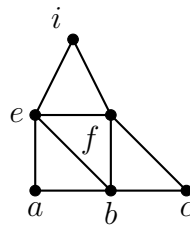
**Exercício 4.4.11.** Encontre um ciclo hamiltoniano nos grafos a seguir. (O grafo da direita é o chamado *Grafo Dodecaedro*. Por quê?).



**Exercício 4.4.12.** O grafo abaixo é chamado *Grafo de Petersen*. Este grafo possui algum ciclo hamiltoniano?



**Exercício 4.4.13.** Uma decomposição de um grafo  $G$  é uma partição de suas arestas em ciclos. Por exemplo, o grafo



pode ser decomposto em  $\{C_1, C_2, C_3\}$ , onde os ciclos são:

$$C_1 = \begin{array}{c} i \\ \diagup \quad \diagdown \\ e \quad \quad f \\ \diagdown \quad \diagup \\ \phantom{e} \quad \quad \phantom{f} \end{array}, \quad C_2 = \begin{array}{c} e \\ \diagdown \quad \diagup \\ a \quad \quad b \end{array} \quad \text{e} \quad C_3 = \begin{array}{c} f \\ \diagdown \quad \diagup \\ b \quad \quad c \end{array}.$$

Encontre outras decomposições em ciclos para o grafo acima.

**Exercício 4.4.14.** Prove que um multigrafo conexo  $G$  é euleriano se, e somente se, pode ser decomposto em ciclos (veja a definição de decomposição em ciclos no exercício anterior).

**Exercício 4.4.15.** Seja  $G = (V, A)$  grafo. Prove que são equivalentes:

- a)  $G$  é uma árvore;
- b)  $G$  é conexo e  $|A| = |V| - 1$ .
- c)  $G$  não tem ciclos e  $|A| = |V| - 1$ .

**Exercício 4.4.16.** Seja  $G = (V, A)$  uma árvore. Uma *folha* é um vértice de grau um.

- a) Prove que  $G$  contém uma folha.
- b) Prove que dados dois vértices quaisquer de  $G$  há exatamente um caminho ligando-os.
- c) Prove que  $G$  contém pelo menos duas folhas.

**Exercício 4.4.17.** Seja  $T = (V, A)$  uma árvore. Uma 3-coloração própria de  $T$  é uma pintura dos vértices utilizando três cores. Seja  $G$  o grafo cujos vértices são as 3-colorações próprias de  $T$  e cujas arestas unem os pares de 3-colorações próprias que diferem em apenas um vértice de  $T$ . Mostre que  $G$  é conexo.

**Exercício 4.4.18.** Qual a relação entre os números de vértices, arestas e componentes conexas de uma árvore?

**Exercício 4.4.19.** Um multigrafo é dito semi-euleriano se possui um caminho que passa por todas as arestas uma única vez (este caminho não necessariamente é um ciclo). Prove que um multigrafo conexo é semi-euleriano se, e somente se, o número de vértices de grau ímpar é zero ou dois.

**Dica:** acrescente uma aresta ligando os vértices de grau ímpar.

**Exercício 4.4.20.** Seja  $G = (V, A)$  uma árvore. Conjecture sob qual condição  $G$  será semi-euleriano. Prove sua conjectura.

**Exercício 4.4.21.**

- a) Mostre que numa sala com 13 pessoas, é impossível que 6 pessoas conheçam exatamente 2 pessoas e 7 pessoas conheçam exatamente 3 pessoas.
- b) É possível que numa sala com 10 pessoas, cada pessoa conheça exatamente três pessoas?

**Exercício 4.4.22.** Verifique que todo grafo completo com mais de dois vértices é um grafo hamiltoniano. Isso é verdade trocando grafo hamiltoniano por grafo euleriano?

**Exercício 4.4.23.** Um grafo  $G = (V, A)$  é dito bipartido (ou bigrafo) se existem  $M$  e  $N$  disjuntos não vazios tais que  $V = M \cup N$ , e não há arestas ligando vértices em  $M$  nem arestas ligando vértices em  $N$ . Veja a Figura 4.12 para uma ilustração.

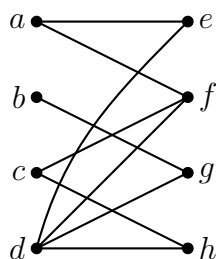


Figura 4.12. Exemplo de grafo bipartido. No caso,  $M = \{a, b, c, d\}$  e  $N = \{e, f, g, h\}$ .

Mostre que um grafo é bipartido se, e somente se, não tem ciclos de comprimento ímpar.

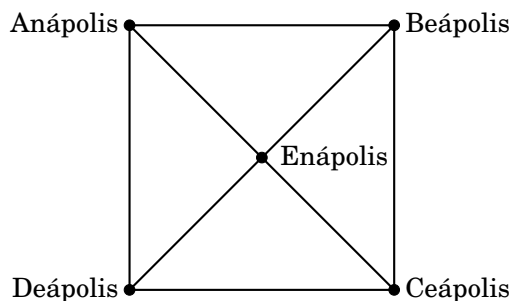
**Exercício 4.4.24.** Um subgrafo de um grafo bipartido é necessariamente bipartido?

**Exercício 4.4.25.** Qual o número máximo de arestas em um grafo bipartido com  $n$  vértices?

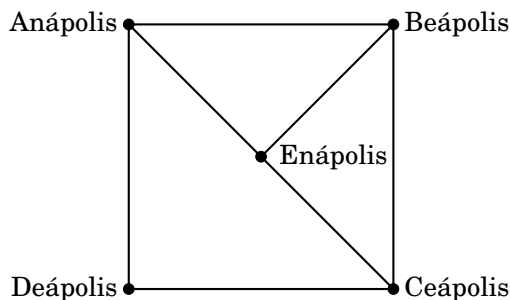
**Exercício 4.4.26.** Seja  $G = (V, A)$  um grafo bipartido cuja partição de seus vértices é  $V = M \cup N$ , sendo que  $|M| \neq |N|$ . Mostre que  $G$  não pode ser um grafo hamiltoniano.

**Exercício 4.4.27** (Banco de Questões OBMEP-2014).

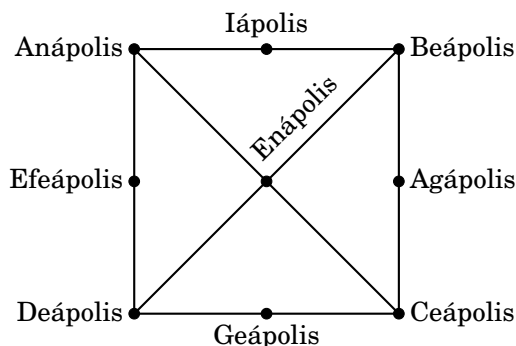
a) A doutora Maria Amélia viaja para atender seus pacientes. Em seu primeiro dia de trabalho, ela tem que atender pacientes nas cidades Anápolis, Beápolis, Ceápolis, Deápolis e Enápolis. As cidades são ligadas por estradas, como mostra a figura abaixo. Para atender os pacientes mais rapidamente, a doutora Maria Amélia precisa passar por cada cidade exatamente uma vez, e no fim voltar para a cidade de onde começou o percurso. A doutora começa em Anápolis. Mostre como ela pode fazer isso!



b) A doutora Maria Amélia precisa fazer o mesmo, mas agora uma estrada foi interditada para manutenção. Mostre que a doutora ainda pode fazer o percurso descrito anteriormente passando apenas uma vez por cada cidade e retornando para a cidade de partida, Anápolis.



c) Com o crescimento populacional, surgiram novas cidades, Efeápolis, Geápolis, Agápolis e Iápolis, como mostrado abaixo. As estradas que estavam em manutenção voltaram a ser transitáveis. Mostre que neste caso não há solução para o problema, ou seja, não há como a doutora sair de Anápolis, passar por cada uma das outras cidades exatamente uma vez, e então voltar para Anápolis.



**Exercício 4.4.28.** Calcule o número de ciclos hamiltonianos em  $K_n$ .

**Exercício 4.4.29.** Seja  $G = (V, A)$  um grafo conexo com  $n$  vértices tal que, para quaisquer dois vértices  $x, y \in A$ , vale que  $\text{gr}(x) + \text{gr}(y) \geq n$ . Mostre que  $G$  tem um ciclo hamiltoniano.

**Dica:** reveja a demonstração do Teorema 4.4.17. O que mudaria para provar o enunciado acima?

**Exercício 4.4.30.** Mostre que o resultado do exercício anterior não vale se supusermos apenas que  $\text{gr}(x) + \text{gr}(y) \geq n - 1$ .

**Exercício 4.4.31.** Durante uma conferência, cada um de 5 matemáticos cochilou exatamente duas vezes. Para cada par destes matemáticos, houve (pelo menos) um momento em que ambos estavam cochilando simultaneamente. Prove que, em algum instante, três matemáticos estavam cochilando ao mesmo tempo.

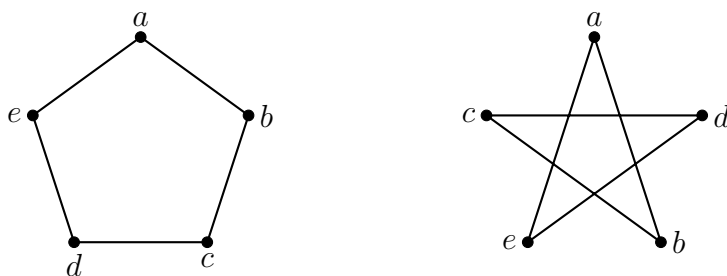
**Dica:** para facilitar o argumento, imagine um cochilo como algo instantâneo (o que, na prática, não corresponde à verdade). Considere o grafo cujos vértices são os 10 cochilos e tal que dois vértices estão conectados por uma aresta se os cochilos correspondentes são simultâneos. Mostre que este grafo tem um ciclo.

## 4.5 Noções de Grafos II

Quando dois grafos são iguais? Observe que duas representações de um mesmo grafo pode variar bastante. Além disso, mudando os rótulos dos vértices, podemos obter essencialmente o mesmo grafo. Isso leva à definição:

**Definição 4.5.1.** Dois grafos  $G = (V, A)$  e  $G' = (V', A')$  são ditos isomorfos se existe uma bijeção  $\phi : V \rightarrow V'$  tal que um elo  $e = (u, v)$  está presente em  $A$  se, e somente se, o elo  $e' = (\phi(u), \phi(v))$  está presente em  $A'$ . Esta bijeção é chamada um *isomorfismo*.

Por exemplo, os grafos



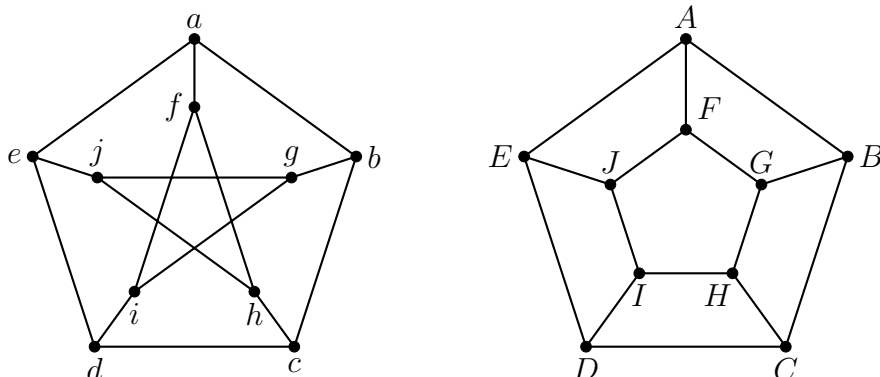
são isomorfos. No caso acima, basta usar a bijeção identidade (são simplesmente duas representações gráficas para o mesmo grafo). Outro exemplo: os grafos



são isomorfos. Para mostrar isso, consideremos a bijeção  $\phi : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{A, B, C, D\}$  dada por

$$\phi(a) = C, \quad \phi(b) = D, \quad \phi(c) = B, \quad \phi(d) = A.$$

Para mostrar que dois grafos são isomorfos, é necessário encontrar uma bijeção que preserve arestas. No outro sentido, para mostrar que dois grafos *não* são isomorfos, basta mostrar que alguma característica de um deles (que seja preservada por isomorfismos) não está presente no outro, como grau de vértices, subgrafos, conexidade, ciclos, quantidade de arestas etc. Por exemplo, os grafos



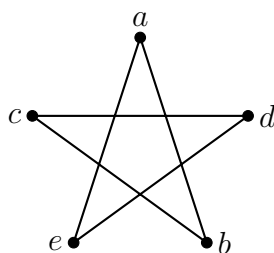
não são isomorfos. Vejamos: todos os vértices têm o mesmo grau, o que nada garante. Os dois grafos são conexos, idem. Os dois grafos têm o mesmo número de vértices, idem. Os dois grafos têm o mesmo número de arestas, idem. Mas o grafo da direita tem ciclos de tamanho quatro, e o da esquerda não! Logo, os grafos acima não são isomorfos.

**Observação.** A noção de isomorfismo nos faz dispensar escrever os rótulos de cada vértice. O desenho de um grafo sem os rótulos significará portanto que estamos considerando *qualquer* grafo isomorfo ao grafo do desenho.

**Definição 4.5.2.** Um grafo é dito planar se é possível desenhá-lo no plano sem que arestas se cruzem.

A noção de grafo planar interessa, por exemplo, a fabricantes de chips em eletrônica. Um chip é uma peça fina, bidimensional para fins práticos. Seus circuitos são compostos por caminhos que transmitem eletricidade e por isso não podem se cruzar.

**Exemplo 4.5.3.** O grafo abaixo é planar,



pois, como já visto, pode ser desenhado na forma de um pentágono regular.

**Teorema 4.5.4** (Fórmula de Euler). *Seja  $G = (V, A)$  um grafo planar, e seja  $F$  o número de faces deste grafo, onde a região externa (infinita) também é considerada uma face. Então*

$$|V| - |A| + |F| = 2. \quad (4.3)$$

*Demonstração.* Fazemos a prova por indução em  $n = |A|$ . Para  $n = 3$ , há as três possibilidades a seguir mostradas na Figura 4.13.

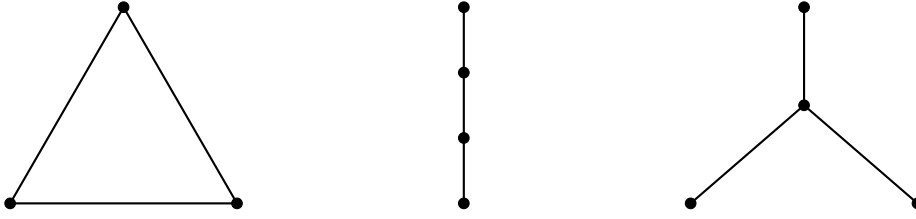


Figura 4.13. Três casos possíveis para  $n = 3$ .

No caso mais à esquerda ilustrado na Figura 4.13, o grafo é o triângulo  $K_3$ . Logo,  $|V| = 3$  e  $|F| = 2$ , pois temos duas faces, a interna e a externa, e  $|A| = 3$ , logo a fórmula é válida. Nos outros dois casos, temos três arestas, quatro vértices e apenas uma face. Logo, a fórmula (4.3) também é válida.

Suponha que a fórmula seja válida para um certo  $n = |A|$  e considere um grafo planar com  $n + 1$  arestas. Deste grafo, para o qual desejamos mostrar a fórmula (4.3), retire uma aresta que esteja na fronteira com a face exterior infinita. Temos duas possibilidades:

Se a aresta retirada é a fronteira entre a face infinita e uma face finita, temos uma aresta a menos, nenhum vértice a menos e uma face a menos. Como o grafo resultante também é planar e tem  $n$  arestas, pela hipótese de indução, temos que

$$|V| - (|A| - 1) + (|F| - 1) = 2,$$

que implica

$$|V| - |A| + |F| = 2,$$

como queríamos.

Se a aresta retirada é uma “folha”, temos uma aresta a menos, um vértice a menos e nenhuma face a menos. Como o grafo resultante também é planar, pela hipótese de indução temos que

$$(|V| - 1) - (|A| - 1) + |F| = 2,$$

que implica

$$|V| - |A| + |F| = 2,$$

como queríamos. □

**Corolário 4.5.5.** *Seja  $G = (V, A)$  grafo planar. Então todas as representações planares de  $G$  têm o mesmo número de faces.*

*Demonstração.* Como o número de elos e vértices não muda conforme a representação, pela Fórmula de Euler, o número de faces também não pode mudar! □

Existe grafos que não são planares? Eis um exemplo:



**Proposição 4.5.6.** *O grafo completo  $K_5$  não é planar.*

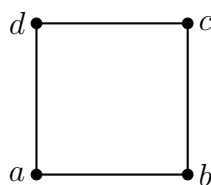
*1ª Demonstração:* Suponha, por absurdo, que  $K_5$  fosse planar. Para este grafo, temos  $|V| = 5$  vértices e  $|A| = \binom{5}{2} = 10$  elos. Logo, pela Fórmula de Euler, o número de faces seria  $F = 10 + 2 - 5 = 7$ .

Por outro lado, cada face tem pelo menos três arestas ao seu redor (não se esqueça de que a região externa também é considerada uma face). Logo, fazendo contagem dupla, o número de arestas deve satisfazer

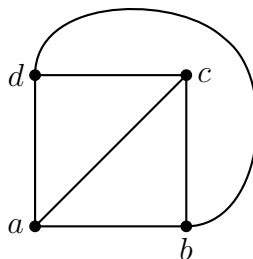
$$|A| \geq \frac{3 \cdot 7}{2} = 10,5,$$

o que é uma contradição, pois  $|A| = 10$ . □

*2ª Demonstração:* Suponha, por absurdo, que  $K_5$  fosse planar. Sem perda de generalidade, escreva  $A = \{a, b, c, d, e\}$ . Considere a curva fechada determinada pela sequência de vértices  $(a, b, c, d, a)$ , veja a figura abaixo:



Como estamos supondo que  $K_5$  é planar, um dos elos  $(a, c)$  e  $(b, d)$  é interior ao caminho fechado e o outro é exterior. Sem perda de generalidade, suponha que o elo  $(a, c)$  é interior. Logo,



Temos então quatro regiões na figura acima, e o vértice  $e$  deve pertencer a uma delas. Em qualquer um dos quatro casos, será necessário conectar o vértice  $e$  a um vértice que está fora da região considerada, logo o grafo  $K_5$  não pode ser planar. □

**Observação.** Na prova acima, usamos alguns fatos que são aparentemente óbvios, mas apenas aparentemente. A dizer: uma curva contínua fechada auto-evitante  $J$  divide o plano em duas componentes, uma interna (finita) e uma externa (infinita). E uma outra curva que ligue um ponto interno a um ponto externo deve interceptar a curva fechada  $J$  em algum ponto. Tais resultados são consequências do Teorema da Curva de Jordan, cuja prova não é trivial, e serão aceitos livremente aqui.

**Proposição 4.5.7.** *Seja  $P$  um poliedro, e denote por  $|F|$  seu número de faces, por  $|A|$  seu número de elos e por  $|V|$  seu número de vértices. Então*

$$|V| - |A| + |F| = 2.$$

*Demonstração.* Pode-se provar por indução... mas a prova a seguir é mais divertida. Suponha que as arestas do poliedro possam ser esticadas ou encolhidas o quanto se queira e, além disso, que as faces sejam vazias, ou seja, o poliedro seja composto fisicamente apenas por vértices e arestas. Amasse então o seu poliedro numa mesa de forma a obter um grafo planar. Por exemplo, se o seu poliedro for um tetraedro:

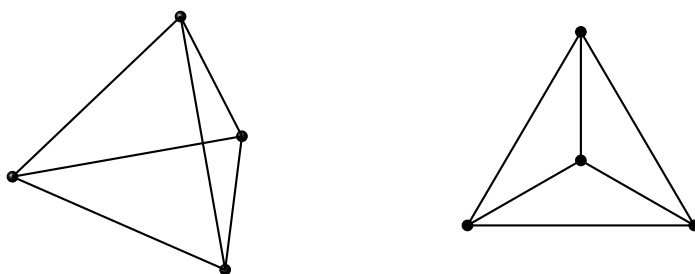


Figura 4.14. Tetraedro e “tetraedro planificado”.

Ou se for um cubo:

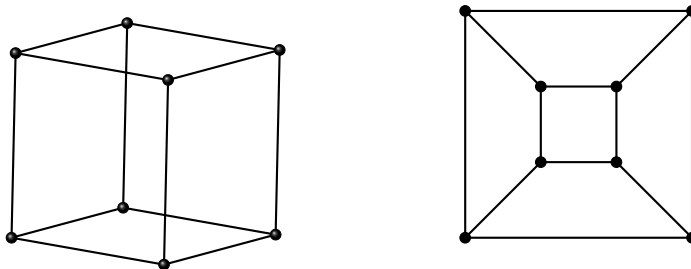
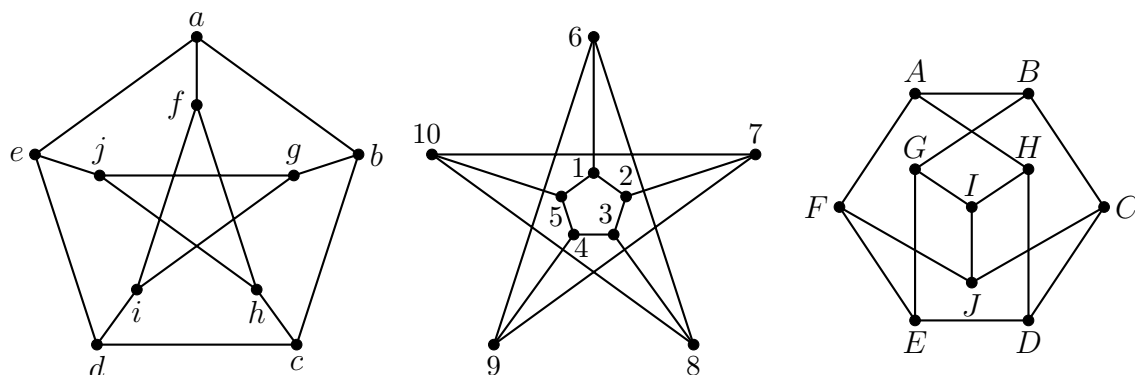


Figura 4.15. Cubo e “cubo planificado”.

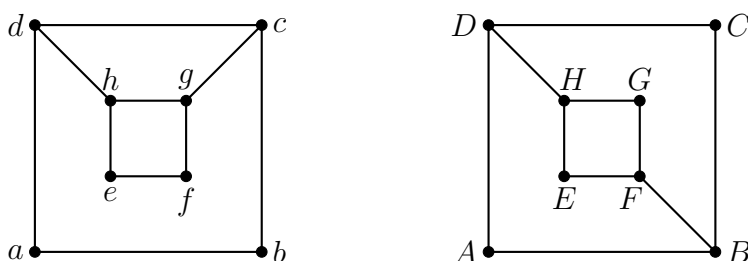
Logo, um poliedro tem o mesmo número de vértices, arestas e faces de um grafo planar (lembre-se de que consideramos a região externa como uma face do grafo planar). Como já provamos a Fórmula de Euler para grafos planares, concluímos que vale também  $|V| - |A| + |F| = 2$  para um poliedro.  $\square$

## Exercícios

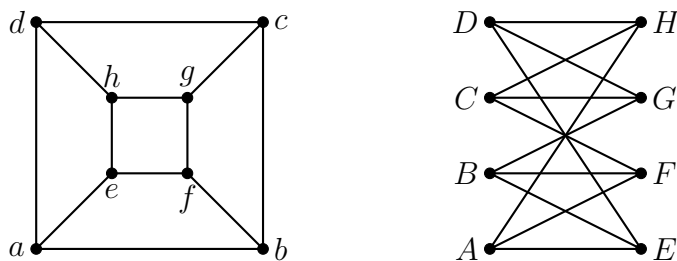
**Exercício 4.5.1.** Estabeleça isomorfismos entre os grafos abaixo:



**Exercício 4.5.2.** Mostre que os grafos abaixo não são isomorfos:



**Exercício 4.5.3.** Mostre que os grafos abaixo são isomorfos:



**Exercício 4.5.4.** Como vimos no texto, os grafos abaixo são isomorfos. O isomorfismo é único neste caso?



**Exercício 4.5.5.** Deduza, usando o bom senso, qual é a definição de um *grafo cíclico*. Quantos isomorfismos existem em um grafo cíclico com  $n$  vértices?

**Exercício 4.5.6.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , exiba dois grafos que tenham exatamente  $n$  isomorfismos entre eles.

**Dica:** A resposta *não* é um grafo cíclico com  $n$  vértices.

**Exercício 4.5.7.** Prove que se  $G = (V, A)$  e  $G' = (V', A')$  são dois grafos conexos tais que  $|A| = |A'|$  e todos os vértices de  $G$  e  $G'$  têm grau dois, então  $G$  e  $G'$  são isomorfos. Mostre que o resultado não vale se retirarmos a hipótese de conexidade.

**Exercício 4.5.8.** Um grafo é dito regular se todos os seus vértices têm mesmo grau, e dizemos neste caso que o grau do grafo é este valor para o grau de todos os vértices. Construa dois grafos regulares de grau três, que tenham o mesmo número de vértices e não sejam isomorfos.

**Exercício 4.5.9.** Seja  $G = (V, A)$  grafo regular de grau  $k$ , com  $k$  ímpar. Mostre que o número de vértices de  $G$  é par.

**Exercício 4.5.10.** Seja  $G = (V, A)$  um grafo. O complementar de  $G$ , denotado por  $G^c$  é o grafo que tem os mesmos vértices de  $G$ , e tal que  $e \in A'$  se, e somente se,  $e \notin A$ . Mostre que se  $G$  tem pelo menos seis vértices, então  $G$  ou  $G^c$  (ou ambos) terá um subgrafo isomorfo a  $K_3$ .

**Exercício 4.5.11.** Mostre que dois grafos são isomorfos se, e somente se, seus complementares são isomorfos.

**Exercício 4.5.12.** Um grafo  $G$  tem  $|V|$  vértices e  $|A|$  arestas. Quantas arestas tem  $G^c$ ?

**Exercício 4.5.13.** Prove que se  $G$  é um grafo cíclico de 5 vértices, então ele é isomorfo a  $G^c$ .

**Exercício 4.5.14.** O complementar de um grafo bipartido é necessariamente um grafo bipartido?

**Exercício 4.5.15.** Prove que se um grafo  $G = (V, A)$  é isomorfo ao seu complementar, então um dos números  $|V|$  ou  $|V| - 1$  é múltiplo de 4.

**Dica:** o que é  $G \cup G^c$ ?

**Exercício 4.5.16.** Provemos novamente a Fórmula de Euler. Faremos isso via um procedimento... aquoso (uma metáfora para clarear ideias). Suponha que o grafo planar  $G = (V, A)$  represente barragens (cada aresta seria uma barragem), com um oceano ao seu redor (a face externa), supondo que o interior do grafo estivesse seco. Faça o seguinte procedimento: retire uma aresta de maneira a inundar uma face que antes estava seca. Repita a operação até que todas as faces estejam inundadas.

a) Argumente porque o grafo resultante do processo não tem ciclos.

b) Argumente porque o grafo resultante é conexo.

c) Use os itens anteriores para provar a Fórmula de Euler.

**Exercício 4.5.17.** Para quais  $n$  o grafo  $K_n$  é planar?

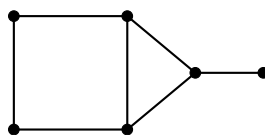
**Exercício 4.5.18.** O grafo obtido retirando-se uma aresta de  $K_5$  é planar?

**Exercício 4.5.19.** Seja  $G = (V, A)$  grafo planar conexo tal que  $|A| \geq 3$ . Prove que

$$|A| \leq 3|V| - 6.$$

**Dica:** usando contagem dupla, mostre primeiro que  $2|A| \geq 3|F|$ .

**Exercício 4.5.20.** Seja  $G = (V, A)$  grafo planar conexo com  $|A| \geq 2$ . Seja  $f_i$  o número de faces de  $G$  com  $i$  elos na fronteira. Por exemplo, para o grafo a seguir,



temos que  $f_3 = 1$ ,  $f_4 = 1$ ,  $f_6 = 1$  e zero para os demais (lembre-se que a região externa infinita é considerada uma face).

a) Mostre que

$$f_1 + 2f_2 + 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots \leq 2|A|.$$

e dê exemplo de um grafo planar conexo para o qual não vale a igualdade.

b) Se  $|A| \geq 3$ , mostre que  $f_1 = f_2 = 0$ .

**Exercício 4.5.21.** Mostre que o Grafo de Petersen mostrado na Figura 4.16 não é planar.

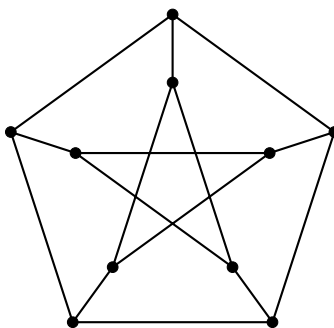


Figura 4.16. Grafo de Petersen.

**Exercício 4.5.22.** Denotamos por  $K_{m,n}$  o grafo bipartido  $G = (V, A)$  cuja partição  $V = M \cup N$  é tal que  $|M| = m$  e  $|N| = n$ , sendo que todo vértice de  $M$  está conectado a todo vértice de  $N$  (dizemos que  $K_{m,n}$  é o *grafo bipartido completo*). Veja a Figura 4.17 para um exemplo.

a) Mostre que  $K_{3,3}$  não tem ciclos de ordem 3.

- b) Use contagem dupla para mostrar que  $2|F| \leq |A|$  (caso  $K_{3,3}$  fosse planar). Conclua que  $K_{3,3}$  não é planar.

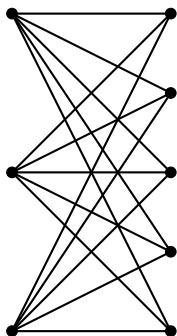


Figura 4.17. Grafo bipartido completo  $K_{3,5}$ .

**Observação.** Foge ao escopo deste livro, mas é interessante citar o Teorema de Kuratowski: *um grafo é planar se, e somente se, não contém um subgrafo que é um grafo generalizado de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$ .*

**Exercício 4.5.23.** Argumente porque um grafo que tem  $K_5$  ou  $K_{3,3}$  como subgrafo não pode ser planar. O grafo  $K_{3,5}$  é planar?

**Exercício 4.5.24.** Em um antigo quebra-cabeças, pede-se para ligar três casas a água, luz e esgoto, sem que canos ou fios passem um por cima do outro, e cada casa tenha todos estes três itens de infra-estrutura básica (veja a Figura 4.18). Este quebra-cabeças tem ou não solução?

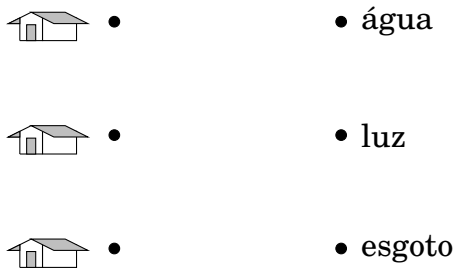


Figura 4.18. Ligue cada casa a água, luz e esgoto, sem que haja cruzamentos.

**Exercício 4.5.25.** Um grafo é dito  $n$ -colorível se podemos pintar seus vértices com  $n$  cores de tal maneira que vizinhos não tenham a mesma cor. Prove que um grafo é 2-colorível se, e somente se, não contém um ciclo ímpar.

**Dica:** qual a relação entre ser 2-colorível e ser bipartido?

**Exercício 4.5.26.** Seja  $G = (V, A)$  um grafo. Prove que se todo vértice em  $G$  tem grau no máximo  $n$ , então o grafo pode ser colorido com  $n + 1$  cores.

**Dica:** faça indução no número de vértices.

**Observação.** Vale a pena citar o Teorema das Quatro Cores: *todo grafo planar pode ser colorido com quatro cores*. Veja o excelente livro [Lovász et al., 2003] a respeito.

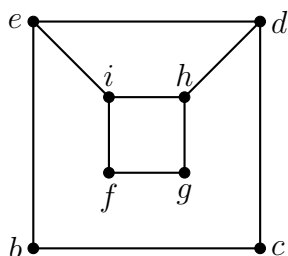


Figura 4.19. Grafo planar.

**Exercício 4.5.27.** Neste exercício, provaremos novamente a Fórmula de Euler. Considere um grafo planar  $G = (V, A)$  e considere uma representação dele cujas arestas sejam segmentos de reta (aceite que é sempre possível fazê-lo). Sejam  $a_1, \dots, a_F$  a quantidade de arestas (ou vértices) em cada uma das faces, sendo  $a_1$  a quantidade de arestas da face externa (infinita). Por exemplo, o grafo planar da Figura 4.19 tem quatro faces, sendo a face externa a de vértices  $\{b, c, d, e\}$ , que corresponde à região exterior infinita no plano. Lembre que a fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é  $\pi(n - 2)$ . Seja  $S$  a soma de todos os ângulos *internos* do grafo (não estamos considerando os ângulos externos).

- Fazendo contagem por faces, mostre que  $S = \pi(a_2 + \dots + a_F - 2|F| + 2)$ .
- Fazendo contagem por vértices, mostre que  $S = \pi(2|V| - 2 - a_1)$ .
- Igualando as respostas dos itens anteriores, mostre a Fórmula de Euler.





## CAPÍTULO 5

# NOÇÕES DE PROBABILIDADE MODERNA I

Neste capítulo veremos a definição moderna de Probabilidade e suas propriedades básicas, incluindo probabilidade condicional, esperança e desigualdades clássicas. Para evitar que o texto se torne muito longo, alguns resultados serão assumidos ou omitidos, mas sempre com o devido aviso.

Além disso, veremos como um macaco escreve as obras completas de Shakespeare e como é possível usar Probabilidade para provar existência de objetos (em problemas que, a princípio, nada tem a ver com probabilidade), além de diversos problemas curiosos e algumas aplicações da Probabilidade à Análise.

### 5.1 Precisa-se de uma nova definição?

Para conjuntos infinitos a definição de probabilidade como “casos favoráveis dividido pelo total de casos” não faz sentido. No caso infinito enumerável, poderia-se até adaptar esta definição associando-se pesos não negativos  $p_k$  a cada elemento  $\omega_k$  do espaço, assumindo então que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_k = 1$ . Entretanto, no caso infinito não enumerável (a reta  $\mathbb{R}$  por exemplo) nem mesmo isso seria possível. Tal necessidade deu origem à definição moderna de probabilidade que veremos a seguir.

Na Seção 5.2 definiremos o que é uma probabilidade como colocado por Kolmogorov<sup>1</sup> nos anos 30. Mas antes disso, vamos discutir aqui: por que precisaríamos de uma nova definição? Na Seção 1.6, em palavras, consideramos a definição

$$\text{probabilidade de um evento} = \frac{\# \text{ casos favoráveis}}{\# \text{ total de casos}},$$

que são os chamados espaços de probabilidade equiprováveis, pois todos os elementos do espaço amostral têm o mesmo peso. Nem sempre essa definição corresponde a modelos reais, por exemplo, em jogos com dados viciados. Bem, para

---

<sup>1</sup>Andrei Kolmogorov (1903–1987)

modelos desta natureza poderíamos usar a seguinte definição de espaço de probabilidade. Sejam  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  conjunto enumerável e  $f$  função real não negativa tal que  $\sum_{k=1}^{\infty} f(\omega_k) = 1$ . Dado um conjunto qualquer  $A \subset \Omega$ , usualmente chamado de *evento*, definimos sua probabilidade por

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k: \omega_k \in A} f(\omega_k). \quad (5.1)$$

Por exemplo, o modelo natural para representar uma moeda desonesta de parâmetro  $p$  seria  $\Omega = \{cara, coroa\}$ ,  $f(cara) = p$  e  $f(coroa) = 1 - p$ . Entretanto, apesar de resolver a questão de espaços não equiprováveis, esta definição não é adequada mesmo para situações muito simples. Por exemplo,

**Problema.** Considere que em um certo jogo com dois competidores, uma moeda honesta é lançada sucessivamente. O primeiro jogador ganha se uma sequência *cara, cara, cara* aparecer (de maneira consecutiva) antes de uma sequência *coroa, cara, cara*, e o segundo jogador ganha se esta segunda sequência aparecer primeiro. Qual o espaço de probabilidade natural a ser considerado? Qual a probabilidade de vitória do segundo jogador?

Notemos que pode ser necessário lançar a moeda uma quantidade arbitrária de vezes para que o jogo termine. Logo, o espaço amostral natural a ser considerado é  $\Omega = \{cara, coroa\}^{\mathbb{N}}$ , que é um conjunto não enumerável! Logo a definição (5.1) não se aplica, pois assumia que o espaço  $\Omega$  era enumerável, o que não vale neste caso. Além disso, cada elemento de  $\Omega$  é uma sequência de infinita de caras e coroas, e não é nada natural definir qual deve ser a probabilidade de cada uma dessas sequências. Veremos no Exercício 5.3.12 como responder ao problema acima. Vejamos outro exemplo:

**Problema.** Um arqueiro atira uma flecha em um alvo circular de raio 2 de maneira aleatória. Qual a probabilidade de que ele atinja o círculo de mesmo centro e raio 1 contido neste alvo?

Novamente, o espaço amostral é um subconjunto amostral não enumerável, e a definição (5.1) não se aplica. Deixemos de lado o rigor e tentemos resolver este problema de maneira intuitiva. Como o raio do círculo menor é 1 e o raio do círculo maior é 2, a probabilidade procurada deve ser  $\frac{1}{2}$ , certo? Por outro lado, a área do círculo menor é  $\pi \cdot 1^2$  e a área do círculo maior é  $\pi \cdot 2^2$ . Logo, a probabilidade buscada também deveria ser igual a

$$\frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2},$$

contradizendo a solução anterior. Qual é o paradoxo aqui? A questão é que, em espaços infinitos, não há apenas *uma* probabilidade natural a ser considerada, e sim inúmeras. Logo, o problema não está na solução, mas no enunciado do problema. Se o enunciado dissesse que “o arqueiro atira a flecha de maneira aleatória uniforme na distância ao centro do alvo”, a resposta correta seria  $\frac{1}{2}$ , mas se o enunciado dissesse que “o arqueiro atira a flecha de maneira aleatória uniforme na área do alvo”, a resposta correta seria  $\frac{1}{4}$ .

## Exercícios

**Exercício 5.1.1** (Paradoxo de Bertrand). Dada uma circunferência de raio  $r > 0$ , uma corda é o segmento unindo dois pontos  $a$  e  $b$  sobre a circunferência, veja a Figura 5.1. Considere também um triângulo equilátero inscrito nesta circunferência e escolha uma corda qualquer ao acaso. Qual seria a probabilidade de que a corda selecionada tenha comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero? Vejamos.

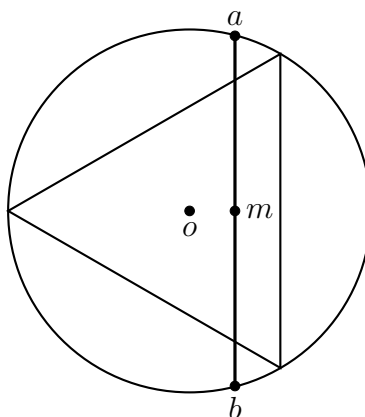


Figura 5.1. Circunferência, corda e triângulo inscrito.

- A corda é determinada unicamente pela sua direção e pela distância do seu ponto médio até o centro da circunferência. Por simetria, fixemos uma direção para a corda, a vertical, digamos, e assuma que a distância do ponto médio  $m$  até o centro  $o$  é uniforme. Mostre que a probabilidade neste caso é igual a  $1/2$ .
- A corda é determinada unicamente pelos dois pontos  $a$  e  $b$  sobre a circunferência. Por simetria, fixe  $b$  como sendo um vértice do triângulo equilátero, e assuma que o outro ponto  $a$  é escolhido uniformemente sobre a circunferência. Mostre que a probabilidade neste caso é igual a  $1/3$ .
- A corda é determinada unicamente pela posição do ponto médio  $m$ . Assuma que a posição do ponto médio  $m$  seja uniforme na região do círculo. Mostre que a probabilidade neste caso é igual a  $1/4$ .

## 5.2 Espaços de Probabilidade

Seja  $\Omega$  um conjunto. É costume chamar  $\Omega$  de espaço amostral, o qual será entendido como o conjunto dos resultados referentes ao modelo em questão. Por exemplo, no sorteio de uma moeda, é natural escolher  $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ . No sorteio de dois dados, o espaço amostral natural seria  $\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$ .

É muito comum omitir detalhes em Probabilidade. Por exemplo, quando dizemos “considere  $n$  lançamentos de uma moeda honesta” subentende-se que o espaço amostral seja

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(a_1, \dots, a_n) : a_k \in \{\text{cara}, \text{coroa}\}\} \\ &= \underbrace{\{\text{cara}, \text{coroa}\} \times \dots \times \{\text{cara}, \text{coroa}\}}_{n \text{ vezes}} \\ &= \{\text{cara}, \text{coroa}\}^n.\end{aligned}$$

Também representamos um conjunto descrevendo-o com palavras. Por exemplo, para representar o evento “cara no primeiro de dois lançamento de uma moeda”, a maneira formal seria

$$A = \{(a_1, a_2) \in \Omega : a_1 = \text{cara}\},$$

mas vamos denotar este evento simplesmente como

$$A = [\text{cara no 1º lançamento}],$$

e assim por diante.

**Definição 5.2.1.** Uma coleção  $\mathbb{A}$  de subconjuntos de  $\Omega$  é dita uma  $\sigma$ -álgebra se

- (i)  $\Omega \in \mathbb{A}$ ,
- (ii) Se  $A \in \mathbb{A}$ , então  $A^c \in \mathbb{A}$ ,
- (iii) Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ , então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{A}$ .

Uma coleção (ou família) de subconjuntos nada mais é do que um conjunto de subconjuntos. Esta palavra “coleção” (ou família) é usada na literatura apenas por estilo. Tenha em mente portanto que uma  $\sigma$ -álgebra é simplesmente um conjunto de subconjuntos (também chamados de eventos) de  $\Omega$  satisfazendo as três condições acima.

**Exemplo 5.2.2.**  $\mathbb{A} = \{\emptyset, \Omega\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra (a chamada trivial). O conjunto das partes  $\mathcal{P}(\Omega)$  também é uma  $\sigma$ -álgebra.

**Exemplo 5.2.3.** Se  $\Omega = \{a, b, c\}$ , então

$$\mathbb{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

é uma  $\sigma$ -álgebra (que não é nem a trivial, nem a das partes).

A um par  $(\Omega, \mathbb{A})$ , onde  $\Omega$  é um conjunto e  $\mathbb{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ , chamamos *espaço mensurável*.

**Definição 5.2.4.** Uma probabilidade  $\mathbb{P}$  em um espaço mensurável  $(\Omega, \mathbb{A})$  é uma função  $\mathbb{P} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- (i)  $0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$ , para todo  $A \in \mathbb{A}$ ,
- (ii) Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$  são conjuntos *disjuntos*, então

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i). \quad (5.2)$$

A uma terna  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  chamamos *espaço de probabilidade*.

Enfatizamos que uma probabilidade  $\mathbb{P}$  é uma função cujo domínio é  $\mathbb{A}$ , não  $\Omega$ . Ou seja, atribuímos probabilidades a subconjuntos de  $\Omega$ , não a elementos de  $\Omega$ . Bem, por vezes podemos atribuir probabilidade a um subconjunto unitário de  $\Omega$ . No Exemplo 5.2.3 poderíamos atribuir uma probabilidade para o evento  $\{a\}$ , mas não é possível atribuir uma probabilidade para o evento  $\{b\}$ , pois este não pertence à  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{A}$ .

Outra observação: a igualdade (5.2) implica o equivalente para um número finito de eventos disjuntos, ou seja,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Para mostrar isso, basta escolher  $A_i = \emptyset$  para  $i \geq n + 1$ .

**Definição 5.2.5.** Sejam  $A$  e  $A_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , conjuntos. Denotamos  $A_i \nearrow A$  (em palavras, dizemos que  $A_i$  cresce para  $A$ ) se

- (i)  $A_i \subset A_{i+1}$ ,
- (ii)  $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ .

Analogamente, denotamos  $A_i \searrow A$  (em palavras, dizemos que  $A_i$  decresce para  $A$ ) se

- (i)  $A_i \supset A_{i+1}$ ,
- (ii)  $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$ .

Também usamos os mesmos símbolos  $\searrow$  e  $\nearrow$  para denotar limites de sequências: dada uma sequência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais, e um número real  $a$ , escrevemos  $a_n \searrow a$  para denotar que

- A sequência  $a_n$  é decrescente, ou seja,  $a_n \geq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e
- vale que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Analogamente, escrevemos  $a_n \searrow a$  para denotar que

- A sequência  $a_n$  é decrescente, ou seja,  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , e
- vale que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Note que estes símbolos  $\searrow$  e  $\nearrow$  foram usados para denotar coisas diferentes, ou seja, temos aqui um chamado *abuso de notação*. Entretanto, o contexto evitará qualquer ambiguidade. Se estivermos falando de conjuntos, então  $\searrow$  e  $\nearrow$  se referirão à Definição 5.2.5. E se estivermos falando de sequências de números reais, então  $\searrow$  e  $\nearrow$  terão o significado acima.

**Proposição 5.2.6.** *Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e sejam  $A, A_i, B \in \mathbb{A}$ . Então*

- (i) *Se  $A \subset B$ , então  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B - A)$ .*
- (ii) **(Monotonicidade da Probabilidade)** *Se  $A \subset B$ , então  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .*
- (iii) **(Continuidade da Probabilidade por Baixo)** *Se  $A_i \nearrow A$ , então  $\mathbb{P}(A_i) \nearrow \mathbb{P}(A)$ .*
- (iv) **(Continuidade da Probabilidade por Cima)** *Se  $A_i \searrow A$ , então  $\mathbb{P}(A_i) \searrow \mathbb{P}(A)$ .*

*Demonstração.*

(i) Como  $A \subset B$ ,  $B = A \cup (B - A)$ , sendo os eventos  $A$  e  $B - A$  disjuntos. Daí, use (5.2). Pergunta: por que  $B - A$  pertence à  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{A}$ ? Fica para os exercícios.

(ii) Como a probabilidade é sempre não negativa, imediato do anterior.

(iii) Como  $A_i \nearrow A$ , temos que

$$A = A_1 \cup \left( \bigcup_{i=1}^{+\infty} (A_{i+1} - A_i) \right),$$

sendo a união acima disjunta. Logo,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{i+1} - A_i) = \mathbb{P}(A_1) + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{i+1}) - \mathbb{P}(A_i).$$

Pela definição de série,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_{i+1}) - \mathbb{P}(A_i).$$

Observe que a soma acima é telescópica. Daí,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Além disso, que  $\mathbb{P}(A_i)$  é uma sequência crescente de números reais decorre de  $A_i \subset A_{i+1}$ .

