Anotações de Cálculo 3

Luiz Felipe

3 de setembro de 2025

Sumário

1 Derivadas Parciais

1.1 Derivadas em funções de múltiplas variáveis

Definição 1.1. Dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definimos as derivadas parciais de f em relação a x e y da seguinte maneira:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,\ y) - f(x, y)}{h} \qquad f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,\ y+h) - f(x, y)}{h}$$

Interpretação geométrica das derivadas parciais

Seja $z = f(x, y)$ representando uma superfície S, e considere o ponto $P(a, b, c)$ onde $c = f(a, b)$. Definimos a curva C_1 como a interseção de S com o plano $y = b$, isto é, $C_1 : z = f(x, b)$, e a curva C_2 como a interseção com o plano $x = a$, ou seja, $C_2 : z = f(a, y)$.

As inclinações das retas tangentes às curvas C_1 e C_2 no ponto P são dadas, respectivamente, por $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$. Portanto, as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a, b, c)$ aos cortes C_1 e C_2 da superfície S nos planos $y = b$ e $x = a$.

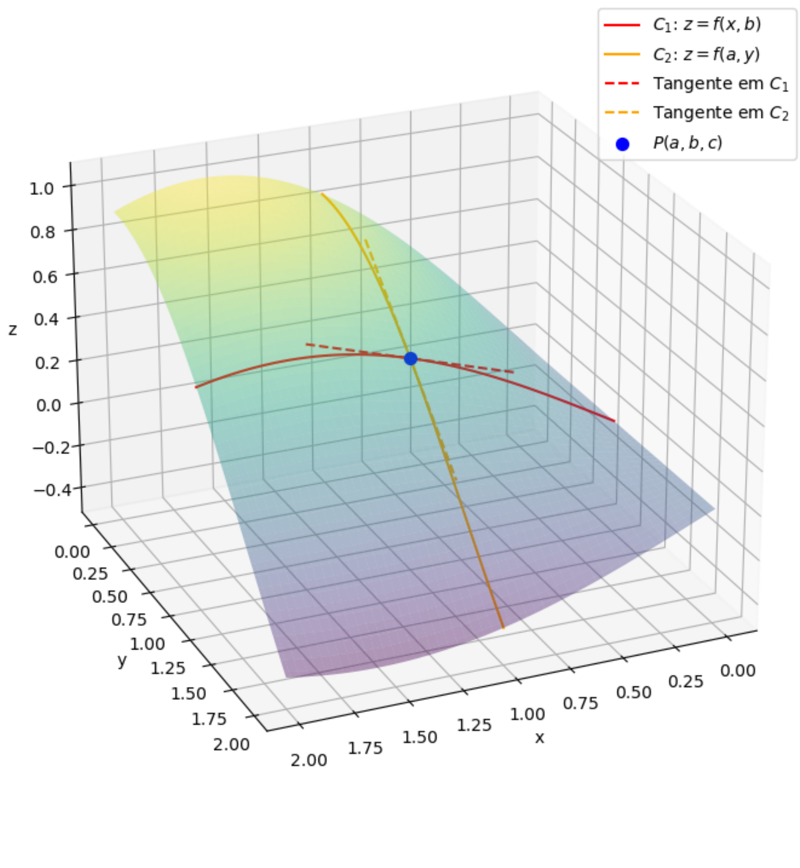

Figura 1: Interpretação geométrica das derivadas parciais

Definição 1.2. Dada uma função $f : \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos as derivadas parciais de f em relação à i-ésima variável como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h,\ x_m) - f(x_1, \ldots, x_m)}{h}$$

Definição 1.3. Para derivadas parciais de ordem superior:

$$(f_{x_i})_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial (x_i)^2}$$

Teorema 1.1. Seja f definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b). Se ambas as funções f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em D, então:

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

1.2 Planos Tangentes e Aproximações Lineares e Diferenciais

1.2.1 Planos Tangentes

Suponha que uma superfície S tenha a equação $z = f(x, y)$, onde f tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto na superfície S. pegue as curvas C_1 e C_2 que são respectivamente $f_x(x, y_0)$ e $f_y(x_0, y)$ seja T_1, T_2 retas tangentes as curvas C_1, C_2 obtemos um **Plano Tangente** a superfície S no ponto P.

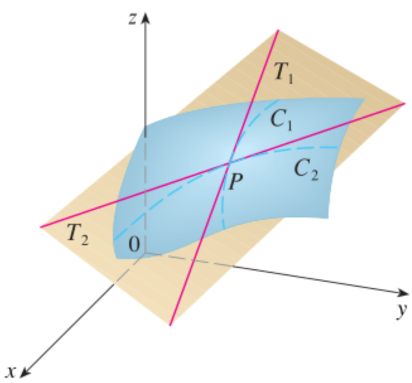

Figura 2: Plano Tangente Ao Ponto P

Temos que a equação do plano passando por $P(x_0, y_0, z_0)$ tem a forma:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

Dividindo em ambos os lados por -C temos

$$\frac{A}{-C}(x - x_0) + \frac{B}{-C}(y - y_0) + -z + z_0 = 0 \tag{2}$$

Escrevendo $a = -\dfrac{A}{C}$ e $b = -\dfrac{B}{C}$ temos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = z - z_0 \tag{3}$$

Repare que quando $y = y_0$ obtemos a seguinte equação

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = z - z_0 \tag{4}$$

Se a equação 1 representa o plano temos que a equação 4 representa a reta T_1 logo sua inclinação é $a = f_x(x_0, y_0)$.