(iv) Fica como exercício. □

**Proposição 5.2.7** (Subaditividade). *Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  espaço de probabilidade. Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$  são eventos quaisquer (não necessariamente disjuntos), então*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

*Demonstração.* Vamos definir conjuntos que sejam disjuntos e cuja união seja igual à união dos conjuntos  $A_i$ . Sejam

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - A_1 \\ B_3 &= A_3 - (A_1 \cup A_2) \\ &\vdots \\ B_n &= A_n - (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Temos que  $\mathbb{P}(B_i) \leq \mathbb{P}(A_i)$  para todo  $i$ . Daí,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

□

## Exercícios

**Exercício 5.2.1.** Seja  $\mathbb{A}$  uma  $\sigma$ -álgebra. Mostre que

- a)  $\emptyset \in \mathbb{A}$ .
- b) Se  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ , então  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathbb{A}$ .
- c) Se  $A, B \in \mathbb{A}$ , então  $B - A \in \mathbb{A}$ .

**Exercício 5.2.2.** Sejam  $A$  e  $B$  eventos com probabilidades  $\mathbb{P}(A) = 3/4$  e  $\mathbb{P}(B) = 1/3$ . Mostre que  $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$  e dê exemplos para mostrar que ambos os extremos são possíveis. Encontre cotas análogas para  $\mathbb{P}(A \cup B)$ .

**Exercício 5.2.3.** Mostre que  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ .

**Exercício 5.2.4.** Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ . Mostre que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c).$$

Conclua que a interseção de enumeráveis eventos de probabilidade um tem probabilidade um.

**Exercício 5.2.5.** Sejam  $A_1, A_2, \dots$  e  $B_1, B_2, \dots$  eventos tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = p$ . Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_n) = p$ .

**Exercício 5.2.6.** Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e  $A_n, B_n \in \mathbb{A}$  tais que  $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow 1$  e  $\mathbb{P}(B_n) \rightarrow p$ . Mostre que

$$\mathbb{P}(A_n \setminus B_n) \rightarrow 1 - p.$$

**Exercício 5.2.7.** Sejam  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{A} = \{ \text{todos os subconjuntos } A \subseteq \mathbb{R} \text{ tais que } A \text{ ou } A^c \text{ são enumeráveis} \}$ , e defina  $\mathbb{P}(A) = 0$  se  $A$  for enumerável e  $\mathbb{P}(A) = 1$  se  $A^c$  for enumerável. Mostre que  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  é espaço de probabilidade.

**Exercício 5.2.8.** Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e  $A_k \in \mathbb{A}$  eventos tais que  $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c) = 0$ . Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) = 1$ .

### 5.3 Probabilidade Condicional e Independência

Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Dados dois eventos  $A, B \in \mathbb{A}$ , sendo  $\mathbb{P}(B) > 0$ , definimos a *probabilidade condicional de A dado B* por

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Intuitivamente, a probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$  representa a probabilidade de  $A$  acontecer, sabendo-se de antemão que  $B$  aconteceu. Vejamos a seguir que uma probabilidade condicional é de fato uma probabilidade.

**Proposição 5.3.1.** *Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Fixe  $B \in \mathbb{A}$  um evento de probabilidade positiva, ou seja, tal que  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Então  $\mathbb{P}(\cdot | B)$  é uma probabilidade em  $\mathbb{A}$ .*

*Demonstração.* Basta verificar os itens na Definição 5.2.4. Temos que:

$$\mathbb{P}(\emptyset | B) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = 0.$$

e também que

$$\mathbb{P}(\Omega | B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

Além disso, claramente  $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$ . Falta apenas a aditividade. Sejam  $A_1, A_2, \dots$  eventos disjuntos. Logo, os eventos  $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots$  também são disjuntos. Portanto,

$$\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k | B) = \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k | B),$$

concluindo a prova. □



Qual a relação entre a probabilidade de  $A$  acontecer dado que  $B$  aconteceu e a probabilidade de  $B$  acontecer dado que  $A$  aconteceu? Este é o tema do próximo resultado.

**Proposição 5.3.2** (Teorema de Bayes). *Sejam  $B_1, B_2, \dots$  eventos, todos de probabilidade positiva, que particionem o espaço  $\Omega$ , ou seja, são disjuntos e sua união é igual a  $\Omega$ . Dado um evento  $A$ , vale que*

$$a) \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k).$$

b) Suponha que  $\mathbb{P}(A) > 0$ . Então, para qualquer índice  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)}.$$

*Demonstração.* Como  $B_1, B_2, \dots$  particionam o espaço, temos que  $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} B_k$ . Portanto,  $A = A \cap \Omega = \cup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_k)$ . Como os eventos  $B_k$  são disjuntos, os eventos  $A \cap B_k$  também são. Pela aditividade da probabilidade, temos que  $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap B_k)$ , o que mostra a letra a) do enunciado. Para a letra b),

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_k) \cdot \mathbb{P}(B_k)},$$

onde na segunda igualdade usamos a letra a) no denominador.  $\square$

**Observação.** O Teorema de Bayes também vale no caso de finitos  $B_1, \dots, B_n$ , sendo a demonstração análoga.

Dizemos que dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ . Note que, no caso de  $B$  ter probabilidade positiva, isso é o mesmo que dizer que  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ . Em palavras, se  $A$  e  $B$  são independentes, saber que  $B$  aconteceu não altera a probabilidade de  $A$  ocorrer.

Dizemos que os eventos  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$  são independentes dois a dois se, para quaisquer  $i \neq j$ , vale

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j),$$

e dizemos que  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$  são independentes (ou coletivamente independentes) se para qualquer família finita de índices  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$  vale

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\ell} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

**Exemplo 5.3.3.** Considere uma urna com quatro bolas distintas 1, 2, 3, 4. Retiramos então uma bola da urna. O espaço amostral nesse caso pode ser  $\Omega =$

$\{1, 2, 3, 4\}$ . Considere os eventos  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 3\}$  e  $C = \{1, 4\}$ . Os eventos  $A, B$  e  $C$  são dois a dois independentes. Por exemplo,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Entretanto, os eventos  $A, B$  e  $C$  *não* são coletivamente independentes, pois

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}.$$

**Exemplo 5.3.4.** Sabe-se que um casal tem duas crianças. Você toca a campainha da casa onde mora esta família e um menino abre a porta. Qual a probabilidade, neste momento, que a outra criança seja um menino também?

A primeira resposta que vem à mente é  $1/2$ , pois cada criança é independente. Logo, se um menino abriu a porta, a probabilidade de que a outra criança seja um menino não tem a ver com o que abriu a porta. Correto? Errado, vejamos o porquê. O espaço amostral para o problema seria  $\Omega = \{(H, H), (H, M), (M, H), (M, M)\}$ , onde  $H$  representa menino e  $M$  representa menina, e a probabilidade é equiprovável, ou seja, cada subconjunto unitário tem probabilidade  $1/4$ . Seja  $A$  o evento *o casal tem dois meninos*, e seja  $B$  o evento *o casal tem pelo menos um menino*, que é o mesmo que *um menino abriu a porta*<sup>2</sup>. Logo,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

é a resposta correta.

## Exercícios

**Exercício 5.3.1.** Mostre que o eventos  $\Omega$  e  $\emptyset$  são independentes de qualquer evento  $A \in \mathbb{A}$ . Interprete.

**Exercício 5.3.2.** Sejam  $A$  e  $B$  eventos disjuntos tais que  $0 < \mathbb{P}(A) < 1$  e  $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ . Mostre que  $A$  e  $B$  não são independentes. Interprete.

**Exercício 5.3.3.** Sejam  $A$  e  $B$  eventos tais que  $A \subset B$  e  $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \neq 0, 1$ . Mostre que  $A$  e  $B$  não são independentes. Interprete.

**Exercício 5.3.4.** Mostre que se o evento  $A$  é independente dele próprio, então  $\mathbb{P}(A)$  igual a zero ou um. Interprete.

**Exercício 5.3.5.** Mostre que se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $A$  e  $B^c$  são independentes. Interprete.

<sup>2</sup>Assumindo implicitamente que é sempre um dos filhos a abrir porta, e a probabilidade de cada um dos dois filhos abrir a porta é a mesma.

**Exercício 5.3.6.** Quantas equações são necessárias verificar para garantir que os eventos  $A_1, \dots, A_n$  sejam independentes?

**Exercício 5.3.7.** Considere o lançamento de dois dados honestos. Sejam  $A$  o evento *o resultado do primeiro dado é par*,  $B$  o evento *o resultado do segundo dado é par*, e  $C$  o evento *a soma dos resultados é par*. Mostre que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são independentes dois a dois, mas não são coletivamente independentes.

**Exercício 5.3.8.** Sejam  $A_1, \dots, A_n$  eventos independentes e escreva  $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ . Encontre a probabilidade de ocorrência dos seguintes eventos em função de  $p_1, \dots, p_n$ .

- a) A ocorrência de nenhum dos  $A_k$ .
- b) A ocorrência de pelo menos um deles.
- c) A ocorrência de exatamente um deles.
- d) A ocorrência de exatamente dois deles.
- e) A ocorrência de todos eles.
- f) A ocorrência de no máximo  $n - 1$  deles.

**Exercício 5.3.9.** Um jogador ganha um certo torneio se vence duas partidas em seguida, de uma série de três partidas. O jogador tem dois oponentes,  $A$  e  $B$ . A chance do jogador vencer  $A$  em uma partida é  $p$ , e a chance do jogador vencer  $B$  em uma partida é  $q$ . O jogador pode escolher enfrentar  $A$ , depois  $B$ , depois  $A$ , ou enfrentar  $B$ , depois  $A$ , depois  $B$ . Considere todas as partidas independentes e suponha que  $B$  é um adversário mais difícil do que  $A$ , ou seja, suponha que  $p > q$ .

- a) Calcule a probabilidade de vitória em cada um dos casos  $ABA$  e  $BAB$ .
- b) Pelo item anterior, a sequência mais vantajosa é a  $BAB$ . Entretanto, nesta sequência enfrenta-se o adversário mais difícil duas vezes, enquanto que na outra sequência, enfrenta-se o adversário mais difícil apenas uma. Por que isso faz sentido?

**Exercício 5.3.10.** O campeonato baiano tem 16 times, e é feito em eliminatória (não há empates). São feitos inicialmente 8 jogos, os vencedores passam para a próxima rodada e assim por diante. Cada jogo é independente com probabilidade  $1/2$  para cada resultado. Os pares iniciais também são escolhidos ao acaso. Qual a probabilidade de o Vitória ser campeão sem jogar com o Bahia?

**Exercício 5.3.11** (Dados não transitivos). Um certo jogo usa três dados cúbicos de seis faces  $A$ ,  $B$  e  $C$  que têm certos números naturais em suas faces escolhidos no conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ , conforme mostra a Tabela 5.1. O jogo funciona da seguinte maneira. O primeiro jogador escolhe um dado. O segundo jogador escolhe outro,

	Dado $A$	Dado $B$	Dado $C$
4	três faces		uma face
3		quatro faces	
2			cinco faces
1	três faces	duas faces	

Tabela 5.1. Dados  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

e esta escolha vale durante todo o jogo. Os dois então jogam simultaneamente seus dados. Se o dado de um dos jogadores mostrar o maior número, este jogador ganha. Se der empate, os dados escolhidos são lançados novamente até que haja um vencedor.

- Calcule a probabilidade de se ganhar escolhendo o dado  $A$  quando seu oponente escolheu o dado  $B$ . Note que esta probabilidade é maior do que 50%, ou seja, o dado  $A$  é mais vantajoso do que o dado  $B$ .
- Calcule a probabilidade de se ganhar escolhendo o dado  $B$  quando seu oponente escolheu o dado  $C$ . Note que esta probabilidade é maior do que 50%, ou seja, o dado  $B$  é mais vantajoso do que o dado  $C$ .
- Calcule a probabilidade de se ganhar escolhendo o dado  $C$  quando seu oponente escolheu o dado  $A$ . Note que esta probabilidade é maior do que 50%, ou seja, o dado  $C$  é mais vantajoso do que o dado  $A$ .
- Conclua que o segundo jogador a escolher o dado tem vantagem sobre o primeiro. As propriedades acima parecem com uma sequência de desigualdades do tipo  $A > B > C > A$ . Por que a existência desses dados não é um paradoxo?

**Exercício 5.3.12.** Uma moeda honesta é jogada sucessivas vezes. Chamemos *cara* de  $c$  e *coroa* de  $k$ . Um jogador escolhe a sequência  $ccc$  e outro jogador escolhe a sequência  $kcc$ . Ganha o jogador cuja sequência aparecer primeiro. Por exemplo, se os resultados da moeda foram  $cckcc$ , o segundo jogador ganhou o jogo. Qual a probabilidade de vitória de cada um dos jogadores?

**Dica:** qual a (única) situação na qual o jogador que escolheu  $ccc$  pode ganhar?

**Exercício 5.3.13.** No jogo de *Craps*, dois dados são jogados simultaneamente. Se o jogador tira 7 ou 11 pontos, ele ganha. Se ele tira 2, 3 ou 12, ele perde. Nos outros casos ele continua até sair 7, caso em que ele perde, ou então sair o primeiro resultado, caso em que ele ganha. Descreva o espaço amostral. Mostre que a probabilidade de vitória é  $\frac{244}{495}$ .

**Dica:** soma de progressão geométrica é útil.

**Exercício 5.3.14** (Regra da Multiplicação). Sejam  $A_1, \dots, A_n$  eventos tais que  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$ . Mostre que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

**Exercício 5.3.15.** Usando o exercício anterior, calcule a probabilidade de, retirando-se cartas sucessivamente de um baralho, observar um rei, depois um ás, depois outro rei, depois outro ás.

**Exercício 5.3.16.** Mariana quer enviar uma carta a Aderbal. A probabilidade de que Mariana escreva a carta é de 0,8. A probabilidade de que o correio não a perca, dado que Mariana a escreveu, é 0,9. A probabilidade de que o carteiro entregue na casa certa, dado que o correio não a perdeu, é de 0,7. Dado que Aderbal não recebeu a carta, qual a probabilidade de que Mariana não a tenha escrito?

**Exercício 5.3.17.** Em um teste de múltipla escolha, a probabilidade de o aluno saber a resposta é  $p$ . Havendo  $m$  escolhas, se ele sabe a resposta, ele responde corretamente com probabilidade 1. Se não sabe, ele responde corretamente com probabilidade  $\frac{1}{m}$ . Qual a probabilidade de que o aluno sabia a resposta, dado que ele respondeu corretamente? Calcule esta probabilidade quando:

- a)  $m \rightarrow \infty$  com  $p$  fixo.
- b)  $p \rightarrow 0$  com  $m$  fixo.

Interprete as respostas obtidas.

**Exercício 5.3.18.** Diego e Samara se desentendem, e decidem resolver a questão lançando uma moeda. Entretanto, a moeda não é honesta, ou seja, a probabilidade de sair cara é igual a  $p \in (0, 1)$ , onde  $p$  não é conhecido. Crie um jeito para que os dois resolvam a questão de forma justa usando esta moeda.

**Exercício 5.3.19.** Jairo e Pedro são os monitores de um certo curso de probabilidade. Com probabilidade  $p_0$ , Jairo escreve um memorando a Pedro. Caso tenha sido escrito, este memorando é entregue ao Carteiro 1, que perde este memorando com probabilidade  $1 - p_1$ , e o repassa ao Carteiro 2 com probabilidade  $p_1$ . O Carteiro 2, por sua vez, perde o memorando com probabilidade  $1 - p_2$ , e o repassa ao Carteiro 3 com probabilidade  $p_2$ , e assim por diante, até o Carteiro  $n$ , que perde o memorando com probabilidade  $1 - p_n$ , e o repassa a Pedro com probabilidade  $p_n$ .

- a) Dado que Pedro não recebeu o memorando, calcule a probabilidade de Jairo tê-lo escrito.
- b) Suponha que  $p_k = p \in (0, 1)$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Calcule o limite da resposta do item a) quando  $n \rightarrow \infty$ .

- c) Suponha que  $p_k = p(n) = 1 - \frac{1}{n}$  para  $k = 1, \dots, n$ . Calcule o limite da resposta do item a) quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercício 5.3.20** (A falácia do advogado). Seja  $C$  o evento em que um acusado é culpado, e  $T$  o evento em que um certo testemunho é verdadeiro. Alguns advogados argumentam se baseando em  $\mathbb{P}(C|T) = \mathbb{P}(T|C)$ . Mostre que isso vale se, e somente se,  $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(T)$ .

**Exercício 5.3.21.** Um teste de laboratório tem 5% de chance de dar negativo quando certa doença está presente (o que chamamos de *falso negativo*), e 1% de chance de dar positivo quando a doença *não* está presente (o que chamamos de *falso positivo*).

- a) Se 0,5% da população têm a doença, qual a probabilidade de que uma pessoa tenha a doença dado que seu teste deu positivo?
- b) Verifique que a resposta do item anterior é menor do que 40%! Qual a implicação prática deste problema para um médico que trata pacientes com a doença testada?

**Exercício 5.3.22.** Uma loteria tem  $N$  números e um prêmio, de valor fixo. É mais vantajoso comprar  $n$  bilhetes para um mesmo sorteio ou comprar um bilhete por vez em  $n$  sorteios diferentes?

**Dica:** Prove que  $(1 - \frac{1}{N})^n > (1 - \frac{1}{N})^{n-1} - \frac{1}{N}$ .

**Exercício 5.3.23.** O Bahia vence uma partida num dia chuvoso com probabilidade 0,7 e vence num dia sem chuva com probabilidade 0,6. A probabilidade de chover é de 0,3. Dado que o Bahia ganhou um jogo, qual a probabilidade de que tenha chovido nesse dia?

**Exercício 5.3.24** (Problema dos Prisioneiros). Três prisioneiros são informados pelo carcereiro que um deles foi escolhido ao acaso para ser executado, sendo que os outros dois serão libertados. O prisioneiro  $A$  pergunta discretamente ao carcereiro qual dos outros dois prisioneiros será libertado, argumentando não haver nada demais em saber disso; afinal, ele (o prisioneiro  $A$ ) já sabia de antemão que (pelo menos) um de seus colegas de cela,  $B$  ou  $C$ , será libertado. O carcereiro revela então o nome de um deles a ser libertado.

- a) Suponha que, se por acaso os dois colegas de  $A$  sejam libertados, o carcereiro aponte qualquer um deles ( $B$  ou  $C$ ) com igual probabilidade. O carcereiro aponta  $B$ . Neste momento, qual a probabilidade de  $A$  sair vivo?
- b) Suponha que, se por acaso os dois colegas de  $A$  sejam libertados, o carcereiro aponte  $B$  com probabilidade  $p$  e aponte  $C$  com probabilidade  $1 - p$  (o carcereiro gosta menos de um deles, então prefere dizer que o outro será libertado). O carcereiro aponta então  $B$ . Qual a probabilidade de  $A$  sair vivo dessa?

**Exercício 5.3.25.** Um paciente tem consultas com vários médicos na sequência  $A_1, A_2, \dots$ . O médico  $A_1$  mata 1 em cada 100 pacientes, o médico  $A_2$  mata 1 em cada 99, o médico  $A_3$  mata 1 em cada 98, ... até o médico  $A_{50}$ , que mata 1 em cada 51. Considere os médicos independentes.

- Qual a probabilidade de o paciente vir a óbito?
- Dado que o paciente não escapou vivo, qual a probabilidade de ter morrido na 1ª consulta?

**Exercício 5.3.26** (Paradoxo de Galton). Jogamos ao mesmo tempo três moedas honestas. Pelo menos duas moedas terão o mesmo resultado, e a probabilidade de que a terceira moeda seja cara ou coroa é a mesma. Logo,

$$\mathbb{P}[\text{todas moedas saíam com o mesmo resultado}] = \frac{1}{2}.$$

Onde está o erro no argumento acima?

**Exercício 5.3.27.** Em 1995, nos Estados Unidos, O. J. Simpson, um ator e ex-jogador de futebol americano foi acusado de assassinar sua ex-esposa Nicole Brown. Sabia-se que O. J. Simpson tinha um histórico de agressões contra Nicole. A defesa, no julgamento, apresentou o seguinte argumento (uma falácia!), onde aqui aproximamos valores para clarear ideias:

*Nos E. U. A., anualmente cerca de quatro de milhões de mulheres sofrem agressões no ambiente doméstico por seus maridos e namorados. Deste total, anualmente, cerca de 1600 mulheres são assassinadas por seus agressores. Logo, a probabilidade de O. J. Simpson ser o assassino é algo em torno de  $1600/4.000.000 = 1/2500$ , o que é uma probabilidade muito pequena para condenar alguém por assassinato.*

Faça o papel da promotoria e contra-argumente a defesa apresentada acima. Que, diga-se de passagem, não o fez. Apesar de muitas evidências incriminatórias, O. J. Simpson foi inocentado ao fim do julgamento por este e outros motivos (veja o interessante livro [Mlodinow, 2008]).

**Exercício 5.3.28.** O símbolo  $\text{mod } p$  indica o resto na divisão por  $p$ . Por exemplo,  $14 \text{ mod } 3$  é igual a 2, pois  $14 = 4 \times 3 + 2$ . Seja  $p \geq 3$  número primo e  $X, Y$  variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuídas em  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ . Para cada  $0 \leq k < p$ , defina a variável aleatória  $Z_k = X + kY \text{ mod } p$ .

- Mostre que  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{p-1}$  são independentes dois a dois.
- Mostre que se soubermos os valores de duas variáveis na lista  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{p-1}$ , todas as outras estarão unicamente determinadas.
- Conclua que  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{p-1}$  não são coletivamente independentes.

**Exercício 5.3.29** (OBM-2015). Sejam  $m$  e  $n$  inteiros positivos,  $X$  um conjunto com  $n$  elementos e seja  $0 \leq k \leq n$  um inteiro. São escolhidos aleatória e independentemente subconjuntos  $X_1, X_2, \dots, X_m$  de  $X$ . Portanto, dado um subconjunto  $Y \subset X$  qualquer, a probabilidade de termos, por exemplo,  $X_1 = Y$  é igual a  $1/2^n$ . Calcule a probabilidade de  $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_m$  possuir exatamente  $k$  elementos.

**Dica:** em vez de escolher um conjunto de uma vez dentre os conjuntos possíveis, como podemos escolher cada elemento por vez, de maneira equivalente? Faça uma tabela de 0's e 1's.

**Exercício 5.3.30.** Seja  $\gamma > 0$  e considere o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$ , a  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{A}$  é o conjunto das partes de  $\Omega$  e

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{C_\gamma} \cdot \frac{1}{k^{1+\gamma}},$$

onde  $C_\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}}$  é a constante de normalização.

- Seja  $\ell$  um número natural qualquer e denote  $A_\ell = \{k : k \text{ é múltiplo de } \ell\}$ . Mostre que  $\mathbb{P}(A_\ell) = \frac{1}{\ell^{1+\gamma}}$ .
- Denote por  $p_1, p_2, p_3, \dots$  a sequência dos números primos. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $B_i = \{k : k \text{ é múltiplo de } p_i\}$ . Mostre que os conjuntos  $B_1, B_2, \dots$  são independentes.
- Prove a chamada *Fórmula de Euler para a Função Zeta de Riemann*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_j^{1+\gamma}}\right)^{-1}.$$

**Dica:** Mostre que  $\{1\} = B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c \cap \dots$  e use a Proposição 5.2.6, item (iv).

## 5.4 Lema de Borel-Cantelli

O Lema de Borel-Cantelli é um das ferramentas mais importantes da Probabilidade. *Grosso modo*, podemos dizer que o Lema de Borel-Cantelli trata da questão de ser possível ou não que algo aconteça infinitas vezes.

Começemos definindo uma operação entre conjuntos. Dados os conjuntos  $A_1, A_2, \dots$ , definimos

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Como veremos a seguir, o conjunto acima pode ser descrito como o conjunto  $\{\omega : \omega \text{ pertence a } A_n \text{ para infinitos índices } n \in \mathbb{N}\}$ . Por tal razão, é costume denotar  $\limsup_n A_n$  por  $[A_n \text{ infinitas vezes}]$  ou simplesmente por  $[A_n \text{ i.v.}]$ .



Vejam os porquê: se um certo  $\omega$  pertence a infinitos conjuntos  $A_n$ , então, para qualquer  $n$ , vale que

$$\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Logo,  $\omega$  pertence à interseção, ou seja,

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

O caminho contrário é parecido: se  $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ , então  $\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$  para qualquer  $n$ , o que implica que  $\omega$  deve pertencer a infinitos conjuntos  $A_n$ .

**Teorema 5.4.1** (Lema de Borel-Cantelli). *Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade e considere eventos  $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ .*

a) Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ , então  $\mathbb{P}(A_n \text{ i.v.}) = 0$ .

b) Se  $A_1, A_2, \dots$  são independentes e  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ , então  $\mathbb{P}(A_n \text{ i.v.}) = 1$ .

*Demonstração.*

a) Note que para qualquer  $n$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k),$$

sendo que na segunda igualdade usamos a subaditividade provada na Proposição 5.2.7. Como a série é convergente, temos que o lado esquerdo no começo das desigualdades é nulo, como queríamos.

b) Basta mostrar que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_k\right) = 1$  para qualquer  $k$ , pois a interseção enumerável de eventos de probabilidade um também tem probabilidade um. Temos que

$$B_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=n}^m A_k.$$

Logo, usando Leis de Morgan e independência,

$$\mathbb{P}(B_n^c) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^m A_k^c\right) = \prod_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^m (1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

Pela desigualdade  $1 - x \leq e^{-x}$ , temos que

$$\mathbb{P}(B_n^c) \leq \exp\left\{-\sum_{k=n}^m \mathbb{P}(A_k)\right\}.$$

Como a soma das probabilidades diverge, deduzimos que  $\mathbb{P}(B_n^c) = 0$ , ou seja,  $\mathbb{P}(B_n) = 1$ , concluindo a prova.  $\square$

**Exemplo 5.4.2.** Uma metáfora clássica a respeito do Lema de Borel-Cantelli é a do macaco que escreve Shakespeare. Colocamos um macaco em frente de uma máquina de escrever, e lhe damos tempo suficiente para escrever, digamos, as obras completas de Shakespeare. Caso o macaco não as escreva, refazemos a experiência. Ora, a probabilidade de que isto aconteça é baixa (sem sombra de dúvida). Mas supondo que as repetições do experimento são independentes, e que podemos repeti-las infinitas vezes, o Lema de Borel-Cantelli nos diz que, com probabilidade um, o macaco escreverá as obras completas de Shakespeare não apenas uma vez, mas infinitas vezes!

**Exemplo 5.4.3** (Interpretação geométrica do Lema de Borel-Cantelli). Uma heurística<sup>3</sup> geométrica do primeiro item do Lema de Borel-Cantelli é a seguinte. Representemos o espaço amostral  $\Omega$  por um retângulo de área unitária. Cada evento na  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{A}$  será representado por uma região neste retângulo, e sua probabilidade  $\mathbb{P}(A)$  será a sua respectiva área. Sejam então  $A_1, A_2, \dots$  eventos tais que  $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) < \infty$ , o em palavras quer dizer que a soma de suas áreas é finita.

O que é o evento  $B = [A_k \text{ i.v.}]$ ? É o conjunto dos pontos no retângulo  $\Omega$  que pertencem a infinitos  $A_k$ . Logo, este conjunto  $B = [A_k \text{ i.v.}]$  deve ter probabilidade zero, caso contrário este evento  $B = [A_k \text{ i.v.}]$  determinaria uma região com área positiva que está contida em infinitos  $A_k$ 's. E neste caso a soma das áreas dos eventos  $A_k$  seria igual a infinito, contradição. Veja a Figura 5.2 para uma ilustração.

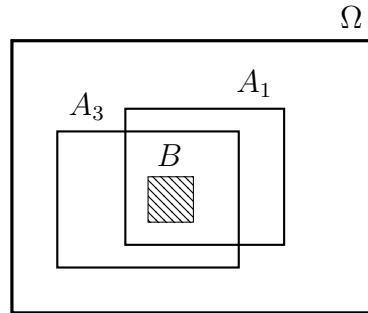


Figura 5.2. O evento  $B$  (hachurado) representa o conjunto  $[A_k \text{ i.v.}]$ . O desenho é arbitrário e meramente ilustrativo.

A seguir, um exemplo de espaço de probabilidade bastante comum, e que será útil em vários exercícios envolvendo o Lema de Borel-Cantelli.

<sup>3</sup>*Heurística*, que vem do grego antigo *heurisko*, é uma expressão usada em matemática para denotar uma sequência de argumentos não rigorosos, porém razoáveis, que leva ao resultado buscado. Serve em geral para deduzir qual enunciado deve-se tentar provar.

**Exemplo 5.4.4.** Considere o lançamento de uma moeda honesta infinitas vezes. Em outras palavras, consideremos o seguinte espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ . O espaço amostral  $\Omega$  é o das sequências infinitas de caras e coroas, ou seja,

$$\Omega = \left\{ (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \{\text{cara}, \text{coroa}\} \right\}.$$

Além disso, a  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{A}$  será a menor  $\sigma$ -álgebra que contenha qualquer conjunto da forma  $A \times \Omega \times \Omega \times \dots$ , onde  $A \subset \Omega^n$ . Por fim, a probabilidade  $\mathbb{P}$  será a única probabilidade em  $\mathbb{A}$  tal que

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\} \times \Omega \times \Omega \times \dots) = \frac{1}{2^n}.$$

Como dissemos, não nos preocuparemos aqui sobre como garantir a existência de medidas de probabilidade, que remete ao Teorema de Extensão de Kolmogorov, e foge ao escopo deste livro. Assumiremos portanto a existência da probabilidade acima e de todas as outras neste livro.

## Exercícios

**Exercício 5.4.1.** Sejam  $A_1, A_2, \dots$  conjuntos contidos em  $\Omega$ . Prove que

$$\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ pertence a } A_n \text{ para infinitos índices } n \in \mathbb{N}\}.$$

**Exercício 5.4.2.** Dados conjuntos  $A_1, A_2, \dots$ , definimos

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n} A_k.$$

De maneira análoga ao que fizemos para  $\limsup_n A_n$ , deduza o significado de  $\liminf_n A_n$ .

**Exercício 5.4.3.** Dê exemplo de eventos  $A_1, A_2, \dots$  (em um certo espaço de probabilidade) tais que  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ , mas  $\mathbb{P}(A_n \text{ i.v.}) = 0$ .

**Exercício 5.4.4.** Mostre que se lançarmos uma moeda honesta infinitas vezes, com probabilidade um observaremos um número infinito de caras.

**Exercício 5.4.5.** Mostre que se lançarmos uma moeda honesta infinitas vezes, com probabilidade um observaremos infinitas vezes três coroas consecutivas.

**Dica:** atenção, para aplicar o item b) do Lema de Borel-Cantelli, os eventos devem ser independentes.

**Exercício 5.4.6.** Jogam-se moedas  $m_1, m_2, \dots$  sucessivamente. Para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja o evento  $A_k = [k\text{-ésima moeda tem resultado cara}]$ . Suponha que  $\mathbb{P}(A_k) = 1/k^2$ . Mostre que, apesar da probabilidade de sair cara ser positiva para qualquer moeda, com probabilidade igual a 1 apenas um número finito de moedas terá resultado cara.

**Exercício 5.4.7.** Em um certo jogo, na primeira rodada são lançados dois dados; na segunda rodada, três dados; na terceira rodada, quatro dados, e assim por diante. Suponha que todos os dados sejam honestos e independentes. Infinitas vezes todos os dados terão resultados iguais? Ou apenas finitas vezes? Ou não vale nenhuma das respostas acima?

**Exercício 5.4.8.** Em um certo jogo, na primeira rodada são lançados dois dados; na segunda rodada, três dados; na terceira rodada, quatro dados, e assim por diante. Suponha que todos os dados sejam honestos e independentes. Seja  $A_k$  o evento [a soma dos resultados da  $k$ -ésima rodada é maior ou igual a  $3(k+1)$ ]. Determine se os eventos  $A_k$  acontecerão finitas vezes, infinitas vezes ou nenhum dos dois.

## 5.5 Método Probabilístico

O Método Probabilístico, desenvolvido por Paul Erdős e outros, consiste essencialmente na seguinte ideia:

Deseja-se provar que um objeto com certa propriedade existe, mas que tal objeto seja impraticável de construir. Digamos então que seja possível construir um *espaço de probabilidade* tal que o resultado (aleatório) é algo que tem probabilidade positiva de ter a propriedade requerida. Logo, tal objeto necessariamente existe! De fato, se não existisse, a probabilidade dele acontecer seria zero, pois é nula a probabilidade associada ao conjunto vazio.

Para o exemplo a ser dado, precisamos da definição a seguir.

**Definição 5.5.1.** Um grafo orientado (ou digrafo) é um grafo onde cada aresta que liga dois vértices  $u$  e  $v$  tem um sentido, de  $u$  para  $v$  ou de  $v$  para  $u$ . Para representar o sentido, desenhamos uma flecha em cada aresta (veja a Figura 5.3).

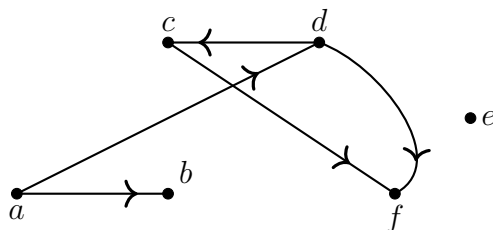


Figura 5.3. Exemplo de grafo orientado.

Para o leitor que leu a Seção 1.4, um grafo orientado é simplesmente uma relação  $\mathcal{R}$  no conjunto dos vértices  $V$  que, a menos que seja dito algo em contrário, é antirreflexiva.

Vejamos aqui uma aplicação clássica do Método Probabilístico. Em um campeonato de um certo esporte, todos jogam contra todos exatamente uma vez, e não há empates. Logo, podemos representar o resultado de todas as partidas por um grafo completo orientado. Por exemplo, na Figura 5.4, vemos um exemplo de um campeonato com cinco jogadores  $\{a, b, c, d, e\}$ . Neste campeonato, o jogador  $a$  ganhou dos jogadores  $e$  e  $d$ , e perdeu dos jogadores  $b$  e  $c$ . Vamos chamar de

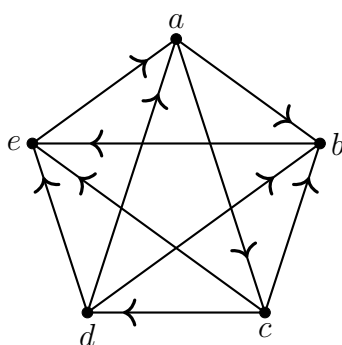


Figura 5.4.  $C_5$ , um exemplo de campeonato com 5 jogadores.

campeonato uma possível configuração de resultados. Para um conjunto de  $n$  jogadores, denotaremos por  $C_n$  um campeonato qualquer.

Um campeonato é dito ter a propriedade  $P_k$  se, para cada grupo de  $k$  jogadores, existe um certo jogador que ganhou de todos nesse grupo. Por exemplo, na Figura 5.4, o jogador  $a$  ganhou de todos os jogadores no conjunto  $\{e, d\}$ . Entretanto, o grafo da Figura 5.4 não tem a propriedade  $P_2$ , pois não existe um jogador que tenha vencido todos os jogadores em  $\{a, e\}$ .

A título de curiosidade, na Tabela 5.2 colocamos alguns tamanhos mínimos para se construir um campeonato  $C_n$  com a propriedade  $P_k$ .

Propriedade $P_k$	$n$ mínimo
$P_2$	$n \geq 7$
$P_3$	$n \geq 19$
$P_4$	$n \geq 47$
$P_5$	$n \geq 111$

Tabela 5.2. Tamanhos mínimos  $n$  para se construir algum campeonato  $C_n$  com a propriedade  $P_k$ .

Surge então a questão:

**Problema.** Mostrar que para todo  $k$  existe um campeonato  $C_n$  com a propriedade  $P_k$ .

*Solução.* Para resolver este problema, começamos fixando  $n$ . Ao final, escolheremos  $n$  suficientemente grande. Em vez de tentarmos construir o grafo de tal modo que ele satisfaça a propriedade  $P_n$  (o que, diga-se de passagem, é uma tarefa infrutífera) vamos sortear o resultado de cada partida de maneira aleatória: para cada par de jogadores, lançamos uma moeda honesta para decidir quem foi o vencedor da partida. Nosso objetivo agora é mostrar que, para  $n$  suficientemente grande, depois de decidirmos todas as partidas, o grafo resultante tem probabilidade positiva de ter a propriedade  $P_k$ . Logo, necessariamente existe um exemplo (ou mais) de tais campeonatos com a propriedade  $P_k$ , pois caso contrário esta probabilidade seria zero.

Bem, na verdade vamos mostrar que a probabilidade do grafo resultante *não* ter a probabilidade  $P_k$  é estritamente menor do que um, mas isso é equivalente à probabilidade do grafo resultante ter a propriedade  $P_k$  ser estritamente maior do que zero, o que decorre da igualdade  $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E^c)$ .

Assim, seja  $E$  o evento

$$E = \left[ \text{o grafo resultante não tem a propriedade } P_k \right].$$

Queremos mostrar que  $\mathbb{P}(E) < 1$  para  $n$  suficientemente grande, onde  $n$  é o número de jogadores.

Seja  $V$  o conjunto dos vértices (os jogadores). Como  $E$  é o conjunto dos resultados para os quais  $P_k$  *falha*, é porque para algum grupo  $A$  de  $k$  jogadores, não existe um jogador  $v$  (fora de  $A$ ) que ganhe de todos nesse grupo, veja a Figura 5.5.

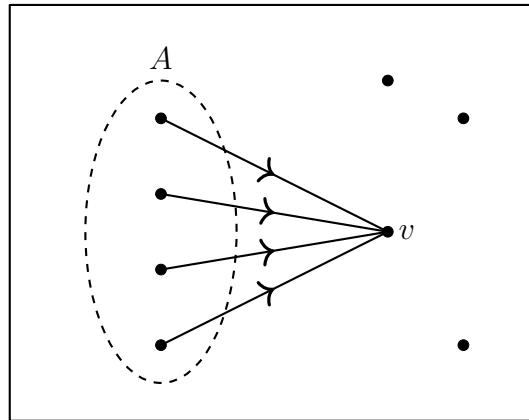


Figura 5.5. Evento  $E$ . Para *algum* grupo  $A$  de  $k$  jogadores, *não* existe nenhum  $v$  como acima, que ganhe de todos nesse grupo.

Ou seja, podemos escrever

$$E = \bigcup_{\substack{A \subset V \\ |A|=k}} \left[ \begin{array}{c} \text{não existe um vértice } v \text{ fora de } A \\ \text{que ganhe de todos em } A \end{array} \right].$$

Logo, como a probabilidade da união é menor ou igual do que a soma das probabilidades,

$$\mathbb{P}(E) \leq \sum_{\substack{A \subset V \\ |A|=k}} \mathbb{P} \left[ \begin{array}{c} \text{não existe um vértice } v \text{ fora de } A \\ \text{que ganhe de todos em } A \end{array} \right]. \quad (5.3)$$

Como cada partida é decidida com uma moeda honesta, os resultados possíveis de cada partida tem probabilidade  $1/2$  cada um. Assim, como  $|A| = k$ , temos que

$$\mathbb{P} \left[ \begin{array}{c} \text{não existe um vértice } v \text{ fora de } A \\ \text{que ganhe de todos em } A \end{array} \right] = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.$$

De quantas formas podemos escolher um subconjunto  $A$  com  $k$  elementos, dentre  $n$  elementos disponíveis? Combinação de  $n$  escolhe  $k$ . Logo, a desigualdade (5.3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E) &\leq \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Agora falta apenas mostrar que, para  $n$  suficientemente grande, a última expressão acima é estritamente menor do que um. Denote portanto

$$d_n = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.$$

Fazendo algumas contas simples, temos que

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+1}{n-k+1} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n}} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right),$$

que é menor do que um para  $n$  grande. Ou seja, como temos uma razão  $d_{n+1}/d_n \leq c < 1$ , concluímos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ . Em particular, para  $n$  suficientemente grande, vale  $d_n < 1$ . Assim, para  $n$  grande,  $\mathbb{P}(E) < 1$ , provando que sempre existe um campeonato  $C_n$  com a propriedade  $P_k$ .

Observe que provamos algo mais forte do que o pedido: para  $n$  grande, não apenas provamos que existem campeonatos  $C_n$  com a propriedade  $P_k$ . Provamos também que a probabilidade de se observar um campeonato com a propriedade  $P_k$  (sorteando o resultado das partidas com moedas honestas independentes) é altíssima! De fato,  $\mathbb{P}(E)$  converge a 1 quando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

## Exercícios

**Exercício 5.5.1.** Seja  $X$  um conjunto finito e denote por  $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_\ell\}$  uma família de subconjuntos de  $X$  (não necessariamente disjuntos) tal que todos os subconjuntos  $A_i$  têm  $d$  elementos, ou seja,  $|A_i| = d \geq 2$  para todo índice  $i$ . Dize-mos que  $\mathcal{F}$  é 2-colorível se é possível pintar os elementos de  $X$  com duas cores, de tal modo que qualquer subconjunto contenha as duas cores. Claro, nem toda família  $\mathcal{F}$  é 2-colorível (dê um exemplo). Prove que toda família  $\mathcal{F}$  com no máximo  $2^{d-1} - 1$  conjuntos, todos de tamanho  $d$ , é 2-colorível.

**Dica:** para decidir com que cor pintar cada elemento de  $X$ , jogue uma moeda honesta!

**Exercício 5.5.2.** Para ser usado no exercício a seguir, prove que  $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$  para  $k \geq 2$ .

**Exercício 5.5.3.** Seja  $k \geq 4$ . Mostre que para todo  $n < 2^{k/2}$ , existe uma festa com  $n$  pessoas tal que nenhum grupo de  $k$  pessoas inteiramente se conhece ou inteiramente se desconhece.

**Dica:** Seja  $E_c$  o evento “algum grupo de  $k$  pessoas se conhece inteiramente” e  $E_d$  o evento “algum grupo de  $k$  pessoas se desconhece inteiramente”. Mostre então que  $\mathbb{P}(E_c \cup E_d) < 1$  usando o Exercício 5.5.2.

**Exercício 5.5.4.** Dez por cento da superfície de uma esfera foi pintada de azul, e o resto de vermelho. Mostre que independentemente da maneira como a superfície foi pintada, sempre é possível inscrever um cubo na esfera tal que todos os vértices do cubo sejam vermelhos.

**Observação.** Assuma que a probabilidade que um ponto escolhido ao acaso caia numa região  $A$  sobre a esfera é dada pela razão entre a área de  $A$  e a área total da esfera.

## 5.6 Variáveis Aleatórias

De maneira intuitiva, podemos descrever uma variável aleatória (v.a.) como uma função cujo domínio é  $\Omega$ , o espaço amostral de algum espaço de probabilidade. Em palavras, uma variável aleatória é um número real associado ao resultado (aleatório). Vejamos sua definição rigorosa: seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Dizemos que uma função  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma variável aleatória se, para todo  $I \in \mathbb{R}$  intervalo, vale

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} \in \mathbb{A}.$$

Em palavras,  $X$  é variável aleatória se a pré-imagem de qualquer intervalo  $I$  pertence à  $\sigma$ -álgebra  $\mathbb{A}$ . Daqui em diante adotaremos a notação

$$[X \in I] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\},$$



muito comum em probabilidade, que torna o texto mais enxuto. Outra notação também utilizada para pré-imagem é  $X^{-1}(I)$ .

Dizemos que duas variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes se para quaisquer intervalos  $I_1$  e  $I_2$ , os eventos  $[X \in I_1]$  e  $[Y \in I_2]$  são independentes, ou seja,

$$\mathbb{P}([X \in I_1] \cap [Y \in I_2]) = \mathbb{P}[X \in I_1] \cdot \mathbb{P}[Y \in I_2].$$

### Definição 5.6.1.

a) Uma variável aleatória é dita *discreta* se existe um conjunto enumerável  $B = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\mathbb{P}[X \in B] = 1.$$

b) Uma variável aleatória é dita *absolutamente contínua* se existe uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  digamos, contínua por partes,<sup>4</sup> tal que

$$\mathbb{P}[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx.$$

Esta função  $f$  é chamada a *densidade* da variável aleatória. Note que sempre vale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

Existem outros tipos de variáveis aleatórias, como as mistas, que são uma soma de discretas e absolutamente contínuas, e outras que não são nem discretas, nem absolutamente contínuas, nem mistas. Nos restringiremos somente a variáveis aleatórias discretas e absolutamente contínuas neste livro. Além disso, também não discutiremos como construir variáveis aleatórias, o que está relacionado ao Teorema de Extensão de Kolmogorov, assunto de um curso de Probabilidade mais avançado.

**Exemplo 5.6.2.** Uma variável aleatória  $X$  é dita ter distribuição Bernoulli (lê-se *bernouí*) de parâmetro  $p \in (0, 1)$  se

$$\mathbb{P}[X = 1] = p \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[X = 0] = 1 - p.$$

Escrevemos neste caso  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ . Intuitivamente, uma v.a. Bernoulli representa uma moeda cuja probabilidade de sair uma das faces é  $p$  e a probabilidade de sair a outra face é  $1 - p$ . Como se pode notar, uma v.a. Bernoulli é do tipo discreta.

**Exemplo 5.6.3.** Uma variável aleatória  $X$  é dita ter distribuição *geométrica* de parâmetro  $p \in (0, 1)$  se

$$\mathbb{P}[X = k] = (1 - p)^{k-1} p.$$

Escrevemos neste caso  $X \sim \text{geom}(p)$ . Intuitivamente, uma v.a. geométrica representa o número de tentativas até obter o primeiro sucesso repetindo um experimento cujo resultado é *sucesso* com probabilidade  $p$  e *fracasso* com probabilidade  $1 - p$ . Como se pode notar, uma v.a. geométrica é do tipo discreta.

<sup>4</sup>Esta condição não é a mais geral. Em um curso de Probabilidade um pouco mais avançado vemos que basta que  $f$  seja mensurável à Lebesgue. Não entraremos em detalhes aqui.

**Exemplo 5.6.4.** Uma variável aleatória  $X$  é dita ter distribuição *binomial* de parâmetros  $n \in \mathbb{N}$  e  $p \in (0, 1)$  se

$$\mathbb{P}[X = k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Escrevemos neste caso  $X \sim \text{binom}(n, p)$ . Intuitivamente, uma v.a. binomial representa o número de sucessos quando repetimos  $n$  vezes (de maneira independente) um experimento cujo resultado é *sucesso* com probabilidade  $p$  e *fracasso* com probabilidade  $1-p$ . Como se pode notar, uma v.a. binomial é do tipo discreta.

**Exemplo 5.6.5.** Uma variável aleatória  $X$  é dita ter distribuição *Poisson* (lê-se *poassom*) de parâmetro  $\lambda > 0$  se

$$\mathbb{P}[X = k] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Escrevemos neste caso  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . Note que este é um tipo de variável aleatória discreta.

A seguir, vejamos algumas variáveis aleatórias absolutamente contínuas.

**Exemplo 5.6.6.** Uma variável aleatória  $X$  é dita ter distribuição *uniforme* no intervalo  $[c, d]$  se tem densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c}, & \text{se } c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{se } x \notin [c, d]. \end{cases}$$

Escrevemos neste caso  $X \sim U[c, d]$ . Veja a Figura 5.6 para uma ilustração da densidade desta distribuição.

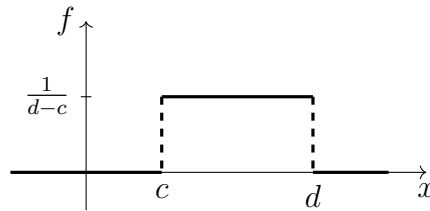


Figura 5.6. Densidade da v.a.  $X \sim U[c, d]$ .

Um caso particular importante é  $X \sim U[0, 1]$ , para o qual  $c = 0$  e  $d = 1$ . Neste caso,

$$\mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b 1 \, dx = b - a.$$

para quaisquer  $0 \leq a < b \leq 1$ .

**Exemplo 5.6.7.** Uma variável aleatória  $X$  é dita ter distribuição *exponencial* de parâmetro  $\lambda > 0$  se tem densidade

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Veja a Figura 5.7 para uma ilustração.

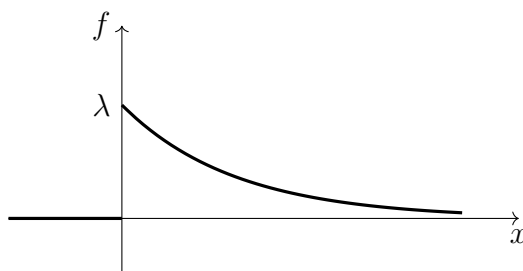


Figura 5.7. Densidade da v.a.  $X \sim \exp(\lambda)$ .

Portanto, como a densidade neste caso é uma função fácil de integrar,

$$\mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{x=a}^{x=b} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

para quaisquer  $a, b > 0$ . Escrevemos neste caso  $X \sim \exp(\lambda)$ . Note que a exponencial toma valores apenas nos reais não negativos.

**Exemplo 5.6.8.** Uma variável aleatória  $X$  é dita ter distribuição *normal* ou *gaussiana* de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$  se tem densidade

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Veja a Figura 5.8 para uma ilustração da densidade.

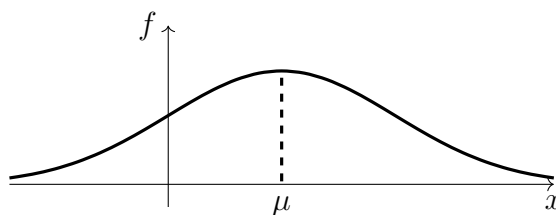


Figura 5.8. Densidade da v.a. gaussiana.

Portanto,

$$\mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx,$$

para quaisquer  $a < b$ . Escrevemos neste caso  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Um caso particular muito importante é  $\mu = 0$  e  $\sigma^2 = 1$ , que é chamado às vezes de *normal padrão*. Neste caso,

$$\mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx,$$

e escrevemos  $X \sim N(0, 1)$ . Ao contrário da distribuição exponencial, a densidade da gaussiana é uma função que não possui uma integral indefinida em termos de funções elementares.

Existem infinitos tipos de distribuições de variáveis aleatórias. Não entraremos em detalhes sobre qual é a definição rigorosa de distribuição de probabilidade, nem sobre muitas outras distribuições importantes, sendo os exemplos acima suficientes para o escopo deste livro. Por *distribuição*, entenderemos simplesmente uma caracterização da probabilidade de uma variável aleatória cair em regiões da reta, o que fazemos aqui via a densidade (para uma v.a. absolutamente contínua) ou descrevendo a probabilidade de cada ponto (para uma v.a. discreta). Além disso, usaremos a abreviação i.i.d para *independentes e identicamente distribuídas*.

A seguir, vejamos a noção de vetor aleatório.

Um *vetor aleatório* é uma  $n$ -upla  $(X_1, \dots, X_n)$  de variáveis aleatórias definidas num mesmo espaço de probabilidade. Por exemplo, considere  $(X, Y)$  um par de variáveis aleatórias, tomando cada uma delas os valores 1, 2, 3, cujas probabilidades conjuntas estão representadas na Figura 5.9. Note que  $X$  e  $Y$  com tal

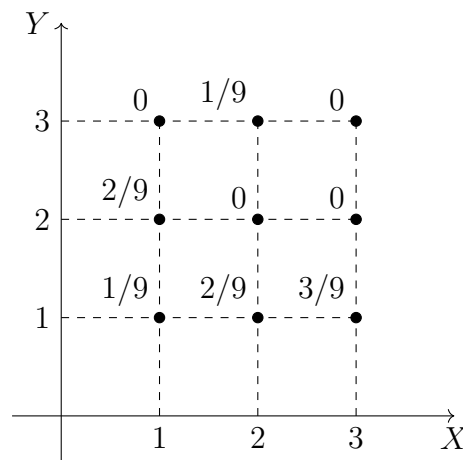


Figura 5.9. Distribuição do vetor aleatório  $(X, Y)$ .

distribuição conjunta não são variáveis independentes, pois

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = 1, Y = 2] &= \frac{2}{9}, \\ \mathbb{P}[X = 1] &= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + 0 = \frac{3}{9}, \\ \mathbb{P}[Y = 2] &= \frac{2}{9} + 0 + 0 = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Logo,  $\mathbb{P}[X = 1, Y = 2] \neq \mathbb{P}[X = 1] \cdot \mathbb{P}[Y = 2]$ .

Um vetor aleatório é dito discreto se existe um conjunto enumerável  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$  tal que  $\mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n) \in \mathbf{X}] = 1$ . Um vetor aleatório é dito ser absolutamente contínuo se existe uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que

$$\mathbb{P}[(X_1, \dots, X_n) \in [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]] = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1.$$

**Definição 5.6.9.** Um vetor aleatório  $(X, Y)$  é dito ter distribuição uniforme numa região  $B \subset \mathbb{R}^2$  se tem densidade

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{área}(B)}, & \text{se } (x, y) \in B, \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin B. \end{cases}$$

Aceitaremos sem discussão o seguinte

**Fato da vida:** se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes,  $X$  tem densidade  $f(x)$  e  $Y$  tem densidade  $g(y)$ , então o vetor aleatório  $(X, Y)$  tem densidade conjunta  $f(x)g(y)$ .

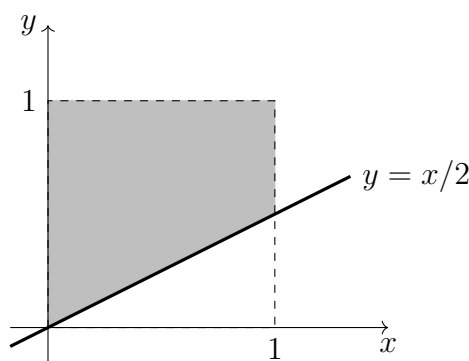


Figura 5.10. Região de integração correspondente a  $\mathbb{P}[X < 2Y]$ .

**Exemplo 5.6.10.** Se  $X, Y \sim U[0, 1]$  e são independentes, pelo fato da vida acima, o vetor aleatório  $(X, Y)$  é uniforme no quadrado  $B = [0, 1] \times [0, 1]$ . Além disso, com a densidade em mãos, podemos calcular a probabilidade de eventos relacionando  $X$  e  $Y$  simplesmente integrando em  $\mathbb{R}^2$  a região correspondente. Por exemplo, para calcular  $\mathbb{P}[X < 2Y]$ , basta integrar a densidade na região acima da reta  $y = x/2$ , veja a Figura 5.10. Neste caso, como a densidade é constante e igual a um na região em cinza, e como a região em cinza é um trapézio, não é preciso calcular a integral dupla: a área do trapézio em questão é simplesmente  $3/4$ , como o leitor pode verificar.

## Exercícios

**Exercício 5.6.1.** Sejam  $X_1, \dots, X_n$  v.a. Bernoulli( $p$ ) independentes. Qual a distribuição de  $X = X_1 + \dots + X_n$ ?

**Exercício 5.6.2.** Sejam  $X \sim \text{binom}(n, p)$  e  $Y \sim \text{binom}(m, p)$  independentes. Qual a distribuição de  $X + Y$ ?

**Exercício 5.6.3.** Seja  $X \sim \exp(\lambda)$ .

a) Calcule  $\mathbb{P}[X \geq t]$ .

b) Mostre que

$$\mathbb{P}[X \geq t + h | X \geq h] = \mathbb{P}[X \geq t].$$

para quaisquer  $t, h > 0$ .

c) Use o bom senso para deduzir por que a igualdade anterior é chamada de *perda de memória*.

**Exercício 5.6.4.** Uma fonte de luz é colocada a uma distância  $a > 0$  de uma reta. Esta fonte de luz irradia um raio de luz uniformemente dentre todas as direções que atingem a reta. Denote por  $X$  o ponto onde o raio de luz atinge a reta. Mostre que  $X$  tem densidade  $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$  em  $\mathbb{R}$  (esta é a chamada *distribuição de Cauchy* de parâmetro  $a$ ).

**Exercício 5.6.5.** Um experimento cuja probabilidade de sucesso é  $p \in [0, 1]$  é repetido sucessivas vezes de maneira independente. Claramente, para se obter o  $r$ -ésimo fracasso, é necessário repetir o experimento pelo menos  $r$  vezes. Seja  $X$  o tempo, contado a partir de  $r$  lançamentos, para se observar o  $r$ -ésimo fracasso. Por exemplo, se tivermos apenas fracassos nos primeiros  $r$  experimentos, então  $X = 0$ .

a) Mostre que, para  $k \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^k (1-p)^r.$$

**Observação:** esta é a chamada *distribuição binomial negativa*, que é denotada por  $X \sim \text{nbinom}(r, p)$ .

- b) Mostre que a distribuição geométrica é um caso particular da distribuição binomial negativa.<sup>5</sup>
- c) Usando a Observação 2.4.5, mostre que

$$\mathbb{P}(X = k) = (-1)^k \binom{-r}{k} p^k (1-p)^r,$$

o que explica a origem do nome *binomial negativa*.

- d) Seja  $a_k = \mathbb{P}(X = k)$ . Mostre que vale a seguinte recorrência:

$$\begin{cases} a_{k+1} = \frac{p(k+r)}{k+1} a_k, \\ a_0 = (1-p)^r. \end{cases}$$

**Exercício 5.6.6.** Um experimento tem  $k$  resultados possíveis, digamos  $R_1, \dots, R_k$ . Assuma que a probabilidade do resultado do experimento ser  $R_i$  seja igual a  $p_i$ . Repetimos então o experimento  $n$  vezes de maneira independente. Seja  $X = (X_1, \dots, X_k)$  o vetor aleatório onde a  $i$ -ésima entrada é o número de vezes que o resultado do tipo  $R_i$  aconteceu.

- a) Mostre que

$$\mathbb{P}(X_1 = \ell_1, \dots, X_k = \ell_k) = \begin{cases} \binom{n}{\ell_1, \dots, \ell_k} p_1^{\ell_1} \cdots p_k^{\ell_k}, & \text{se } \ell_1 + \dots + \ell_k = n, \\ 0, & \text{se } \ell_1 + \dots + \ell_k \neq n. \end{cases}$$

- b) A distribuição acima é chamada *distribuição multinomial* e denotada por  $X \sim \text{multinom}(n, p_1, \dots, p_k)$ . Mostre que a distribuição binomial é um caso particular da distribuição multinomial.

**Exercício 5.6.7.** Sejam  $X \sim \exp(\lambda)$  e  $Y \sim U[0, 1]$  independentes. Qual a probabilidade que  $X$  seja menor do que  $Y$ ?

**Exercício 5.6.8.** Sejam  $X, Y, Z \sim U[0, 1]$  independentes. Qual a probabilidade que a soma das três variáveis aleatórias seja menor do que 1?

**Exercício 5.6.9.** O intervalo  $[0, 2]$  é dividido em duas partes por um ponto escolhido uniformemente neste intervalo. Seja  $X = \ell_1/\ell_2$  razão entre o comprimento da parte menor e o comprimento da parte maior. Encontre a densidade de  $X$ .

**Exercício 5.6.10.** Sejam  $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$  e  $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$  independentes. Mostre que  $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

<sup>5</sup>Apesar do que o nome possa sugerir, a distribuição binomial negativa tem mais a ver com a distribuição geométrica do que com a distribuição binomial.

**Exercício 5.6.11.** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias i.i.d. de distribuição exponencial de parâmetro 1. Mostre que

$$\mathbb{P}\left[\frac{X_n}{\log n} > 1 \text{ infinitas vezes}\right] = 1,$$

mas

$$\mathbb{P}\left[\frac{X_n}{\log n} > 2 \text{ infinitas vezes}\right] = 0.$$

**Exercício 5.6.12.** Sejam  $X \sim \exp(\lambda_1)$  e  $Y \sim \exp(\lambda_2)$  independentes. Mostre que

$$Z := \min\{X, Y\}$$

é exponencial de parâmetro  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

**Exercício 5.6.13.** Seja  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . Mostre que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X = k | X \geq k] = 1.$$

**Exercício 5.6.14.** Uma lâmpada está acesa no tempo  $t = 0$ . Para  $t > 0$ , seja  $Q(t + \Delta t | t)$  a probabilidade condicional da lâmpada queimar até  $t + \Delta t$  dado que estava acesa no tempo  $t$ . Suponha que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t | t) - 1}{\Delta t} = -f(t).$$

Seja  $X$  = tempo em que a lâmpada queima. Supondo  $X \sim \exp(\lambda)$ , encontre  $f(t)$ .

**Exercício 5.6.15** (Problema das Caixas de Fósforo de Banach). Um matemático tem duas caixas de fósforo no bolso, cada uma inicialmente com  $n$  palitos. Cada vez que ele deseja acender um fósforo, ele enfia a mão no bolso, retira uma das caixas ao acaso, tira um fósforo da caixa escolhida, acende este fósforo e depois joga-o fora. Em certo momento, ao retirar uma caixa, ele nota que ela está vazia. Qual a probabilidade, neste momento, de que a outra caixa tenha  $k$  fósforos, com  $0 \leq k \leq n$ ?

**Exercício 5.6.16.** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes tais que  $X_n \sim U[0, a_n]$ , onde  $a_n > 0$ . Mostre que

- Se  $a_n = n^2$ , então com probabilidade 1, somente um número finito das variáveis aleatórias  $X_n$  toma valores menores do que 1.
- Se  $a_n = n$ , então com probabilidade 1, um número infinito das variáveis aleatórias  $X_n$  toma valores menores do que 1.

**Exercício 5.6.17** (OBM-2015). Randonaldo escolhe ao acaso dois números reais  $b$  e  $c$  do intervalo  $[0, \alpha]$ , (ou seja, tanto  $b$  como  $c$  têm distribuição uniforme no intervalo  $[0, \alpha]$ ), e resolve a equação  $x^2 + bx + c = 0$ . A probabilidade de a equação ter soluções reais é  $1/2$ . Qual é o valor de  $\alpha$ ?



**Exercício 5.6.18** (Problema da Ilha). Considere uma ilha com  $n + 2$  habitantes. Um deles é assassinado, e o assassino é um dos habitantes do local. Investidores descobrem vestígios de sangue na cena do crime, não em quantidade suficiente para descobrir quem é o assassino, mas o bastante para estabelecer um certo perfil. Sabe-se que a probabilidade de cada ser humano ter este perfil é igual a  $p$ , com  $0 < p < 1$ , e seres humanos são independentes com relação a esta propriedade.

Assuma que a probabilidade de um habitante qualquer ser o assassino seja igual a  $1/(n + 1)$ . A polícia começa a investigar um por um os habitantes da ilha. Por acaso, o primeiro a ser investigado é o senhor Zoroastro, e verifica-se que ele tem o perfil encontrado na cena do crime. Condicionado a este evento, qual é a probabilidade de que este senhor Zoroastro seja o assassino?

Em outras palavras, denotando por  $G$  o evento *Zoroastro é o assassino*, e por  $E$  o evento *Zoroastro tem o perfil encontrado na cena do crime*, quanto é  $\mathbb{P}(G|E)$ ? Vejamos duas “soluções” distintas para o problema.

- a) Sabemos, da Proposição 5.3.1, que a probabilidade condicional  $\mathbb{P}(\cdot|E)$  é uma probabilidade. Denote portanto  $\mathbb{P}_E(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|E)$ . Seja  $A_k$  o evento no qual  $k$  habitantes da ilha, dentre os  $n$  habitantes excluindo o assassinado e o Zoroastro, tem o perfil estabelecido. Como os  $n$  habitantes restantes são independentes de Zoroastro,  $\mathbb{P}_E(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$  pela fórmula da binomial. Aplique então  $\mathbb{P}_E(G) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_E(G|A_k) \cdot \mathbb{P}_E(A_k)$  para obter

$$\mathbb{P}(G|E) = \mathbb{P}_E(G) = \frac{1 - (1 - p)^{n+1}}{p(n + 1)}. \quad (5.4)$$

- b) Alternativamente, use o Teorema de Bayes (Proposição 5.3.2) para obter

$$\mathbb{P}(G|E) = \frac{1}{1 + pn}. \quad (5.5)$$

- c) As respostas encontradas em (5.4) e em (5.5) são diferentes! Qual delas é a resposta correta para o problema? Onde está o erro no argumento que leva à resposta incorreta?

**Exercício 5.6.19.** Herança quantitativa é um tipo de herança genética na qual participam dois ou mais pares de genes com segregação independente, cujo efeito é acumulativo. Em outras palavras, a quantidade de alelos dominantes (representados por letras maiúsculas) determina a intensidade da característica. Por exemplo, é aceito que a cor da pele seja associada aos genótipos e fenótipos mostrados na Tabela 5.3.

Genótipo	Fenótipo
AABB	negro
AaBB, AABb	moreno escuro
AaBb, AAbb, aaBB	moreno médio
Aabb, aaBb	moreno claro
aabb	branco

Tabela 5.3. Cor de pele e herança quantitativa.

Note que a quantidade de alelos representados por letras maiúsculas determina a quantidade de melanina, ou seja, cor de pele mais escura.

Quando ocorre o cruzamento de dois indivíduos, um dos alelos em cada par de genes (de cada indivíduo) é transmitido para o indivíduo gerado, sendo que cada um destes alelos tem probabilidade meio de ser o alelo a ser transmitido. Por exemplo, se o par de genes Bb está presente em um dos pais, cada um dos alelos B e b tem probabilidade meio de ser o alelo a ser transmitido para o indivíduo gerado. Assuma também que pares de genes são coletivamente independentes.

- Suponha que dois indivíduos com genótipos iguais a AaBbCcDd se cruzem, originando um novo indivíduo. Assuma que os genes em questão correspondam a uma herança quantitativa, como descrito anteriormente. Note que a intensidade da característica em questão vai de 0 a 8, pois o indivíduo gerado pelo cruzamento pode ter de zero a oito genes representados por letras maiúsculas. Qual a probabilidade do indivíduo gerado ter intensidade 5? Que distribuição de probabilidade modela a intensidade da característica no indivíduo gerado?
- Suponha agora, no mesmo contexto do item anterior, que dois indivíduos se cruzem, que um deles tenha genótipo AaBBCCDd, e que o outro tenha genótipo Aabbccdd. Qual a distribuição da intensidade da característica no indivíduo gerado?
- Suponha que uma certa herança quantitativa seja determinada por  $n$  pares de genes, e cada par de alelos possa ser homozigoto recessivo (da forma  $a_i a_i$ ), homozigoto dominante (da forma  $A_i A_i$ ) ou heterozigoto (da forma  $A_i a_i$ ). Determine a distribuição da intensidade da característica em um indivíduo gerado a partir do cruzamento de dois indivíduos em função da quantidade, que os pais portam, de homozigotos recessivos, homozigotos dominantes e heterozigotos.
- Suponha que dois indivíduos, ambos morenos médios se cruzem. É verdade

que a variabilidade da cor da pele de seus descendentes será máxima, ou seja, seus descendentes poderão ter os cinco fenótipos da Tabela 5.3?

## 5.7 Esperança e Variância

**Definição 5.7.1.** Seja  $X$  variável aleatória.

- a) Se  $X$  é discreta assumindo os valores  $\{x_1, x_2, \dots\}$ , então definimos a esperança de  $X$  (caso exista) como

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \mathbb{P}[X = x_k].$$

- b) Se  $X$  é absolutamente contínua com densidade  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , então definimos a esperança de  $X$  (caso exista) como

$$\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Uma definição geral, precisa e elegante de esperança é dada em livros mais avançados, como [Durrett, 2010]. Não entraremos em detalhes, sendo a definição acima suficiente para nossos interesses (e para a maioria das aplicações). Notamos que nem sempre existe a esperança de uma variável aleatória, pois o somatório (ou a integral) podem não estar bem definidos. Assumiremos sem demonstração quatro fatos a respeito da esperança:

**Proposição 5.7.2.**

- a) **(Monotonicidade)** Se  $X \leq Y$ , então  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ .
- b) **(Linearidade)** Se  $Z = aX + Y$ , então  $\mathbb{E}[Z] = a\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ .
- c) **(Esperança do Produto)** Se  $X, Y$  são independentes e têm esperança finita, então  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ .
- d) **(Mudança de Variáveis)** Se  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua (ou contínua por partes), e  $X$  é variável aleatória, então

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} h(x_k) \cdot \mathbb{P}[X = x_k],$$

se  $X$  é discreta, ou

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f(x) dx,$$

se  $X$  for absolutamente contínua.

**Exemplo 5.7.3.** Seja  $X \sim \text{geom}(p)$ . Calculemos a esperança de  $X$ . Como  $X$  é discreta, a esperança é dada por

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}. \quad (5.6)$$

Para calcular o somatório no último membro à direita<sup>6</sup>, partimos da soma de uma progressão geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

e derivamos cada um dos membros desta equação, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}. \end{aligned}$$

Aplicando esta fórmula em (5.6), concluímos que  $\mathbb{E}[X] = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$ .

**Exemplo 5.7.4.** Seja  $X \sim \exp(\lambda)$ . Calculemos a esperança de  $X$ . Como  $X$  é absolutamente contínua, temos que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Aplicando integração por partes, obtemos

$$\int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = x(-e^{-\lambda x}) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-\lambda x}) dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Logo, concluímos que  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ .

**Exemplo 5.7.5.** Lança-se repetidas vezes, de maneira independente, uma moeda cuja probabilidade de mostrar cara é  $p$ . Seja  $X$  o número de vezes que a moeda foi lançada até se observar a segunda cara. Calculemos a esperança desta variável aleatória.

Em vez de aplicar diretamente a fórmula para a esperança de uma variável aleatória discreta, vamos escrever  $X = Y_1 + Y_2$ , onde  $Y_1$  é o número de vezes que a moeda foi lançada até se observar a primeira cara, e  $Y_2$  é o número de vezes, a partir da primeira cara, que a moeda foi lançada, até se obter uma cara novamente. Temos que  $Y_1 \sim \text{geom}(p)$  e também que  $Y_2 \sim \text{geom}(p)$ . Pela linearidade da esperança, temos que

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}.$$

<sup>6</sup>Este tipo de somatório é chamado de *soma de progressão geométrica de segunda ordem*.

**Definição 5.7.6.** A variância de uma variável aleatória  $X$  é definida por

$$\text{var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2],$$

caso a esperança acima exista. Em palavras, a variância de uma variável aleatória representa uma medida de dispersão da variável aleatória  $X$  em torno da média.

**Proposição 5.7.7.** A variância satisfaz:

- a)  $\text{var}(X + c) = \text{var}(X)$ , para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ .
- b)  $\text{var}(aX) = a^2 \text{var}(X)$ , para qualquer  $a \in \mathbb{R}$ .
- c)  $\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$ .
- d) Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$ .
- e) Se  $X_1, \dots, X_n$  são independentes, então  $\text{var}(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n \text{var}(X_k)$ .

*Demonstração.* Os itens a) e b) são consequência imediata da linearidade da esperança. Para o item c),

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2. \end{aligned}$$

Para o item d),

$$\begin{aligned} \text{var}(X + Y) &= \mathbb{E}[(X + Y)^2] - (\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y)^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] - (\mathbb{E}X)^2 - 2\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y - (\mathbb{E}Y)^2 \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y). \end{aligned}$$

E para o item e), basta fazer indução. □

## Exercícios

**Exercício 5.7.1.** Em um certo jogo, uma moeda honesta é lançada repetidamente. O apostador que participa do jogo ganha 100 reais caso apareça uma sequência de quatro caras seguidas antes de aparecer uma sequência de três coroas seguidas, e perde 70 reais caso contrário. Calcule a esperança do valor a ser recebido pelo apostador.

**Exercício 5.7.2.** Seja  $X \sim \text{binom}(n, p)$ . Calcule  $\mathbb{E}[X]$ .

**Dica:** linearidade da esperança.

**Exercício 5.7.3.** Usando o exercício anterior, calcule

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n}.$$

**Exercício 5.7.4.** Seja  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ . Calcule  $\mathbb{E}[X]$ .

**Dica:** use a expansão de Taylor da função exponencial.

**Exercício 5.7.5** (Paradoxo de São Petersburgo). Em um certo jogo de cassino, o apostador lança repetidamente uma moeda honesta, recebendo  $2^n$  se a primeira vez que a moeda dá resultado cara acontece no  $n$ -ésimo lançamento. Seja  $X$  o dinheiro recebido pelo apostador. Qual a esperança de  $X$ ?

**Observação.** O nome *paradoxo* acima vem da questão: qual seria o preço justo que o cassino deveria cobrar do apostador para permitir que ele participe do jogo? A resposta para esta questão não é trivial e pode ser encontrada em [Durrett, 2010].

**Exercício 5.7.6.** Num certo *reality show*, há  $n$  meninos e  $n$  meninas. Sabe-se há  $n$  pares perfeitos, seja lá qual tenha sido o critério dos organizadores, sendo que um par é sempre dado por uma menina e um menino. Os participantes não sabem quem é seu par perfeito. As meninas formam uma fila e os meninos fazem outra fila ao acaso em frente às meninas.

a) Sem fazer muitas contas, calcule a esperança do número de pares perfeitos formados.

**Dica:** linearidade da esperança.

b) Usando o item anterior, obtenha a seguinte fórmula:

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n-k)! \left[ \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right] = 1,$$

e reescreva-a como

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left[ \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right] = 1.$$

c) Considere agora uma outra versão deste *reality show*, na qual há  $2n$  pessoas, e quaisquer duas podem formar um par perfeito (não há restrição de gênero). Estas  $2n$  pessoas se agrupam em  $n$  pares ao acaso. Qual a esperança do número de pares perfeitos formados?

**Exercício 5.7.7** (Problema do Colecionador de Figurinhas). Um colecionador deseja completar um álbum de figurinhas, que são numeradas de  $1, \dots, n$ . Ele compra um envelope contendo uma figurinha; e se a figurinha que está neste envelope ainda não está presente, ele a cola no álbum. Cada figurinha tem a mesma probabilidade de aparecer em qualquer envelope, e os envelopes são independentes. O colecionador começa com o álbum vazio. Seja  $X$  o número de envelopes que serão necessários para completar o álbum. Mostre que

$$\mathbb{E}[X] = n \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right).$$

**Exercício 5.7.8.** Um fenômeno curioso é a sensação que os seres humanos têm de *não aleatoriedade* em resultados que *são aleatórios*, e a sensação de aleatoriedade em resultados que *não são aleatórios*. Por exemplo, quando escutamos músicas em algum aparelho (computador, aparelho de som etc.) em geral há a opção de escutar as músicas ao acaso. Nesta opção, as músicas que são tocadas são escolhidas de maneira uniforme dentre o conjunto de músicas disponíveis. Entretanto, seguindo este padrão totalmente aleatório, os usuários geralmente sentem (e reclamam) que as músicas se repetem muito ao longo do tempo, aparentando que as escolhas não foram aleatórias (quando de fato foram).

Uma solução simples apresentada por Steve Jobs (veja [Mlodinow, 2008]) foi a de guardar na memória do programa a lista de músicas já ouvidas, e dar um peso maior no sorteio às músicas que ainda não foram ouvidas. Paradoxalmente, isto torna o resultado menos aleatório, mas aumenta a sensação de aleatoriedade do ouvinte. Analisemos aqui o caso em que isso *não* é feito.

Suponha que você tenha  $\{1, \dots, M\}$  músicas disponíveis, e ouça uma sequência de  $k$  músicas, com  $k \leq M$ , onde cada música é escolhida de maneira independentemente e uniforme neste conjunto. Seja  $S$  o número de vezes que você ouviu uma música que já havia sido tocada previamente. Por exemplo, se a sequência de músicas foi *ABAACA*, então  $S = 3$ .

- Calcule a esperança de  $S$ .
- Calcule o limite de  $\mathbb{E}[S]$  quando  $k$  é fixo e  $M \rightarrow \infty$ . Interprete.
- Calcule o limite de  $\mathbb{E}[S]$  quando  $M$  é fixo e  $k \rightarrow \infty$ . Interprete.
- Usando uma calculadora, encontre um valor aproximado para a esperança no caso particular onde  $M = 11$  e  $k = 5$  e discuta o valor obtido com o texto acima.

**Exercício 5.7.9** (Paradoxo dos envelopes). Helen participa de um programa de auditório. Ela deve escolher entre dois envelopes lacrados aparentemente iguais. O apresentador Diogo informa que cada envelope tem um cheque e que o valor de um cheque é o dobro do outro, mas não diz nada sobre o valor dos cheques, nem indica qual envelope contém o cheque de maior valor. Helen escolhe um envelope. Neste momento, o apresentador Diogo pergunta se Helen tem certeza de que quer este envelope ou prefere trocar para o outro. Helen faz então o seguinte cálculo da esperança do valor a receber trocando de envelope: o envelope que ela havia escolhido tem um valor  $x$ . O outro envelope tem um valor que pode ser  $2x$  ou  $x/2$ . Logo, a esperança do valor que ela tem a receber trocando de envelope é igual a

$$2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5x}{4},$$

o qual é maior do que  $x$ . Logo, vale a pena trocar. Mas isso não faz sentido, por que trocar de envelope se os envelopes estão fechados e nada se sabe sobre eles? Outro motivo a favor do argumento acima não fazer sentido: se fosse correto,

Helen ficaria trocando de envelope eternamente, sem nunca se decidir. Encontre portanto o erro no argumento acima.

**Observação.** Para facilitar, assuma que os valores nos cheques são potências de 2. Por exemplo, um cheque pode ter um real e outro cheque cinquenta centavos, ou um cheque pode ter 1024 reais e o outro 2048 reais etc. Este problema é inspirado no interessante artigo [Saldanha, 1999].

**Exercício 5.7.10.** Calcule a variância de

- a)  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .
- b)  $X \sim \text{binom}(n, p)$ .
- c)  $X \sim \exp(\lambda)$ .
- d)  $X \sim U[0, 1]$ .

**Exercício 5.7.11.** Mostre que a variância de  $X$  é o valor mínimo da função  $f(x) = \mathbb{E}[(X - x)^2]$  e que este mínimo é atingido em  $x = \mathbb{E}[X]$ .

**Exercício 5.7.12.** Seja  $a \leq X \leq b$  variável aleatória. Mostre que  $\text{var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$ .

**Exercício 5.7.13.** Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes com variâncias finitas, então

$$\text{var}(XY) = \text{var}(X)\text{var}(Y) + (\mathbb{E}X)^2\text{var}(Y) + (\mathbb{E}Y)^2\text{var}(X).$$

**Exercício 5.7.14.** Considere  $V$  um conjunto de vértices, com  $|V| = n$ . Sorteamos se cada possível aresta será colocada ou não de maneira independente, com probabilidade  $p$  para colocá-la. Isso resulta num grafo (aleatório)  $G = (V, A)$ . Calcule a esperança do número de:

- a) Arestas.
- b) Triângulos.
- c) Generalizando os itens anteriores, subgrafos do tipo  $K_\ell$ , sendo  $3 \leq \ell \leq n$ .
- d) Quadrados.

## 5.8 Desigualdades Clássicas

Vejamos nesta seção três desigualdades importantes envolvendo esperança de variáveis aleatórias. Dado um conjunto  $A$ , definimos a chamada *função indicadora*  $1_A$  por

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$



**Proposição 5.8.1** (Desigualdade de Tchebyshev). *Seja  $X \geq 0$  variável aleatória e  $\lambda > 0$  número real. Então*

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}.$$

*Demonstração.* É imediato verificar a decomposição

$$X = X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda]} + X\mathbf{1}_{[X < \lambda]}.$$

Por linearidade,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda]}] + \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{[X < \lambda]}].$$

Como  $X \geq 0$ , as três esperanças acima são não negativas. Por monotonicidade,

$$\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{[X \geq \lambda]}] \geq \mathbb{E}[\lambda\mathbf{1}_{[X \geq \lambda]}] = \lambda\mathbb{E}[\mathbf{1}_{[X \geq \lambda]}] = \lambda\mathbb{P}[X \geq \lambda],$$

o que termina a prova. □

**Observação 5.8.2.** Seja  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  função crescente. Então temos de imediato

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) = \mathbb{P}(f(X) \geq f(\lambda)) \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(\lambda)},$$

que é conhecida como *desigualdade de Markov*<sup>7</sup>. Por exemplo, para  $f(x) = x^2$ , temos que

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\lambda^2},$$

que também poderia ser chamada de uma *desigualdade de Tchebyshev*<sup>8</sup> *quadrática* e assim por diante.

**Proposição 5.8.3** (Desigualdade de Jensen). *Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função convexa. Suponha que  $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ . Então*

$$\mathbb{E}[\phi(X)] \geq \phi(\mathbb{E}[X]).$$

*Demonstração.* Como a função  $\phi$  é convexa, para qualquer ponto  $(a, \phi(a))$  existe uma reta  $r$  que passa por este ponto e está abaixo do gráfico de  $\phi$ , veja a Figura 5.11 para uma ilustração.

<sup>7</sup>Andrei Andreyevich Markov (1856–1922).

<sup>8</sup>Pafnuty Tchebyshev (1821–1894).

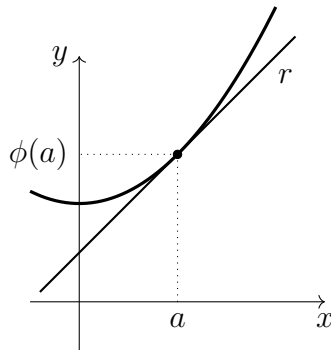


Figura 5.11. Função convexa  $\phi$  e reta  $r$ .

Como a reta  $r$  passa pelo ponto  $(a, \phi(a))$ , sua equação é da forma  $y = b(x-a) + \phi(a)$ . Como seu gráfico está abaixo de  $\phi$ ,

$$\phi(x) \geq b(x-a) + \phi(a),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Em particular,

$$\phi(X) \geq b(X-a) + \phi(a).$$

Como a esperança é monótona e linear,

$$\mathbb{E}[\phi(X)] \geq b(\mathbb{E}[X] - a) + \phi(a).$$

Observe que poderíamos ter escolhido qualquer  $a$  no começo do argumento. Escolhendo  $a = \mathbb{E}[X]$ , obtemos

$$\mathbb{E}[\phi(X)] \geq \phi(\mathbb{E}[X]),$$

como queríamos. □

**Proposição 5.8.4** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias. Então*

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}.$$

*Demonstração.* Considere a função

$$f(\lambda) = \mathbb{E}[(\lambda X - Y)^2]. \quad (5.7)$$

Que tipo de função é  $f$ ? Usando linearidade, note que

$$f(\lambda) = \lambda^2 \mathbb{E}[X^2] - 2\lambda \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2],$$

ou seja,  $f$  é uma função quadrática. Além disso, por (5.7) temos que  $f \geq 0$ , logo seu discriminante satisfaz  $\Delta \leq 0$ , ou seja,

$$(2\mathbb{E}[XY])^2 - 4\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] \leq 0,$$

que nos dá

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}.$$

□

## Exercícios

**Exercício 5.8.1.** Mostre as desigualdades abaixo:

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \mathbb{E}|XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]}.$$

**Exercício 5.8.2** (Uma “Tchebyshev invertida”). Seja  $Y \geq 0$  com  $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ . Aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz à variável aleatória  $Y\mathbf{1}_{[Y>0]}$  para concluir que

$$\mathbb{P}[Y > 0] \geq \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}Y^2}.$$

**Exercício 5.8.3.** Aplique a desigualdade de Jensen com  $\phi(x) = e^x$  e  $\mathbb{P}(X = \log y_i) = p(i)$  para concluir que se  $p(i) > 0$  e  $y_i > 0$  para todo  $i$ , e  $\sum_{i=1}^n p(i) = 1$ , então

$$\sum_{i=1}^n y_i p(i) \geq \prod_{i=1}^n y_i^{p(i)}.$$

Como consequência disso, prove a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética.

**Observação.** A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica é a seguinte: para quaisquer  $a_1, \dots, a_n$  números reais não negativos, vale que

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Esta desigualdade já foi provada por indução no Exercício 1.1.22.

**Exercício 5.8.4.** Sejam  $0 < a < b$  números reais e  $X \geq 0$  variável aleatória. Mostre que se  $\mathbb{E}X^b < \infty$ , então  $\mathbb{E}X^a < \infty$ .

**Dica:** desigualdade de Jensen.

**Exercício 5.8.5** (Desigualdade de Concentração). Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias i.i.d. e denote  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

a) Mostre que

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq an) \leq \inf_{\theta \geq 0} \left\{ \log \mathbb{E}[e^{\theta X_1}] - \theta a \right\}.$$

**Dica:** comece com  $\mathbb{P}(S_n \geq an) = \mathbb{P}(\theta S_n \geq \theta an)$  e use um Tchebyshev exponencial.

b) Seja  $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ . Calcule  $\inf_{\theta \geq 0} \left\{ \log \mathbb{E}[e^{\theta X}] - \theta a \right\}$  e use isso para estimar a probabilidade de se observar mais do que 70 caras em 100 lançamentos de uma moeda honesta.

## **5.9 Função Característica e Função Geradora de Momentos**

### **5.10 Cumulantes**

## CAPÍTULO 6

# NOÇÕES DE PROBABILIDADE MODERNA II

Neste capítulo, veremos casos simples de tópicos essenciais em probabilidade: cadeias de Markov, que tratam de evoluções estocásticas onde o futuro depende do presente, mas não do passado; a Lei dos Grandes Números, onde o aleatório converge para o determinístico; o Teorema Central do Limite, que mostra o comportamento da soma de (muitos) pequenos erros aleatórios em torno da média; Grandes Desvios, que estima a chance de observar eventos que difiram do limite na Lei dos Grandes Números; o Passeio Aleatório (ou Passeio do Bêbado) que pode ou não voltar ao ponto de partida. Além disso, veremos também a importante Fórmula de Stirling, que estima o valor do fatorial de um número e tem inúmeras aplicações.

### 6.1 Cadeias de Markov e Ruína do Jogador

Cadeias de Markov são um tópico atual de intensa pesquisa e inúmeras aplicações. Longe de pretender resumir uma área de pesquisa em algumas páginas, nossa intenção aqui é apenas apresentar o tema e, principalmente, conectá-lo ao tema de recorrências visto aqui no Capítulo 3.

Seja  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  um conjunto, digamos, finito. Chamaremos este conjunto de *conjunto de estados*. Seja  $P$  uma matriz  $m \times m$  estocástica, isto é, cujas entradas são reais não negativas e a soma em cada linha é sempre igual a 1. Assim, denotando por  $P(x, y)$  as entradas desta matriz,

$$\sum_{y \in X} P(x, y) = 1, \forall x \in X.$$

Uma cadeia de Markov associada a uma matriz  $P$  é uma sequência (aleatória)  $(X_0, X_1, X_2, X_3, \dots)$  tal que

a) a sequência é uma sequência de estados, ou seja,  $X_n \in A$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;

b) a probabilidade de saltar de um estado  $x$  para um estado  $y$  é igual a  $P(x, y)$ , ou seja,  $\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = P(x, y)$ ;

c) o próximo estado só depende do estado atual, ou seja, para qualquer sequência  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de estados tal que  $\mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x_n).$$

O estado inicial  $X_0$  e a matriz  $P$  determinam a probabilidade de estados subsequentes, e o cálculo se resume simplesmente a determinar potências da matriz  $P$ . Vejamos:

**Proposição 6.1.1.** *Temos que*

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) = P^n(x, y),$$

ou seja, supondo que o estado inicial é  $x$ , a probabilidade do estado no  $n$ -ésimo tempo ser  $y$  é igual à entrada  $(x, y)$  da  $n$ -ésima potência da matriz  $P$ .

*Demonstração.* Para  $n = 1$ , o resultado é imediato da definição de cadeia de Markov. Para  $n = 2$ , temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = y | X_0 = x) &= \sum_{z \in \mathbf{X}} \mathbb{P}(X_2 = y, X_1 = z | X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in \mathbf{X}} \mathbb{P}(X_2 = y | X_1 = z, X_0 = x) \cdot \mathbb{P}(X_1 = z | X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in \mathbf{X}} \mathbb{P}(X_2 = y | X_1 = z) \cdot \mathbb{P}(X_1 = z | X_0 = x) \\ &= \sum_{z \in \mathbf{X}} P(z, y) \cdot P(x, z) \\ &= P^2(x, y). \end{aligned}$$

Para provar para  $n$  qualquer, basta fazer indução. □

Seja  $\mu$  a distribuição do estado inicial, ou seja,

$$\mu(x) := \mathbb{P}(X_0 = x), \quad \forall x \in \mathbf{X}.$$

Dizemos que  $\mu$  é invariante (ou estacionária) se a probabilidade de observar  $X_1$  é a mesma de observar  $X_0$ , ou seja, se

$$\mu(x) = \sum_{y \in \mathbf{X}} \mu(y) P(y, x).$$

Note que o lado esquerdo da igualdade acima é  $\mathbb{P}(X_0 = x)$  e o lado direito é igual a  $\mathbb{P}(X_1 = x)$ . Além disso, quando a cadeia de Markov começa de um estado fixo  $x \in \mathbf{X}$ , ou seja,  $\mu(x) = 1$ , é costume escrever  $\mathbb{P}_x$  para a probabilidade, o que evita o trabalho de escrever repetidamente a condicional com respeito a  $X_0$ . Por  $\mathbb{E}_x$  denotamos a probabilidade correspondente à  $\mathbb{P}_x$ . Para descrever uma cadeia de Markov, uma maneira é usar um grafo orientado com pesos. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 6.1.2.** Um sapo está todos os dias em uma de duas folhas  $E$  ou  $D$ . Se o sapo estiver hoje sobre a folha  $E$ , amanhã estará novamente sobre a folha  $E$  com probabilidade  $p$  e estará sobre a folha  $D$  com probabilidade  $1-p$ . Se o sapo estiver hoje sobre a folha  $D$ , então amanhã estará sobre a folha  $E$  com probabilidade  $1-q$  e estará sobre a folha  $D$  com probabilidade  $q$ . Esta cadeia de Markov pode ser representada pelo multigrafo orientado com pesos da Figura 6.1, que não é nada mais do que pontinhos ligados por setas, sendo que a cada seta está associada uma probabilidade.

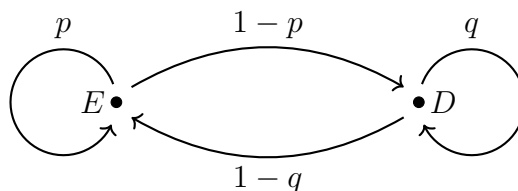


Figura 6.1. Cadeia de Markov representada por um grafo orientado com pesos.

A matriz  $P$  associada a este problema é dada por

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz  $P$  depende da ordem escolhida nos estados. Acima, consideramos a ordem  $E$  e  $D$ . Digamos que o sapo esteja hoje sobre folha  $E$  com probabilidade  $1/3$  e com probabilidade  $2/3$  sobre a folha  $D$ . Para calcular a probabilidade de estar em cada uma das folhas amanhã, basta multiplicar a matriz  $P$  à esquerda pela matriz linha cujas entradas são dadas por  $\mu = (1/3, 2/3)$ , ou seja, escrever

$$\left( \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \right) \cdot \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix},$$

e fazer o cálculo, que é uma simples multiplicação de matrizes.

**Proposição 6.1.3** (Problema da Ruína do Jogador). *Assuma que um apostador participa de um jogo no qual ele ganha ou perde uma unidade com probabilidade  $1/2$ , e que ele abandona o jogo quando sua fortuna chega a 0 ou  $n$ . Seja  $k$  sua fortuna inicial, e defina  $\tau$  como o tempo (aleatório) necessário para que sua fortuna atinja um dos valores 0 ou  $n$ . Então*

$$\mathbb{P}_k[X_\tau = n] = \frac{k}{n} \quad e \quad \mathbb{E}_x[\tau] = k(n-k).$$

*Em palavras, se a fortuna inicial do apostador é  $k$ , sua chance de alcançar a fortuna  $n$  (sem ter ido antes à bancarrota) é igual a  $k/n$ , e o tempo médio para o apostador parar de apostar é  $k(n-k)$ .*

*Demonstração.* Denote  $p_k = \mathbb{P}_k[X_\tau = n]$ . Afirmamos que  $p_0, p_1, \dots, p_n$  satisfazem o sistema de recorrências

$$\begin{cases} p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n-1, \\ p_0 = 0, \\ p_n = 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

Por quê? Estando o apostador com a fortuna  $k$ , basta condicionar no passo seguinte: ou o apostador estará com a fortuna  $k+1$ , o que tem probabilidade  $1/2$ , ou estará com a fortuna  $k-1$ , o que tem probabilidade  $1/2$  também. Além disso, se a fortuna do apostador é  $0$ , não há chance de alcançar a fortuna  $n$ , e se sua fortuna é  $n$ , sua probabilidade de alcançar  $n$  é igual a um, obviamente.

Resta portanto resolver o sistema acima. Note que este não é um sistema de recorrências exatamente como aqueles vistos na Seção 3.4, pois temos uma condição *inicial* ( $p_0 = 0$ ) e uma condição *final* ( $p_n = 1$ ).