De maneira análoga quando $x = x_0$ obtemos a seguinte equação:

$$b(y - y_0) = z - z_0 \tag{5}$$

Temos que a equação 5 representa a reta T_2 portanto sua inclinação é $b = f_y(x_0, y_0)$ o que motiva a seguinte definição

Definição 1.4. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função onde suas derivadas parciais são contínuas uma equação do plano tangente a superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

1.2.2 Aproximações Lineares

Sabemos que a equação do plano do plano tangente ao gráfico de uma função f cujas derivadas parciais são contínuas no ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Temos que a função linear cujo gráfico é esse plano tangente é

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Denominamos de **linearização** de f em (a, b) a aproximação:

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

ou seja obtemos boas aproximações da função original através de $L(x, y)$ porém elas só ficam precisas em torno de (a, b). o que motiva a seguinte definição

Definição 1.5. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função onde suas derivadas parciais são contínuas temos que a aproximação em (a, b) é dada da seguinte maneira

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

1.2.3 Diferenciais

Uma variável. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Dizemos que f é derivável em x_0 se existe $f'(x_0)$ tal que, para $\Delta x \to 0$,

$$\Delta y \;=\; f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \;=\; f'(x_0)\,\Delta x \;+\; r(\Delta x), \qquad \text{com } \frac{r(\Delta x)}{|\Delta x|} \longrightarrow 0.$$

De forma equivalente (versão $\varepsilon\delta$):

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0 \ \text{ tal que } \ |\Delta x| < \delta \ \Rightarrow\ \left|\Delta y - f'(x_0)\Delta x\right| \le \varepsilon\,|\Delta x|.$$

O *diferencial* de f em x_0 é a aplicação linear dada por

$$dy \;=\; f'(x_0)\,dx,$$

onde dx é um incremento independente. Assim, para dx pequeno,

$$f(x_0 + dx) \;\approx\; f(x_0) + dy \;=\; f(x_0) + f'(x_0)\, dx.$$

Duas variáveis. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e fixe (x_0, y_0). Dizemos que f é *diferenciável* em (x_0, y_0) se existe uma aplicação linear

$$L(\Delta x, \Delta y) = a\,\Delta x + b\,\Delta y$$

tal que, para $h = (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$,

$$\Delta z \;=\; f(x_0{+}\Delta x, y_0{+}\Delta y){-}f(x_0, y_0) \;=\; L(\Delta x, \Delta y) \,+\, r(\Delta x, \Delta y), \qquad \text{com } \frac{|r(\Delta x, \Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \longrightarrow 0.$$

Nessa situação, $a = f_x(x_0, y_0)$ e $b = f_y(x_0, y_0)$, de modo que o *diferencial total* em (x_0, y_0) é

$$dz \;=\; f_x(x_0, y_0)\, dx \;+\; f_y(x_0, y_0)\, dy,$$

e vale a aproximação de primeira ordem

$$\Delta z \;=\; dz \;+\; o\Big(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\Big).$$

De forma equivalente (versão $\varepsilon\delta$):

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 \;\text{ se } \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta \;\Rightarrow\; \big|\Delta z - \big(f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y\big)\big| \le \varepsilon\,\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Definição 1.6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é *diferenciável* em (x_0, y_0) se existem números reais a, b e uma função $r(\Delta x, \Delta y)$ tais que

$$\Delta z \;=\; a\,\Delta x + b\,\Delta y \;+\; r(\Delta x, \Delta y), \qquad \frac{|r(\Delta x, \Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } (\Delta x, \Delta y) \to (0, 0).$$

Nesse caso, $a = f_x(x_0, y_0)$ e $b = f_y(x_0, y_0)$, e o diferencial total é $dz = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$.

Observação 1.1. (i) dz é a parte *linear* do incremento real Δz; por isso, em geral $\Delta z \neq dz$, mas $\Delta z - dz = o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$. (ii) A mera existência das derivadas parciais não garante diferenciabilidade; um critério suficiente é a continuidade de f_x e f_y em uma vizinhança de (x_0, y_0).

1.3 Regra Da Cadeia e Derivação implícita

Teorema 1.2. Supondo que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t, então z é uma função diferenciável de t, e segue que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Demonstração. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável, com $x = g(t)$ e $y = h(t)$ funções diferenciáveis de t. Então, ao variar t em uma pequena quantidade Δt, temos variações Δx em x e Δy em y, que por sua vez causam uma variação Δz em z.

Como f é diferenciável, temos que a variação Δz pode ser aproximada por:

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Dividindo ambos os lados por Δt, obtemos:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \approx \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Tomando o limite quando $\Delta t \to 0$, e usando a continuidade e a diferenciabilidade de $x(t)$ e $y(t)$, obtemos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Portanto, a derivada de z em relação a t é dada pela fórmula da Regra da Cadeia. □

Definição 1.7 (Regra da Cadeia Caso 2)**.** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ são funções diferenciáveis de s e t.

Então, z é uma função diferenciável de s e t, e temos:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Teorema 1.3. Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então u é uma função diferenciável de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

ou, de forma compacta:

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}$$