Para resolver este sistema, um bom *ansatz*<sup>1</sup> ajuda. Como  $p_k$  é uma média aritmética de  $p_{k+1}$  e  $p_{k-1}$ , podemos intuir que  $p_k$  deva variar de maneira linear, ou seja, vamos supor que  $p_k$  seja da forma  $p_k = ak + b$ . Considere a seguinte soma telescópica:

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1} - p_k = p_n - p_0.$$

Pela condições de fronteira, o lado direito da equação acima é igual a  $1 - 0 = 1$ . Pelo nosso chute  $p_k = ak + b$ , o lado esquerdo é igual a  $na$ , logo  $a = 1/n$ . Usando a condição inicial  $p_0 = 0$ , obtemos  $\frac{0}{n} + b = 0$ , logo  $b = 0$  e assim  $p_k = k/n$ . Para terminar, basta conferir que  $p_k = k/n$  é de fato a solução do sistema (6.1).

Tratemos agora de encontrar a esperança do enunciado. Denote  $f_k = \mathbb{E}_k[\tau]$ . Temos que  $f_0, f_1, \dots, f_n$  satisfazem o sistema

$$\begin{cases} f_k = \frac{1}{2}(1 + f_{k-1}) + \frac{1}{2}(1 + f_{k+1}), & \text{se } 1 \leq k \leq n-1, \\ f_0 = 0, \\ f_n = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Por quê? Se a fortuna do jogador é  $k$ , no próximo passo sua fortuna será  $k-1$  ou  $k+1$ , com probabilidade  $1/2$  cada, e o tempo esperado para o jogo terminar será igual ao tempo esperado na nova posição mais um (pois uma unidade de tempo se passou). Deixamos para o Exercício 6.1.8 o caminho para deduzir que  $f_k = k(n-k)$ .  $\square$

<sup>1</sup>*Ansatz* é uma palavra alemã que é usada em Matemática para designar um chute sensato, o qual ajuda na solução de um problema.



## Exercícios

**Exercício 6.1.1.** Uma probabilidade  $\mu$  em  $X$  é dita reversível, com respeito à matriz estocástica  $P$ , se

$$\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x) \quad \forall x, y \in X.$$

Mostre que se  $\mu$  é reversível, então  $\mu$  é invariante.

**Exercício 6.1.2.** Uma matriz estocástica  $P$  é dita simétrica se  $P(x, y) = P(y, x)$  para todos  $x, y \in X$ . Mostre que se  $P$  é simétrica, então a probabilidade uniforme é invariante para  $P$ .

**Exercício 6.1.3.** Seja  $\mu$  probabilidade sobre  $X$ . Mostre que  $\mu$  é invariante para uma cadeia de Markov de matriz  $P$  se, e somente se,  $\mu$  é invariante para uma cadeia de Markov de matriz  $\frac{1}{2}(P + I)$ , onde  $I$  é a matriz identidade.

**Exercício 6.1.4.** Um passeio aleatório em um grafo conexo  $G = (V, A)$  é uma cadeia de Markov cujo espaço de estados é  $V$  e as probabilidades de transição são as seguintes: se o estado atual é o vértice  $v \in V$ , então o próximo estado é escolhido uniformemente dentre os vizinhos de  $v$ . Mostre que a probabilidade dada por

$$\mu(x) = \frac{\text{gr}(x)}{\sum_{y \in V} \text{gr}(y)}, \quad \forall x \in V$$

é invariante para o passeio aleatório em um grafo conexo  $G = (V, A)$ .

**Exercício 6.1.5.** Uma cadeia de Markov é dita *irredutível* se para todos  $x, y \in X$  existe uma sequência de saltos com probabilidade positiva que sai de  $x$  e chega em  $y$ , isto é, existem  $x = x_0, x_1, \dots, x_n = y$  tais que

$$P(x_0, x_1)P(x_1, x_2) \cdots P(x_{n-1}, x_n) > 0.$$

Mostre que se uma cadeia de Markov é irredutível e  $\mu$  é invariante, então  $\mu(x) > 0$  para todo  $x \in X$ .

**Exercício 6.1.6.** Mostre que se uma cadeia de Markov em  $X$  é irredutível e  $\mu$  é medida invariante para esta cadeia, então  $\mu(x) > 0$  para todo  $x \in X$ .

**Exercício 6.1.7.** Mostre que se uma cadeia de Markov é irredutível, então há unicidade da medida invariante.

**Dica:** dadas medidas invariantes  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , considere o estado  $x \in X$  que minimiza  $\mu_1(x)/\mu_2(x)$  e mostre que para todo  $y \in X$  tal que  $P(y, x) > 0$  vale  $\mu_1(x)/\mu_2(x) = \mu_1(y)/\mu_2(y)$ .

**Exercício 6.1.8.** Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} f_k = \frac{1}{2}(1 + f_{k-1}) + \frac{1}{2}(1 + f_{k+1}), & \text{se } 1 \leq k \leq n-1, \\ f_0 = 0, \\ f_n = 0. \end{cases}$$

a) Defina  $\Delta_k = f_k - f_{k-1}$  para  $k = 1, \dots, n$ . Mostre que a sequência  $\Delta_k$  é uma progressão aritmética de razão  $-2$ .

b) Mostre que  $\sum_{k=1}^n \Delta_k = 0$  e encontre  $\Delta_1$ .

c) Mostre que  $f_k = \sum_{j=1}^k \Delta_j$  e encontre  $f_k = k(n-k)$ .

**Exercício 6.1.9.** Considere o apostador hesitante: inicialmente, sua fortuna é  $k$ , com  $1 \leq k \leq n-1$ . A cada unidade de tempo, desde que sua fortuna não esteja em 0 ou  $n$ , ele lança uma moeda cuja probabilidade de mostrar cara é  $p$  e cuja probabilidade de mostrar coroa é  $1-p$ . Se o resultado da moeda for cara, ele aposta, ganhando ou perdendo uma unidade com probabilidade meio cada. Se o resultado da moeda for coroa, ele não aposta, espera o próximo tempo e repete o procedimento. Quando sua fortuna atinge 0 ou  $n$ , ele para com as apostas. Determine o tempo médio para a fortuna do apostador chegar no conjunto  $\{0, n\}$  em função dos parâmetros  $k, n, p$ .

**Exercício 6.1.10.** Considere a seguinte variação do Problema da Ruína do Jogador. Nela, se o jogador atinge zero, ele para de apostar. Mas se sua fortuna for  $n$ , no tempo seguinte sua fortuna passa a ser  $n-1$  (com probabilidade um). Sendo sua fortuna inicial igual a  $n$ , calcule o tempo esperado para o apostador perder tudo.

**Exercício 6.1.11.** Consideremos o Problema da Ruína do Jogador agora com viés. Neste problema, o apostador começa com uma fortuna igual a  $k$ , e cada jogada ele ganha 1 unidade com probabilidade  $p$  e perde uma unidade com probabilidade  $1-p$ . Como antes, denote  $p_k = \mathbb{P}_k[X_\tau = n]$ .

a) Encontre um sistema para  $p_k$ .

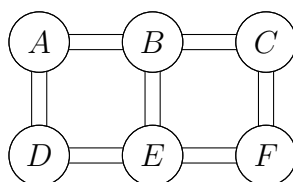
b) Defina  $\Delta_k = p_{k+1} - p_k$ . Mostre que  $\Delta_k$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1-p}{p}$ .

c) Usando a soma  $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k = p_n - p_0$ , encontre  $\Delta_1$ .

d) Usando a soma  $\sum_{j=0}^{k-1} \Delta_j = p_k - p_0$ , encontre  $p_k$ .

**Exercício 6.1.12.** Encontre o tempo médio para o jogador perder tudo ou chegar a  $n$  no problema anterior, sobre a ruína do jogador com viés.

**Exercício 6.1.13** (OBM-2001). Um ratinho ocupa inicialmente a gaiola  $A$  e é treinado para mudar da gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer um dos túneis incidentes a sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Qual a probabilidade de que após o alarme soar 23 vezes o ratinho ocupe a gaiola  $B$ ?



**Dica:** no tempo zero, o ratinho está em  $A$ . Nos tempos ímpares, o ratinho estará em quais vértices? E nos tempos pares? Seja  $a_n$  a probabilidade do ratinho estar na coluna central ( $B$  ou  $E$ ) no tempo  $n$ , e encontre uma recorrência para  $a_n$ .

**Exercício 6.1.14** (OBM-2013). Quatro feijões mexicanos estão nos vértices de um quadrado, inicialmente um feijão em cada vértice. A cada segundo, cada feijão pula aleatoriamente para um vértice vizinho, com probabilidade  $1/2$  para cada vértice. Calcule a probabilidade de, após 2013 segundos, haver exatamente um feijão em cada vértice.

**Dica:** reduza o problema a cada par de feijões (inicialmente) opostos. Em seguida, obtenha uma recorrência para  $a_n$ , onde  $a_n$  é a probabilidade de que dois feijões inicialmente opostos estejam em vértices distintos no tempo  $n$ .

## 6.2 Lei Fraca dos Grandes Números

A Lei dos Grandes Números, em palavras, nos diz que a média de muitas repetições independentes de um experimento (sob certas condições) deve convergir para a média do resultado de um único experimento. Por exemplo, se jogarmos uma moeda honesta muitas vezes, o número de vezes que observamos um resultado *cara* dividido pelo número de repetições do experimento deve convergir para meio. Antes de mais nada, precisamos definir com respeito a qual noção de convergência trabalharemos.

Começemos com a definição de convergência em probabilidade. Dadas variáveis aleatórias  $Y$  e  $Y_n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , dizemos que a sequência  $Y_n$  converge a  $Y$  em probabilidade se, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[|Y - Y_n| > \varepsilon] = 0.$$

Para denotar a convergência em probabilidade, escreve-se  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ . A ideia de  $Y_n$  convergir em probabilidade é que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , a probabilidade de  $Y_n$  estar a uma distância maior do que  $\varepsilon$  de  $Y$  é arbitrariamente pequena (quando  $n$  cresce).

**Teorema 6.2.1** (Lei Fraca dos Grandes Números). *Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes tais que  $\mathbb{E}[X_k] = \mu$  e  $\mathbb{E}[X_k^2] \leq c < \infty$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Denote  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Então*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

*Demonstração.* Queremos mostrar que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Temos que

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right] = \mathbb{P}\left[|S_n - n\mu| > n\varepsilon\right] = \mathbb{P}\left[|S_n - n\mu|^2 > n^2\varepsilon^2\right].$$

Pela desigualdade de Tchebyshev, a última expressão acima é menor ou igual a

$$\frac{\mathbb{E}[(S_n - n\mu)^2]}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{nc}{n^2\varepsilon^2} = \frac{c}{n\varepsilon^2},$$

que vai a zero quando  $n \rightarrow \infty$ . Note que, na desigualdade acima, usamos a Proposição 5.7.7, item e).  $\square$

A seguir, veremos uma interessantíssima demonstração via probabilidade do Teorema de Aproximação de Weierstrass (também chamado de Teorema de Stone-Weierstrass), o qual nos diz que qualquer função contínua pode ser aproximada *uniformemente* por polinômios em intervalos limitados e fechados. Sem perda de generalidade, enunciaremos o resultado para o intervalo  $[0, 1]$ . Um pouco de Análise na Reta será usada nesta prova.

**Teorema 6.2.2** (Teorema de Aproximação de Weierstrass). *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe um polinômio  $p$  tal que  $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in [0, 1]$ .*

*Demonstração.* Para cada  $x \in [0, 1]$ , considere variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots$  i.i.d. com distribuição Bernoulli( $x$ ), ou seja,

$$\mathbb{P}_x[X_i = 1] = x \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_x[X_i = 0] = 1 - x.$$

Note que estamos indexando a probabilidade em  $x$ , pois para cada  $x$  temos um espaço de probabilidade diferente. O resultado pedido é consequência dos seguintes dois fatos:

a)  $p_n(x) := \mathbb{E}_x[f(\frac{S_n}{n})]$  é um polinômio.

b)  $\sup_{x \in [0,1]} |p_n(x) - f(x)| \leq C/n$ .

Para provar a), basta calcular a esperança pedida:

$$p_n(x) := \mathbb{E}_x[f(\frac{S_n}{n})] = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \cdot \mathbb{P}_x[S_n = k] = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

que é um polinômio em  $x$ . Para a parte b), começamos observando que

$$|p_n(x) - f(x)| = |\mathbb{E}_x[f(\frac{S_n}{n})] - f(x)| = |\mathbb{E}_x[f(\frac{S_n}{n}) - f(x)]|$$

pela linearidade da esperança. Pela desigualdade de Jensen, a expressão anterior é menor ou igual a

$$\mathbb{E}_x[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)|] = \mathbb{E}_x[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| \mathbf{1}_{|\frac{S_n}{n} - x| > \delta}] + \mathbb{E}_x[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| \mathbf{1}_{|\frac{S_n}{n} - x| \leq \delta}].$$

Como  $f$  é uma função contínua definida num intervalo fechado, é limitada. Seja  $C > 0$  tal que  $|f(x)| < C$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Logo, pela desigualdade triangular,

$$\mathbb{E}_x[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| \mathbf{1}_{|\frac{S_n}{n} - x| > \delta}] \leq 2C \mathbb{P}_x[|\frac{S_n}{n} - x| > \delta]. \quad (6.3)$$

Como a função  $f$  é contínua num intervalo fechado e limitado, temos que  $f$  é uniformemente contínua. Logo, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2.$$

Portanto,

$$\mathbb{E}_x[|f(\frac{S_n}{n}) - f(x)| \mathbf{1}_{|\frac{S_n}{n} - x| \leq \delta}] \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6.4)$$

Juntando (6.3) e (6.4) obtemos

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + 2C \mathbb{P}_x[|\frac{S_n}{n} - x| > \delta].$$

Aplicando Tchebyshev, concluímos que

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + 2C \cdot \frac{\mathbb{E}_x[(\frac{S_n}{n} - x)^2]}{\delta^2} = \varepsilon/2 + 2C \frac{nx(1-x)}{n^2\delta^2},$$

onde, na igualdade acima, usamos a Proposição 5.7.7 item e) e a fórmula para variância de uma variável aleatória com distribuição Bernoulli. O máximo da parábola  $g(x) = x(1-x)$  é obtido em  $x = 1/2$ . Logo,

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \frac{C}{2n\delta^2}.$$

Assim, escolhendo  $n$  suficientemente grande, para qualquer  $x \in [0, 1]$ , vale que  $|p_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ , terminando a prova.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 6.2.1** (Problema da Agulha de Buffon). Suponha que o chão  $\mathbb{R}^2$  esteja dividido por enumeráveis retas paralelas distando  $\ell$  entre duas retas próximas. Considere uma agulha de tamanho  $d < \ell$  e jogue-a ao acaso no chão.

- Mostre que a probabilidade de a agulha interceptar alguma reta é igual a  $\frac{2d}{\pi\ell}$ . **Dica:** analise a posição do ponto médio da agulha e do ângulo que a reta determinada pela agulha faz com as retas.
- Como podemos usar o resultado anterior para calcular numericamente o valor de  $\pi$ ?

**Exercício 6.2.2.** (Integração Monte Carlo) Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Sejam  $U_1, U_2, \dots$  variáveis aleatórias i.i.d. uniformes em  $[0, 1]$  e defina

$$I_n = \frac{f(U_1) + \dots + f(U_n)}{n}.$$

- Mostre que  $I_n \rightarrow \int_0^1 f(x)dx$  em probabilidade.
- Use a desigualdade de Tchebyshev para estimar  $\mathbb{P}\left[|I_n - \int_0^1 f(x)dx| > \varepsilon\right]$ .
- Como podemos usar o resultado anterior para calcular  $\int_0^1 f(x)dx$  numericamente?

## 6.3 Lei Forte dos Grandes Números

Nesta seção veremos a Lei Forte dos Grandes Números, que é similar a Lei Fraca dos Grandes Números, considerando porém outra noção de convergência.

Seja  $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$  espaço de probabilidade e  $Y_n, Y$  variáveis aleatórias definidas neste espaço. Dizemos que a sequência  $Y_n$  converge quase certamente para  $Y$ , e escrevemos  $Y_n \rightarrow Y$  q.c., se existe um evento  $A \in \mathbb{A}$  tal que  $\mathbb{P}(A) = 1$  e, para todo  $\omega \in A$ , vale o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)$ .

A ideia de convergência quase certa é que, com probabilidade um, a sequência dos resultados  $Y_n$  converge para o resultado de  $Y$ .

**Teorema 6.3.1** (Lei Forte dos Grandes Números). Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias i.i.d. com  $\mathbb{E}X_i = \mu$  e  $\mathbb{E}X_i^4 < \infty$ . Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Então

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \quad \text{q.c.}$$

*Demonstração.* Suponhamos primeiro que  $\mu = 0$ . Neste caso, queremos mostrar que  $S_n/n$  converge a zero quase certamente. Temos que

$$\mathbb{E}S_n^4 = \mathbb{E}[(X_1 + \dots + X_n)^4] = \sum_{1 \leq i, j, k, \ell \leq n} \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_\ell],$$

pela linearidade da esperança. Como as variáveis aleatórias são independentes, o produto da esperança é a esperança do produto. E como a média é zero (estamos supondo  $\mu = 0$  inicialmente), para que um termo  $\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_\ell]$  seja não nulo, temos apenas duas possibilidades: ou os quatro índices são iguais, da forma  $\mathbb{E}X_i^4$ , ou são dois pares de índices iguais, da forma  $\mathbb{E}[X_i^2 X_j^2] = (\mathbb{E}X_i^2)^2$ .

Para quatro índices iguais, temos  $n$  possibilidades. Para escolher dois pares de índices iguais (sendo os pares diferentes), temos  $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$  possibilidades. Mas estes dois pares podem aparecer de seis maneiras diferentes dentre  $i, j, k, \ell$ . Logo,

$$\mathbb{E}S_n^4 = n \cdot \mathbb{E}X_1^4 + 6 \frac{n(n-1)}{2} \cdot (\mathbb{E}X_1^2)^2 \leq Cn^2.$$

Pela desigualdade de Tchebyshev, temos que

$$\mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{(n\varepsilon)^4} \leq \frac{Cn^2}{(n\varepsilon)^4} = \frac{C}{n^2\varepsilon^4}.$$

Portanto, pelo Lema de Borel-Cantelli, temos que

$$\mathbb{P}(|S_n|/n > \varepsilon \text{ i.v.}) = 0,$$

o que implica que, a partir de certo  $n_0$ ,  $|S_n|/n$  é sempre menor do que  $\varepsilon > 0$ . Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, isso implica que  $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu$  q.c..

Finalmente, para o caso  $\mu \neq 0$ , aplicamos o resultado acima para as variáveis aleatórias  $X'_i = X_i - \mu$ , as quais têm média zero. Logo,

$$\frac{(X_1 - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)}{n} \rightarrow 0 \text{ q.c.},$$

que implica

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \text{ q.c.},$$

completando a prova. □

## Exercícios

**Exercício 6.3.1.** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias i.i.d com distribuição  $U[0, 1]$ .

a) Mostre que, para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[n^{-X_n} > \varepsilon] = 0.$$

b) Seja  $A = \{\omega \in \Omega : n^{-X_n(\omega)} \rightarrow 0\}$ . Mostre que  $\mathbb{P}(A) = 0$ .

**Exercício 6.3.2.** Suponha que  $Y_n \rightarrow Y$  q.c.

- a) Seja  $\varepsilon > 0$ . Mostre que o conjunto  $\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} [|Y_k - Y| > \varepsilon]$  tem probabilidade nula.
- b) Mostre que, para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, o conjunto  $\cup_{k=n}^{\infty} [|Y_k - Y| > \varepsilon]$  tem probabilidade arbitrariamente pequena.
- c) Mostre que  $Y_n \rightarrow Y$  em probabilidade.

**Observação.** Eis o porquê dos nomes *Lei Fraca* e *Lei Forte*. A Lei Fraca trata de convergência em probabilidade, e a Lei Forte de convergência quase certa, e como provado no exercício acima, convergência quase certa implica convergência em probabilidade.

**Exercício 6.3.3.** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes tais que

$$\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}.$$

- a) Mostre que  $X_n \rightarrow 0$  em probabilidade.
- b) Mostre que  $X_n \not\rightarrow 0$  quase certamente.

## 6.4 Fórmula de Stirling

Para diversas aplicações em Matemática e em outras áreas, é de grande importância saber estimar o valor do fatorial de um número. Este é o conteúdo desta seção.

**Definição 6.4.1.** Sejam  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  e  $g$  têm mesma ordem, e escrevemos  $f \sim g$ , se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

**Teorema 6.4.2** (Fórmula de Stirling). *Vale:*

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

*Demonstração.* Note que

$$\log n! = \log 1 + \log 2 + \dots + \log n.$$

Como

$$\int_{k-1}^k \log x \, dx < \log k < \int_k^{k+1} \log x \, dx,$$

temos que

$$\int_0^n \log x \, dx < \log n! < \int_1^{n+1} \log x \, dx.$$



Como a primitiva é dada por  $\int \log x \, dx = x \log x - x$ , concluimos que

$$n \log n - n < \log n! < (n+1) \log(n+1) - (n+1) + 1,$$

ou seja,

$$n \log n - n < \log n! < (n+1) \log(n+1) - n.$$

A desigualdade acima sugere que comparemos  $\log n!$  com alguma média dos lados direito e esquerdo das desigualdades. O chute mais simples seria  $(n + \frac{1}{2}) \log n - n$ . Definamos então

$$d_n = \log n! - (n + \frac{1}{2}) \log n + n,$$

que representa o erro. Agora que encontramos a conjectura certa (a média anterior) devemos estimar o erro<sup>2</sup>  $d_n$ . Por cálculos simples,

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \\ &= \frac{2n+1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right) - 1. \end{aligned}$$

Precisamos agora de uma expansão para o logaritmo. Poderíamos usar a Fórmula de Taylor apresentada no Teorema 3.4.8. Mas podemos fazê-lo de um modo ainda mais simples: consideremos a soma de uma progressão geométrica de razão  $x$  a seguir.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Daí, integrando os dois membros da equação,

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad (6.5)$$

Portanto,

$$\log \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right). \quad (6.6)$$

Aplicando o resultado acima,

$$\log \left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right) = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{3(2n+1)^3} + \frac{2}{5(2n+1)^5} + \dots,$$

que nos leva a

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \frac{1}{7(2n+1)^6} + \dots \quad (6.7)$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} (d_n - d_{n+1})$  é convergente, temos que  $d_n$  também é convergente. Assim, para algum  $c$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{d_n} = e^c,$$

<sup>2</sup>De fato, poderíamos esquecer a prova até este ponto. Esta discussão foi dedicada simplesmente a encontrar o chute certo para a aproximação.

que é o mesmo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = e^c.$$

A prova de que  $e^c = \sqrt{2\pi}$  ficará para a próxima seção, como uma aplicação do Teorema Central do Limite.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 6.4.1.** Verifique que

$$d_n - d_{n+1} > \frac{1}{3(2n+1)^2} > \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}.$$

Conclua que a sequência  $d_n - \frac{1}{12n+1}$  é decrescente.

**Exercício 6.4.2.** Comparando a série em (6.7) com uma série geométrica de razão  $(2n+1)^{-2}$ , mostre que

$$d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3[(2n+1)^2 - 1]} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}.$$

Conclua que a sequência  $d_n - \frac{1}{12n}$  é crescente.

**Exercício 6.4.3.** Mostre que

$$c + \frac{1}{12n+1} < d_n < c + \frac{1}{12n},$$

onde  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ .

**Exercício 6.4.4.** Mostre que

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}},$$

melhorando a versão da Fórmula de Stirling provada no texto.

**Exercício 6.4.5.** Verifique que a relação  $\sim$  apresentada na Definição 6.4.1 é uma relação de equivalência.

**Exercício 6.4.6.** Mostre que:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e. \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}. \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

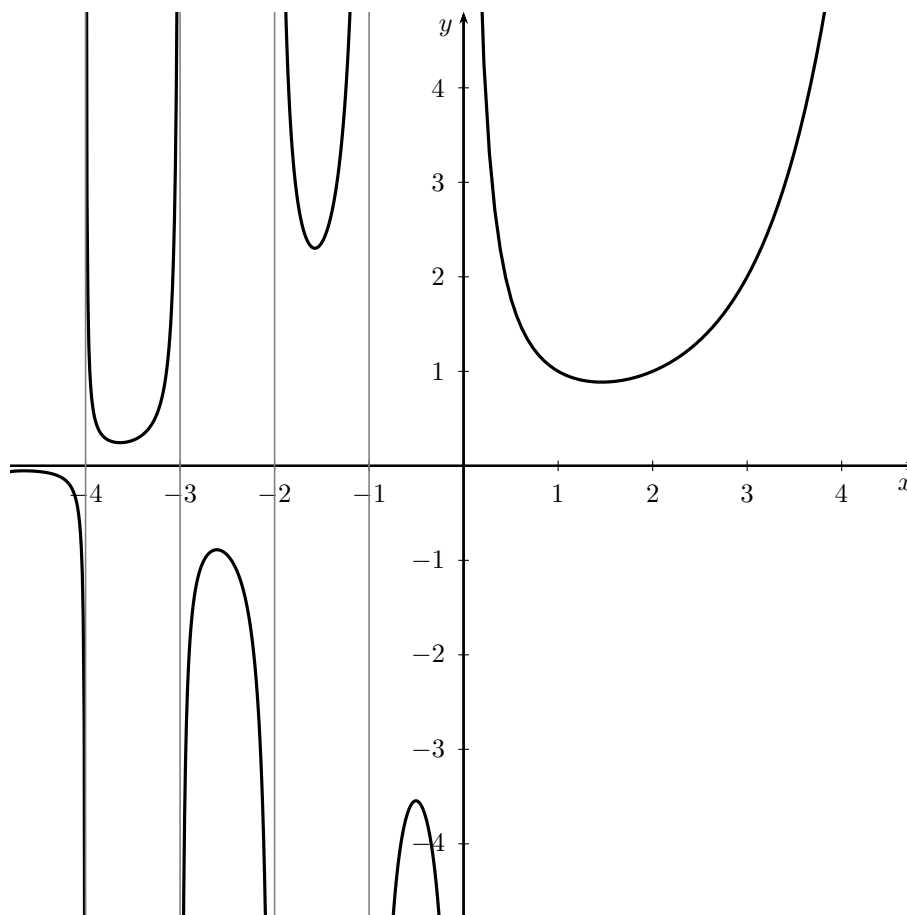


Figura 6.2. Ilustração da função  $\Gamma$ .

**Exercício 6.4.7.** Como visto no Capítulo 2, Observação 2.4.5, existe uma definição natural para a combinação  $\binom{t}{k}$  quando  $t$  é um número real e  $k$  é um número inteiro não negativo. Quanto ao fatorial, faria sentido para números negativos? Racionais? Irracionais? Para responder a isso, define-se a função gama, que é dada por<sup>3</sup>

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx,$$

e aparece em diferentes contextos na Matemática.

- Mostre que  $\Gamma(1) = 1$ .
- Supondo que a função gama esteja definida para  $t$  e  $t - 1$ , mostre que  $\Gamma(t) = (t - 1)\Gamma(t - 1)$ . Conclua que  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  para todo  $n$  inteiro positivo, ou seja, conclua que a função  $\Gamma(t + 1)$  é uma generalização da função fatorial.

<sup>3</sup>De fato, a função gama também faz sentido nos complexos.

- c) A partir da Figura 6.2, que mostra o gráfico da função gama, conjecture qual é o domínio e qual é a imagem da função gama (não é necessário entrar em detalhes de como provar isso). Deduza, a partir disso, qual o domínio e a imagem da função fatorial. A função fatorial é contínua? Qual o domínio da função combinação? A função combinação é contínua ou descontínua?

**Exercício 6.4.8** (Convergência da binomial para Poisson). Considere variáveis aleatórias  $X_n \sim \text{Binom}(n, \frac{\lambda}{n})$ . Usando a Fórmula de Stirling, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \mathbb{P}[Y = k],$$

onde  $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

**Exercício 6.4.9.** Uma variável aleatória  $X$  é dita *hipergeométrica*<sup>4</sup> se corresponde ao número de elementos do tipo  $A$  em uma amostra de tamanho  $n$  escolhida ao acaso e sem reposição de uma população de  $N$  elementos, sendo que  $K$  elementos desta população são do tipo  $A$  e  $N - K$  são do tipo  $B$ . Neste caso, denotamos  $X \sim \text{hipergeom}(n, N, K)$ .

- a) Deduza que  $\mathbb{P}[X = x] = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ , para  $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ .
- b) A partir do fato trivial que  $\mathbb{P}[X \in \{0, 1, \dots, n\}] = 1$ , deduza novamente a Identidade de Vandermonde (2.5), provada anteriormente no Exercício 2.4.15.
- c) Suponha que  $n$  seja fixo e que  $K/N \rightarrow p \in (0, 1)$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Usando a Fórmula de Stirling, mostre que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}[X = x] = \mathbb{P}[Y = x],$$

onde  $Y \sim \text{Binom}(n, p)$ .

**Exercício 6.4.10.** Mostre que, para  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \in (n + 1, n + 2)$ , vale

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n+1}} < \Gamma(t) < \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-(n+1)} e^{\frac{1}{12(n+1)}}.$$

**Exercício 6.4.11** (Grandes Desvios para variáveis aleatórias Bernoulli). Considere  $X_i$  variáveis aleatórias independentes Bernoulli, ou seja, tais que  $\mathbb{P}[X_i = 0] = \mathbb{P}[X_i = 1] = 1/2$ . Fixe  $1/2 < a \leq 1$ .

- a) Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Verifique que

$$\mathbb{P}[S_n \geq an] = \frac{1}{2^n} \sum_{k \geq an} \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

<sup>4</sup>Apesar do que o nome possa indicar, a distribuição hipergeométrica tem mais a ver com a distribuição binomial do que com a distribuição geométrica.

b) Seja  $\lceil \cdot \rceil$  a função teto.<sup>5</sup> Mostre que

$$\frac{1}{2^n} \frac{n!}{\lceil an \rceil! (n - \lceil an \rceil)!} \leq \mathbb{P}[S_n \geq an] \leq \frac{(n+1)}{2^n} \frac{n!}{\lceil an \rceil! (n - \lceil an \rceil)!}.$$

c) Use a Fórmula de Stirling para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[S_n \geq an] = -I(a),$$

onde

$$I(a) = \log 2 + a \log a + (1-a) \log(1-a).$$

**Observação.** Neste livro usamos  $\log$  para denotar o logaritmo na base  $e$ , que também costuma-se chamar *logaritmo neperiano*. A função  $I$  é chamada em probabilidade de *função taxa* (que depende do tipo de variável aleatória escolhida). Abaixo, uma ilustração da função taxa  $I$  que acabamos de obter:

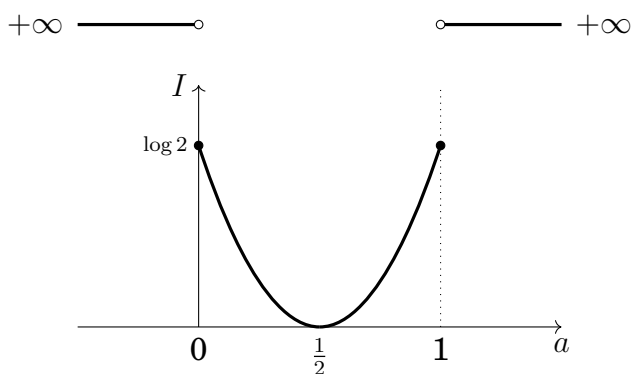


Figura 6.3. Função taxa  $I : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ .

**Exercício 6.4.12.** Considere as mesmas condições do exercício anterior. Sendo  $0 \leq a < 1/2$ , deduza por simetria que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}[S_n \leq an] = -I(a).$$

**Exercício 6.4.13.** Conforme podemos observar na Figura 6.3, para  $a \notin [0, 1]$  define-se  $I(a) = +\infty$ . Por que isso faz sentido?

## 6.5 Teorema Central do Limite

O Teorema Central do Limite corresponde, em palavras, ao comportamento (para um modelo em questão) da soma de muitos pequenos erros aleatórios em

<sup>5</sup>A função teto  $\lceil x \rceil$  é o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . Por exemplo,  $\lceil \frac{3}{2} \rceil = 2$ .

torno da média. Tal resultado se estende a diferentes contextos em Matemática, com importantes e diversas aplicações em Estatística e em Física.

Nesta seção veremos uma demonstração particular para um caso particular do Teorema Central do Limite; tal prova não é nem a mais geral, nem a mais interessante. Mas esta é a prova que, curiosamente, ao mesmo tempo usa a Fórmula de Stirling

$$n! \sim e^n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

provada no Teorema 6.4.2, e, ao final, nos permite deduzir o valor da constante que aparece na Fórmula de Stirling, ou seja, nos fornece

$$e^c = \sqrt{2\pi}.$$

Começemos com

**Proposição 6.5.1.** *Sejam  $X_1, X_2, X_3, \dots$  variáveis aleatórias independentes tais que*

$$\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[X_i = -1] = \frac{1}{2}, \quad \forall i.$$

*Denote  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Então, para quaisquer  $a < b$ ,*

$$\mathbb{P}\left[a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^c} dx. \quad (6.8)$$

*Demonstração.* A ideia da prova é reescrever a probabilidade em (6.8) como uma soma de Riemann e usar a Fórmula de Stirling para provar que esta soma de Riemann converge para a integral desejada, que ilustramos na Figura 6.4.

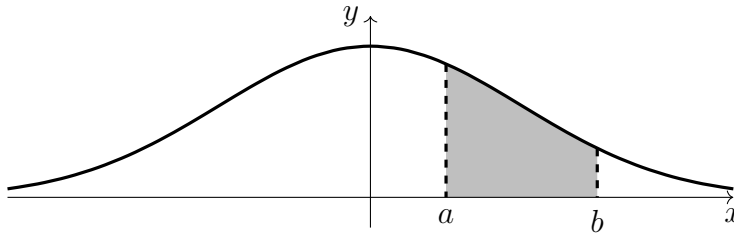


Figura 6.4. Gráfico da função  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}/e^c$  e região de integração.

Observe que

$$\mathbb{P}\left[a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right] = \sum_{a \leq \frac{k}{\sqrt{n}} \leq b} \frac{\sqrt{n}}{2} \mathbb{P}[S_n = k] \cdot \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad (6.9)$$

onde o somatório acima é realizado em  $k$ . Note que para  $n$  par,  $S_n$  assume apenas valores pares, e para  $n$  ímpar,  $S_n$  assume apenas valores ímpares. Portanto,

tenha em mente que a soma em (6.9) pode ser restringida aos valores de  $k$  que têm a mesma paridade de  $n$ .

Vamos desenhar agora retângulos de base  $2/\sqrt{n}$  e altura  $\frac{\sqrt{n}}{2} \mathbb{P}[S_n = k]$  centrados em números da forma  $k/\sqrt{n}$ , onde  $k$  tem a mesma paridade de  $n$ . Por exemplo, para  $n = 7$ , temos a figura a seguir:

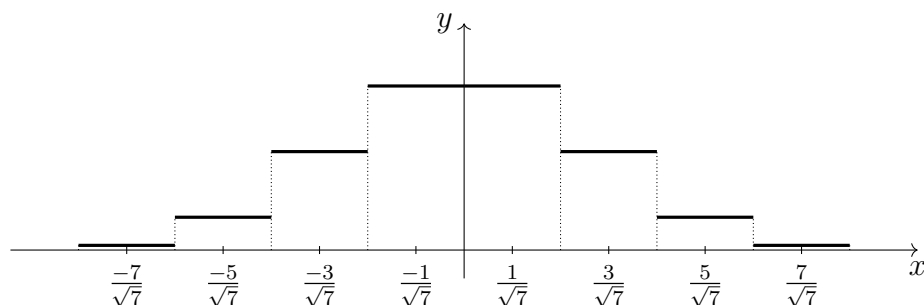


Figura 6.5. Função  $f_7$ . Para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , chamaremos esta função de  $f_n$ .

Queremos mostrar portanto que a área total dos retângulos na Figura 6.5 que estão entre  $a$  e  $b$  converge para a integral mostrada na Figura 6.4.

Observe que tanto a função  $f$  mostrada na Figura 6.4 quanto a função  $f_n$  mostrada na Figura 6.5 são não decrescentes nos negativos e depois são não crescentes nos positivos (veja o Exercício 4.2.14). Nestas condições, é um exercício simples de Análise Real mostrar que se  $f_n$  converge pontualmente para  $f$ , então  $f_n$  converge uniformemente para  $f$ , o que por sua vez implica na convergência das integrais num intervalo qualquer  $[a, b]$ . Portanto, para provar o teorema basta mostrar que a altura do retângulo que contém  $u \in \mathbb{R}$  em sua base converge para  $\Phi(u) = e^{-u^2/2}/e^c$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Em outras palavras, basta mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2} \mathbb{P}[S_n = R(u, n)] = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{e^c}, \quad (6.10)$$

onde  $\frac{R(u, n)}{\sqrt{n}}$  é o centro da base do retângulo que contém  $u$ .

Provemos portanto (6.10). Para não carregar a notação, escreveremos  $R = R(u, n)$ . Lembre-se que as variáveis aleatórias são independentes e assumem valores 1 ou  $-1$  com probabilidade  $1/2$  cada. Portanto,

$$\mathbb{P}[S_n = R] = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+R}{2}}.$$

Assim,

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \mathbb{P}[S_n = R] = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{n+R}{2}\right)! \left(n - \frac{n+R}{2}\right)!} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{n+R}{2}\right)! \left(\frac{n-R}{2}\right)!}. \quad (6.11)$$

Pela Fórmula de Stirling (Teorema 6.4.2), o limite da expressão acima quando  $n \rightarrow \infty$  acima é igual ao limite da expressão

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} \cdot \frac{e^c \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}{\left(e^c \cdot \left(\frac{n+R}{2}\right)^{\left(\frac{n+R}{2}+\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{n+R}{2}}\right) \cdot \left(e^c \cdot \left(\frac{n-R}{2}\right)^{\left(\frac{n-R}{2}+\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{n-R}{2}}\right)}, \quad (6.12)$$

a qual, após cancelamentos, pode ser reescrita simplesmente como

$$\frac{1}{e^c} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+R}{2}\right)^{\frac{n+1+R}{2}} \cdot \left(\frac{n-R}{2}\right)^{\frac{n+1-R}{2}}},$$

e então rearrumada como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e^c} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+R}{2} \cdot \frac{2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(\frac{n-R}{2} \cdot \frac{2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+R}{2}\right)^{\frac{R}{2}} \cdot \left(\frac{n-R}{2}\right)^{\frac{-R}{2}}} \\ &= \frac{1}{e^c} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{R}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \left(\frac{n-R}{n+R}\right)^{\frac{R}{2}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Calcularemos primeiro o limite do logaritmo da expressão acima (que é mais fácil de encontrar), para posteriormente obtermos o limite que desejamos. O logaritmo da expressão acima é

$$-c - \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left[\log\left(1 + \frac{R}{n}\right) + \log\left(1 - \frac{R}{n}\right)\right] + \frac{R}{2} \cdot \log\left(\frac{n-R}{n+R}\right),$$

que pode ser reescrito como

$$-c - \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \log\left(1 - \frac{R^2}{n^2}\right) - \frac{R}{2} \cdot \log\left(\frac{1 + \frac{R}{n}}{1 - \frac{R}{n}}\right).$$

Aplicando as expansões do logaritmo (6.5) e (6.6) provadas na Seção 6.1, podemos escrever a expressão acima como

$$-c + \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \left[\frac{R^2}{n^2} + \frac{\left(\frac{R^2}{n^2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{R^2}{n^2}\right)^3}{3} + \dots\right] - \frac{R}{2} \cdot 2 \cdot \left[\frac{R}{n} + \frac{\left(\frac{R}{n}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{R}{n}\right)^5}{5} + \dots\right].$$

Como  $R/\sqrt{n}$  é o centro da base do retângulo que contém o ponto  $u$ , temos que  $\left|\frac{R}{\sqrt{n}} - u\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ , que implica  $|R - u\sqrt{n}| \leq 1$ . Portanto, vários termos na expressão acima vão para zero quando  $n \rightarrow \infty$ , e obtemos como limite

$$-c + \frac{u^2}{2} - u^2 = -c - \frac{u^2}{2}.$$

Ou seja, acabamos de provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(\frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \mathbb{P}[S_n = R]\right) = -c - \frac{u^2}{2},$$



que por sua vez implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \mathbb{P}[S_n = R] = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{e^c},$$

como queríamos. □

**Corolário 6.5.2.**

$$\frac{1}{e^c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Note que o enunciado acima, em princípio, nada tem a ver com probabilidade, sendo basicamente uma questão de análise. A prova que daremos a seguir, por outro lado, usa bastante probabilidade. Vejamos:

*Demonstração.* Sabemos que toda probabilidade é menor ou igual a um. Além disso, pela Proposição 6.5.1, temos que  $\frac{1}{e^c} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  é o limite de uma sequência de probabilidades. Assim,

$$\frac{1}{e^c} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq 1,$$

para quaisquer  $a < b$ . Tomando os limites  $a \rightarrow -\infty$  e  $b \rightarrow +\infty$ , obtemos

$$\frac{1}{e^c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq 1.$$

Resta portanto provar a desigualdade no outro sentido. Sejam  $X_1, X_2, \dots$  as variáveis aleatórias da Proposição 6.5.1. Como  $\mathbb{E}[X_i] = 0$  e assumimos independência, temos que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)^2\right] = \frac{\mathbb{E}[(S_n)^2]}{n} = 1.$$

Portanto, pela Desigualdade de Tchebyshev (Proposição 5.8.1), para qualquer  $\lambda > 0$  vale que

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| > \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Note que a desigualdade acima vale para *qualquer*  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando o complementar, deduzimos que

$$\mathbb{P}\left[-\lambda \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq \lambda\right] \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Usando a desigualdade acima e novamente aplicando a Proposição 6.5.1, temos que

$$\frac{1}{e^c} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Como  $\lambda$  é arbitrário, obtemos

$$\frac{1}{e^c} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq 1,$$

concluindo a demonstração. □

Tendo em vista o Corolário 6.5.2, só falta calcular o valor da integral para encontrar o valor de  $e^c$ . Para isso, usamos um belo truque atribuído a Liouville:

**Proposição 6.5.3** (Liouville).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

*Demonstração.* Seja  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ . Portanto,

$$I^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

Façamos uma mudança para coordenadas polares na última integral dupla acima. Sejam  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , veja a figura abaixo:

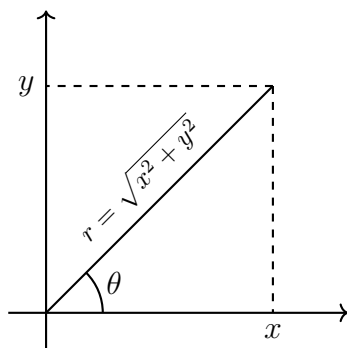


Figura 6.6. Coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e coordenadas polares  $(r, \theta)$ .

Recordemos do cálculo que  $dx dy = r dr d\theta$ . Além disso, o domínio  $\mathbb{R}^2$  corresponde ao domínio  $0 \leq r \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Portanto, fazendo a mudança de variáveis,

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = -2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_{r=0}^{r=\infty} = 2\pi.$$

E como  $I^2 = 2\pi$ , temos que  $I = \sqrt{2\pi}$ , concluindo a prova.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 6.5.1** (Fórmula de Wallis). Neste exercício, provaremos a chamada Fórmula de Wallis<sup>6</sup>:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right). \quad (6.14)$$

<sup>6</sup>John Wallis (1616-1703).

Em seguida, a usaremos para dar uma outra demonstração de que a constante  $e^c$  que aparece na Fórmula de Stirling (veja o Teorema 6.4.2 e sua demonstração) é igual a  $\sqrt{2\pi}$ .

a) Defina  $I(k) = \int_0^\pi (\sin(x))^k dx$ . Mostre que  $I(0) = \pi$  e  $I(1) = 2$ .

b) Mostre que  $\frac{I(k)}{I(k-2)} = \frac{k-1}{k}$  para qualquer inteiro  $k \geq 2$ .

c) Mostre que  $I(2k) = \pi \prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j}$  e  $I(2k+1) = 2 \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}$ .

d) Mostre que  $I(k)$  é não crescente em  $k$ .

e) Mostre que

$$1 \leq \frac{I(2k)}{I(2k+1)} \leq \frac{I(2k-1)}{I(2k+1)} = \frac{2k+1}{2k}.$$

f) Mostre que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I(2k+1)}{I(2k)} = 1$  e a partir disso prove a Fórmula de Wallis apresentada na equação (6.14).

g) Seja  $p_n = \prod_{k=1}^n \left( \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right)$ . Mostre que  $p_n = \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2}$ . Aplique o resultado

$$n! \sim e^c n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

provado no Teorema 6.4.2 para concluir que  $e^c = \sqrt{2\pi}$ .

**Exercício 6.5.2** (Outra prova da Fórmula de Stirling). O chamado *Método de Laplace* é um método para estimar o valor de uma integral do tipo  $\int_a^b e^{nf(x)} dx$ , onde  $n$  é um número bem grande. A ideia é a seguinte: suponha que  $f$  tenha um único máximo global em  $x_0 \in (a, b)$ . Logo, quando  $n$  é grande, a principal contribuição para a integral será dada por uma vizinhança de  $x_0$ , vizinhança esta que pode ser escolhida de um tamanho arbitrariamente pequeno. A seguir, discutiremos a prova do Método de Laplace de maneira bastante informal.

Vamos assumir que  $f$  é duas vezes diferenciável, que tem um único máximo global em  $x_0 \in [a, b]$ , e que  $f''(x_0) < 0$ . Pela Fórmula de Taylor (Teorema 3.4.8),

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + r(x - x_0),$$

onde  $r(\cdot)$  é um resto pequeno, ou seja, é uma função tal que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{r(y)}{|y|^2} = 0.$$

Como  $x_0$  é ponto de máximo no interior de  $[a, b]$ , temos que  $f'(x_0) = 0$ . E como  $f''(x_0) < 0$ , podemos escrever

$$f(x) \approx f(x_0) - \frac{1}{2}|f''(x_0)|(x - x_0)^2,$$

onde o símbolo  $\approx$  quer dizer “aproximadamente” de maneira bastante informal (estamos fazendo aqui apenas uma heurística<sup>7</sup>). Logo,

$$\int_a^b e^{nf(x)} dx \approx e^{nf(x_0)} \int_a^b \exp \left\{ -\frac{n|f''(x_0)|(x - x_0)^2}{2} \right\} dx.$$

Como  $n$  é grande e a exponencial decresce rapidamente, podemos substituir o intervalo de integração  $[a, b]$  pela reta inteira:

$$\int_a^b e^{nf(x)} dx \approx e^{nf(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{n|f''(x_0)|(x - x_0)^2}{2} \right\} dx.$$

Façamos agora uma mudança de variáveis na integral do lado direito acima. Seja  $u = \sqrt{n|f''(x_0)|}(x - x_0)$ . Daí,  $du = \sqrt{n|f''(x_0)|}dx$ . Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{n|f''(x_0)|(x - x_0)^2}{2} \right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{n|f''(x_0)|}} du = \sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(x_0)|}},$$

pelo truque de Liouville (Proposição 6.5.3). Assim, concluímos que

$$\int_a^b e^{nf(x)} dx \approx e^{nf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(x_0)|}}.$$

Essa discussão informal que fizemos pode ser transformada no seguinte teorema:

**Teorema 6.5.4** (Método de Laplace). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciável, tal que  $x_0 \in (a, b)$  é único máximo global (note que  $f''(x_0) < 0$ ). Então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_a^b e^{nf(x)} dx}{e^{nf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{n|f''(x_0)|}}} = 1.$$

Nosso exercício começa aqui:

a) Usando integração por partes, mostre por indução que

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx.$$

b) Fazendo a mudança de variáveis  $y = nx$ , mostre que

$$n! = e^{n \log n} \int_0^{\infty} e^{n(\log y - y)} dy.$$

<sup>7</sup>Para o significado do termo *heurística*, veja a nota de rodapé na página 194.

- c) Use o Método de Laplace (Teorema 6.5.4) para provar novamente a Fórmula de Stirling:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

onde o significado da relação de equivalência  $\sim$  foi dado na Definição 6.4.1.

**Exercício 6.5.3** (Estimativa do tipo Berry-Esseen). Nesta seção, foi provado que, para quaisquer  $a < b$ ,

$$\mathbb{P}\left[a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Qual seria a velocidade de convergência deste limite? Em probabilidade, tal tipo de estimativa é o que se denomina uma *estimativa de Berry-Esseen*. Para o leitor não familiarizado com Análise na Reta, sugerimos pular este exercício.

Assuma que  $S_n$  é soma de variáveis aleatórias  $X_i$  i.i.d. assumindo valores  $\pm 1$  com probabilidade meio para cada valor, tal como no enunciado da Proposição 6.5.1.

- a) Recorde que  $R = R(n, u)$ . Seja  $A(n, u)$  a expressão em (6.11) e seja  $B(n, u)$  a expressão em (6.12). Usando a Fórmula de Stirling provada no Exercício 6.4.4, mostre que

$$B(n, u)e^{\left\{\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+R)} - \frac{1}{12(n-R)}\right\}} \leq A(n, u) \leq B(n, u)e^{\left\{\frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+R)+1} - \frac{1}{12(n-R)+1}\right\}}.$$

- b) Mostre que  $|A(n, u) - B(n, u)| \leq \frac{c_1}{n}$  para alguma constante  $c_1$ .

- c) Mostre que, para qualquer função Lipschitz  $\Phi$ , vale

$$\left| \sum_{a \leq \frac{k}{\sqrt{n}} \leq b} \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} - \int_a^b \Phi(x) dx \right| \leq \frac{M}{\sqrt{n}},$$

lembrando que a soma é feita sobre os valores de  $k$  com mesma paridade de  $n$ , e  $M$  é a constante de Lipschitz de  $\Phi$ .

- d) Mostre que

$$\left| \sum_{a \leq \frac{k}{\sqrt{n}} \leq b} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} - \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right| \leq \frac{c_2}{n}.$$

para alguma constante  $c_2$ .

- e) Assuma que

$$\left| B(n, u) - \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{c_3}{n},$$

para alguma constante  $c_3$  (o que é verdade, mas você não precisa provar). Conclua então que

$$\left| \mathbb{P}\left[a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b\right] - \int_a^b \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \right| \leq \frac{c_4}{\sqrt{n}},$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $c_4$  é uma constante.

## 6.6 Passeio do Bêbado

Na Seção 6.1, tratamos de cadeias de Markov em um conjunto de estados finito  $X$ , mas também faz sentido uma cadeia de Markov em um conjunto de estados infinito. Claro, as probabilidades de transição não podem ser representadas neste caso por uma matriz finita, mas há muitos resultados interessantes a considerar.

Uma cadeia de Markov  $(X_0, X_1, X_2, \dots)$  cujo espaço de estados é infinito é o chamado *passeio aleatório* (ou passeio do bêbado). Neste modelo, o conjunto de estados é  $\mathbb{Z}^d$ . No instante inicial, a partícula (ou bêbado) está na origem, digamos. No próximo tempo, a partícula escolhe com igual probabilidade um de seus vértices vizinhos e salta para este vértice. Por exemplo, para  $d = 2$ , no tempo  $t = 0$ , a partícula começa na origem; no tempo  $t = 1$ , a partícula estará em um dos vértices  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ , com probabilidade  $1/4$  para cada. Veja a Figura 6.7 para uma ilustração das probabilidades de salto.

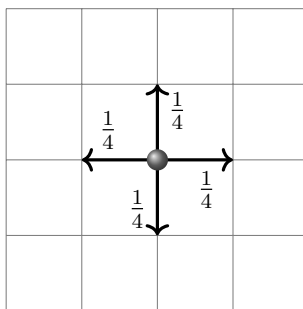


Figura 6.7. Passeio aleatório em  $\mathbb{Z}^2$ . A partícula pula com probabilidade  $1/4$  para alguns de seus vizinhos.

A seguir na Figura 6.8, vejamos uma ilustração da trajetória do passeio aleatório após 10000 passos. A princípio, o desenho pode parecer não muito aleatório; é uma tendência natural do ser humano buscar padrões. O leitor deve confiar no autor quanto ao desenho ter sido gerado aleatoriamente.

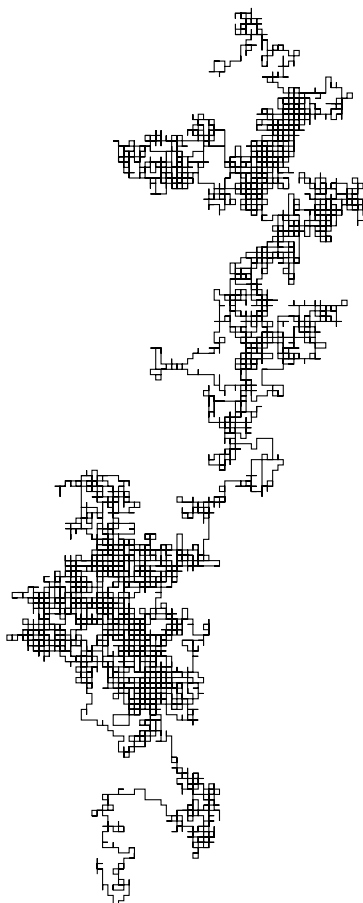


Figura 6.8. Exemplo de trajetória do passeio aleatório em dimensão dois com 10000 passos.

A pergunta que trataremos nesta seção é: a partícula sempre retorna à origem? Ou com probabilidade positiva a partícula não volta mais? Sendo mais precisos, definimos:

**Definição 6.6.1.** O passeio aleatório em  $\mathbb{Z}^d$  é dito

- a) recorrente, se  $\mathbb{P}(X_n = 0 \text{ infinitas vezes}) = 1$ ,
- b) transiente, se  $\mathbb{P}(X_n = 0 \text{ infinitas vezes}) = 0$ .

O teorema a seguir é a resposta para a questão suscitada acima, se o passeio aleatório seria recorrente ou transiente. Diz a lenda que o matemático Pólya<sup>8</sup> pensou neste problema de recorrência e transiência quando passeava ao acaso num parque de Zurique e repetidamente encontrava um mesmo casal de namorados.

**Teorema 6.6.2** (Teorema de Pólya). *O passeio aleatório em  $\mathbb{Z}^d$  é recorrente em dimensão  $d = 1, 2$  e transiente em dimensão  $d \geq 3$ .*

<sup>8</sup>George Pólya (1887-1985).

Não é difícil mostrar que se um passeio aleatório é recorrente, ele alcança qualquer sítio de  $\mathbb{Z}^d$ . A intuição é simples, como ele sempre volta ao ponto de partida, há sempre uma chance positiva (e independente do passado) de alcançar o ponto desejado. Por isso, nas palavras do matemático Kakutani, “*o pássaro bêbado eventualmente se perde, mas o homem bêbado sempre chega em casa!*”. Para provar o teorema acima, precisaremos do próximo lema. Denote a origem de  $\mathbb{Z}^d$  simplesmente por 0 e defina o seguinte tempo aleatório:

$$\tau_1 := \inf \{n \geq 1 : X_n = 0\},$$

onde  $\inf \emptyset = \infty$ . Em palavras,  $\tau_1$  é o tempo do primeiro retorno à origem. Caso o passeio aleatório não retorne à origem, este tempo é infinito. Definimos analogamente  $\tau_n$  como o tempo do  $n$ -ésimo retorno à origem. Além disso, definimos  $\tau_0$  simplesmente como zero. Como o passeio aleatório é *markoviano*, isto é, o próximo salto só depende do presente, vale o seguinte

**Fato da vida:**

$$\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^k. \quad (6.15)$$

Aceitaremos sem demonstração a igualdade acima, que é razoável: como o processo “esquece o passado”, é natural que a probabilidade do passeio retornar  $k$  vezes à origem seja igual ao produto de  $k$  parcelas iguais à probabilidade de retornar uma vez. A igualdade (6.15), por sua vez, implica imediatamente (verifique!) que o passeio aleatório é

- a) recorrente, se  $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$ ,
- b) transiente, se  $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) < 1$ .

Com isso em mente, vejamos:

**Lema 6.6.3.** *Para qualquer passeio aleatório  $(X_0, X_1, X_2, \dots)$ , são equivalentes*

- a)  $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$ .
- b)  $\mathbb{P}(X_n = 0 \text{ infinitas vezes}) = 1$ .
- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \infty$ .

**Demonstração.** Suponha que  $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$ . Por (6.15), temos que  $\mathbb{P}(\tau_k < \infty) = 1$  para todo  $n$ . Portanto,  $\mathbb{P}(X_n = 0 \text{ infinitas vezes}) = 1$ , ou seja, a)  $\Rightarrow$  b).

Seja agora  $V$  a variável aleatória que nos dá o número de vezes que o passeio aleatório visita a origem incluindo o tempo inicial, ou seja,

$$V := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[X_n=0]} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[\tau_k < \infty]}.$$



Tomando a esperança nas expressões acima, e depois comutando a esperança com o somatório,<sup>9</sup>

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_k < \infty) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^k.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Pela segunda igualdade em (6.16), temos que  $b) \Rightarrow c)$ . Por fim, se tivéssemos  $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) < 1$ , então pela soma de uma progressão geométrica o último somatório acima seria finito. Logo, a negação de a) implica a negação de c), ou seja,  $c) \Rightarrow a)$ , concluindo a demonstração.  $\square$

*Demonstração do Teorema de Pólya.* Basta verificar o item c) do Lema 6.6.3. Note que o passeio aleatório só pode estar na origem em tempos pares. Para dimensão  $d = 2$ , temos que

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{j=0}^n \frac{(2n)!}{j!j!(n-j)!(n-j)!},$$

pois para voltar à origem é necessário dar um mesmo número de passos para a direita e para a esquerda, e um mesmo número de passos para cima e para baixo. Multiplicando e dividindo por  $(n!)^2$ , obtemos

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 = \frac{1}{4^{2n}} \frac{(2n)!^2}{(n!)^2(n!)^2},$$

onde, na segunda igualdade anterior, usamos a Fórmula de Lagrange provada no Exercício 2.4.16. Aplicando agora a Fórmula de Stirling provada no Exercício 6.4.4, obtemos que  $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \geq C/n$  para alguma constante  $C > 0$ . Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \infty,$$

e concluímos que o passeio aleatório é recorrente para  $d = 2$ .

Consideremos agora  $d = 3$ . Nosso objetivo é mostrar que  $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \leq C/n^{\frac{3}{2}}$  para alguma constante  $C > 0$ . Neste caso,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{2n} = 0) &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k \leq n}} \frac{(2n)!}{j!^2 k!^2 (n-j-k)!^2} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k \leq n}} \left( \frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right)^2.\end{aligned}$$

<sup>9</sup>É permitido comutar a esperança com o somatório graças ao chamado *Teorema de Fubini*, que não foi visto neste livro.

Note que

$$\sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k \leq n}} \frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} = 1,$$

pois é uma soma de probabilidades (pense no conjunto de sequências ternárias de tamanho  $n$ ). Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{2n} = 0) &\leq \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \max_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k \leq n}} \left\{ \frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right\} \sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k \leq n}} \frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \max_{\substack{0 \leq j, k \leq n \\ j+k \leq n}} \left\{ \frac{1}{3^n} \cdot \frac{n!}{j!k!(n-j-k)!} \right\}. \end{aligned}$$

Como os coeficientes binomiais crescem até a metade e depois decrescem, não é difícil verificar que o máximo de  $j!k!(n-j-k)!$  é atingido quando  $j, k$  e  $n-j-k$  estão todos próximos de  $n/3$ . A Fórmula de Stirling nos dá então que

$$\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}$$

está próximo de

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{n^n}{j^j k^k (n-j-k)^{n-j-k}} \cdot \sqrt{\frac{n}{jk(n-j-k)}}.$$

Substituindo  $j$  e  $k$  por  $n/3$  (na verdade, pelo inteiro mais próximo), concluímos que o segundo fator na expressão acima é menor ou igual a  $C_1 3^n$ , e que o terceiro fator é menor ou igual a  $C_2/n$ , levando a  $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) \leq C/n^{3/2}$ . Portanto,  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) < \infty$  e concluímos que o passeio aleatório é transiente em dimensão  $d = 3$ .

O caso  $d = 1$  está nos exercícios, e o caso  $d \geq 4$ , apesar de ser uma consequência do caso  $d = 3$ , não será visto aqui.  $\square$

## Exercícios

**Exercício 6.6.1.** Mostre que o passeio aleatório é recorrente em uma dimensão.

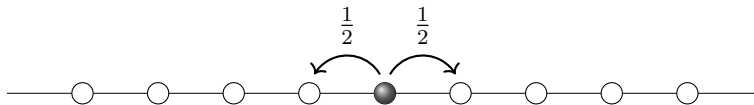
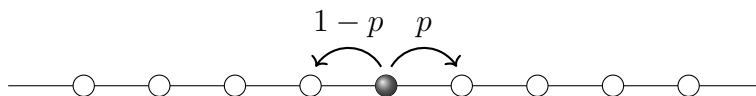


Figura 6.9. Passeio aleatório em  $\mathbb{Z}$ .

**Exercício 6.6.2.** Considere o passeio aleatório em  $\mathbb{Z}$  com viés: ou seja, a cada instante o bêbado joga uma moeda cuja probabilidade de mostrar cara é  $p \neq$


 Figura 6.10. Passeio aleatório com viés em  $\mathbb{Z}$ .

$1/2$ . Se o resultado da moeda é cara, o bêbado dá um passo para a direita; se o resultado da moeda é coroa, o bêbado dá um passo para a esquerda. Veja a Figura 6.10.

a) Mostre que  $\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$ .

b) Prove que o passeio aleatório com viés é transiente.

**Exercício 6.6.3.** Considere o passeio do bêbado hesitante em uma dimensão: com probabilidade  $1/2$ , o bêbado fica no mesmo lugar, com probabilidade  $1/4$  ele vai para a direita, e com probabilidade  $1/4$  ele vai para a esquerda, veja a Figura 6.11. Mostre que o passeio é recorrente.

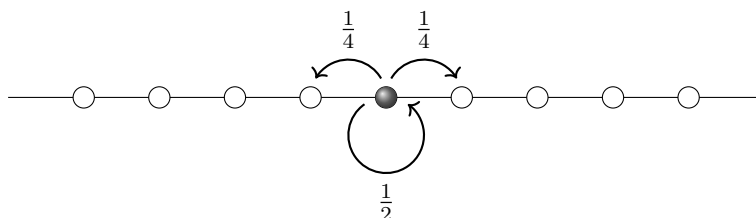


Figura 6.11. Passeio do bêbado hesitante.



## CAPÍTULO 7

# SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS SELECIONADOS

## Soluções do Capítulo 1

### 1.1 Princípio de Indução

**1.1.1.** Para  $n = 1$ , temos que  $(1 + a)^1 = 1 + a$ . Suponha agora que a desigualdade seja verdadeira para um certo  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja, suponha que

$$(1 + a)^n \geq 1 + na. \quad (7.1)$$

Multipliquemos cada membro da desigualdade acima por  $1 + a$ , que é um número positivo, pois  $a > -1$  por hipótese. Logo,

$$(1 + a)^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a.$$

Ou seja,  $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$ , que é exatamente a desigualdade (7.1) com  $n$  substituído por  $n + 1$ . Portanto, pelo Princípio de Indução, concluímos que  $(1 + a)^n \geq 1 + na$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**1.1.2.** Para  $n = 1$ , a soma é 1. Para  $n = 2$ , a soma é  $1 + 3 = 4$ . Para  $n = 3$ , a soma é  $1 + 3 + 5 = 9$ . Para  $n = 4$ , a soma é  $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ , e o padrão sugere que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

para todo  $n \geq 1$ . Provemos tal conjectura por indução. Para  $n = 1$ ,  $1 = 1^2$  e temos a base de indução. Suponha o resultado válido para um certo  $n$ . Daí,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Somando  $2(n + 1) - 1$  a ambos os membros da desigualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) &= n^2 + 2(n + 1) - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2, \end{aligned}$$

que é a fórmula buscada para  $n + 1$ . Portanto, pelo Princípio de Indução, concluímos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \geq 1.$$

**1.1.7.** Para  $n = 0$ , temos que  $8^0 - 1 = 1 - 1 = 0$  que é múltiplo de 7. Suponha que a afirmação seja válida para um certo  $n$ . Daí,  $8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1 = (7 + 1)8^n - 1 = 7 \cdot 8^n + (8^n - 1)$ . Pela hipótese de indução,  $8^n - 1$  é múltiplo de 7. Além disso,  $7 \cdot 8^n$  é claramente múltiplo de 7. Logo,  $7 \cdot 8^n + (8^n - 1)$  é múltiplo de 7 e, portanto,  $8^{n+1} - 1$  é múltiplo de 7. Assim, pelo Princípio de Indução, temos que  $8^n - 1$  é múltiplo de 7 para todo  $n \geq 0$ .

**1.1.10.** Para  $n = 1$ , temos que  $1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ . Suponha a afirmação válida para um certo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Somando  $q^n$  a ambos os membros da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n &= \frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n = \frac{1 - q^n + q^n(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \end{aligned}$$

que é a fórmula desejada para o caso  $n + 1$ . Portanto, pelo Princípio de Indução, concluímos que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \forall n \geq 1.$$

**1.1.11.** O caso  $N = 1$  é imediato. Faremos a prova por indução para o caso  $N > 1$ . Para  $m = 2$ , temos que

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 = 1 - \frac{2}{N} + \frac{1}{N^2} > 1 - \frac{2}{N} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2-1} - \frac{1}{N},$$

o que nos dá a base de indução. Suponha que a desigualdade seja válida para um certo  $m$ , ou seja, suponha que

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m > \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{m-1} - \frac{1}{N}.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade anterior por  $1 - \frac{1}{N}$ , que é um número positivo (pois estamos supondo  $N > 1$ ), obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{m+1} &> \left(1 - \frac{1}{N}\right)^m - \frac{1}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right)^m - \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \\ &> \left(1 - \frac{1}{N}\right)^m - \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1} > \left(1 - \frac{1}{N}\right)^m - \frac{1}{N}$ . Assim, pelo Princípio de Indução, temos que

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right)^m > \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{m-1} - \frac{1}{N}, \quad \forall m \geq 2.$$

**1.1.17.** Para  $n = 1$  o resultado é correto. Afinal, se há uma pessoa na sala, e pelo menos uma pessoa na sala é torcedora, então todas as pessoas na sala são torcedoras. Logo, a base de indução é correta.

Denote por  $P(n)$  a afirmação do enunciado do problema. O problema no argumento está no fato do passo de indução não serve para provar que  $P(1)$  implica  $P(2)$ . Vejamos: suponha que há duas pessoas na sala,  $A$  e  $B$ , e a pessoas  $A$  é torcedora do Fluminense de Feira. Retirando a pessoa  $B$  da sala, fica apenas a pessoa  $A$ . Pela base de indução, concluímos que a pessoa  $A$  é torcedora (já sabíamos disso). Colocamos a pessoa  $B$  de volta na sala, e retiramos a pessoa  $A$ . Neste momento, não podemos concluir nada!, eis portanto o erro no argumento. Em resumo,  $P(1)$  é verdadeira, e podemos dizer também que

$$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$$

mas  $P(1) \not\Rightarrow P(2)$ , ou seja, a falsa prova por indução apresentada falha apenas no passo de 1 para 2.

**1.1.18.** O erro é similar ao do Exercício 1.1.17. Quando aplicamos o passo de indução, para concluir que  $n + 1$  é ímpar, foi usado que  $n - 1$  é ímpar. Logo, para  $n = 1$ , o argumento usa que  $1 - 1 = 0$  é ímpar, mas zero é par!

## 1.2 Regra da Soma e do Produto

**1.2.1.** Pela Regra do Produto, temos  $8 \times 8 \times 8$  possibilidades.

**1.2.2.** Pela Regra do Produto, temos  $5^{10}$  possibilidades.

**1.2.3.** Usando a Regra da Soma e a Regra do Produto, temos  $9 \times 9 \times 9 + 9 \times 9 + 9 = 819$  possibilidades.

**1.2.4.** Pela Regra da Soma e pela Regra do Produto,  $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ .

## 1.3 Bijeções e Cardinalidade

**1.3.1.** Temos que  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ . Um número  $d$  divide 360 se, e somente se, é da forma  $d = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$ , com os expoentes naturais satisfazendo  $0 \leq \alpha \leq 3$ ,  $0 \leq \beta \leq 2$  e  $0 \leq \gamma \leq 1$ . Logo, temos uma bijeção entre os divisores de 360 e as ternas  $(\alpha, \beta, \gamma)$  satisfazendo as condições anteriores. Como temos quatro escolhas para  $\alpha$ , três escolhas para  $\beta$  e duas escolhas para  $\gamma$ , concluímos, pela Regra do Produto, que o número de ternas possíveis é  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ . Portanto, o número de divisores de 360 é 24. Para encontrar o número de divisores pares de 360, basta pensar qual a condição em  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  para que  $d = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$  seja par.

**1.3.2.** Pela Regra do Produto, respectivamente  $k^n$  e  $n^n$ .

## 1.4 Relações

**1.4.1.** Como dito no texto, uma função  $f : A \rightarrow B$  é uma relação binária  $\mathcal{R}$  tal que para todo elemento  $a \in A$  existe um único  $b \in B$  tal que  $(a, b) \in \mathcal{R}$ . Há diferentes formas de se expressar o que se pede. Vejamos algumas: uma função injetiva  $f : A \rightarrow B$  é uma relação binária  $\mathcal{R}$  que é função e, além disso, se  $(a, b) \in \mathcal{R}$  e  $(a, c) \in \mathcal{R}$ , então  $b = c$ . Uma função sobrejetiva  $f : A \rightarrow B$  é uma relação binária  $\mathcal{R}$  que é função e, além disso, para todo  $b \in B$ , existe  $a \in A$  tal que  $(a, b) \in \mathcal{R}$ . uma função injetiva  $f : A \rightarrow B$  é uma relação binária  $\mathcal{R}$  que é função e, além disso, é injetiva e sobrejetiva.

Em termos da representação gráfica, uma função é uma relação binária tal que de todo elemento de  $A$  sai uma flecha. Uma função injetiva é uma relação binária que é função e, além disso, não há flechas que cheguem num mesmo elemento de  $B$ . Uma função sobrejetiva é uma relação binária que é função e, além disso, para todo elemento de  $b \in B$  há pelo menos uma flecha chegando nele. Uma função bijetiva é uma relação que é função injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo. Veja a Figura 7.1 para uma ilustração.

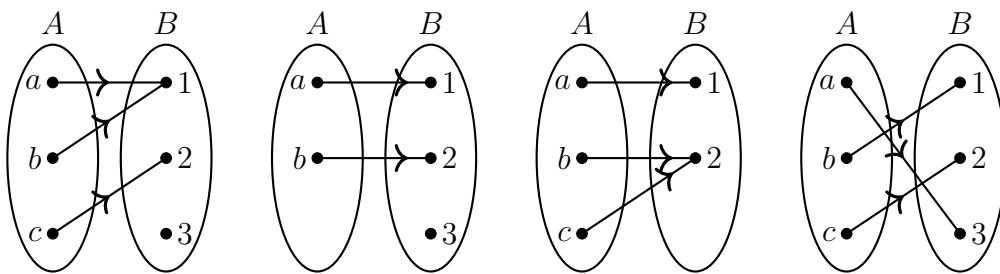


Figura 7.1. Da esquerda para a direita, exemplo de: função (que não é nem injetiva nem sobrejetiva), função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva.

**1.4.3.** O nome *propriedade* para uma relação unitária é bastante razoável. Uma relação unitária  $S$  é um subconjunto de  $X$ , logo representa os elementos de  $X$  que têm uma certa característica. Por exemplo, ser um número primo é uma propriedade de  $\mathbb{N}$ . Ou seja, a relação unitária “ser primo” é dada por  $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots\} \subset \mathbb{N}$ .

**1.4.4.** Poderíamos pintar um triângulo ligando os pontos  $(x, y, z)$  de cada elemento da relação ternária. Entretanto, apenas um triângulo não distinguiria  $(x, y, z)$  de  $(y, x, z)$ , por exemplo. Podemos então desenhar, além do triângulo, uma flecha saindo de  $x$  para  $y$  e depois uma flecha saindo de  $y$  para  $z$ , veja a Figura 7.2:



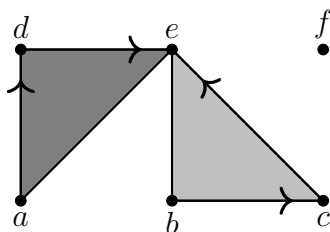


Figura 7.2. Possível representação gráfica para a relação ternária  $\mathcal{R} = \{(a, d, e), (b, c, e)\}$ .

**1.4.6.** a) Se  $\mathcal{R}$  é reflexiva, para todo  $x \in X$  vale que  $(x, x) \in \mathcal{R}$ , que leva a  $Id_X \subset \mathcal{R}$ . Se  $Id_X \subset \mathcal{R}$ , então para todo  $x \in X$  vale que  $(x, x) \in \mathcal{R}$ , o que nos diz que  $\mathcal{R}$  é reflexiva. O item b) é análogo.

**1.4.10.** a) Para tornar uma relação reflexiva, basta colocar os laços que faltam (caso falte algum). Assim, o fecho reflexivo é dado por  $\mathcal{R} \cup Id_X$ . b) Para tornar uma relação simétrica, basta colocar as flechas que faltam no sentido contrário. Assim, o fecho simétrico é dado por  $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ . c)  $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \cup Id_X$ .

**1.4.11.** a)  $\mathcal{R} \circ Id_X = Id_X \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$ . b) Veja a Figura 7.3.

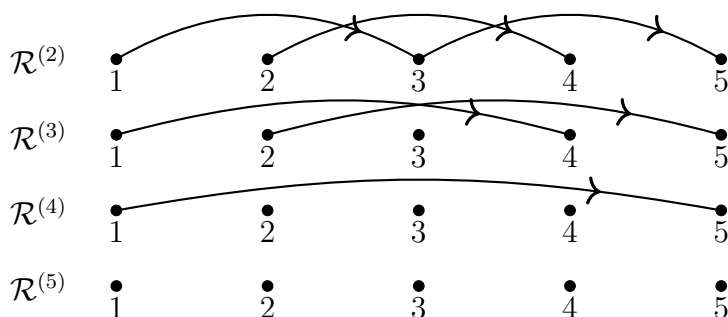


Figura 7.3. Relações  $\mathcal{R}^{(2)}$ ,  $\mathcal{R}^{(3)}$ ,  $\mathcal{R}^{(4)}$  e  $\mathcal{R}^{(5)}$ .

c)  $\mathcal{R}^*$  é a relação tal que  $(x, y) \in \mathcal{R}^*$  sse for possível ir de  $x$  a  $y$  através de um número finito de flechas de  $\mathcal{R}$ .

## 1.5 Relações de Equivalência

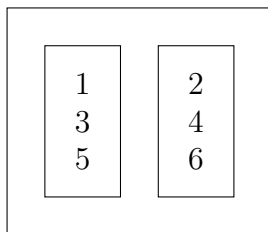
**1.5.1.** Uma forma é

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (1, 5), (5, 1), (5, 5), (3, 5), (5, 3), \\ (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (2, 6), (6, 2), (6, 6), (4, 6), (6, 4)\},$$

outra forma seria

$$\mathcal{R} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\},$$

e outra seria



**1.5.4.** Sem perda de generalidade, denote o conjunto das  $n$  pessoas por  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ . Seja  $X$  o seguinte conjunto:

$$X = \{(a, b) \in A \times A ; a \neq b\}.$$

Em palavras,  $X$  é o conjunto de duplas de duas pessoas. Consideremos agora a seguinte relação de equivalência em  $X$ . Diremos que

$$(a, b) \sim (c, d) \iff \text{os pares são iguais, ou } a = d \text{ e } b = c.$$

Em palavras, a relação de equivalência  $\sim$  nos diz que duas duplas ordenadas de pessoas são iguais se as pessoas nestas duplas são as mesmas.

O conjunto  $X$  tem  $n(n-1)$  elementos. Como cada de equivalência em  $X$  tem dois elementos, pela Proposição 1.5.4, concluímos que há  $\frac{n(n-1)}{2}$  classes de equivalência em  $X$ , que é a resposta buscada.

## 1.6 Probabilidade (espaços equiprováveis)

**1.6.1.**  $A = \{2, 3, 5\}$  e  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Portanto,  $|A|/|\Omega| = 3/6 = 1/2$  é a probabilidade procurada.

**1.6.4.** O espaço amostral é

$$\Omega = \{\text{cara, coroa}\} \times \{\text{cara, coroa}\} \times \{\text{cara, coroa}\}.$$

Pela Regra do Produto,  $|\Omega| = 2^3 = 8$ . Chamemos cara de  $c$  e coroa de  $k$ . As sequências favoráveis são  $(c, c, c)$ ,  $(c, c, k)$ ,  $(c, k, c)$  e  $(k, c, c)$ . Ou seja,  $|A| = 4$ . Portanto, a probabilidade é  $|A|/|\Omega| = 4/8 = 1/2$ .

Outra solução seria por simetria. O número de sequências com 2 ou 3 caras é igual ao número de sequências com 2 ou 3 coroas, que é igual ao número de sequências com 0 ou 1 cara. Portanto,  $|A| = |A^c|$ . Logo,  $|A|/|\Omega|$  deve ser igual a  $1/2$ .

**1.6.5.** Usando a Regra da Soma e a Regra do Produto, obtemos como resposta  $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} + \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} + \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} + \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ .

**1.6.6.** Usando a Regra do Produto,  $|\Omega| = 2 \cdot 6 \cdot 52 = 624$ . Logo, a probabilidade pedida é  $1/624$ .

**1.6.7.** Resposta:  $11/36$ .

**1.6.8.** São dois bodes e um carro. Vamos numerar os bodes,  $B_1$  e  $B_2$ . Se você escolher (sem saber) a porta com o carro atrás, então o apresentador abrirá,

digamos,  $B_1$ , e você perderá o carro. Se você começar com o bode  $B_1$ , então o apresentador abrirá a porta  $B_2$ , e você mudará para a porta restante, ganhando o carro. Se você começar com o bode  $B_2$ , então o apresentador abrirá a porta  $B_1$ , e você mudará para a porta restante, ganhando o carro. Em resumo, trocando de porta temos duas chances em três. Ou seja, a probabilidade de ganhar trocando de porta é igual a  $2/3$ .

## Soluções do Capítulo 2

### 2.1 Permutações e Arranjos

**2.1.1.** Resposta:  $n!$  maneiras.

**2.1.2.** Uma função  $f : A \rightarrow A$  é injetora se, e somente se, é sobrejetora e se, e somente se, é bijetora. Logo, há  $n!$  possibilidades, para qualquer uma das perguntas.

**2.1.3.** Para  $f : A \rightarrow B$  injetora, com  $|B| < |A|$ , não há nenhuma possibilidade. Para  $f : A \rightarrow B$  injetora, com  $|B| \geq |A|$ , há  $\frac{|B|!}{(|B| - |A|)!}$  possibilidades.

**2.1.4.** Imagine que coloquemos os 12 times numa fila, e pareemos o primeiro com o segundo, o terceiro com o quarto e assim por diante. São  $12!$  maneiras de colocar os times em uma fila. Entretanto, várias filas distintas correspondem ao mesmo pareamento. Quantas são as filas distintas que correspondem ao mesmo pareamento? Como podemos permutar os pares, e cada par pode ser invertido, temos  $6! \cdot 2^6$  filas que correspondem ao mesmo pareamento dos times.

Daí, concluímos que a resposta é dada por  $\frac{12!}{6!2^6}$ .

**2.1.5.** Resposta:  $5^{n-4} \cdot 4!$ .

**2.1.6.** Resposta:  $3^{n-3} \cdot 3!$ .

**2.1.7.** Resposta:  $(9!)^3 \cdot (3!)^9$ .

### 2.2 Permutações com Repetição

**2.2.1.** Para a palavra MISSISSIPI, temos dez letras, sendo quatro S's e quatro I's. Logo, temos  $\frac{10!}{4!4!}$  permutações diferentes. Para a palavra PINDAMONHANGABA, temos quinze letras, sendo três N's e quatro A's. Logo, temos  $\frac{15!}{3!4!}$  permutações diferentes.

**2.2.2.** Podemos fazer uma bijeção entre o conjunto de caminhos de  $A$  a  $B$  com o conjunto de permutações de dez letras  $D$  e dez letras  $A$ , onde cada letra  $D$  representa *direita* e cada letra  $A$  representa *acima*. Veja, por exemplo, a Figura 7.4. Portanto, como temos uma bijeção, o número de trajetórias é igual ao número de palavras, que é  $\frac{20!}{10!10!}$ . Para calcular o número de trajetórias que passam pelos pontos  $C$  e  $D$ , divida cada trajetória em três partes, de  $A$  a  $C$ , de  $C$  a  $D$ , e de  $D$  a  $B$ . Calcule cada parte separadamente e use a Regra do Produto.

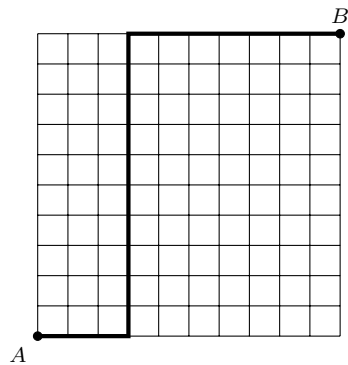


Figura 7.4. Trajetória associada à palavra  $DDDAAAAAAAAAAADD DDDDD$ .

**2.2.3.** Veja um exemplo de caminho possível na Figura 7.5 abaixo:

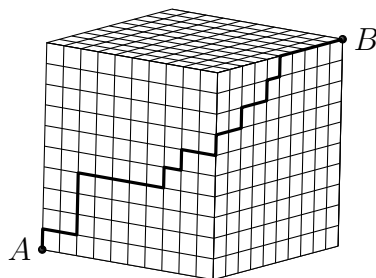


Figura 7.5. Exemplo de trajetória.

Vamos separar o problema em casos. Primeiro observemos que a formiga sempre passará por duas faces adjacentes do cubo, uma contendo o vértice  $A$  e outra contendo o vértice  $B$ , como ilustra a Figura 7.5. O número de caminhos em duas dadas faces segue uma contagem semelhante a do Exercício 2.2.3: são vinte passos numa direção e dez passos na outra. Logo, temos uma permutação com repetição:  $\frac{30!}{20!10!}$ . De quantas maneiras podemos escolher as duas faces por onde passará a formiga:  $3 \times 2 = 6$ . Logo, a resposta seria  $6 \times \frac{30!}{20!10!}$ ? Errado, pois neste caso contamos algumas trajetórias duas vezes e algumas três vezes. Por exemplo, a trajetória da Figura 7.6 foi contada três vezes (pois foi contada uma vez em três diferentes pares de faces).

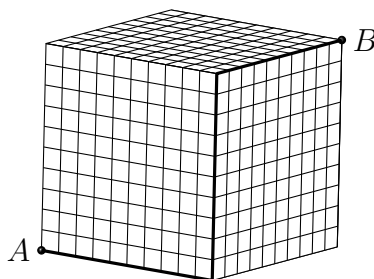


Figura 7.6. Trajetória contada três vezes.

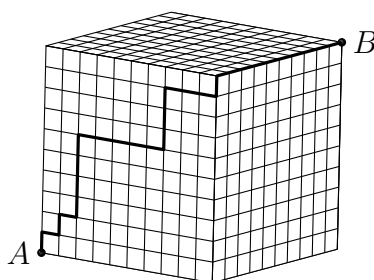


Figura 7.7. Trajetória contada duas vezes.

Quantas são as trajetórias como a da Figura 7.6, que foram contadas três vezes? São  $3 \times 2 = 6$ .

Quantas são as trajetórias como a da Figura 7.7, que foram contadas duas vezes? Note que uma (única) aresta será percorrida inteiramente, sendo que esta aresta deve estar conectada a  $A$  ou a  $B$ . Logo temos 6 escolhas para esta aresta. Uma vez escolhida a aresta, teremos  $\frac{20!}{10!10!} - 2$  possibilidades para fazer o percurso que falta, veja a Figura 7.7 para se ter uma ideia. Logo, temos um total de  $6 \times \left( \frac{20!}{10!10!} - 2 \right)$  trajetórias como a da Figura 7.7.

Descontando as repetições, temos como resposta  $6 \times \frac{30!}{20!10!} - 6 \times 2 - 6 \left( \frac{20!}{10!10!} - 2 \right)$ .

**2.2.4.** Podemos fazer uma bijeção de cada trajetória com uma permutação de 30 letras, sendo 10 letras  $D$ , 10 letras  $E$  e 10 letras  $C$ . Logo, temos como resposta  $30!/(10!)^3$ .

**2.2.9.** Imagine uma fila com as  $n$  pessoas. As  $n_1$  primeiras pessoas desta fila serão colocadas no Grupo 1, as próximas  $n_2$  pessoas da fila serão colocadas no grupo 2 e assim por diante. Temos  $n!$  permutações de pessoas na fila. Diremos que duas destas filas são equivalentes se levam as pessoas nos mesmos grupos. Isto acontece se, e somente se, estas duas filas têm as mesmas pessoas nas  $n_1$  primeiras posições (permutando-se os lugares), as mesmas pessoas nas  $n_2$  posições seguintes etc. Logo, temos  $n_1! \cdots n_k!$  elementos em cada classe de equivalência. Portanto, pela Proposição 1.5.4, temos  $\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$  classes de equivalência.

**2.2.11.** O lado esquerdo da igualdade sugere contar o número de permutação de  $n$  objetos, sendo que há  $n_1$  objetos do tipo 1,  $n_2$  objetos do tipo 2 e assim por diante, com  $n = n_1 + \cdots + n_k$ . Uma resposta para o problema é o lado esquerdo

da igualdade. Para obter o lado direito, vamos contar este número de permutações com repetição da seguinte maneira: primeiro vamos escolher as posições dos objetos do tipo 1. Como há  $n$  posições, e há  $n_1$  objetos do tipo 1, há  $\binom{n}{n_1}$  possibilidades. Escolhidas as posições dos objetos do tipo 1, vamos escolher as posições dos objetos do tipo 2. Bem, restaram  $n - n_1$  posições, e há  $n_2$  objetos do tipo 2, o que nos dá  $\binom{n-n_1}{n_2}$  possibilidades, e assim por diante.

**2.2.12.** Separe em casos e use a Regra da Soma. Um caso seria o de 4 letras iguais, outro de 3 letras iguais e outra distinta, outro caso seriam dois pares de letras iguais, outro caso seria o de duas letras iguais e as duas outras distintas entre si e distintas da primeira, e o último caso seriam 4 letras distintas.

## 2.3 Permutações Circulares

**2.3.1.** É mais fácil calcular o total de permutações e depois subtrair as permutações que não interessam (aquelas onde as tais duas pessoas *estão* juntas). O total de permutações circulares é  $15!/15 = 14!$ . Chamemos as duas pessoas de  $A$  e  $B$ . Para calcular as permutações onde as duas pessoas estão juntas, pense nas duas pessoas como um único objeto (um pouco feio pensar assim, pessoas não são objetos, mas releve e continue com a ideia), que pode ser colocado de duas maneiras, como  $AB$  ou como  $BA$ . Logo, temos 14 objetos, que nos dá  $14!/14 = 13!$  permutações circulares. Como ainda há as escolhas  $AB$  ou  $BA$ , o número total de permutações circulares onde estas duas pessoas  $A$  e  $B$  estão juntas é  $2 \cdot 13!$ . Portanto, o número de permutações onde estas duas pessoas *não* estão juntas é  $14! - 2 \cdot 13! = 12 \cdot 13!$ .

## 2.4 Combinações e Argumentos Combinatórios

**2.4.3.** Para uma prova via argumento combinatório, contemos quantas são as comissões de  $k$  pessoas escolhidas dentre um grupo de  $n$  pessoas, sendo que cada comissão deve ter um chefe. Para escolher a comissão, há  $\binom{n}{k}$  possibilidades. Em seguida escolhemos o chefe da comissão, para o qual há  $k$  possibilidades. Logo, temos como resposta  $k \binom{n}{k}$ . Uma segunda resposta é a seguinte. Vamos começar escolhendo o chefe da comissão: para tal escolha, há  $n$  possibilidades. Em seguida, temos que escolher os  $k - 1$  membros restantes da comissão dentre as  $n - 1$  pessoas do grupo (o chefe já foi escolhido, e ele faz parte da comissão). Para esta escolha, temos  $\binom{n-1}{k-1}$ , que nos dá  $n \binom{n-1}{k-1}$  como resposta. Daí,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

**2.4.7.** a)  $\frac{1}{2} \binom{12}{6}$ . b)  $\frac{30!}{6!(5!)^6}$ . c)  $\frac{30!}{(2!)^2(6!)^2(9!)^2}$ .

**2.4.8.** 1ª **solução:** Cada jogador jogará  $n - 1$  partidas. Como são  $n$  jogadores, temos, a princípio  $n(n - 1)$  partidas. Entretanto, aqui estamos contando cada partidas exatamente duas vezes. Logo, temos como resposta  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

**2ª solução:** Numeremos os jogadores de 1 a  $n$ . O primeiro jogador deve jogar com os demais, o que nos dá  $n - 1$  partidas. O segundo jogador deve jogar com os demais, exceto com o primeiro, cuja partida já foi contabilizada, o que nos dá  $n - 2$  partidas, e assim por diante, até o  $n - 1$ -ésimo jogador, que resta jogar com o  $n$  ésimo jogador. Logo, temos um total de

$$(n - 1) + (n - 2) + \cdots + 2 + 1$$

partidas. A soma acima é a soma de progressão aritmética, cuja fórmula é obtida somando o primeiro com o último, multiplicando esta soma pelo número de termos e depois dividindo o resultado por dois. Logo, temos como resposta  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

**3ª solução:** O número de partidas é igual ao número de maneiras de se escolher dois jogadores dentre os  $n$  jogadores disponíveis. Bem, o número de maneiras de se escolher 2 objetos de  $n$  é igual a  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ , que é a resposta buscada.

**2.4.12.** a)  $2^{2\binom{n}{2}}$ . b)  $2^{2\binom{n}{2}}$ . c)  $2^{n+\binom{n}{2}}$ . d)  $2^n \cdot 3^{\binom{n}{2}}$ . e)  $2^{\binom{n}{2}}$ . f)  $2^{\binom{n}{2}}$ . g)  $3^{\binom{n}{2}}$ . h)  $3^{\binom{n}{2}}$ .

**2.4.13.** a) Vamos representar as pessoas que preferem o sorvete  $A$  pela letra  $P_A$ , pessoas que preferem o sorvete  $B$  por  $P_B$ , e pessoas que não têm preferência por  $P_I$ . Coloquemos as pessoas numa certa ordem, digamos, todas as pessoas  $P_A$  no início e todas as pessoas  $P_B$  no final:

$$\underbrace{P_A P_A \cdots P_A}_a \underbrace{P_I P_I \cdots P_I}_{2n-a-n} \underbrace{P_B P_B \cdots P_B}_b .$$

Como os sorvetes são distribuídos numa certa ordem aleatória ao acaso, o espaço amostral  $\Omega$  é o das sequências de  $2n$  letras, sendo  $n$  letras  $A$  e  $n$  letras  $B$ . Logo, usando a fórmula para permutação com repetição,  $|\Omega| = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$ . Além disso, o evento  $E = \text{todas as pessoas saem satisfeitas}$  corresponde às sequências que têm  $A$ 's nas primeiras  $a$  entradas e  $B$ 's nas últimas  $b$  entradas. Logo, usando novamente permutação com repetição,  $|E| = \frac{(2n-a-b)!}{(n-a)!(n-b)!} = \binom{2n-a-b}{n-a}$ . Assim,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}} .$$

b) Coloquemos todos os sorvetes numa certa ordem, digamos todos os  $n$  sorvetes do sabor  $A$  na primeira metade, e todos os sorvetes do sabor  $B$  na segunda metade:

$$\underbrace{AAA \cdots A}_n \underbrace{BBB \cdots B}_n .$$

Como as pessoas chegam ao acaso, o espaço amostral  $\Omega$  é o das sequências de  $P_A$ 's,  $P_B$ 's e  $P_I$ 's, em quantidades  $a$ ,  $b$  e  $2n - a - b$  de cada tipo, respectivamente. Daí, usando a fórmula de permutação com repetição, temos que

$$|\Omega| = \frac{(2n)!}{a!b!(2n-a-b)!} .$$

Além disso, o evento  $E = \text{todas as pessoas saem satisfeitas}$  corresponde às sequências nas quais as pessoas  $P_A$ 's estão todas na primeira metade e as pessoas  $P_B$ 's estão todas na segunda metade. Logo, pela fórmula de permutação com repetição e pela Regra do Produto,

$$|E| = \frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \frac{n!}{b!(n-b)!}.$$

Daí, concluímos que

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\frac{n!}{a!(n-a)!} \cdot \frac{n!}{b!(n-b)!}}{\frac{(2n)!}{a!b!(2n-a-b)!}} = \frac{\binom{2n-a-b}{n-a}}{\binom{2n}{n}}.$$

**2.4.14.** É preciso escolher, a princípio, se há ordem ou não na retirada das cartas. Se pensarmos que há ordem, ou seja, retira-se uma carta, depois outra, depois outra, teremos como resposta  $\frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{52 \cdot 51 \cdot 50}$ . Se escolhermos não usar ordem, ou seja, se pensarmos que as três cartas são retiradas simultaneamente, teremos como resposta  $\frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}$ , que nos dá o mesmo resultado.

Na solução equivocada apresentada no problema, o denominador foi contado como se não houvesse ordem, ou seja como  $\binom{52}{3}$ , mas o numerador foi contado como se houvesse ordem (primeira carta, segunda carta etc.), daí o lapso.

**2.4.17.** A probabilidade pedida é igual a  $\frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ . A Fórmula de Lagrange, provada no Exercício 2.4.16, completa a solução.

**2.4.22.** Vamos contar as listas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tais que  $x_i \in \{a, b, c\}$  para todo  $i = 1, \dots, n$  e, para algum  $i$ ,  $x_i \neq a$ . O total de listas assim é  $3^n - 1$ . Por outro lado, seja  $A_i$  o conjunto das listas tais que  $x_i \neq a$  e  $x_j = a$  para  $j < i$ . Daí, pela Regra da Soma,

$$3^n - 1 = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| = 2 \cdot 3^{n-1} + \dots + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0.$$

**2.4.25.** Seja  $P$  um conjunto com  $n$  elementos, e imagine que estes elementos são  $n$  pessoas. Vamos contar de duas maneiras o número de pares de pares de pessoas (sem ordem), sendo  $n$  o total de pessoas. Uma resposta é  $\binom{\binom{n}{2}}{2}$ .

Por outro lado, um par (não ordenado) de pares (não ordenados) pode envolver três ou quatro pessoas. Por exemplo, o par  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$  envolve quatro pessoas distintas, mas o par  $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$  envolve três pessoas distintas.

Para escolher três pessoas, há  $\binom{n}{3}$  possibilidades, e para cada três pessoas, podemos formar dois pares (com repetição de uma pessoa) de  $\binom{3}{1} = 3$  maneiras. Para escolher quatro pessoas, há  $\binom{n}{4}$  possibilidades, e, para cada quatro pessoas, há  $\frac{1}{2} \binom{4}{2} = 3$  maneiras de formar dois pares. Logo, uma segunda resposta para o problema é

$$3 \binom{n}{3} + 3 \binom{n}{4} = 3 \binom{n+1}{4},$$



pela Relação de Stifel. Assim,

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3 \binom{n+1}{4}.$$

**2.4.26.** Há  $\binom{8}{3} = 56$  maneiras de se escolher três vértices distintos, e há 8 maneiras de se formar um triângulo equilátero. Logo, a probabilidade pedida é igual a  $1/7$ .

**2.4.32.** Se  $m > n$ , não há nenhuma função injetiva. Considere então  $m \leq n$ . Neste caso, escolhido o conjunto imagem (com  $m$  elementos), há apenas uma função estritamente crescente com este conjunto imagem. Logo, o número de funções estritamente crescentes é exatamente o número de maneiras de se escolher  $m$  objetos dentre  $n$  (sem ordem), o que nos dá  $\binom{n}{m}$ .

## 2.5 Combinações com Repetição

**2.5.1.** Sejam  $x_1$  o número de bolas pintadas com a cor ciano,  $x_2$  o número de bolas pintadas com a cor magenta, e  $x_3$  o número de bolas pintadas com a cor ocre. Como o total de bolas é 24, temos que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 24.$$

Usando a bijeção com palitinhos e sinais de mais, temos  $\frac{(24+2)!}{24!2!} = \frac{26!}{24!2!} = 26 \cdot 25/2 = 325$  soluções da equação acima (em inteiros não negativos), que é a resposta buscada.

**2.5.2.** Usando a bijeção entre o conjunto de soluções e o conjunto de permutações de 28 palitinhos e 3 sinais de mais, concluímos que há  $\frac{(28+3)!}{28!3!} = (31 \cdot 30 \cdot 29)/6 = 4495$  soluções em inteiros não negativos.

**2.5.11.** É errado pensar que qualquer combinação (com repetição) de três cartas é equiprovável. Por exemplo, uma lista de três cartas diferentes tem mais chance de sair do que uma lista de três cartas iguais, pois a lista com três cartas diferentes pode sair de vários modos (seis modos!). Ou seja, o erro na solução foi na escolha do espaço amostral, que deveria ser o de triplas *ordenadas*. Assim, a resposta correta é  $3!/52^3$ .

## 2.6 Contagem Dupla

**2.6.1.** Quantas diagonais saem de cada vértice? Quantos são os vértices?

**2.6.3.** Provemos a primeira igualdade em

$$|\mathcal{C}| = \sum_{a \in A} |\{(a, b) \in \mathcal{C} : b \in B\}| = \sum_{b \in B} |\{(a, b) \in \mathcal{C} : a \in A\}|,$$

sendo a segunda análoga. Note que se  $a_1 \neq a_2$ , então é imediato que

$$\{(a_1, b) \in \mathcal{C} : b \in B\} \cap \{(a_2, b) \in \mathcal{C} : b \in B\} = \emptyset.$$

Além disso, também temos que

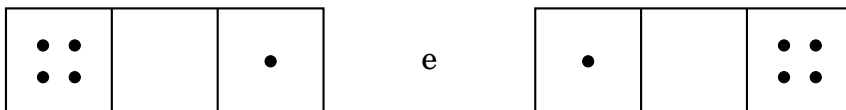
$$\mathcal{C} = \bigcup_{a \in A} \{(a, b) \in \mathcal{C} : b \in B\}.$$

Logo, pela Regra da Soma,

$$|\mathcal{C}| = \sum_{a \in A} |\{(a, b) \in \mathcal{C} : b \in B\}|.$$

## 2.7 Classes de Equivalência de Tamanhos Variados

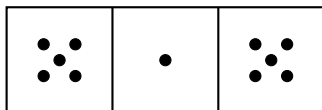
**2.7.2.** Dois desenhos representam a mesma peça de triminó se um pode ser obtido a partir de uma rotação do outro. Por exemplo, os desenhos



representam a *mesma* peça. Definamos  $X = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ . Pela observação anterior, é natural colocar em  $X$  a seguinte relação de equivalência:

$$(a, b, c) \sim (e, d, f) \iff \text{as triplas são iguais ou } b = d, a = f \text{ e } c = e.$$

Quais os tamanhos possíveis para uma classe de equivalência em  $X$ ? Uma classe de equivalência pode ter dois elementos, como na figura acima, ou pode ter apenas um elemento, como por exemplo:



Quantos elementos  $(a, b, c)$  em  $X$  pertencem a classes de equivalência com dois elementos? Bem, há seis escolhas para o número do meio  $b$ , seis escolhas para  $a$ , mas 5 escolhas para  $c$ , pois este tem que ser diferente de  $a$ . Logo, são  $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$  elementos em  $X$  que pertencem a classes de equivalência de tamanho dois. Portanto, dividindo esta quantidade pelo tamanho de cada classe de equivalência (dois, no caso) obtemos 90 classes de equivalência de tamanho dois.

Resta contar quantas são as classes de equivalência de tamanho um. Para que um elemento  $(a, b, c) \in X$  pertença a uma classe de equivalência de tamanho um, é necessário que ele satisfaça  $a = c$  (veja o desenho acima). Logo, temos seis escolhas para  $a$  e seis escolhas para  $b$ , que nos dão  $6 \cdot 6 = 36$  classes de equivalência de tamanho um.

E no total, temos  $90 + 36 = 126$  classes de equivalências, que é a quantidade de peças deste jogo de triminó.

### 2.7.3.

a)  $7 + (7^3 - 7)/3 = 119$ .

b)  $7 + (7 \cdot 6 \cdot 5)/6 + (7 \cdot 6 \cdot 3)/3 = 84$ .

**2.7.4.** Os algarismos 3, 4 e 7 não fazem sentido após a rotação de  $180^\circ$ . O algarismo 6 se transforma em 9 e vice-versa. Os demais, 0, 1, 2, 5 e 8, são invariantes pela rotação de  $180^\circ$ .

Há três tipos de números de cinco dígitos: os números que, após a rotação, não se transformam em um número válido; os números que, após a rotação, se transformam em um número válido diferente do original; e os números que se transformam neles próprios.

Para que um número de cinco algarismos seja invariante por uma rotação de  $180^\circ$ , o algarismo central deve ser escolhido no conjunto  $\{0, 1, 2, 5, 8\}$ . Além disso, se um algarismo numa posição não central for 6, o simétrico dele com respeito ao algarismo central deve ser 9 (e vice-versa). E se um algarismo numa posição não central for 0, 1, 2, 5 ou 8, o algarismo na posição simétrica a ele com respeito à origem será igual a ele. Logo, a quantidade de números invariantes pela rotação é igual a  $5 \cdot 7^2$ . E cada um deles corresponde a uma classe de equivalência (unitária).

Os números que não se transformam em um número válido são aqueles que contém algum algarismo dentre 3, 4 ou 7. Logo, são  $10^5 - 7^5$  números deste tipo, e cada um deles corresponde a uma classe de equivalência (unitária).

Os que se transformam em outro número válido são os demais. Logo, há  $10^5 - (10^5 - 7^5) - 5 \cdot 7^2$  deste tipo, os quais pertencem a classes de equivalência de tamanho dois. Portanto, o número de classes de equivalência é igual a

$$5 \cdot 7^2 + (10^5 - 7^5) + \frac{10^5 - (10^5 - 7^5) - 5 \cdot 7^2}{2} = 91719.$$

**2.7.5.** a)  $n(n-1)(n-2)(n-3)/12$ , pois neste caso cada classe de equivalência tem  $3 \times 4 = 12$  elementos.

b) Vamos classificar as classes de equivalência não por tamanho, mas por *quantidade de tipos de átomos diferentes*. Seja  $X = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_i \in \{1, \dots, n\}\}$  o conjunto das moléculas numerando-se as posições de cada átomo, com a seguinte relação de equivalência: dois elementos em  $X$  são equivalentes se um pode ser obtido a partir do outro através de uma rotação no espaço.

Com um único tipo de átomo, temos  $n$  classes de equivalência (todas com um elemento).

Com dois tipos de átomos, temos dois casos, ou dois átomos de um tipo e dois de outro, ou três átomos de um tipo e o quarto de outro. No primeiro caso temos  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  classes de equivalência (todas com  $\binom{4}{2} = 6$  elementos). No segundo caso, temos  $n(n-1)$  classes de equivalência (todas com quatro elementos).

Com três tipos de átomos, dois vértices terão o mesmo tipo de átomo e dois vértices restantes átomos diferentes. Neste caso, temos  $n \times \binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$  classes de equivalência (todas de doze elementos).

Com quatro tipos de átomos distintos temos  $\binom{n}{4} \times 2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$  classes de equivalência (todas de doze elementos).

Somando tudo, temos  $\frac{n^4 + 11n^2}{12}$  classes de equivalência, que corresponde ao total de diferentes moléculas.

c) Isômeros, no caso do tetraedro, são pares de classes de equivalência diferentes que têm os mesmos quatro átomos (todos distintos). Logo, temos  $\binom{n}{4}$  pares de isômeros.

**2.7.8.** a) Temos  $\binom{n}{8}$  maneiras para escolhermos as oito cores distintas que serão usadas na pintura. Para cada uma destas escolhas, podemos pintar a roleta de  $8!/8 = 7!$ . Logo, temos como resposta  $\binom{n}{8} 7!$ .

b) Denote por  $C$  o conjunto das  $n$  cores. Seja  $X = \{(x_1, \dots, x_8) : x_i \in C\}$ , que representa o conjunto das pinturas da roleta numerando-se os compartimentos. Pela Regra do Produto,  $|X| = n^8$ . Claramente,  $n^8$  não é a resposta do problema, pois rotações de um elemento de  $X$  representam a mesma pintura da roleta. Considere a relação de equivalência  $\sim$  em  $X$ , onde  $(x_1, \dots, x_8) \sim (y_1, \dots, y_8)$  se uma configuração pode ser obtida a partir de uma rotação da outra. Cada classe de equivalência corresponderá a uma pintura diferente da roleta. Logo, precisamos contar quantas são as classes de equivalência.

De tamanho 1: temos  $n$  classes de equivalência.

De tamanho 2: para que um elemento pertença a uma classe de equivalência de tamanho 2, deverá ter apenas duas cores, pintadas alternadamente, como mostra a Figura 7.8.

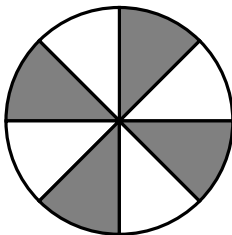


Figura 7.8. Elemento de  $X$  pertencente a uma classe de equivalência de tamanho dois.

Logo, o número de classes de equivalência de tamanho dois será dado por  $\frac{n^2 - n}{2}$ .

De tamanho 4: para que um elemento pertença a uma classe de equivalência de tamanho 4, é necessário que compartimentos opostos tenham a mesma cor, como ilustra a Figura 7.9, e além disso, que o elemento não esteja nos casos anteriores.

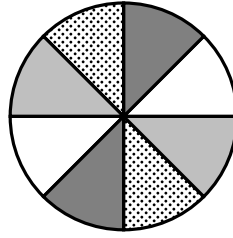


Figura 7.9. Elemento de  $X$  pertencente a uma classe de equivalência de tamanho quatro.

Logo, temos  $\frac{n^4 - (n^2 - n) - n}{4} = \frac{n^4 - n^2}{4}$  classes de equivalência de tamanho 4.

De tamanho 8: para contar quantos são os elementos que pertencem a classes de equivalência de tamanho 8, basta subtrair do total (que é  $n^8$ ) os elementos que pertencem a classes de equivalência de tamanho 1, 2 ou 4. Logo, temos  $\frac{n^8 - (n^4 - n^2) - (n^2 - n) - n}{8} = \frac{n^8 - n^4}{8}$  classes de equivalência de tamanho 8.

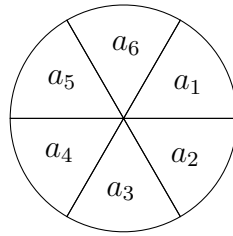
Pela Regra da Soma, o número total de classes de equivalência é dado por

$$\frac{n}{1} + \frac{n^2 - n}{2} + \frac{n^4 - n^2}{4} + \frac{n^8 - n^4}{8} = \frac{n^8 + n^4 + 2n^2 + 4n}{8},$$

que é a resposta do problema.

## 2.8 Lema de Burnside

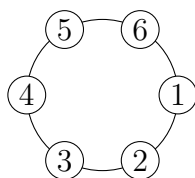
**2.8.1.** Para facilitar a descrição do argumento, veja o desenho abaixo:



- Recordemos que  $g_0$  é a rotação de zero graus; logo  $g_0 \cdot a = a$  para qualquer pintura  $a \in X$ . Daí,  $|\text{Fix}(g_0)| = |X| = 3^6$ .
- $g_1$  é a rotação de sessenta graus; logo, para que  $g_1 \cdot a = a$ , é necessário que  $a_1 = a_6$ , que  $a_6 = a_5$  e assim por diante. Ou seja, a roleta deve estar pintada de uma única cor. Logo,  $|\text{Fix}(g_1)| = 3$ .
- $g_2$  é a rotação de cento e vinte graus; logo, para termos  $g_2 \cdot a = a$ , basta que  $a_1 = a_5 = a_3$  e  $a_6 = a_4 = a_2$ . Pela Regra do Produto,  $|\text{Fix}(g_2)| = 3^2$ .
- $g_3$  é a rotação de cento e oitenta graus; logo, para termos  $g_3 \cdot a = a$ , basta que  $a_1 = a_4$ ,  $a_6 = a_3$  e  $a_5 = a_2$ . Pela Regra do Produto,  $|\text{Fix}(g_3)| = 3^3$ .

- e)  $g_4$  é a rotação de duzentos e quarenta graus; logo, para termos  $g_4 \cdot a = a$ , basta que  $a_1 = a_3 = a_5$  e  $a_2 = a_4 = a_6$ . Pela Regra do Produto,  $|\text{Fix}(g_4)| = 3^2$ .
- f)  $g_5$  é a rotação de trezentos graus; logo, para termos  $g_5 \cdot a = a$ , basta que  $a_1 = a_2$ ,  $a_2 = a_3$  e assim por diante. Logo, a roleta deve ter uma única cor. Assim,  $|\text{Fix}(g_5)| = 3$ .

**2.8.2.** Vamos denotar as pedras rubi, esmeralda e diamante pelas letras  $r$ ,  $e$  e  $d$ , respectivamente. Começemos numerando cada posição na pulseira onde estarão cada uma das seis pedras, veja a figura abaixo:



Definimos então  $X = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) : \forall i, a_i \in \{r, e, d\}\}$ , onde a primeira entrada da 6-upla representa o tipo de pedra que estará na posição 1 e assim por diante. Como a pulseira pode entrar no braço de dois modos, diremos que duas configurações  $x, y \in X$  serão equivalentes se  $x$  pode ser obtida a partir de  $y$  através de alguma rotação ou de alguma reflexão. Por exemplo,

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \sim (a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1),$$

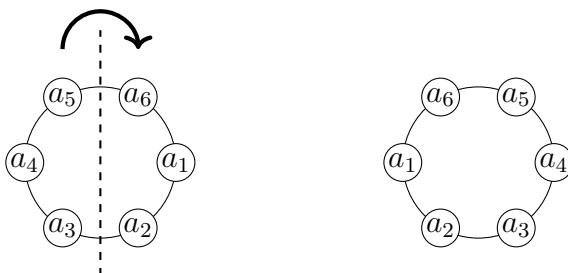
pois um elemento é uma rotação de  $60^\circ$  do outro, veja a figura:



Vejamos outro exemplo: as configurações abaixo são equivalentes,

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \sim (a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1),$$

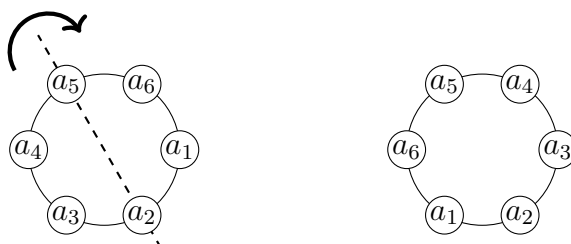
pois uma pode ser obtida a partir da outra através de uma reflexão, veja a figura a seguir.



Mais um exemplo: as configurações abaixo são equivalentes,

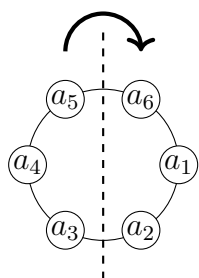
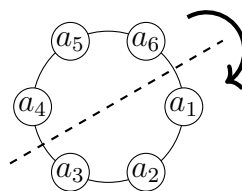
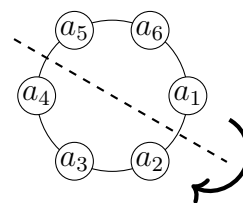
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \sim (a_3, a_2, a_1, a_6, a_5, a_4),$$

pois uma pode ser obtida a partir da outra através de uma reflexão, veja a figura abaixo.

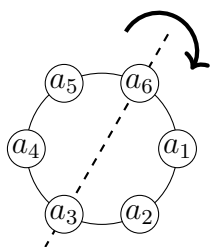
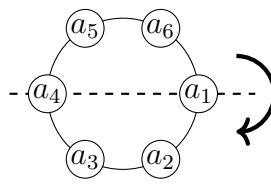
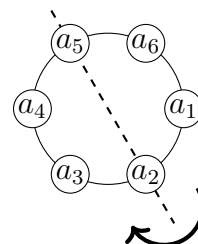


Cada classe de equivalência corresponde a uma possível pulseira. Para calcular o número de classes de equivalência usaremos o Lema de Burnside (Proposição 2.8.6). Considere o grupo  $G = \{g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ , onde:

- $g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  são as rotações de zero, sessenta, até trezentos graus.
- $r_1, r_2, r_3$  são as seguintes reflexões:

reflexão  $r_1$ reflexão  $r_2$ reflexão  $r_3$ 

- $r_4, r_5, r_6$  são as seguintes reflexões:

reflexão  $r_4$ reflexão  $r_5$ reflexão  $r_6$ 

Calculemos o fixador de cada um dos elementos do grupo  $G$ , que atua sobre o conjunto  $X$ .

- Para  $g_0$ , que é uma rotação de zero graus, temos que  $g_0 \cdot a = a$  para qualquer  $a \in X$ . Portanto,  $|\text{Fix}(g_0)| = 3^6$ .
- Para que  $g_1 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_1 = a_6 = a_5 = a_4 = a_3 = a_2$ . Portanto,  $|\text{Fix}(g_1)| = 3^1$ .
- Para que  $g_2 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_1 = a_5 = a_3$  e  $a_6 = a_4 = a_2$ . Portanto,  $|\text{Fix}(g_2)| = 3^2$ .
- Para que  $g_3 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_1 = a_4$ ,  $a_2 = a_5$  e  $a_3 = a_6$ . Portanto,  $|\text{Fix}(g_3)| = 3^3$ .
- Para que  $g_4 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_1 = a_3 = a_5$  e  $a_2 = a_6 = a_4$ . Portanto,  $|\text{Fix}(g_4)| = 3^2$ .
- Para que  $g_5 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6$ . Portanto,  $|\text{Fix}(g_5)| = 3$ .
- Para que  $r_1 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_5 = a_6$ ,  $a_4 = a_1$ ,  $a_3 = a_2$ . Portanto,  $|\text{Fix}(r_1)| = 3^3$ .
- Para que  $r_2 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_6 = a_1$ ,  $a_5 = a_2$ ,  $a_4 = a_3$ . Portanto,  $|\text{Fix}(r_2)| = 3^3$ .
- Para que  $r_3 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_1 = a_2$ ,  $a_3 = a_6$ ,  $a_4 = a_5$ . Portanto,  $|\text{Fix}(r_3)| = 3^3$ .
- Para que  $r_4 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_1 = a_5$  e  $a_4 = a_2$ . Assim,  $|\text{Fix}(r_4)| = 3^4$ .
- Para que  $r_5 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_3 = a_5$  e  $a_6 = a_2$ . Assim,  $|\text{Fix}(r_5)| = 3^4$ .
- Para que  $r_6 \cdot a = a$ , é preciso que  $a_4 = a_6$  e  $a_3 = a_1$ . Assim,  $|\text{Fix}(r_6)| = 3^4$ .

Aplicando o Lema de Burnside, temos que o número de classes de equivalência é dado por

$$|\mathcal{R}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)| = \frac{3^6 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^2 + 3 + 3(3^3 + 3^4)}{12} = 92.$$

## 2.9 Movimentos Rígidos

**2.9.1.** A resposta é  $\frac{n^8 + 3(n^4 + 2n^2) + 4 \cdot 2 \cdot n^4 + 6n^4}{24} = \frac{n^8 + 17n^4 + 6n^2}{24}$ .

**2.9.2.** A resposta é  $\frac{n^6 + 3(n^4 + 2n^3) + 4(2n^2) + 6n^3}{24} = \frac{n^6 + 3n^4 + 12n^3 + 8n^2}{24}$ .

**2.9.3.** Para que um elemento de  $X$  esteja em  $\text{Fix}(\phi)$ , é necessário e suficiente que  $v_2 = v_4 = v_5$  e  $v_3 = v_6 = v_8$ . Como temos  $n$  cores disponíveis e os vértices  $v_1$  e  $v_7$  podem ter qualquer cor, obtemos  $|\text{Fix}(\phi)| = n^4$ .



**2.9.5.** O dodecaedro tem 20 vértices. Fixe um deles, que chamaremos de  $v$ . Um movimento rígido consiste de levar  $v$  em algum vértice (possivelmente ele próprio) e depois escolher alguma das 3 rotações possíveis. Logo, temos  $20 \times 3 = 60$  movimentos rígidos.

Outra solução é contar usando as faces. O dodecaedro tem 12 faces. Fixe uma delas, que chamaremos de  $F$ . Um movimento rígido consiste em levar  $F$  em alguma face (possivelmente ela própria) e depois escolher alguma das 5 rotações possíveis. Logo, temos  $12 \times 5 = 60$  movimentos rígidos.

Outra solução é contar usando as arestas. O dodecaedro tem 30 arestas. Fixe uma delas, que chamaremos de  $a$ . Um movimento rígido consiste em levar  $a$  em alguma aresta (possivelmente ela própria) e depois escolher alguma das 2 rotações possíveis. Logo, temos  $30 \times 2 = 60$  movimentos rígidos.

**2.9.7.** a)  $4 \times 3 = 12$ . c)  $(n^4 + 4 \cdot 2 \cdot n^2 + 3n^2)/12 = (n^4 + 11n^2)/12$ .

**2.9.9.** a) Use um espelho! Ou então, se o cubo tiver as faces vazadas e as arestas forem flexíveis, você pode virar do avesso o cubo da esquerda para obter o cubo da direita.

b) Para o cubo:  $8 \times 6 = 48$ . Para o tetraedro:  $4 \times 6 = 24$ .

c) Seja  $\Phi$  movimento rígido e  $\Psi$  simetria qualquer. Queremos mostrar que  $\Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi$  é um movimento rígido. Notemos que o cubo tem duas orientações possíveis, e que os movimentos rígidos preservam orientação. Logo, na bijeção  $\Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi$  a orientação do cubo foi invertida duas vezes, ou seja, ao final voltou a ter orientação original, e é portanto um movimento rígido.

## Soluções do Capítulo 3

### 3.1 Princípio de Inclusão-Exclusão

**3.1.2.** Sejam  $A_1$  o conjunto das configurações tais que os alunos na primeira fila estão em seus lugares com seus nomes,  $A_2$  o conjunto das configurações tais que os alunos na segunda fila estão em seus lugares com seus nomes etc.

Queremos calcular  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6|$ . Como os conjuntos  $A_i$  não são disjuntos, usaremos o Princípio de Inclusão-Exclusão. Por simetria, note que

$$\begin{aligned} |A_1| &= \dots = |A_6| = 30! \\ |A_1 \cap A_2| &= |A_1 \cap A_3| = \dots = 24! \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \dots = 18! \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| &= \dots = 12! \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| &= \dots = 6! \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6| &= 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Inclusão-Exclusão,

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6| = 6 \times 30! - \binom{6}{2} 24! + \binom{6}{3} 18! - \binom{6}{4} 12! + \binom{6}{5} 6! - 1.$$

Como o total de configurações é  $36!$ , temos que a probabilidade pedida é

$$\frac{6 \times 30! - \binom{6}{2}24! + \binom{6}{3}18! - \binom{6}{4}12! + \binom{6}{5}6! - 1}{36!}.$$

**3.1.16.** a) Denote por  $E_i$  o conjunto de todas as funções que não têm o  $i$ -ésimo elemento de  $B$  em sua imagem. Logo,  $|E_1| = (k-1)^n$ ,  $|E_1 \cap E_2| = (k-2)^n$  e assim por diante. Pelo Princípio de Inclusão-Exclusão, temos que

$$\begin{aligned} |E_1 \cup \dots \cup E_k| &= k|E_1| - \binom{k}{2}|E_1 \cap E_2| + \binom{k}{3}|E_1 \cap E_2 \cap E_3| \\ &\quad + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k}|E_1 \cap \dots \cap E_k|, \end{aligned}$$

que nos leva a

$$\left| (E_1 \cup \dots \cup E_k)^c \right| = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

$$\text{b) } S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

$$\text{c) } B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

**Observação:** Alguns livros escrevem  $B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$ , o que não muda nada, pois  $S(n, 0) = 0$  para  $n \geq 1$ . Começar de  $k = 0$  no somatório se deve à convenção (útil para certos fins) que  $S(0, 0) = 1$  e  $B_0 = 1$ .

**3.1.17.** A resposta da letra a) é o Número de Stirling de segunda ordem  $S(n, k)$ . Para as demais letras, a resposta é o Número de Bell  $B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ .

**3.1.19.** Rotulemos cada região na Figura 7.10. A região  $S_1$  deve estar sempre vazia, e não nos preocuparemos com ela. Para atender às condições do enunciado do problema, precisamos que ambas as regiões  $S_2$  e  $S_3$  sejam não vazias. O número de escolhas tais que  $A \cap B \cap C = \emptyset$  é dado por  $7^n$ . Deste total vamos subtrair as escolhas que não nos interessam. O número de escolhas tais que  $S_2$  está vazio é dado por  $6^n$ , assim como o número de escolhas tais que  $S_3$  está vazio. O número de escolhas tais que ambos  $S_2$  e  $S_3$  estão vazios é igual a  $5^n$ . Logo, pelo Princípio de Inclusão-Exclusão, o total de possibilidades é  $7^n - 2 \cdot 6^n + 5^n$ .

## 3.2 Lemas de Kaplansky

**3.2.1.** Começamos numerando as posições da ciranda, de 1 a 50. Como meninos não podem se sentar juntos, escolhemos as cadeiras para os meninos, que é justamente  $g(50, 10)$ . Feito isso, precisamos escolher as posições de cada menino,

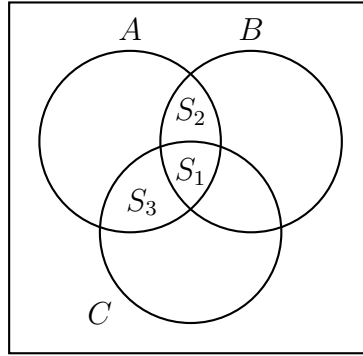


Figura 7.10. Conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

que são  $10!$  possibilidades, e as posições de cada menina, que são  $40!$  possibilidades. No total, temos  $g(50, 10) \cdot 10! \cdot 40!$  configurações possíveis. Entretanto, estamos considerando uma ciranda, logo só o que importa são as posições relativas. Ou seja, configurações obtidas por rotações devem estar numa mesma classe de equivalência. Como são 50 posições, cada classe de equivalência terá 50 elementos. Logo, a resposta final é

$$\frac{1}{50} \cdot g(50, 10) \cdot 10! \cdot 40! = \frac{1}{50} \cdot \frac{50}{50-10} \binom{50-10}{10} \cdot 10! \cdot 40! = \frac{(40!)^2}{40 \cdot 30!}.$$

### 3.3 Recorrência

**3.3.5.** A menos do valor inicial, a recorrência procurada é a mesma recorrência do problema dos parênteses!

**3.3.9.** Seja  $a_n$  o número de sequências permitidas que terminam em 0,  $b_n$  o número de sequências permitidas que terminam em 1,  $c_n$  o número de sequências permitidas que terminam em 2, e  $d_n$  o número de sequências permitidas que terminam em 3. Daí,

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1}, \\ b_n = a_{n-1} + c_{n-1}, \\ c_n = b_{n-1} + d_{n-1}, \\ d_n = c_{n-1}, \\ a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_n = b_{n-1}, \\ b_n = a_{n-1} + c_{n-1}, \\ c_n = b_n, \\ d_n = a_n, \\ a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1. \end{cases}$$

**3.3.10.** Outra vez: a recorrência procurada é a mesma recorrência do problema dos parênteses!

**3.3.12.** Para cada  $k$ , com  $1 \leq k \leq n$ , primeiro vamos contar as relações de equivalência em  $X$  tais que a classe de equivalência que contém o elemento 1 tem  $k$  elementos. Para escolher os elementos que comporão a classe de equivalência do elemento 1, temos  $\binom{n-1}{k-1}$  possibilidades. Para cada uma destas escolhas, temos

$B_{n-k}$  maneiras de particionar os  $n - k$  elementos restantes. Somando em  $k$ , obtemos

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

### 3.4 Métodos de Resolução de Recorrências

**3.4.2.** Façamos substituições “para trás” reiteradamente:

$$\begin{aligned} a_n &= 5a_{n-1} - 2 \\ &= 5(5a_{n-2} - 2) - 2 \\ &= 5^2 a_{n-2} - 2 \cdot 5 - 2 \\ &= 5^2 (5a_{n-3} - 2) - 2 \cdot 5 - 2 \\ &= 5^3 a_{n-3} - 5^2 \cdot 2 - 2 \cdot 5 - 2 \\ &\vdots \\ &= 5^{n-1} a_1 - 2(5^{n-2} + \cdots + 5^2 + 2 + 1) \\ &= 5^{n-1} - 2(5^{n-2} + \cdots + 5^2 + 2 + 1) \\ &= \frac{5^{n-1} + 1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos  $a_n = (5^{n-1} + 1)/2$ .

**3.4.12.** a) A recorrência é dada por

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \\ a_1 = 2, \\ a_2 = 7. \end{cases}$$

b) A solução é dada por  $a_n = (3^{n+1} + (-1)^n)/4$ .

**3.4.24.** Para encontrar a recorrência, analise o primeiro dígito (analisar o último dígito não leva a lugar algum, verifique). Note que  $a_0 = 0$ . Seja  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$  a função geradora associada. Usando a relação de recorrência, temos que

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\ &= x + (5x^2 + 5^2x^3 + 5^3x^4 + \cdots) + 3x(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) \\ &= x + \frac{5x^2}{1-5x} + 3xf(x). \end{aligned}$$

Logo,  $f(x) = \frac{x}{(1-5x)(1-3x)}$ . Fazendo frações parciais e usando a fórmula da soma de uma progressão geométrica, obtemos  $a_n = (5^n - 3^n)/2$ .

**3.4.25.** A recorrência é

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + 4^{n-1}, \\ a_1 = 4. \end{cases}$$

Usando funções geradoras, chega-se a  $a_n = (n+3)4^{n-1}$ .

**3.4.29.** Defina a função geradora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (7.2)$$

e note que

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n.$$

O somatório que queremos calcular é justamente o valor de  $x f'(x)$  avaliado em  $x = 1/3$ . Logo, vamos obter  $f(x)$  e, em seguida, sua derivada. Multiplicando a equação (7.2) por  $x$  e por  $x^2$ , obtemos as equações

$$\begin{aligned} f(x) &= x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots \\ x f(x) &= x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + \dots \\ x^2 f(x) &= x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 5x^7 + \dots \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda e terceira equações da primeira, quase tudo se cancela, e nos dá  $(1 - x - x^2)f(x) = x$ , que implica  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ . Daí, é fácil concluir que  $(x f'(x))|_{x=1/3} = \frac{6}{5}$ .

**3.4.31.** O sistema é

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \\ b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}, \\ a_1 = 1, \\ b_1 = 2. \end{cases}$$

Isolando  $b_n$  na primeira equação, obtemos  $b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$ , que também nos dá  $b_n = a_{n+1} - a_n$ . Substituindo estas igualdades na segunda equação, obtemos  $a_{n+1} - 2a_n - a_{n-1} = 0$ , cuja equação característica é  $x^2 - 2x - 1$ , que tem como raízes  $1 \pm \sqrt{2}$ . Daí, obtemos

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n}{2} + \frac{(1 - \sqrt{2})^n}{2}.$$

Daí, como  $b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$ , a resposta será dada por

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= 2a_n - a_{n-1} \\ &= (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n - \left[ \frac{(1 + \sqrt{2})^{n-1}}{2} + \frac{(1 - \sqrt{2})^{n-1}}{2} \right]. \end{aligned}$$

## 3.5 Princípio da Reflexão

**3.5.1.** Estes são os Números de Catalan! Veja o Exercício 3.4.27.

### 3.6 Partições

**3.6.1.** a)  $\prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-x^p}$  b)  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}$  c)  $\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{2k-1})$  d)  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k}}$  e)  $\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{2k})$   
 f)  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{k^2}}$  g)  $\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{k^2})$  h)  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^{k^3}}$  i)  $\prod_{k=1}^{\infty} (1+x^{k^3})$  j)  $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$   
 k)  $\prod_{k=1}^M \frac{1}{1-x^{2k}}$  l)  $\prod_{k=M}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2k-1}}.$

**3.6.2.** A função  $f$  é a função geradora associada à sequência  $q(n)$ , onde  $q(n)$  é o número de maneiras de distribuir  $n$  bolas indistinguíveis em três urnas indistinguíveis, sendo que uma urna deve ter de 0 a 4 bolas, uma urna deve ter de 1 a 5 bolas, e outra urna deve ter de 3 a 6 bolas. O coeficiente de  $x^4$  na expansão da função  $f$  é  $q(4) = 1$ , que é o número de maneiras de distribuir 4 bolas nas condições acima.

Equivalentemente, poderíamos ter dito que  $q(n)$  é o número de partições de  $n \in \mathbb{N}$  como soma de três parcelas, sendo que uma delas deve estar entre 0 e 4, outra deve estar entre 1 e 5, e outra deve estar entre 3 e 6.

#### 3.6.3.

- a) Temos que escolher  $n$  variáveis  $x_i$  como iguais a um e as demais zero. Logo, são  $\binom{r}{n}$  soluções.
- b) Seja  $q(n)$  o número de soluções. Como cada variável deve ser zero ou um, a função geradora é dada por  $f(x) = (1+x)^r$ . Aplicando o Binômio de Newton, temos que

$$f(x) = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \cdots + \binom{r}{r}x^r.$$

Lembre-se que, por convenção,  $\binom{r}{n} = 0$  para  $n > r$ . Logo,  $q(n) = \binom{r}{n}$ .

**3.6.5.** Basta observar que a conjugação é uma bijeção entre os tipos de partições do enunciado. Por exemplo:

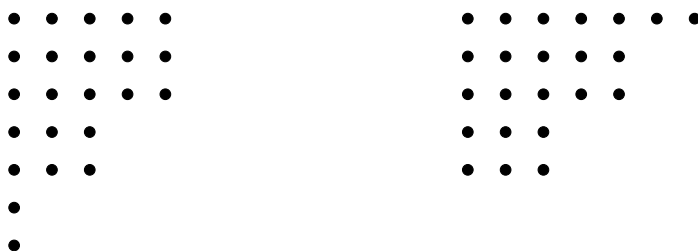


Figura 7.11. Partição e sua conjugada. Na da esquerda, todas as parcelas aparecem repetidas. Na da direita, todas as parcelas são maiores ou iguais a dois, sem inteiros consecutivos.

**3.6.7.** A bijeção é a que transforma os pontos de cada região delimitada em uma linha. Para um exemplo, veja a Figura 7.12.

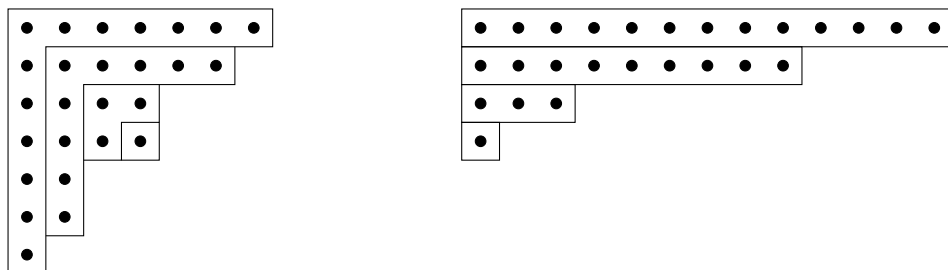


Figura 7.12. Bijeção entre diagramas de Ferrer.

Note que partições autoconjugadas são simétricas em relação à diagonal da esquerda em cima para a direita embaixo. Logo, a quantidade de pontos em cada região delimitada é sempre ímpar. Ou seja, a transformação acima é uma bijeção entre o conjunto das partições autoconjugadas e o conjunto das partições cujas parcelas são números ímpares distintos.

**3.6.10.**

a)  $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \dots$

b) Queremos mostrar que

$$\frac{1}{1-x} = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \dots \quad (7.3)$$

De fato,

$$\begin{aligned} & (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \dots \\ &= (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \dots \\ &= (1-x^4)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \dots \\ &= (1-x^8)(1+x^8)(1+x^{16}) \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como o limite das expressões acima deve ser igual a um, e são todas iguais, obtemos (7.3).

c) Pela igualdade (7.3), temos que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

d) Pelo item anterior,  $q(n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto, há exatamente uma maneira de se escrever cada  $n$  como soma de potências distintas de dois.

**3.6.11.**

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + x^k)(1 - x^k)}{(1 - x^k)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - x^{2k}}{1 - x^k} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^{2k-1}} = g(x).$$

Como as funções geradoras são iguais, concluímos que  $q(n) = r(n)$ .

**3.6.12.** Mesma ideia da solução do Exercício 3.6.11.

**3.6.14.** Como  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$  é a função geradora para o número de partições em parcelas distintas, temos que

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n) &= \left( q^{\text{par}}(0) + q^{\text{ímpar}}(0) \right) + \left( q^{\text{par}}(1) + q^{\text{ímpar}}(1) \right) x + \left( q^{\text{par}}(2) + q^{\text{ímpar}}(2) \right) x^2 \\ &\quad + \left( q^{\text{par}}(3) + q^{\text{ímpar}}(3) \right) x^3 + \left( q^{\text{par}}(4) + q^{\text{ímpar}}(4) \right) x^4 \dots \end{aligned}$$

A expansão em séries de  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$  é muito parecida, apenas precisamos levar em conta os sinais. Diferentemente de  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x^n)$ , quando fazemos todos os produtos que levam à expansão de  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$ , alguns monômios terão sinais positivos e outros terão sinais negativos. Quais terão sinais negativos? Os que forem um produto de uma quantidade ímpar de fatores da forma  $-x^n$ . E os que forem um produto de uma quantidade par de fatores da forma  $-x^n$  terão sinal positivo. Note que o produto de um número par (respectivamente, ímpar) de fatores corresponde a uma partição em um número par (respectivamente, ímpar) de parcelas distintas, reveja a demonstração do Teorema 3.6.6. Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) &= \left( q^{\text{par}}(0) - q^{\text{ímpar}}(0) \right) + \left( q^{\text{par}}(1) - q^{\text{ímpar}}(1) \right) x + \left( q^{\text{par}}(2) - q^{\text{ímpar}}(2) \right) x^2 \\ &\quad + \left( q^{\text{par}}(3) - q^{\text{ímpar}}(3) \right) x^3 + \left( q^{\text{par}}(4) - q^{\text{ímpar}}(4) \right) x^4 + \dots, \end{aligned}$$

e aplicando a Proposição 3.6.10, obtemos

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( x^{\frac{j(3j+1)}{2}} + x^{\frac{j(3j-1)}{2}} \right).$$

**3.6.15.** Pelo Exercício 3.6.14, temos que

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( x^{\frac{j(3j+1)}{2}} + x^{\frac{j(3j-1)}{2}} \right).$$

Pelo Teorema 3.6.6, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^n)}.$$



Portanto,

$$\left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( x^{\frac{j(3j+1)}{2}} + x^{\frac{j(3j-1)}{2}} \right) \right] \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right] = 1,$$

que é o mesmo que

$$\left( 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \dots \right) \cdot \left[ \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \right] = 1.$$

Expandindo, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+5} + \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^{n+7} + \dots = 1.$$

Fazendo mudanças de variáveis em cada somatório, e lembrando que  $p(k) = 0$  para  $k \leq -1$ , obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n-1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n-2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(n-5)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} p(n-7)x^n + \dots = 1,$$

que leva a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) - p(n-15) + \dots \right) x^n = 1.$$

Daí,  $p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) - p(n-15) + \dots = 0$ , ou seja,  $p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) + \dots$

## Soluções do Capítulo 4

### 4.1 Princípio das Casas dos Pombos

**4.1.3.** Respectivamente, 13 e 366.

**4.1.4.** a) Três meias. b) Oito meias.

**4.1.5.** Abaixo ilustramos as seis pessoas  $\{A, B, C, D, E, F\}$ . Se duas pessoas se conhecem, desenhamos um aresta contínua entre os respectivos pontos. Por exemplo, na Figura 7.13, as pessoas  $A$  e  $C$  se conhecem, as pessoas  $A$  e  $F$  se desconhecem, e assim por diante.

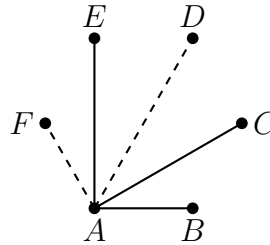


Figura 7.13. Grupo de seis pessoas.

Nos concentremos na pessoa  $A$ . Dela saem cinco arestas. Como são dois tipos de arestas, contínua ou tracejada, pelo PCP há pelo menos três arestas que saem de  $A$  que são do mesmo tipo. Sem perda de generalidade, suponha que há três arestas contínuas, tal qual a Figura 7.13. Por exemplo, na Figura 7.13, há três arestas contínuas,  $\{A, E\}$ ,  $\{A, C\}$  e  $\{A, B\}$ . Olhemos para o triângulo  $\triangle BEC$ . Se alguma aresta de  $\triangle BEC$  é contínua, usando as duas arestas que ligam  $A$  aos vértices desta aresta obtemos um conjunto de três pessoas que se conhecem. Por exemplo, na Figura 7.14 a aresta  $\{E, C\}$  é contínua, e temos o conjunto de três pessoas  $\{A, E, C\}$  que se conhecem.

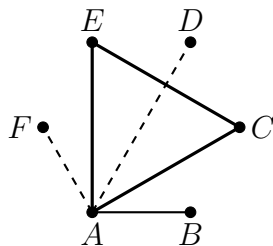


Figura 7.14.  $A$ ,  $C$  e  $E$  se conhecem.

Por outro lado, se todas as arestas de  $\triangle BEC$  são tracejadas, teremos um conjunto de três pessoas que se desconhecem, veja a Figura 7.15.

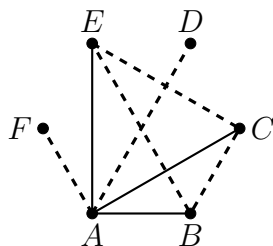


Figura 7.15.  $B$ ,  $E$  e  $C$  se desconhecem.

**4.1.14.** Divida cada face do tetraedro em quatro triângulos equiláteros de lado um. Cada triângulo central será uma *casa de pombo*. Cada conjunto de três triângulos vizinhos de um vértice do tetraedro será *uma casa de pombo*. Note que, se dois pontos estão num triângulo central, eles distam entre si no máximo um. Se dois pontos estão em algum dos três triângulos numa ponta do tetraedro, também distam entre si no máximo um. Como são 8 casas de pombos e nove pombos, em alguma casa haverá pelo menos dois pombos.

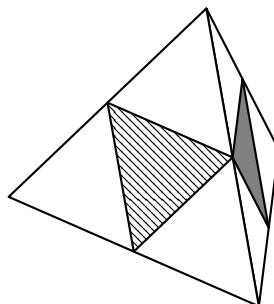


Figura 7.16. Tetraedro dividido em “casas de pombos”. Quatro triângulos centrais e quatro grupos de três triângulos nas pontas do tetraedro.

**4.1.16.** Considere o conjunto  $N = \{36, 3636, 363636, \dots\}$ . Como são infinitos números neste conjunto, e existem apenas finitos restos na divisão por 19, deduzimos que existe um subconjunto infinito  $S \subset N$  tal que todos os números em  $S$  deixam o mesmo resto na divisão por 19. Seja  $a$  o menor elemento de  $S$ . Para qualquer  $b \in S$ , considere

$$b - a = \underbrace{363636 \cdots 36}_{x \text{ dígitos}} \underbrace{000 \cdots 00}_{y \text{ zeros}},$$

o qual é múltiplo de 19. Como

$$b - a = \underbrace{363636 \cdots 36}_{x \text{ dígitos}} \times 10^y = A \times 10^y$$

e 19 não divide nenhuma potência de 10, temos que  $A$  é múltiplo de 19. Logo, existem infinitos números da forma  $3636 \cdots 36$  que são múltiplos de 19.

**4.1.17.** Pintemos o tabuleiro infinito com quatro cores com o seguinte padrão:

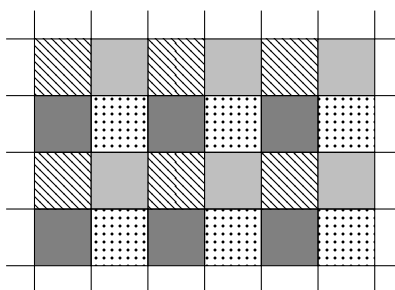


Figura 7.17. Pintura do tabuleiro infinito.

Como são 4 cores e  $4n + 1$  reis, pelo Princípio da Casa dos Pombos Generalizado, haverá pelo menos  $n + 1$  reis em casas de uma mesma cor, os quais não se atacam.

## 4.2 Triângulo de Pascal e Binômio de Newton

**4.2.1.** Queremos calcular a soma  $\sum_{k=1}^n k^4$ . Começamos escrevendo

$$k^4 = A + Bk + Ck(k+1) + Dk(k+1)(k+2) + Ek(k+1)(k+2)(k+3). \quad (7.4)$$

Vamos encontrar agora as constantes  $A, B, C, D$  e  $E$ . Para isso, podemos substituir quaisquer valores que quisermos em  $k$  na equação (7.4). Para obter um sistema de equações fácil de resolver, podemos substituir valores que cancelem termos, ou seja  $k = 0, -1, -2, -3$ , nos dando um sistema de equações linear. Resolver este sistema e aplicar o Teorema das Colunas em cada uma das parcelas leva a

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

**4.2.2.**

$$\begin{aligned} & 50 \cdot 51 + 51 \cdot 52 + 52 \cdot 53 + \cdots + 1000 \cdot 1001 = \\ &= \sum_{k=50}^{1000} k(k+1) = \sum_{k=1}^{1000} k(k+1) - \sum_{k=1}^{49} k(k+1) = 2 \sum_{k=1}^{1000} \binom{k+1}{2} - 2 \sum_{k=1}^{49} \binom{k+1}{2} \\ &= 2 \binom{1002}{3} - 2 \binom{51}{3} = \frac{1002 \cdot 1001 \cdot 1000 - 51 \cdot 50 \cdot 49}{3} = 334292350. \end{aligned}$$

**4.2.3.**  $\sum_{k=1}^n k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)/5.$

**4.2.4.**  $\sum_{k=1}^n k^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1).$

**4.2.11.** Use o Exercício 2.4.31 e depois o Exercício 4.2.10.

**4.2.16.** Use  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  para mostrar que os enunciados são equivalentes.

**4.2.18.** Um caminho possível para Esmeralda é uma sequência do tipo

$$DDD \cdots DEEE \cdots ECCC \cdots CBBB \cdots B,$$

onde cada letra  $D$  representa um passo para a direita, cada letra  $E$  representa um passo para a esquerda, cada letra  $C$  representa um passo para cima, e cada letra  $B$  representa um passo para baixo. Seja  $k$  o número de  $D$ 's. Logo, para sair de  $(0, 0)$ , andar 2008 passos e terminar novamente em  $(0, 0)$ , o número de  $E$ 's deve ser  $k$ , o número de  $C$ 's deve ser  $1004 - k$  e o número de  $B$ 's deve ser  $1004 - k$ . Portanto, o número total de caminhos é dado por

$$\sum_{k=0}^{1004} \frac{2008!}{k!k!(1004-k)!(1004-k)!} = \binom{2008}{1004} \sum_{k=0}^{1004} \binom{1004}{k}^2 = \binom{2008}{1004}^2.$$

**4.2.23.** Usando a ideia de soma telescópica, observe que

$$S_n = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_2 - S_1) + S_1.$$

Vê-se facilmente que  $S_1 = 1$ . Logo, basta mostrar que  $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}$  para todo  $n \geq 2$ . Vejamos:

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left[ \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right]. \end{aligned}$$

Pela Relação de Stifel, temos que  $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \binom{n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{n} \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Pelo Binômio de Newton,  $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ , de onde concluímos que  $\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} = -1$ . Logo,  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = 1$ , que implica  $S_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}$ , terminando a solução.

## 4.3 Multinômio de Leibniz

**4.3.3.** Pelo multinômio de Leibniz,

$$(x + x^2 + x^3)^8 = \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq 8 \\ i+j+k=8}} \frac{8!}{i!j!k!} x^{i+2j+3k}.$$

Para que o termo seja de grau 11, devemos ter

$$\begin{cases} i + j + k = 8, \\ i + 2j + 3k = 11, \end{cases}$$

que tem apenas as soluções  $i = 5, j = 3, k = 0$  e  $i = 6, k = 1, j = 1$ . Portanto, o coeficiente será  $\frac{8!}{5!3!0!} + \frac{8!}{6!1!1!} = 112$ .

**4.3.7.** Combinação com repetição:  $\binom{n+k-1}{n}$ .

## 4.4 Noções de Grafos I

**4.4.1.** Basta usar a Proposição 4.4.11, a qual diz que o número de elos é o dobro da soma dos graus de cada vértice. Se cada uma das nove pessoas conhecesse exatamente outras três, a soma dos graus seria  $9 \times 3 = 27$ , que é ímpar e, portanto, não pode ser igual ao dobro do número de elos, que é par. Logo, não é possível que cada pessoa conheça exatamente outras três.

**4.4.2.** Num mapa, considere as cidades como os vértices, e as estradas ligando as cidades como arestas. A um representante de vendas interessa passar por todas as cidades (os vértices) para vender seus produtos. Logo, para este, são interessantes ciclos hamiltonianos. A um inspetor de estradas, interessa verificar todas as estradas (as arestas). Logo, para este, são interessantes ciclos eulerianos.

**4.4.3.** Número máximo:  $\binom{n}{2}$ . Número mínimo: zero. Número de subgrafos completos com  $k$  vértices:  $\binom{n}{k}$ . Para  $K_n$ , temos o número máximo,  $\binom{n}{2}$ .

**4.4.4.** Uma relação de equivalência que tenha apenas uma classe de equivalência.

**4.4.5.** Este exercício já foi resolvido na seção sobre o Princípio da Casa dos Pombos... você se lembra?

**4.4.6.** Temos que

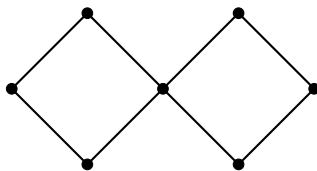
$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Queremos fazer aparecer  $\binom{n-1}{2}$ . Logo, somamos e subtraímos 1 em cada parênteses da segunda fração:

$$\begin{aligned} \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} &= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-1+(1-k))((n-2)+(1-k))}{2} \\ &= \binom{n-1}{2} + (1-k)(n-k-1) \\ &= \binom{n-1}{2} - (k-1)(n-k-1) \leq \binom{n-1}{2}, \end{aligned}$$

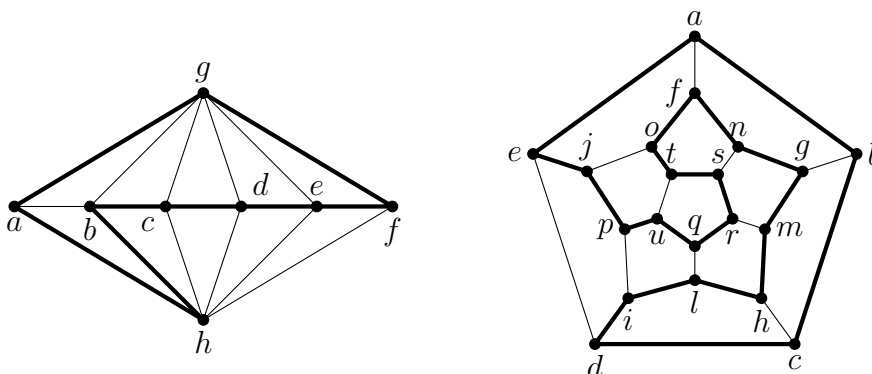
pois  $1 \leq k \leq n-1$ .

**4.4.9.** a) Falso. Por exemplo, o grafo abaixo tem ciclos eulerianos, mas não tem nenhum ciclo hamiltoniano.



b) Falso. Por exemplo, para qualquer  $n \geq 2$ , o grafo completo  $K_{2n}$  tem ciclos hamiltonianos, mas não tem ciclos eulerianos, pois o grau de cada vértice é ímpar.

**4.4.11.** Por exemplo:



O nome *grafo dodecaedro* vem do fato de o grafo poder ser obtido “amassando” um dodecaedro no plano.

**4.4.12.** Não, não tem. Para mostrar isso, fixe um vértice com ponto de partida (como estamos buscando um ciclo, podemos começar de qualquer vértice) e analise caso a caso.

**4.4.18.** Seja  $G_i$  componente conexa de  $G$ , a qual é uma árvore. Logo satisfaz  $|A_i| = |V_i| - 1$ . Somando as equações, obtemos  $|A| = |V| - C$ , onde  $C$  é o número de componentes conexas da floresta  $G$ .

**4.4.20.** A árvore será um grafo semi-euleriano se, e somente se, for um caminho.

**4.4.24.** É sim, verifique.

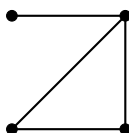
**4.4.25.** Se a partição dos vértices do grafo bipartido é  $M \cup N$ , então  $|M| = k$  e  $|N| = n - k$ . Suponha que todos os vértices de um lado estejam conectados aos vértices do outro lado. Neste caso, o número de arestas será  $k(n - k)$ , cujo valor máximo é dado por  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) = (n^2 - 1)/4$ , se  $n$  é ímpar, ou por  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 = n^2/4$ , se  $n$  for par, veja o Exercício 4.2.14.

**4.4.26.** Suponha que o grafo tivesse um ciclo hamiltoniano. Como o grafo é bipartido com partição  $V = M \cup N$ , a cada passo no ciclo, alternaríamos a componente ( $M$  ou  $N$ ), e, ao final, voltaríamos para a componente inicial. Portanto, teríamos  $|M| = |N|$ , contradição. Logo, o grafo não pode ser hamiltoniano.

**4.4.28.** O número de ciclos hamiltonianos é dado por  $(n - 1)!/2$ .

**4.4.29.** A demonstração do Teorema 4.4.17 se aplica perfeitamente!

**4.4.30.** Para  $n = 4$ , temos que  $n - 1 = 3$ . Abaixo, um exemplo de grafo  $G = (V, A)$  sem ciclos hamiltonianos tal que  $|V| = 4$  e  $\text{gr}(x) + \text{gr}(y) \geq 3$  para quaisquer  $x, y \in V$ .



**4.4.31.** Como são 10 vértices e 10 arestas, este grafo não pode ser uma árvore, logo deve ter um ciclo. Um ciclo tem pelo menos três vértices, os quais não podem ter dois cochilos (vértices) de um mesmo matemático, pois cochilos diferentes de um mesmo matemático não são simultâneos. Logo, este ciclo representa um momento em que pelo menos três matemáticos estavam cochilando simultaneamente.

## 4.5 Noções de Grafos II

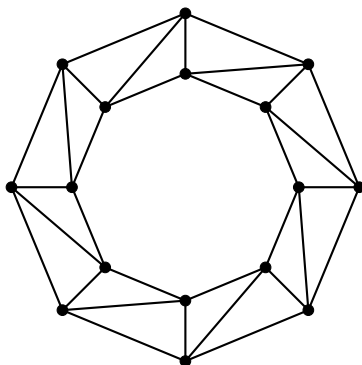
**4.5.2.** Um argumento pode ser: o grafo da esquerda tem três ciclos de tamanho 4, e o da direita tem apenas dois.

**4.5.3.** Um isomorfismo seria  $\Psi(a) = A, \Psi(b) = E, \Psi(c) = D, \Psi(d) = H, \Psi(e) = F, \Psi(f) = B, \Psi(g) = G$  e  $\Psi(h) = C$ . Há outros!

**4.5.4.** Não, pois um segundo isomorfismo é possível:  $\psi : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{A, B, C, D\}$  dada por  $\psi(a) = D, \psi(b) = C, \psi(c) = B, \psi(d) = A$ .

**4.5.5.** Podemos dizer, por exemplo, que um grafo é cíclico de tamanho  $n$  se é isomorfo ao grafo obtido através um polígono de  $n$  vértices. São  $2n$  isomorfismos possíveis, pense em rotações e reflexões.

**4.5.6.** Por exemplo, para  $n = 8$ :



**4.5.8.** Por exemplo, os grafos da Figura 7.18 são regulares de grau três, ambos têm seis vértices, mas não são isomorfos: o da direita tem ciclos de grau três, e o da esquerda não.

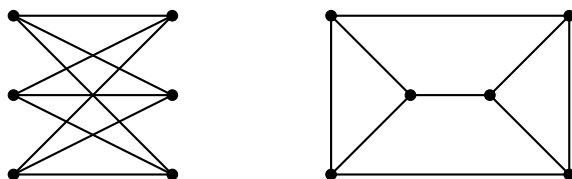


Figura 7.18. Grafos regulares não isomorfos.

**4.5.12.** Resposta:  $\binom{|V|}{2} - |A|$ .



**4.5.15.** Temos que  $G \cup G^c$  é o grafo completo, que tem  $\binom{|V|}{2}$  arestas. Por outro lado, como  $G$  é isomorfo a  $G^c$ , temos que  $|A| = |A^c|$ , logo  $\binom{|V|}{2} = |A| + |A^c| = 2|A|$ , que implica em  $|V| \cdot (|V| - 1) = 4|A|$ . Como  $|V|$  e  $|V| - 1$  são números consecutivos, um é par e o outro é ímpar. Daí, concluímos que um dos números  $|V|$  e  $|V| - 1$  é múltiplo de 4.

**4.5.16.** a) Se o grafo resultante tivesse um ciclo, as faces dentro deste ciclo estariam secas!

b) A cada passo, apenas retiramos uma aresta de forma a deixar a água entrar numa face. Logo, a cada passo, o grafo que obtemos (após retirar a aresta) é sempre conexo.

c) Um grafo conexo sem ciclos é uma árvore. Logo, para o grafo resultante  $G' = (V', A')$ , temos que  $|V'| = |A'| + 1$ . Por outro lado, o número de vértices de  $G'$  é igual ao do grafo original, ou seja  $|V| = |V'|$ . Além disso, o número de arestas de  $G'$  mais o número de faces internas (não contando a face exterior infinita) do grafo original é igual ao número de arestas de  $G$ , ou seja,  $|A'| + |F| - 1 = |A|$ . Substituindo uma equação na outra, obtemos  $|V| - |A| + |F| = 2$ .

**4.5.17.** Para qualquer  $n \geq 5$ , o grafo completo  $K_n$  não é planar, pois contém um  $K_5$  como subgrafo: se  $K_n$  fosse planar,  $K_5$  também seria, o que sabemos que não é verdade pela Proposição 4.5.6. Por fim, fica para o leitor verificar que  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  e  $K_4$  são planares (basta apresentar uma representação de cada um deles sem cruzamento de arestas).

**4.5.18.** É sim, veja a Figura 7.19.

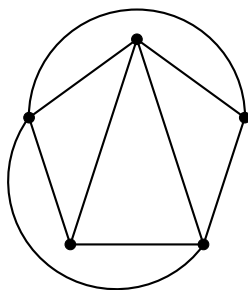


Figura 7.19.  $K_5$  menos uma aresta é planar.

**4.5.19.** Seja  $G = (V, A)$  grafo planar conexo. Façamos contagem dupla: contemos de duas formas o número de pares  $(a, f)$  tais que  $a$  é uma aresta de  $G$ ,  $f$  é uma face de  $G$ , e a aresta  $a$  faz parte da face  $f$ . Seja  $X$  o conjunto de tais pares. Como  $|A| \geq 3$ , toda face de  $G$  terá pelo menos três arestas. Logo,  $|X| \geq 3|F|$ . Por outro lado, cada aresta pertence a, no máximo, duas faces. Portanto,  $|X| \leq 2|A|$ . Daí, concluímos que  $2|A| \geq 3|F|$ . Pela Fórmula de Euler, temos que  $|V| - |A| + |F| = 2$ , que implica em  $|F| = 2 + |A| - |V|$ . Substituindo isto na desigualdade anterior, obtemos  $|A| \leq 3|V| - 6$ .

**4.5.20.** a) Façamos contagem dupla. Seja  $X$  o conjunto dos pares  $(a, f)$  onde  $a$  é uma aresta do grafo,  $f$  é uma face do grafo (que é planar), sendo que a aresta

$a$  faz parte da face  $f$ . Por um lado,  $|X| \leq 2|A|$ , pois cada aresta pode pertencer a, no máximo, duas faces. Por outro lado,  $|X| = f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \dots$ . Portanto,  $f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \dots \leq 2|A|$ . Como exemplo de grafos que satisfazem a desigualdade estrita:

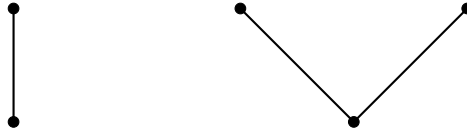


Figura 7.20. Exemplos de grafos planares conexos que satisfazem à desigualdade estrita.

Para o grafo conexo anterior à esquerda, temos que  $f_1 = 1 < 2|A| = 2$ , e para o grafo conexo anterior à direita, temos que  $2f_2 = 2 \cdot 1 = 2 < 2|A| = 4$ .

b) Uma face com uma aresta deve ser como na Figura 7.20 à esquerda, e uma face com duas arestas deve ser como na Figura 7.20 à direita. Logo, como estamos supondo que o grafo é conexo e  $|A| \geq 3$ , toda face do grafo terá pelo menos três arestas.

**4.5.21.** Para o Grafo de Petersen, temos  $|A| = 15$  e  $|V| = 10$ . Suponha, por absurdo, que o Grafo de Petersen fosse planar. Portanto, pela Fórmula de Euler, teríamos  $|V| - |A| + |F| = 2$ , que implicaria  $|F| = 7$ .

Notemos que o Grafo de Petersen tem ciclos de tamanho no mínimo 5. Bem, como o Grafo de Petersen não tem folhas, uma face (caso ele fosse planar) seria determinada por um ciclo. Logo, cada face teria pelo menos 5 arestas. Por outro lado, cada aresta pertence a, no máximo, duas faces. Assim, fazendo contagem dupla, obtemos  $5|F| \leq 2|A|$ , que leva a  $35 \leq 30$ , absurdo. Logo, o Grafo de Petersen não é planar.

**4.5.22.** a) Se tivesse um ciclo de tamanho 3, o grafo não poderia ser bipartido. Vejamos. Um dos vértices desse ciclo de tamanho 3 estaria em uma componente  $M$ , um de seus vizinhos teria que estar na componente  $N$ , e o terceiro vizinho não poderia estar em nenhuma das duas componentes, pois estaria ligado a ambos!

b) Suponha, por absurdo, que  $K_{3,3}$  fosse planar. Seja  $X$  o conjunto de pares  $(a, f)$  tais que  $a$  é aresta de  $K_{3,3}$ ,  $f$  é face de  $K_{3,3}$ , e a aresta  $a$  faz parte da face  $f$ . Como  $K_{3,3}$  não tem ciclos de tamanho 3, uma face de  $K_{3,3}$  teria pelo menos 4 arestas. Logo,  $|X| \geq 4|F|$ . Por outro lado, cada aresta de  $K_{3,3}$  pertenceria a, no máximo, duas faces. Logo,  $|X| \leq 2|A|$ . Portanto,  $4|F| \leq 2|A|$ , que implica em  $2|F| \leq |A|$ . Pela Fórmula de Euler, se  $K_{3,3}$  fosse planar, teria 5 faces. Como  $K_{3,3}$  tem 9 arestas, chegamos a  $10 \leq 9$ , contradição.

**4.5.24.** Se houvesse solução para este quebra-cabeças, o grafo  $K_{3,3}$  seria planar, o que não é verdade! Veja o Exercício 4.5.22.

**4.5.25.** O que um grafo 2-colorível tem a ver com um grafo bipartido?

**4.5.27.** a)  $S = \pi(a_2 - 2) + \dots + \pi(a_F - 2) = \pi(a_2 + \dots + a_F) - 2\pi(|F| - 1) = \pi(a_2 + \dots + a_F - 2|F| + 2)$ .

b)  $S = 2\pi(|V| - a_1) + \pi(a_1 - 2) = 2\pi|V| - \pi a_1 - 2\pi = \pi(2|V| - 2 - a_1)$ .

c) Igualando, obtemos  $2|V| - (a_1 + \dots + a_F) + 2|F| = 4$ , que implica  $|V| - |A| + |F| = 2$ .

## Soluções do Capítulo 5

### 5.2 Espaços de Probabilidade

**5.2.3.** Temos que  $\Omega = A \cup A^c$ . Como  $A$  e  $A^c$  são disjuntos, pela definição de probabilidade, temos que  $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$ , que implica em  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .

**5.2.4.**  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c)$ .

**5.2.5.** Temos que

$$\mathbb{P}(A_n \cap B_n) = \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_n \cap A_n^c). \quad (7.5)$$

Como  $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow 1$ , temos que  $\mathbb{P}(A_n^c) \rightarrow 0$ . Como

$$0 \leq \mathbb{P}(B_n \cap A_n^c) \leq \mathbb{P}(A_n^c),$$

concluimos que  $\mathbb{P}(B_n \cap A_n^c) \rightarrow 0$ . Assim, (7.5) converge a  $p$ , pois  $\mathbb{P}(B_n) \rightarrow p$ .

### 5.3 Probabilidade Condicional e Independência

**5.3.1.** Temos que  $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\Omega)$ . Analogamente,  $\mathbb{P}(A \cap \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\emptyset)$ . Uma interpretação pode ser a seguinte: como o espaço amostral é  $\Omega$ , o resultado do sorteio, do experimento, o que seja, será sempre um elemento de  $\Omega$ , logo dizer que *o resultado obtido pertence a  $\Omega$*  não adiciona informação alguma. Por isso  $A$  e  $\Omega$  são independentes, qualquer que seja  $A$ . Sobre  $\emptyset$ , podemos pensar em alguma interpretação como *saber que  $A$  aconteceu não altera a probabilidade de acontecer  $\emptyset$ , que é sempre zero*.

**5.3.2.** Temos que  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ . Podemos interpretar isso da seguinte maneira: como  $A$  e  $B$  são disjuntos, se sabemos que  $A$  aconteceu, temos informação sobre  $B$  (neste caso, necessariamente  $B$  não pode acontecer!). Logo,  $A$  e  $B$  não são independentes.

**5.3.4.** Se  $A$  é independente dele mesmo, então  $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A)$ . Logo,  $\mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A)) = 0$ , que implica  $\mathbb{P}(A) = 0$  ou  $\mathbb{P}(A) = 1$ . Uma interpretação pode ser a seguinte: saber que  $A$  aconteceu nos dá informação a respeito de  $A$ , a menos que  $A$  seja algum caso extremo: ou  $\Omega$  ou  $\emptyset$ .

**5.3.6.**  $2^n - n - 1$ .

**5.3.8.** a)  $\prod_{k=1}^n (1 - p_k)$ . b)  $1 - \prod_{k=1}^n (1 - p_k)$ . c)  $\sum_{k=1}^n p_k \prod_{i \neq k} (1 - p_i)$ .

d)  $\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} p_k p_\ell \prod_{i \neq k, \ell} (1 - p_i)$ . e)  $\prod_{k=1}^n p_k$ . f)  $1 - \prod_{k=1}^n p_k$ .

**5.3.9.** Escolhendo  $ABA$ , a chance de vitória é  $pq(2 - p)$ . Escolhendo  $BAB$ , a chance de vitória é  $pq(2 - q)$ . Logo, como  $p > q$  é sempre mais vantajoso  $BAB$ .

Essa resposta não é intuitiva, afinal, enfrentar-se-ia o adversário mais difícil duas vezes. Entretanto, raciocine da seguinte maneira: é mais fácil vencer  $A$ . Digamos então que fosse muito, mas muito fácil vencer  $A$ . Logo, escolher  $BAB$  é, em certo sentido, ter duas oportunidades para vencer  $B$ , enquanto que na sequência  $ABA$  teríamos apenas uma oportunidade de vencer  $B$ .

**5.3.12.** O jogador que escolheu  $ccc$  ganha o jogo se, e somente se, esta sequência sair de primeira. Caso contrário, se aparecer algum  $k$  nos três primeiros lançamentos, o segundo jogador sempre ganhará, pois antes que apareça uma sequência  $ccc$ , aparecerá a sequência  $kcc$ . É interessante citar que, no mesmo espírito do Exercício 5.3.11, para cada terna de caras ou coroas, existe uma outra terna com maior probabilidade de vitória. Veja as probabilidades de vitória na Tabela 7.1.

	$ccc$	$cck$	$ckc$	$ckk$	$kcc$	$kck$	$kkc$	$kkk$
$ccc$	—	$1/2$	$2/5$	$2/5$	$1/8$	$5/12$	$3/10$	$1/2$
$cck$	$1/2$	—	$2/3$	$2/3$	$1/4$	$5/8$	$1/2$	$7/10$
$ckc$	$3/5$	$1/3$	—	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$3/8$	$7/12$
$ckk$	$3/5$	$1/3$	$1/2$	—	$1/2$	$1/2$	$3/4$	$7/8$
$kcc$	$7/8$	$3/4$	$1/2$	$1/2$	—	$1/2$	$1/3$	$3/5$
$kck$	$7/12$	$3/8$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	—	$1/3$	$3/5$
$kkc$	$7/10$	$1/2$	$5/8$	$1/4$	$2/3$	$2/3$	—	$1/2$
$kkk$	$1/2$	$3/10$	$5/12$	$1/8$	$2/5$	$2/5$	$1/2$	—

Tabela 7.1. Probabilidades. A entrada linha/coluna é a probabilidade da sequência na linha ganhar da sequência na coluna.

**5.3.13.** Seja  $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}^{\mathbb{N}}$  o espaço amostral e, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , seja  $X_i = k$  a soma dos dados obtida na  $i$ -ésima jogada. Sabemos que  $\mathbb{P}(X_i = 2) = \mathbb{P}(X_i = 12) = 1/36$ ,  $\mathbb{P}(X_i = 3) = \mathbb{P}(X_i = 11) = 2/36$ ,  $\mathbb{P}(X_i = 4) = \mathbb{P}(X_i = 10) = 3/36$ ,  $\mathbb{P}(X_i = 5) = \mathbb{P}(X_i = 9) = 4/36$ ,  $\mathbb{P}(X_i = 6) = \mathbb{P}(X_i = 8) = 5/36$  e  $\mathbb{P}(X_i = 7) = 6/36$ .

Vamos particionar o evento *ganhar* de acordo com o resultado do primeiro

lançamento, ou seja, de  $X_1$ . Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}) &= \mathbb{P}\left(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = k\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{k=4,5,6,7, \\ 8,9,10,11}} \{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = k\}\right) \\ &= \mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 7\}) + \mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 11\}) \\ &\quad + 2\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 4\}) \\ &\quad + 2\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 5\}) + 2\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 6\}).\end{aligned}$$

Agora, calculemos cada uma das parcelas anteriores:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 4\}) &= \mathbb{P}(\text{ganhar} | X_1 = 4) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 4) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \text{ganhar no } n\text{-ésimo} \\ \text{lançamento} \end{array} \right\} \middle| X_1 = 4\right) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 4) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{36} \left(\frac{27}{36}\right)^{n-1}\right) \cdot \frac{3}{36} = \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 5\}) &= \mathbb{P}(\text{ganhar} | X_1 = 5) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 5) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \text{ganhar no } n\text{-ésimo} \\ \text{lançamento} \end{array} \right\} \middle| X_1 = 5\right) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 5) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{36} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}\right) \cdot \frac{4}{36} = \frac{16}{360}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\} \cap \{X_1 = 6\}) &= \mathbb{P}(\text{ganhar} | X_1 = 6) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 6) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \begin{array}{c} \text{ganhar no } n\text{-ésimo} \\ \text{lançamento} \end{array} \right\} \middle| X_1 = 6\right) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 6) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{36} \left(\frac{25}{36}\right)^{n-1}\right) \cdot \frac{5}{36} = \frac{25}{396}.\end{aligned}$$

Assim, temos que  $\mathbb{P}(\{\text{ganhar}\}) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{32}{360} + \frac{50}{396} = \frac{244}{495}$ .

**5.3.17.** Sejam  $A$  o evento o aluno sabia a resposta e  $B$  o evento o aluno respondeu corretamente. Pela Fórmula de Bayes,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)} = \frac{p}{p + \frac{1-p}{m}}.$$

Logo,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A|B) = 1$ , o que é razoável: se há um número gigante de alternativas, e o aluno escolhe a correta, é porque ele sabe a resposta (com probabilidade altíssima). Além disso,  $\lim_{p \rightarrow 0} \mathbb{P}(A|B) = 0$ , o que também é razoável: a

probabilidade de o aluno saber a resposta é baixíssima, e o fato de o aluno responder corretamente não afeta esta probabilidade, que continua desprezível (no limite).

**5.3.18.** Uma maneira é a seguinte: lança-se a moeda duas vezes. Se o resultado for (cara, coroa), Diego vence; se for (coroa, cara), Samara vence. Se o resultado não for nenhum dos dois, repete-se o procedimento. Fica para o leitor verificar que Diego e Samara têm, cada um, chance  $1/2$  de vencer. Observamos que este método é útil na prática, pois nenhuma moeda real é perfeitamente honesta.

**5.3.19.** a) Vamos denotar os seguinte eventos:

$$\begin{aligned} J &= [\text{Jairo escreve o memorando}], \\ C_1 &= [\text{Carteiro 1 entrega o memorando ao Carteiro 2}], \\ C_2 &= [\text{Carteiro 2 entrega o memorando ao Carteiro 3}], \\ &\vdots \\ C_{n-1} &= [\text{Carteiro } n-1 \text{ entrega o memorando ao Carteiro } n], \\ C_n &= [\text{Carteiro } n \text{ entrega o memorando a Pedro}]. \end{aligned}$$

Note que  $J \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n$ . Além disso,  $\mathbb{P}(J) = p_0$ , logo,  $\mathbb{P}(C_1|J) = p_1$  implica que  $\mathbb{P}(C_1) = p_0p_1$ . De modo análogo,  $\mathbb{P}(C_2|C_1) = p_2$  implica que  $\mathbb{P}(C_2) = p_2p_1p_0$ . Por indução,  $\mathbb{P}(C_n) = p_np_{n-1} \cdots p_1p_0$ . Daí,  $\mathbb{P}(J|C_n^c) = \frac{p_0 - p_0p_1 \cdots p_n}{1 - p_0p_1 \cdots p_n}$ .

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p - p^{n+1}}{1 - p^{n+1}} = p. \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_0 - p_0(1 - \frac{1}{n})^n}{1 - p_0(1 - \frac{1}{n})^n} = \frac{p_0(1 - e)}{1 - p_0e}.$$

**5.3.21.** a) Sejam os eventos

$$D = [\text{pessoa testada tem a doença}] \quad \text{e} \quad P = [\text{resultado do teste é positivo}].$$

Queremos calcular  $\mathbb{P}(D|P)$ . Pela Fórmula de Bayes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D|P) &= \frac{\mathbb{P}(D \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(P|D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(P|D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(P|D^c) \cdot \mathbb{P}(D^c)} \\ &= \frac{0,95 \cdot 0,005}{0,95 \cdot 0,005 + 0,01 \cdot 0,995} = \frac{95}{294}. \end{aligned}$$

b) Note que a probabilidade de um paciente procurar um médico apresentando um falso positivo é alta. Logo, os médicos pedem que exames sejam repetidos, ainda que a taxa de falha original do exame seja baixa.

**5.3.27.** A probabilidade apresentada como defesa foi a probabilidade condicional

$$\mathbb{P} \left[ \begin{array}{c|c} \text{uma mulher vir} & \text{esta mulher sofre} \\ \text{a ser assassinada} & \text{violência doméstica} \end{array} \right] \approx \frac{1}{2500},$$

que é correta, mas não tem absolutamente nada a ver com julgamento. De fato, Nicole *já havia sido assassinada*, logo não fazia o menor sentido em falar da

probabilidade *de Nicole vir a ser assassinada*. A probabilidade condicional que realmente importava no caso era

$$\mathbb{P} \left[ \begin{array}{c|c} \text{o assassino ser} & \text{a mulher assassinada} \\ \text{o agressor doméstico} & \text{sofria violência doméstica} \end{array} \right]$$

a qual, não é preciso ser adivinho para imaginar, é altíssima (algo em torno de 90%).

**5.3.29.** A escolha de um conjunto é equivalente a escolher, de maneira independente, se cada elemento está presente nele com probabilidade  $1/2$ . Faça uma tabela  $n \times m$  cujas entradas são 0, 1, representando se cada elemento está ou não no conjunto  $X_i$ . Queremos que  $k$  colunas tenham somente 1's, e as outras  $n - k$  colunas tenham pelo menos uma entrada igual a 0. Logo, temos como resposta:

$$\binom{n}{k} \frac{1}{2^{mk}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \frac{(2^m - 1)^{n-k}}{2^{mn}}.$$

**5.3.30.** a)  $\mathbb{P}(A_\ell) = \frac{1}{C_\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ell k)^{1+\gamma}} = \frac{1}{\ell^{1+\gamma}} \frac{1}{C_\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}} = \frac{1}{\ell^{1+\gamma}}.$

b)  $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{C_\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(kp_i p_j)^{1+\gamma}} = \frac{1}{p_i^{1+\gamma}} \frac{1}{p_j^{1+\gamma}} = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j).$

c) Temos que  $k \in A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots$  se, e somente se,  $k$  não é múltiplo de nenhum número primo. Que é equivalente a dizer que  $k = 1$ .

Como  $A_1^c \cap \dots \cap A_M^c \searrow A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots$ , pela Continuidade da Probabilidade, temos que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_1^c \cap \dots \cap A_M^c) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{C_\gamma} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}}}.$$

Como os eventos  $A_i$  são independentes, podemos reescrever a igualdade acima como

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_j^{1+\gamma}}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\gamma}}\right)^{-1}.$$

## 5.4 Lema de Borel-Cantelli

### 5.4.2.

$$\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega ; \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \omega \text{ pertence a } A_n \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

**5.4.3.** Tome por exemplo  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathbb{A}$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos abertos, e  $\mathbb{P}$  a probabilidade uniforme, isto é,  $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$  para quaisquer  $0 \leq a < b \leq 1$ . Considere  $A_n = [0, 1/n]$ . Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

mas  $[A_n \text{ infinitas vezes}] = \{0\}$ , que tem probabilidade zero.

**5.4.4.** Temos que  $A_k = [\text{cara no } k\text{-ésimo lançamento}]$  são eventos independentes. Além disso,  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$ . Portanto, pelo Lema de Borel-Cantelli,  $\mathbb{P}(A_k \text{ infinitas vezes}) = 1$ .

**5.4.7.** Seja  $A_n$  o evento o resultado dos dados na  $n$ -ésima rodada são todos iguais. Temos que  $\mathbb{P}(A_n) = 6 \times \frac{1}{6^{n+1}} = 6^{-n}$ . Logo,  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ , e pelo Lema de Borel-Cantelli, com probabilidade um, os resultados dos dados serão iguais apenas finitas vezes.

## 5.5 Método Probabilístico

**5.5.1.** Para um exemplo simples de família que não é 2-colorível, considere  $X = \{a, b, c\}$  e  $A_1 = \{a, b\}$ ,  $A_2 = \{a, c\}$  e  $A_3 = \{b, c\}$ .

Jogamos, de maneira independente, uma moeda honesta para decidir a cor de cada elemento de  $X$ . Para  $A \in \mathcal{F}$ , seja  $E_A$  o evento “todos os elementos de  $A$  foram pintados da mesma cor”. Temos que  $\mathbb{P}(E_A) = 1/2^{d-1}$ . Daí,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} E_A\right) \leq \sum_{A \in \mathcal{F}} \mathbb{P}(E_A) \leq \frac{2^{d-1} - 1}{2^{d-1}} < 1.$$

**5.5.2.** 
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{2^k}.$$

**5.5.3.** Temos que  $\mathbb{P}(E_c \cup E_d) \leq \mathbb{P}(E_c) + \mathbb{P}(E_d) = 2\mathbb{P}(E_c)$ . Além disso, dado um conjunto  $A$  tal que  $|A| = k$ , seja  $E_A$  o evento “todos em  $A$  se conhecem”. Temos que  $\mathbb{P}(E_A) = 2^{-\binom{k}{2}}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_c) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{A \subset X \\ |A|=k}} E_A\right) \leq \sum_{\substack{A \subset X \\ |A|=k}} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} = \binom{n}{k} \frac{1}{2^{\binom{k}{2}}} \\ (\text{Exerc. 5.5.2}) \quad &\leq \frac{n^k}{2^{k-1}} \cdot 2^{-\frac{k^2+k}{2}} \leq 2^{1-\frac{k}{2}} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## 5.6 Variáveis Aleatórias

**5.6.15.** Rotulemos as caixas de fósforo, digamos  $A$  e  $B$ . Após  $n + (n - k)$  enfiadas de mão no bolso, precisamos ter uma caixa com 0 fósforos e a outra com  $k$  fósforos.



A probabilidade de que  $A$  tenha 0 fósforos e  $B$  tenha  $k$  fósforos, pela distribuição binomial, é

$$\binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

A probabilidade de que uma caixa tenha 0 e a outra tenha  $k$  é duas vezes a expressão anterior. Por outro lado, ainda é preciso que o matemático enfie a mão no bolso e retire justamente a caixa vazia, cuja probabilidade de ocorrência é  $1/2$ . Logo, a resposta é

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}} = \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}.$$

**5.6.18.** a) Temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_E(G) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_E(G|A_k) \cdot \mathbb{P}_E(A_k) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{(n+1)-k} = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{p(n+1)}. \end{aligned}$$

b) Se Zoroastro é o assassino, então o evento  $E$  ocorre com probabilidade um, ou seja,  $\mathbb{P}(E|G) = 1$ . Se Zoroastro não é o assassino, então a probabilidade de que o Zoroastro tenha o perfil encontrado na cena do crime é  $p$ , ou seja,  $\mathbb{P}(E|G^c) = p$ . Pelo Teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G|E) &= \frac{\mathbb{P}(E|G)\mathbb{P}(G)}{\mathbb{P}(E|G)\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(E|G^c)\mathbb{P}(G^c)} \\ &= \frac{1/(n+1)}{1/(n+1) + pn/(n+1)} = \frac{1}{1+pn}. \end{aligned}$$

c) A resposta correta é a segunda, via o Teorema de Bayes. O erro no argumento do item a) é muito sutil, e está em afirmar que  $\mathbb{P}_E(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . Isso não é verdade! Lembre que a polícia escolheu Zoroastro ao acaso; e ao escolher uma pessoa ao acaso, constatar que ela tem (ou não) o perfil nos dá certa informação sobre a distribuição da quantidade de pessoas que tem esse perfil na ilha. Ou seja, condicionado ao evento  $E$ , a probabilidade do evento  $A_k$  deixa de ser binomial. Esta é uma situação muito similar a do Exemplo 5.3.4. Naquele exemplo, se um menino abre a porta, altera a probabilidade de que a outra criança seja também um menino, que passa a ser  $1/3$ , em vez de  $1/2$ , que era a probabilidade individual de cada criança ser um menino. No caso da ilha, se uma pessoa é escolhida ao acaso (como foi Zoroastro), e verifica-se que ela tem o perfil, então a probabilidade de que outros habitantes tenham o perfil diminui. É um pouco trabalhoso, mas é possível ajustar a solução do item a), corrigindo este viés que surge na probabilidade de  $A_k$  por conta do condicionamento no evento  $E$ .

**5.6.19.** a) A distribuição é  $\text{Binom}(8, \frac{1}{2})$ , pois é soma de sorteios independentes cujo resultado pode ser interpretado como 1 (alelo dominante) ou 0 (alelo recessivo). Portanto, a probabilidade da característica ter intensidade 5 é igual a

$$\binom{8}{5} \frac{1}{2^5} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{56}{256} \simeq 0,22.$$

b) Note que um par de alelos do tipo homozigoto dominante (um par de letras maiúsculas) necessariamente transmite um alelo dominante (uma letra maiúscula), que aumenta em 1 a intensidade da característica. Além disso, um par de alelos do tipo homozigoto recessivo (um par de letras minúsculas) necessariamente transmite um alelo recessivo (uma letra minúscula), o que não aumenta a intensidade da característica.

No enunciado, os indivíduos que se cruzam têm genótipos dados por AaBBC-CDd e Aabbccdd. Os pares de genes bb, cc e dd são homozigotos recessivos e, portanto, não aumentam a intensidade da característica. O par de genes BB aumentará em um a intensidade da característica no indivíduo gerado, bem como o par de genes CC. Resta analisar o resultado (aleatório) dos pares Aa e Dd, o qual será dado por uma  $\text{Binom}(2, \frac{1}{2})$ , pelo mesmo argumento do item anterior. Resumindo, a intensidade da característica no indivíduo gerado terá a distribuição da variável aleatória  $2 + X$ , onde  $X \sim \text{Binom}(2, \frac{1}{2})$ .

c) Sejam:

- $a_D$  a quantidade total de pares de alelos homozigotos dominantes que portam os pais do indivíduo gerado;
- $a_R$  a quantidade total de pares de alelos homozigotos recessivos que portam os pais do indivíduo gerado;
- $a_H$  a quantidade total de pares de alelos heterozigotos que portam os pais do indivíduo gerado.

Note que  $a_D + a_R + a_H = n$ . Generalizando o argumento do item anterior, temos que a quantidade de alelos dominantes no indivíduo gerado será igual a  $a_D + X$ , onde  $X$  é uma variável aleatória de distribuição  $\text{Binom}(a_H, \frac{1}{2})$ .

d) Não necessariamente. Se ambos os indivíduos forem heterozigotos com respeito a todos os alelos, sim, a variabilidade será máxima. Caso contrário, a variabilidade não será máxima.

## 5.7 Esperança e Variância

**5.7.4.** Como  $X$  é discreta, temos que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}[X = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Façamos uma mudança de variável no último somatório acima. Seja  $j = k - 1$ . Logo,

$$\mathbb{E}[X] = e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

**5.7.5.** Como  $X$  é discreta, temos que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \mathbb{P}(X = 2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \infty.$$

**5.7.6.** a) Numere as meninas de 1 a  $n$ . Denote  $X_k$  a variável aleatória que vale 1 se o par perfeito está na frente da  $k$ -ésima menina, e vale 0 caso contrário. Logo, o número  $X$  de pares perfeitos formados é igual a  $X_1 + \dots + X_n$ . Pela linearidade da esperança,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

b) Calcule novamente a esperança usando a definição da esperança de uma variável aleatória discreta, usando a fórmula do número de permutações caóticas.

c) Numere as pessoas de 1 a  $2n$ . Denote  $X_k$  a variável aleatória que vale 1 se a  $k$ -ésima pessoa encontrou seu par perfeito, e vale 0 caso contrário. Note que quando há um par perfeito, este par perfeito é contado duas vezes na soma  $X_1 + \dots + X_{2n}$ . Logo, o número total de pares perfeitos é igual a  $X = (X_1 + \dots + X_{2n})/2$ . Pela linearidade da esperança,  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2} = \frac{n}{2n-1}$ .

**5.7.7.** Escreva  $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ , onde  $Y_1 = 1$ ,  $Y_2$  é o número de figurinhas compradas a partir de  $Y_1$  até se obter a próxima figurinha diferente da anterior,  $Y_3$  é o número de figurinhas compradas a partir de  $Y_1 + Y_2$  até se obter a próxima figurinha diferente das duas anteriores, e assim por diante. Temos que  $Y_1 = 1$  e que  $Y_k \sim \text{geom}(\frac{n-k+1}{n})$  para  $k = 2, \dots, n$ . Pela linearidade da esperança,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] + \dots + \mathbb{E}[Y_n] \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{\frac{n-2}{n}} + \dots + \frac{1}{\frac{n-(n-1)}{n}} \\ &= 1 + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\ &= n \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

**5.7.8.** a) Para cada  $2 \leq j \leq k$ , seja  $X_j$  a variável aleatória dada por

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{se a } j\text{-ésima música foi ouvida antes,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos assim que

$$S = \sum_{j=2}^k X_j$$

corresponde ao número total de repetições de músicas. Note que o somatório começa de 2, pois é necessário tocar pelo menos duas músicas para haver uma repetição. Pela linearidade da esperança, temos que

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{j=2}^k \mathbb{E}[X_j]. \quad (7.6)$$

A variável aleatória  $X_j$  assume apenas os valores 0 ou 1. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_j] &= \mathbb{P}[\text{a } j\text{-ésima música foi ouvida antes}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[\text{a } j\text{-ésima música não foi ouvida antes}] \\ &= 1 - \left(\frac{M-1}{M}\right)^{j-1}. \end{aligned}$$

Substituindo em (7.6), temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S] &= \sum_{j=2}^k \left[1 - \left(\frac{M-1}{M}\right)^{j-1}\right] = (k-1) - \sum_{j=2}^k \left(\frac{M-1}{M}\right)^{j-1} \\ &= (k-1) - (M-1) \left[1 - \left(\frac{M-1}{M}\right)^{k-1}\right]. \end{aligned}$$

b) O limite neste caso é zero, o que é razoável: se há muitas músicas disponíveis, o número médio de repetições deve ser baixo.

c) O limite neste caso é infinito, o que é razoável: se ouvimos um número enorme de músicas, e há apenas finitas músicas disponíveis, o número médio de repetições deve ser grande.

d) Para  $M = 11$  e  $k = 5$ , temos que  $\mathbb{E}[X] \simeq 0,83$ . Temos que  $M = 11$  é aproximadamente o número de músicas em um CD. Ou seja, ouvindo apenas 5 músicas de um CD no modo aleatório, temos o número médio de quase uma repetição, que nos dá a sensação de demasiado grande. Eis a nossa sensação de não aleatoriedade em um fenômeno que era aleatório de fato.

**5.7.9.** O erro no argumento está em assumir que  $2x$  e  $x/2$  são equiprováveis. Os valores nos dois envelopes são o par  $(2^n, 2^{n+1})$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ . Como são infinitos pares, é impossível que todos os pares tenham a mesma probabilidade, pois a soma das probabilidades de cada elemento (no caso enumerável) deve ser igual a um. Logo, se um envelope tem  $x$ , é impossível que o outro envelope sempre tenha a mesma probabilidade de conter o dobro ou a metade.

Um argumento prático: digamos que Helen tivesse espiado o valor no envelope escolhido inicialmente. Se o valor fosse já muito alto, é improvável que o segundo envelope tivesse o dobro do valor!

**5.7.11.** Note que  $f(x) = \mathbb{E}[(X - x)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X] \cdot x + x^2$  é uma função quadrática. Aí fica fácil determinar seu ponto de mínimo.

**5.7.14.** a)  $\binom{n}{2}p$  b)  $\binom{n}{3}p^3$  c)  $\binom{n}{\ell}p^{\binom{\ell}{2}}$  d) Escolhendo quatro possíveis arestas (que formem um quadrado) e calculando a probabilidade do respectivo quadrado estar presente, obtemos como resposta  $3\binom{n}{4}p^4$ .

## 5.8 Desigualdades Clássicas

**5.8.1.** A primeira desigualdade do enunciado é consequência da desigualdade de Jensen, pois a função módulo é convexa. Para a segunda desigualdade, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]},$$

para quaisquer variáveis aleatórias  $X, Y$ . Em particular, substituindo  $X$  por  $|X|$  e  $Y$  por  $|Y|$ , obtemos

$$|\mathbb{E}[|XY|]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]},$$

ou seja,

$$\mathbb{E}|XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}[|X|^2]\mathbb{E}[|Y|^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2]},$$

que é o enunciado pedido.

## Soluções do Capítulo 6

### 6.1 Cadeias de Markov e Ruína do Jogador

**6.1.1.** Temos que

$$\mu(y)P(y, x) = \mu(x)P(x, y)$$

para quaisquer  $x, y \in X$ . Somando a equação acima em  $y \in X$ ,

$$\sum_{y \in X} \mu(y)P(y, x) = \sum_{y \in X} \mu(x)P(x, y) = \mu(x) \sum_{y \in X} P(x, y) = \mu(x).$$

**6.1.4.**

$$\sum_{y \sim x} \mu(y)P(y, x) = \sum_{y \sim x} \frac{\text{gr}(y)}{\sum_{v \in V} \text{gr}(v)} \cdot \frac{1}{\text{gr}(y)} = \frac{1}{\sum_{v \in V} \text{gr}(v)} \sum_{y \sim x} 1 = \mu(x).$$

**6.1.9.** Resposta:  $k(n - k)/p$ .

**6.1.10.** Resposta:  $n^2$ .

**6.1.11.** Resposta:  $p_x = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}$ .

**6.1.12.** Resposta:

$$f_x = \begin{cases} \frac{x}{1-2p} - \frac{n}{1-2p} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^n}, & \text{se } p \neq 1-p, \\ x(n-x), & \text{se } p = 1-p = 1/2. \end{cases}$$

**6.1.13.** Nos tempos pares, o ratinho estará nos vértices  $A$ ,  $E$  ou  $C$ . Nos tempos ímpares, o ratinho estará nos vértices  $D$ ,  $B$  ou  $F$ . Logo, se no tempo  $n = 23$  o ratinho estiver na coluna central, necessariamente ele estará no vértice  $B$ . Portanto, basta calcular a probabilidade do ratinho estar na coluna central no tempo  $n = 23$ , ou seja, basta calcular  $a_{23}$ . Se o ratinho está na coluna central num certo tempo, a probabilidade dele permanecer nela no próximo tempo é  $1/3$ . E se o ratinho não está na coluna central num certo tempo, a probabilidade dele ir para a coluna central é  $1/2$ . Assim,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n).$$

Resolvendo a recorrência acima (usando o método da equação característica, por exemplo), obtemos  $a_{23} = \frac{3}{7} + \frac{3}{7 \cdot 6^{23}}$ .

**6.1.14.** Note que feijões que começam em casas adjacentes nunca se encontram. Logo, o problema se reduz a calcular a probabilidade de que dois feijões inicialmente em casas opostas estejam em casas distintas após  $n$  passos. Calculando esta probabilidade, a resposta do problema será o quadrado desta probabilidade, pois são dois pares de feijões.

Seja  $a_n$  a probabilidade de que dois feijões, que no tempo zero estão em vértices opostos, estejam em vértices opostos no tempo  $n$ . Se, num certo tempo, os feijões estão em vértices opostos, então a probabilidade de estarem em vértices opostos no tempo seguinte é  $1/2$ . Se, num certo tempo, eles estão num mesmo vértice, então a probabilidade de estarem em vértices opostos no tempo seguinte também é  $1/2$ . Logo,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{2}.$$

Portanto,  $a_{2013} = 1/2$  e a resposta do problema é  $1/4$ .

## 6.2 Lei Fraca dos Grandes Números

**6.2.1.** a) Vamos denotar por  $x$  a distância do ponto médio da agulha até a reta mais próxima, e por  $\theta$  o ângulo entre a reta determinada pela agulha e uma perpendicular às retas paralelas, veja a Figura 7.21. Por simetria, podemos supor sem perda de generalidade que  $0 \leq x \leq \ell/2$  e  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Além disso, do enunciado podemos assumir que  $x$  e  $\theta$  são independentes, que  $x$  é uniforme em  $[0, \ell/2]$  e que  $\theta$  é uniforme em  $[0, \pi/2]$ . Portanto, o par  $(\theta, x)$  tem densidade constante igual

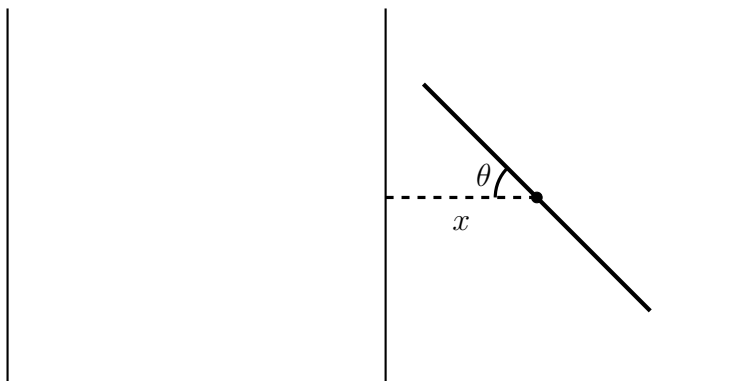


Figura 7.21. Retas paralelas, distância  $x$  e ângulo  $\theta$ .

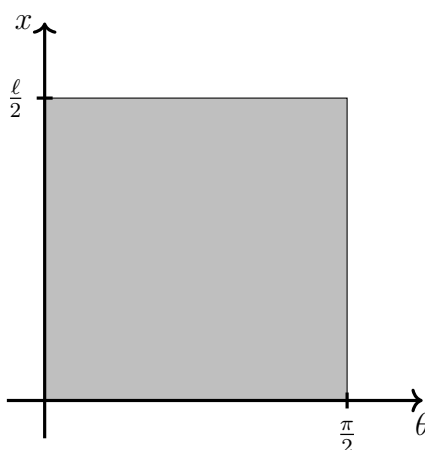


Figura 7.22. O par  $(\theta, x)$  tem densidade igual a  $\frac{4}{\pi\ell}$  na região em cinza.

a  $\frac{4}{\pi\ell}$  na região mostrada na Figura 7.22. Falta determinar qual região corresponde à situação onde a agulha corta alguma reta. Voltando à Figura 7.21, note que isso ocorre se, e somente se,  $x \leq \frac{d}{2} \cos \theta$ . Logo, a probabilidade de que a agulha intersecte alguma reta é igual à integral da densidade na região mostrada na Figura 7.23.

Assim, a probabilidade pedida é dada por

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{d}{2} \cos \theta} \frac{4}{\pi\ell} dx d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{2d}{\pi\ell} \cos \theta d\theta = \frac{2d}{\pi\ell}.$$

**Observação.** Se supusermos que um dos extremos da agulha é que é uniforme em  $[0, \ell/2]$ , chega-se na mesma resposta,  $\frac{2d}{\ell\pi}$ . Apenas tome um cuidado: para resolver o problema deste modo, é necessário separar em dois casos,  $d < \ell/2$  e  $\ell/2 \leq d \leq \ell$ .

b) Basta aplicar a Lei dos Grandes Números! Joguemos a agulha repetidamente ao chão. Pela Lei dos Grandes Números, a média de vezes que a agulha

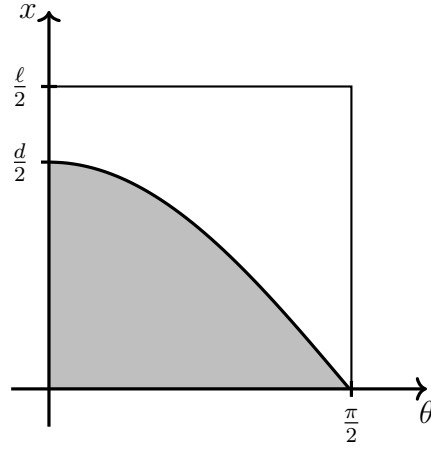


Figura 7.23. Região correspondente ao evento *a agulha intersecta alguma reta*.

corta uma reta se aproximará de  $\frac{2d}{\pi\ell}$ , o que nos dará o valor aproximado de  $\pi$ . Bem, não seria ergonômico lançar uma agulha ao chão muitas vezes... dor nas costas seria uma consequência muito provável. Em vez disso, é possível usar um computador para sortear variáveis aleatórias que simulem a agulha lançada ao chão.

## 6.3 Lei Forte dos Grandes Números

### 6.3.1. a) Temos que

$$\mathbb{P}[n^{-X_n} > \varepsilon] = \mathbb{P}[-X_n \log n > \log \varepsilon] = \mathbb{P}[X_n < \frac{\log \varepsilon}{\log n}] = \frac{\log \varepsilon}{\log n} \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ . b) Como  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[n^{-X_n} > \varepsilon] = \infty$ , pelo Lema de Borel-Cantelli, temos que  $\mathbb{P}(n^{-X_n} > \varepsilon \text{ i.v.}) = 1$ , logo  $\mathbb{P}[n^{-X_n} \rightarrow 0] = 0$ .

**6.3.2.** a) Como  $Y_n \rightarrow Y$  q.c., por definição existe um evento  $A \in \mathbb{A}$  tal que  $\mathbb{P}(A) = 1$  e, para todo  $\omega \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = Y(\omega)$ . Logo,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} [|Y_k - Y| > \varepsilon] \subset A^c.$$

Portanto, como  $\mathbb{P}(A) = 1$ , temos que  $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} [|Y_k - Y| > \varepsilon]) = 0$ .

b) Denote  $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} [|Y_k - Y| > \varepsilon]$  e  $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} [|Y_k - Y| > \varepsilon]$ . Note que  $B_n \searrow B$ . Pela continuidade da probabilidade, temos que  $\mathbb{P}(B_n) \searrow \mathbb{P}(B) = 0$ .

c) Note que  $\bigcup_{k=n}^{\infty} [|Y_k - Y| > \varepsilon] \supset [|Y_n - Y| > \varepsilon]$ . Logo,  $\mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} [|Y_k - Y| > \varepsilon]) \geq \mathbb{P}([|Y_n - Y| > \varepsilon])$ .



## 6.4 Fórmula de Stirling

**6.4.6.** a) Pelo Exercício 6.4.4, sabemos que

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}.$$

Logo,

$$\frac{e^n}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{12n+1}}} > \frac{1}{n!} > \frac{e^n}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{12n}}}.$$

Aplicando a raiz  $n$ -ésima, obtemos

$$\frac{e}{(\sqrt{2\pi})^{1/n} n^{1+\frac{1}{2n}} e^{\frac{1}{n(12n+1)}}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{e}{(\sqrt{2\pi})^{1/n} n^{1+\frac{1}{2n}} e^{\frac{1}{12n^2}}}.$$

Multiplicando por  $n$ , temos então que

$$\frac{e}{(\sqrt{2\pi})^{1/n} n^{\frac{1}{2n}} e^{\frac{1}{n(12n+1)}}} > \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{e}{(\sqrt{2\pi})^{1/n} n^{\frac{1}{2n}} e^{\frac{1}{12n^2}}}.$$

Daí, pelo Teorema do Sanduíche, temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ .

b) Pela Fórmula de Stirling (Teorema 6.4.2), temos que  $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ . Logo, temos também que  $(2n)! \sim \sqrt{2\pi} (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}$ . Portanto,

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{\left(\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right)^2}{\sqrt{2\pi} (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}} = \frac{\sqrt{2\pi} n^{2n+1}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{n}}{2^{2n} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{n}}{2^{2n}}.$$

Portanto, deduzimos disso que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

c) Temos que

$$\begin{aligned} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \sqrt{n} &= (-1)^n \sqrt{n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \left(-\frac{1}{2}-2\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right) \cdot \frac{1}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots \left(-\frac{(2n-1)}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \cdots \left(\frac{(2n-1)}{2}\right) = \frac{\sqrt{n} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n! \cdot 2^n}. \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo pelos números que faltam para obtermos um fatorial no numerador, obtemos

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n} \cdot (2n)!}{n! \cdot n! \cdot 2^{2n}}.$$

Logo, invocando o item anterior,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ .

**6.4.7.** a) Temos que  $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ .

b) Faça integração por partes.

c) Pela Figura 6.2, podemos intuir que o domínio da função gama é dado por  $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ , e a imagem é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . A função fatorial é definida por  $t! = \Gamma(t+1)$ . Portanto, a imagem é a mesma da função gama, e o domínio é dado por  $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$ . A função fatorial e a função gama são contínuas em qualquer ponto de seu domínio. Para cada  $k$  inteiro não negativo, a função combinação é definida por

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1) \cdots (t-k+1)}{k!},$$

que é uma função polinomial em  $t$ . Logo, é contínua com domínio  $\mathbb{R}$ .

**Observação.** Note que não há como definir a função fatorial (assim como a função gama) nos valores que não estão em seu domínio de modo que a função siga contínua, pois os limites laterais nestes pontos são sempre  $+\infty$  de um lado e  $-\infty$  do outro.

**6.4.10.** Mostre que  $\Gamma$  é crescente para  $t \geq 2$  e use o Exercício 6.4.4.

## 6.5 Teorema Central do Limite

**6.5.1.** a)  $I(0) = \int_0^\pi dx = \pi$  e  $I(1) = \int_0^\pi \text{sen}(x) dx = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$ .

b) Seja  $k \geq 2$  inteiro. Usando integração por partes:

$$\begin{aligned} I(k) &= \int_0^\pi \text{sen}^{k-1}(x) \cdot \text{sen}(x) dx \\ &= -\text{sen}^{k-1}(x) \cdot \cos(x) \Big|_0^\pi + (k-1) \int_0^\pi \text{sen}^{k-2}(x) \cdot \cos^2(x) dx \\ &= 0 - (k-1)I(k) + (k-1)I(k-2). \end{aligned}$$

Logo,  $kI(k) = (k-1)I(k-2)$ , que implica  $\frac{I(k)}{I(k-2)} = \frac{k-1}{k}$ .

c) Temos que

$$\begin{aligned} I(2k) &= \frac{I(2k)}{I(2k-2)} \cdot \frac{I(2k-2)}{I(2k-4)} \cdots \frac{I(4)}{I(2)} \cdot \frac{I(2)}{I(0)} \cdot I(0) \\ &= \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi \prod_{j=1}^k \frac{2j-1}{2j}. \end{aligned}$$

e também que

$$\begin{aligned} I(2k+1) &= \frac{I(2k+1)}{I(2k-1)} \cdot \frac{I(2k-1)}{I(2k-3)} \cdots \frac{I(5)}{I(3)} \cdot \frac{I(3)}{I(1)} \cdot I(1) \\ &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I(1) = 2 \prod_{j=1}^k \frac{2j}{2j+1}, \end{aligned}$$

d) No intervalo  $[0, \pi]$  a função seno está entre 0 e 1. Portanto para qualquer  $x \in [0, \pi]$ , temos que  $(\sin(x))^{k+1} \leq (\sin(x))^k$ , que implica em  $I(k+1) \leq I(k)$ .

e) As duas primeiras desigualdades são consequência de  $I$  ser não crescente, veja o item d). Para a última igualdade, basta aplicar o item b).

f) Pelo Teorema do Sanduíche para limites, temos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I(2k)}{I(2k+1)} = 1$ , que

$$\text{implica } 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I(2k+1)}{I(2k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \prod_{j=1}^k \left( \frac{2j}{2j-1} \cdot \frac{2j}{2j+1} \right) = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right).$$

$$\text{Portanto, } \prod_{k=1}^{\infty} \left( \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

g) Pela Fórmula de Wallis,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \pi/2$ . Por outro lado, usando a Fórmula de Stirling, temos que

$$p_n = \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2} \sim \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{2^{4n}(e^c n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n})^4}{[e^c (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}]^2} = \frac{e^{2c} n}{2(2n+1)}.$$

Portanto,  $\frac{e^{2c}}{4} = \frac{\pi}{2}$  e assim  $e^c = \sqrt{2\pi}$ .

## 6.6 Passeio do Bêbado

**6.6.1.** Para  $d = 1$ , temos que

$$\mathbb{P}(X_{2n} = 0) = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n},$$

que é maior ou igual a  $C/\sqrt{n}$  pela Fórmula de Stirling provada no Exercício 6.4.4. Assim,  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \infty$  e portanto o passeio aleatório em uma dimensão é recorrente.



## LISTA DE FIGURAS

1	Fluxograma de dependências (de modo geral) entre capítulos. Como mostrado no próximo fluxograma, há certas seções do Capítulos 5 e 6 que dependem do Capítulos 3 e 4 . . . . .	1
2	Fluxograma de dependências (fortes) entre certas seções dos Capítulos 3, 4, 5 e 6 . . . . .	2
1.1	Ilustração do polígono convexo $P'$ de $n + 1$ vértices e $(n + 1)$ lados .	8
1.2	Números Pentagonais . . . . .	15
1.3	Polígono $\overline{ABCDEF}$ . . . . .	16
1.4	Trapézio $\overline{ABCD}$ de coordenadas inteiras. Os pontos de $\mathbb{Z}^2$ sobre a fronteira estão marcados com bolas pretas e os pontos de $\mathbb{Z}^2$ no interior estão marcados com bolas brancas . . . . .	16
1.5	Exemplo de relação $\mathcal{R}$ em $A \times B$ . . . . .	22
1.6	Exemplo de relação $\mathcal{R}$ no conjunto $X$ . . . . .	22
1.7	Exemplo de relação reflexiva: em cada ponto há um laço . . . . .	23
1.8	Exemplo de relação antirreflexiva: não há laços . . . . .	23
1.9	Exemplo de relação simétrica . . . . .	24
1.10	Exemplo de relação antissimétrica . . . . .	24
1.11	Exemplo de relação transitiva . . . . .	25
1.12	Desenhe uma representação gráfica para a relação ternária $\mathcal{R} = \{(a, d, e), (b, c, e)\}$ . . . . .	26
1.13	Exemplo de relação identidade $Id_X$ . Há apenas laços . . . . .	27
1.14	Relação $\mathcal{R}$ em $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	28
1.15	Exemplo de relação de equivalência $\mathcal{R}$ em $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	30
1.16	Representação gráfica da relação de equivalência $\mathcal{R}$ (específica para relações de equivalência) . . . . .	31
1.17	84 sorteios de pares de dados . . . . .	35
2.1	Torres que não se atacam . . . . .	42
2.2	Bispos que não se atacam . . . . .	43
2.3	Bispo branco em d4 alcança 14 casas . . . . .	44

2.4	Bispo preto e cavalo branco . . . . .	45
2.5	Relação de equivalência $\mathcal{R}$ : cada classe de equivalência corresponde a um anagrama da palavra TATU . . . . .	46
2.6	Formiga vai de $A$ a $B$ no reticulado . . . . .	47
2.7	Formiga vai de $A$ a $B$ no cubo . . . . .	48
2.8	Uma mesma disposição das pessoas na mesa . . . . .	49
2.9	Cadeiras numeradas . . . . .	50
2.10	Relação de equivalência $\mathcal{R}$ : cada classe de equivalência corresponde a uma disposição das quatro pessoas em torno da mesa redonda . . . . .	51
2.11	Dodecaedro . . . . .	51
2.12	Icosaedro . . . . .	52
2.13	Relação de equivalência $\mathcal{R}$ : cada classe de equivalência corresponde a <i>uma</i> escolha de três pessoas . . . . .	53
2.14	Paralelepípedo . . . . .	58
2.15	Exemplo de vértices formando um triângulo equilátero . . . . .	61
2.16	Icosaedro regular . . . . .	67
2.17	Cubo e cubo truncado . . . . .	67
2.18	Ilustração de uma peça de dominó . . . . .	68
2.19	Triminó triangular . . . . .	72
2.20	Algarismos indo-arábicos . . . . .	72
2.21	Molécula com quatro átomos . . . . .	73
2.22	Isômeros . . . . .	73
2.23	Pirâmide: neste problema, faces distintas podem ter a mesma cor . . . . .	74
2.24	Exemplo de pintura da roleta, sendo permitido repetição de cores . . . . .	74
2.25	Pentágonos . . . . .	75
2.26	Pirâmide regular de base octogonal . . . . .	79
2.27	Cubo com vértices rotulados . . . . .	80
2.28	Ilustração do movimento rígido $\phi$ em torno da reta $\overline{v_1 v_7}$ . Note que $v_2$ é levado em $v_4$ , $v_4$ é levado em $v_5$ e $v_5$ é levado em $v_2$ . . . . .	80
2.29	Dois elementos em $X$ que estão numa mesma classe de equivalência, ou seja, representam a mesma pintura . . . . .	81
2.30	Exemplo de rotação em torno de uma reta passando pelos centros de faces opostas . . . . .	81
2.31	Arestas, vértices e faces de um dodecaedro regular e de um icosaedro regular . . . . .	83
2.32	Molécula de um cristal hipotético . . . . .	85
3.1	Se $A$ e $B$ não são disjuntos, não podemos aplicar a Regra da Soma . . . . .	88
3.2	Conjuntos $A$ , $B$ e $C$ não necessariamente disjuntos . . . . .	89
3.3	Bolas na posição correta . . . . .	93
3.4	Duas formas para guardar os retângulos numa caixa $2 \times 7$ . Na da esquerda há dois retângulos deitados no extremo à direita da caixa . . . . .	99
3.5	A reta em linha grossa é a reta adicionada ao plano . . . . .	100

3.6	Duas triangulações diferentes do pentágono $ABCDE$	102
3.7	Exemplo de trajetória permitida	103
3.8	Exemplo de cobertura	112
3.9	Exemplo de trajetória com $a = 8$ , $b = 2$ e $c = 3$	124
3.10	Trajetoária que toca a reta $y = c$ e sua reflexão em linha pontilhada	125
3.11	Exemplos de diagramas de Ferrers	131
3.12	Partição e sua partição conjugada	132
3.13	Definição de $A$ e $B$	132
3.14	Exemplo da operação $\Psi$ no caso $ A  \leq  B $ e $A \cap B = \emptyset$	133
3.15	Exemplo da operação $\Psi$ no caso $ A  >  B $ e $A \cap B = \emptyset$	133
3.16	Exemplo da operação $\Psi$ no caso $ A  \leq  B $ e $A \cap B \neq \emptyset$ . Note que o ponto de interseção foi movido de posição	133
3.17	$\Psi$ não está definida no caso $ A  =  B $ e $A \cap B \neq \emptyset$	133
3.18	$\Psi$ não está definida no caso $ A  =  B  + 1$ e $A \cap B \neq \emptyset$	134
4.1	Quadrado de lado 2 e sua diagonal	140
4.2	Casas de Pombos	142
4.3	Primeiras linhas do Triângulo de Pascal. Cada entrada é soma da entrada acima com a entrada acima à esquerda	147
4.4	A soma em uma coluna é igual ao elemento abaixo à direita	148
4.5	A soma em uma diagonal é a entrada diretamente abaixo do último elemento	148
4.6	Somas em diagonais invertidas e Fibonacci	152
4.7	Exemplo de grafo. No caso, o conjunto de vértices é $V = \{a, b, c, d, e, f\}$	156
4.8	Exemplo de multigrafo	156
4.9	Exemplo de árvore	157
4.10	Pontes de Konisberg sobre o Rio Pregel e multigrafo correspondente	158
4.11	Ciclo hamiltoniano em $G'$	160
4.12	Exemplo de grafo bipartido. No caso, $M = \{a, b, c, d\}$ e $N = \{e, f, g, h\}$	164
4.13	Três casos possíveis para $n = 3$	168
4.14	Tetraedro e “tetraedro planificado”	170
4.15	Cubo e “cubo planificado”	170
4.16	Grafo de Petersen	173
4.17	Grafo bipartido completo $K_{3,5}$	174
4.18	Ligue cada casa a água, luz e esgoto, sem que haja cruzamentos	174
4.19	Grafo planar	175
5.1	Circunferência, corda e triângulo inscrito	179
5.2	O evento $B$ (hachurado) representa o conjunto $[A_k \text{ i.v.}]$ . O desenho é arbitrário e meramente ilustrativo	194
5.3	Exemplo de grafo orientado	196
5.4	$C_5$ , um exemplo de campeonato com 5 jogadores	197
5.5	Evento $E$ . Para <i>algum</i> grupo $A$ de $k$ jogadores, <i>não</i> existe nenhum $v$ como acima, que ganhe de todos nesse grupo	198
5.6	Densidade da v.a. $X \sim U[c, d]$	202

5.7	Densidade da v.a. $X \sim \exp(\lambda)$ . . . . .	203
5.8	Densidade da v.a. gaussiana . . . . .	203
5.9	Distribuição do vetor aleatório $(X, Y)$ . . . . .	204
5.10	Região de integração correspondente a $\mathbb{P}[X < 2Y]$ . . . . .	205
5.11	Função convexa $\phi$ e reta $r$ . . . . .	218
6.1	Cadeia de Markov representada por um grafo orientado com pesos . . . . .	223
6.2	Ilustração da função $\Gamma$ . . . . .	235
6.3	Função taxa $I : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ . . . . .	237
6.4	Gráfico da função $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}/e^c$ e região de integração . . . . .	238
6.5	Função $f_7$ . Para um certo $n \in \mathbb{N}$ , chamaremos esta função de $f_n$ . . . . .	239
6.6	Coordenadas cartesianas $(x, y)$ e coordenadas polares $(r, \theta)$ . . . . .	242
6.7	Passeio aleatório em $\mathbb{Z}^2$ . A partícula pula com probabilidade $1/4$ para alguns de seus vizinhos . . . . .	246
6.8	Exemplo de trajetória do passeio aleatório em dimensão dois com 10000 passos . . . . .	247
6.9	Passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ . . . . .	250
6.10	Passeio aleatório com viés em $\mathbb{Z}$ . . . . .	251
6.11	Passeio do bêbado hesitante . . . . .	251
7.1	Da esquerda para a direita, exemplo de: função (que não é nem injetiva nem sobrejetiva), função injetiva, função sobrejetiva e função bijetiva . . . . .	256
7.2	Possível representação gráfica para a relação ternária $\mathcal{R} = \{(a, d, e), (b, c, e)\}$ . . . . .	257
7.3	Relações $\mathcal{R}^{(2)}$ , $\mathcal{R}^{(3)}$ , $\mathcal{R}^{(4)}$ e $\mathcal{R}^{(5)}$ . . . . .	257
7.4	Trajetoária associada à palavra $DDDAAAAAAAAAADD DDDDD$ . . . . .	260
7.5	Exemplo de trajetória . . . . .	260
7.6	Trajetoária contada três vezes . . . . .	261
7.7	Trajetoária contada duas vezes . . . . .	261
7.8	Elemento de $X$ pertencente a uma classe de equivalência de tamanho dois . . . . .	268
7.9	Elemento de $X$ pertencente a uma classe de equivalência de tamanho quatro . . . . .	269
7.10	Conjuntos $A$ , $B$ e $C$ . . . . .	275
7.11	Partição e sua conjugada. Na da esquerda, todas as parcelas aparecem repetidas. Na da direita, todas as parcelas são maiores ou iguais a dois, sem inteiros consecutivos . . . . .	278
7.12	Bijeção entre diagramas de Ferrer . . . . .	279
7.13	Grupo de seis pessoas . . . . .	281
7.14	$A$ , $C$ e $E$ se conhecem . . . . .	282
7.15	$B$ , $E$ e $C$ se desconhecem . . . . .	282
7.16	Tetraedro dividido em “casas de pombos”. Quatro triângulos centrais e quatro grupos de três triângulos nas pontas do tetraedro . . . . .	283
7.17	Pintura do tabuleiro infinito . . . . .	283



7.18 Grafos regulares não isomorfos . . . . .	288
7.19 $K_5$ menos uma aresta é planar . . . . .	289
7.20 Exemplos de grafos planares conexos que satisfazem à desigual- dade estrita . . . . .	290
7.21 Retas paralelas, distância $x$ e ângulo $\theta$ . . . . .	303
7.22 O par $(\theta, x)$ tem densidade igual a $\frac{4}{\pi\ell}$ na região em cinza . . . . .	303
7.23 Região correspondente ao evento <i>a agulha intersecta alguma reta</i> .	304



## LISTA DE TABELAS

2.1	Tabela de pontos obtidos pelos estudantes . . . . .	66
3.1	Algumas sequências e funções comuns . . . . .	118
3.2	Operações úteis para resolver recorrências . . . . .	119
3.3	Partições dos números 3, 4 e 5 . . . . .	128
5.1	Dados $A$ , $B$ e $C$ . . . . .	188
5.2	Tamanhos mínimos $n$ para se construir algum campeonato $C_n$ com a propriedade $P_k$ . . . . .	197
5.3	Cor de pele e herança quantitativa . . . . .	210
7.1	Probabilidades. A entrada linha/coluna é a probabilidade da sequên- cia na linha ganhar da sequência na coluna . . . . .	292

## ÍNDICE REMISSIVO

- abuso de notação, 31, 182
- alelo, 210
- anagrama, 45–47, 97
  - circular, 52
- ansatz*, 224
- argumento combinatório, 49, 55–57, 59–61, 63, 97, 104, 150, 155
- arranjo, 41, 42
- árvore, 97, 157, 163
  
- Bahia, 59, 98, 187, 190
- bancarota, 223
- baralho, 37, 59, 64, 189
- Bernoulli, Jakob, 236
- bijeção, 52, 62, 68, 77, 79, 80, 82, 84, 125, 127, 128, 130, 134, 151, 166
- Binômio de Newton, 146
- bola de futebol, 65
  
- código Morse, 20
- cadeia de Markov, 222, 246
  - irredutível, 225
  - reversível, 225
  - simétrica, 225
- caminho
  - auto-evitante, 161
  - em um grafo, 157
  - poligonal, 104
- campeonato, 197, 198
  - baiano, 187
- cardinalidade, 17, 20
  
- cavaleiros, 97
- ciclo, 157
  - euleriano, 159–161
  - hamiltoniano, 159–161
- ciranda, 50, 97
- classe de equivalência, 29, 53, 69, 71, 94, 105
- coeficiente
  - binomial, 151
  - multinomial, 155
- combinação, 61, 64, 235
- conjectura, 10
- conjunto
  - das partes, 25, 180, 192
- contagem dupla, 64, 68, 76, 169, 173, 174
- contra-exemplo, 26
- convergência
  - em probabilidade, 228, 230, 232
  - quase certa, 230, 231
- coprimos, 92
- cubo, 48, 57, 60, 79, 80, 82–84, 200
  - truncado, 66, 67
  
- dado, 34, 37, 187, 188, 196
  - não transitivos, 187
- desigualdade
  - de Bernoulli, 10
  - de Bonferroni, 94
  - de Cauchy-Schwarz, 218, 219
  - de concentração, 219

- de Jensen, 217, 219, 229
- de Markov, 217
- de Tchebyshev, 217, 219, 230, 231, 241
  - “invertida”, 219
- entre as médias
  - aritmética e geométrica, 14, 219
  - triangular, 229
- determinante, 113
- diagonal
  - de um polígono, 66
  - de um poliedro, 66
- diagrama
  - de Ferrers, 131
  - de Venn, 21
- digrafo, 196
- distribuição
  - Bernoulli, 201, 228
  - binomial, 202, 209
  - binomial negativa, 206
  - de Cauchy, 206
  - exponencial, 203
  - gaussiana, 203
  - geométrica, 201, 207
  - hipergeométrica, 236
  - multinomial, 207
  - normal, 203
  - Poisson, 202
  - uniforme, 202
- dodecaedro, 51
  - regular, 83
  - truncado, 67
- dominó, 68, 69
- eleição, 126
- equação
  - característica, 110, 113
  - de recorrência, 87, 97
- Erdős, Paul, 196
- escada, 102
- esfera, 200
- espaço de probabilidade, 181, 196
- espaço mensurável, 181
- esquema de rimas, 94
- estabilizador, 77
- estimativa de Berry-Esseen, 245
- Euler, Leonhard, 158
- Fórmula
  - de Binet, 111, 118
  - de Euler
    - para a Função Zeta de Riemann, 192
    - para combinações, 59
    - para grafos planares, 170, 172, 175
    - sobre números pentagonais, 138
  - de Lagrange, 59, 249
  - de Stirling, 232, 234, 236–238, 243, 245, 249, 250, 307
  - de Taylor, 92, 114, 115, 117, 233, 243
  - de Wallis, 242
- falácia, 191
- falso
  - negativo, 190
  - positivo, 190
- fatorial, 40, 235
- Feirense, 98
- fenótipo, 209
- Fermat, Pierre de, 74
- Ferrers, Norman Macleod, 131
- fixador, 77
- floresta, 157
- Fluminense de Feira, 13
- folha, 163
- frações parciais, 117
- função
  - $\varphi$  de Euler, 92
  - contínua, 230, 236
  - convexa, 217
  - gama, 235
  - geradora, 115, 130, 134–137
  - geratriz, 115
  - Lipschitz, 245
  - polinomial, 228
  - quadrática, 218
  - Zeta de Riemann, 192
- galho, 97

- genética, 209
- genótipo, 209
- gene, 210
- grafo, 67, 155
  - n*-colorível, 174
  - bipartido, 164
  - cíclico, 171
  - caminho em um, 161
  - completo, 157
  - completo orientado, 197
  - conexo, 157, 161, 225
  - de Petersen, 162
  - decomposição em ciclos, 162
  - dodecaedro, 161
  - estrela, 161
  - orientado, 196
  - orientado com pesos, 222
  - planar, 167, 169
  - regular, 172
  - simples, 156
  - subgrafo de um, 157
- Grandes Desvios, 236
- grau
  - de um grafo regular, 172
- grupo
  - ação de um, 76
  - de simetrias, 84
  - finito, 76
- Hardy, Godfrey Harold, 128
- herança quantitativa, 209
- heurística, 194
- hexágono, 65, 143
- icoságono, 97
- icosaedro, 52, 66
  - regular, 83
  - truncado, 67
- Identidade
  - de Pascal, 54
  - de Vandermonde, 59
- indução, 151, 153, 175, 222, 244
- infinito
  - enumerável, 177
  - não enumerável, 177
- inspetor de estradas, 160
- Integração Monte Carlo, 230
- isômeros, 73
- Jobs, Steve, 215
- jogo
  - de *Craps*, 188
  - de xadrez
    - torre, 42
- jogo de
  - xadrez
    - bispo, 43
- juízo, 191
- Kolmogorov, Andrei, 177
- Kuratowski, Kasimir, 157
- laço, 22, 156
- Laplace, Pierre-Simon, 34, 243
- Leis de Morgan, 193
- Lema
  - de Borel-Cantelli, 192, 194, 195, 231
  - de Burnside, 75, 78, 81, 84
  - de Kaplansky
    - Primeiro, 96, 152
    - Segundo, 96
  - de Sperner, 152
- logaritmo, 240
  - expansão, 233
  - neperiano, 237
- loop, 156
- loteria, 190
- Método de Laplace, 243
- Método Probabilístico, 196
- Markov, Andrei Andreyevich, 217
- moeda
  - desonesta, 34, 189, 212
  - honesta, 36, 59, 180, 188, 191, 195, 199, 200, 219
- monômio, 146
- movimento rígido, 80
- multigrafo, 156, 157, 160
  - euleriano, 159
  - orientado com pesos, 223
  - semi-euleriano, 163

- Multinômio de Leibniz, 154
- $n$ -ágono, 66
- Número Áureo  $\phi$ , 114
- Números
- de Bell, 94, 105, 127
  - de Catalan, 121, 123, 125
  - de Fibonacci, 12
  - de Stirling
    - de primeira ordem, 104
    - de segunda ordem, 93, 104, 127
  - Harmônicos, 11
  - Pentagonais, 15, 138
- órbita, 76, 77
- panaceia, 106
- Paradoxo
- de Bertrand, 179
  - de Galton, 191
  - de São Petersburgo, 214
  - dos Envelopes, 215
- paralelepípedo, 57
- Passeio do Bêbado, 246
- pentágono, 65, 102
- Pequeno Teorema de Fermat, 74, 153
- permutação, 41, 45, 62, 103
- cíclica, 104
  - caótica, 103, 120
  - com repetição, 47
- pirâmide, 73, 79
- polígono
- convexo, 8
  - não-convexo, 16
- poliedro, 65, 66
- dual, 84
  - truncado, 66
- polinômio, 228, 229
- Pontes de Konisberg, 158
- Princípio
- Aditivo, 17, 40
  - da Boa Ordenação, 7
  - da Reflexão, 123
  - das Casas dos Pombos, 139
  - das Gavetas, 139
  - de Dirichlet, 139
  - de Inclusão-Exclusão, 88
  - de Indução, 7, 9, 19, 41
  - de Indução Generalizado, 9
  - Multiplicativo, 18
- probabilidade, 33, 36, 58–60, 64, 92, 93, 126, 181, 198, 199
- de Laplace, 34
  - equiprovável, 186
- Problema
- da Agulha de Buffon, 230
  - da Falácia do Advogado, 190
  - da Ilha, 209
  - da Ruína do Jogador, 223
    - com viés, 226
    - hesitante, 226
  - das Caixas de Fósforo de Banach, 208
  - de Monty Hall, 37
  - do Colecionador de Figurinhas, 214
  - do Milênio, 159
  - dos Parênteses, 101
  - dos Prisioneiros, 190
- progressão
- aritmética, 226
  - geométrica, 11, 64, 106, 107, 116, 117, 129, 188, 212, 226, 249, 276
    - de ordem  $\ell$ , 107
    - de segunda ordem, 107, 212
- propriedade
- associativa, 76
  - distributiva, 64, 146, 153
- pulseira, 51, 52, 79
- quadrado, 57, 68, 140
- Rademacher, Hans, 128
- Ramanujan, Srinivasa, 128
- Razão Áurea  $\phi$ , 114
- reality show*, 214
- recorrência, 97, 207, 224
- de passeios aleatórios, 247, 248
  - de primeira ordem, 106
  - de segunda ordem, 106
  - linear homogênea, 110

- sistema de, 122
- reflexão, 75
- Regra
  - da Soma, 17, 40, 45, 55, 88, 139, 266
  - do Produto, 18, 36, 40, 42, 69, 76, 127
- relação, 21, 54
  - antirreflexiva, 23, 58, 156, 197
  - antissimétrica, 24, 58
  - binária, 21
  - de equivalência, 29, 30, 32, 49, 52, 58, 76, 94, 105, 245
  - de recorrência, 97
  - reflexiva, 22, 58
  - simétrica, 23, 58, 156
  - transitiva, 24, 58
- Relação de Stifel, 54, 59, 60, 63, 146, 147, 152
  - para coeficientes multinomiais, 155
  - para combinações com repetição, 63
- representante de vendas, 160
- retângulo, 57, 68, 99, 102, 143
- rimas, 94
- roleta, 69, 74–76
- rotação, 50, 51, 74–76, 81, 82
- série
  - formal, 115
  - geométrica, 234
- sangue, 209
- sensação
  - de aleatoriedade, 215
  - de não aleatoriedade, 215
- sequência
  - binária, 113
  - de Fibonacci, 98, 100, 111, 114, 116, 152
  - quaternária, 103
  - quinária, 120
  - ternária, 250
- Sequência de Fibonacci, 12
- Shakespeare, William, 194
- simetria, 237
- soma
  - de polinômios, 148
  - de progressão geométrica, 11
  - de Riemann, 238
  - infinita, 64
  - telescópica, 109, 182
- subaditividade, 183
- substituição reversa, 105
- tabela, 68
- Teorema
  - da Curva de Jordan, 169
  - das Colunas, 147
  - das Diagonais, 148
  - das Diagonais Invertidas, 151
  - das Linhas, 147
  - de Aproximação de Weierstrass, 228
  - de Bayes, 185
  - de Extensão de Kolmogorov, 195, 201
  - de Fubini, 65, 249
  - de Lagrange, 77
  - de Pólya, 247
  - de Pick, 16
  - de Pitágoras, 140
  - de Stone-Weierstrass, 228
  - de Wilson, 75
  - do Sanduíche, 305, 307
  - dos Números Pentagonais, 138
- tetraedro, 144
- torneio, 187
- Torres de Hanói, 13, 103
- transformada de Stirling, 104
- transiência de passeios aleatórios, 247, 248
- triângulo, 102, 216
  - equilátero, 60, 179
- Triângulo de Pascal, 106, 146
- triangulação de um polígono, 102
- triminó, 71
  - triangular, 71
- Vitória, 59, 98, 187
- Wallis, John, 242
- xadrez, 145



## BIBLIOGRAFIA

- [Aigner e Ziegler, 2014] Aigner, M. e Ziegler, G. M. (2014). *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, 5ª edição.
- [Andreescu e Feng, 2004] Andreescu, T. e Feng, Z. (2004). *A Path to Combinatorics for Undergraduates*. Birkhäuser Basel, 1ª edição.
- [Andrews, 1976] Andrews, G. E. (1976). *The Theory of Partitions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam.
- [Apostol, 1969] Apostol, T. M. (1969). *Calculus, Vol. 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability*. Graduate Texts in Mathematics. John Wiley and Sons, 2ª edição.
- [Bollobás, 1979] Bollobás, B. (1979). *Graph theory*, volume 63 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin.
- [Bona, 2006] Bona, M. (2006). *A Walk Through Combinatorics*. World Scientific.
- [Carvalho, 1999] Carvalho, P. C. P. (1999). O princípio das gavetas. *Eureka*, 5:27–33.
- [Carvalho et al., 2004] Carvalho, P. C. P., Morgado, A. C. d. O., Fernandez, P. e Pitombeira, J. B. (2004). *Análise Combinatória e Probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática. SBM, 6ª edição.
- [Chen e Koh, 1992] Chen, C. C. e Koh, K. M. (1992). *Principles and techniques in combinatorics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ.
- [Clay Inst., 2017] Clay Inst. (2017). <http://www.claymath.org/millennium-problems>.
- [Durrett, 2010] Durrett, R. (2010). *Probability: Theory and Examples*, volume 31 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 4ª edição.

- [Feller, 1968] Feller, W. (1968). *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I.* John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 3ª edição.
- [Fernandez, 1973] Fernandez, P. (1973). *Introdução à Teoria das Probabilidades.* Elementos de Matemática. LTC, Livros Técnicos e Científicos. UNB.
- [Franco et al., 2012] Franco, T., Hilário, M. e Silva, P. (2012). *Introdução à Probabilidade só com Moedinhas.* II Colóquio de Matemática do Nordeste, Univ. Federal do Piauí.
- [Georgii, 2013] Georgii, H.-O. (2013). *Stochastics: Introduction to Probability and Statistics.* De Gruyter Textbook. Walter de Gruyter & Co., Berlin.
- [Grimmett e Stirzaker, 2004] Grimmett, G. e Stirzaker, D. (2004). *One Thousand Exercises in Probability.* Oxford University Press.
- [Holanda, 2016] Holanda, B. (2016). Aulas POTI combinatória, nível 2. On-line: <http://poti.impa.br/>.
- [Honsberg, 1991] Honsberg, R. (1991). *More Mathematical Morsels.* Mathematical Association of America.
- [James, 2015] James, B. (2015). *Probabilidade: Um curso em nível intermediário.* Projeto Euclides. IMPA, 4ª edição.
- [Keller e Trotter, 2015] Keller, M. e Trotter, W. (2015). *Applied Combinatorics, edição preliminar.* On-line. <https://people.math.gatech.edu/trotter/book.pdf>.
- [Lima, 2017] Lima, E. L. (2017). *Análise Real Vol. I.* IMPA - Coleção Matemática Universitária, 12ª edição.
- [Lovász et al., 2003] Lovász, L., Pelikán, J. e Vesztergombi, K. (2003). *Matemática Discreta.* Coleção Textos Universitários. SBM, 1ª edição.
- [Meester, 2008] Meester, R. (2008). *A Natural Introduction to Probability Theory.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2ª edição.
- [Mlodinow, 2008] Mlodinow, L. (2008). *O Andar do Bêbado: como o acaso determina nossas vidas.* Zahar, 1ª edição.
- [Muniz Neto, 1999] Muniz Neto, A. C. (1999). Desigualdades elementares. *Eureka*, 5:34–49.
- [Neumann, 1979] Neumann, P. M. (1979). A lemma that is not Burnside's. *Math. Scientist*, 4:133–141.
- [Rosen, 2006] Rosen, K. (2006). *Discrete Mathematics and Its Applications.* McGraw Hill Higher Education, 6th edition edição.

- [Saldanha, 1999] Saldanha, N. C. (1999). Como perder amigos e enganar pessoas. *Eureka*, 1:41–50.
- [Santos, 2015] Santos, J. P. d. O. (2015). *Introdução à Teoria dos Números*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 3ª edição.
- [Santos et al., 2007] Santos, J. P. d. O., Mello, M. P. e Muari, I. T. C. (2007). *Introdução à Análise Combinatória*. Coleção Matemática Universitária. Editora Ciência Moderna, 4ª edição.
- [Shine, 2016] Shine, C. (2016). Aulas POTI combinatória, nível 3. On-line: <http://poti.impa.br/>.
- [Sloane, 1995] Sloane, N. J. A. (1995). The encyclopedia of integer sequences. Link: <https://oeis.org/A006905>.
- [van Lint e Wilson, 2001] van Lint, J. H. e Wilson, R. M. (2001). *A Course in Combinatorics*. Cambridge University Press.