Maurício Zahn

Introdução aos espaços de Banach

TEXTO DE MENSAGEM...

Dedicamos este trabalho a ...

Prefácio

Este livro .....

Maurício Zahn

Conteúdo

Capítulo 1

Primeiros conceitos

1.1 Sequências

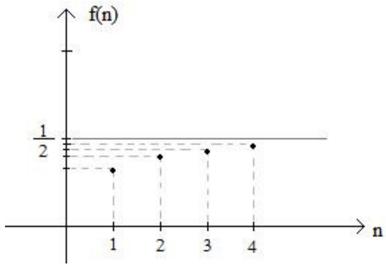
Vamos definir um tipo especial de função, chamado *sequência*, bem como suas principais propriedades de convergência[1]. Tal definição será extremamente importante para o capítulo seguinte. Comecemos com a definição de sequência.

1.2 Primeiros conceitos

Definição 1.1 *Sequência* é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ de todos os naturais.

Os números $f(n)$ da imagem de uma sequência são chamadas de elementos da sequência. Podemos denotar os elementos da sequência por $f(n)$ ou f_n.
Como o domínio de uma sequência é sempre o conjunto dos naturais, simplesmente consideramos a expressão que a define.
Exemplo. Se $f(n) = \dfrac{n}{2n+1}$, então $f(1) = \dfrac{1}{3}$, $f(2) = \dfrac{2}{3}$, $f(3) = \dfrac{3}{7}$, $f(4) = \dfrac{4}{9}$ e assim por diante. A figura abaixo ilustra o gráfico desta sequência.

[1]Para ver mais propriedades recomendamos a leitura de textos de Análise, tais como [?] ou [?].



O elementos da sequência representada acima, podem ser escritos como

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, ..., \frac{n}{2n+1}, ...$$

Como o domínio de toda sequência é o mesmo, as notações $\{f(n)\}$ ou (f_n) podem ser usadas para denotar uma sequência.

Obs.: Dizemos que uma sequência $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ é igual à sequência $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ se e somente se $a_i = b_i$ para todo i inteiro positivo.

Exemplos. A sequência $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ tem como elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$

A sequência $f(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n \text{ é ímpar} \\ \dfrac{2}{n+2}, \text{ se } n \text{ for par} \end{cases}$

tem como elementos $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, ...$

Note que os elementos destas sequências são os mesmos, no entanto, as sequências são diferentes.

Definição 1.2 Seja (x_n) uma sequência. Tomando-se alguns índices $n_1 < n_2 < n_3 < ...$ definimos, a partir da sequência dada, uma *subsequência*. Notamos uma subsequência da sequência (x_n) por (x_{n_k}).

Exemplo. Dada a sequência $x_n = (-1)^n$ temos $x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{2n-1} = ... = -1$ e $x_2 = x_4 = x_6 = ... = x_{2n} = ... = 1$, ou seja, destacamos da sequência original duas subsequências: a subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares e a subsequência (x_{2n}) dos termos pares.

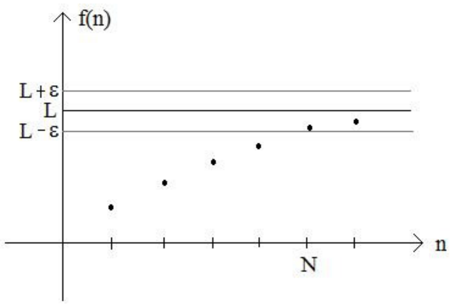
1.3 Limite de sequência

Como sequências são funções, podemos indagar sobre os seus limites. Porém, como a sequência (a_n) está definida para valores inteiros de n, o único limite que faz sentido é o de a_n quando $n \to +\infty$.

Note que os elementos da sequência $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ estão cada vez mais próximos de $\dfrac{1}{2}$, embora nenhum elemento da sequência assuma o valor $\dfrac{1}{2}$. Intuitivamente vemos que podemos obter um elemento da sequência tão próximo de $\dfrac{1}{2}$ quanto desejarmos, bastando tomar o número de elementos suficientemente grande. Expressando de outra forma, temos que $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right|$ pode se tornar menor que qualquer número positivo ε, contanto que n seja suficientemente grande. Por isso, dizemos que o limite da sequência $\dfrac{n}{2n+1}$ é $\dfrac{1}{2}$.

Definição 1.3 A sequência $\{a_n\}$ tem um limite L se para qualquer $\varepsilon > 0$ existir um número $N > 0$, tal que se n for um inteiro e se $n \geq N$, então $|a_n - L| < \varepsilon$ e escrevemos

$$\lim_{n+\infty} a_n = L$$



Em símbolos:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tal que } \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Em algumas ocasiões vamos utilizar a notação $x_n \to L$, que significa $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$.

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Prove que a sequência $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ tem limite $\dfrac{1}{2}$.

Solução. Precisamos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, $\exists N > 0$, tal que para n inteiro

$$n > N \Rightarrow \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \tag{1.1}$$

Note que
$$\begin{aligned}\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{2n-2n-1}{2(2n+1)}\right| < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \left|\frac{-1}{4n+2}\right| < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{4n+2} < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad n > \frac{1-2\epsilon}{4\epsilon}\end{aligned}$$

Para que a afirmação 1.1 seja válida, tomamos $N = \left\lfloor \dfrac{1-2\epsilon}{4\epsilon} \right\rfloor + 1$, onde $\lfloor\ \rfloor$ denota a parte inteira da fração no seu interior. Então, $\forall n \geq N$, temos $\left|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\right| < \epsilon$.

Note que no caso de $\epsilon = \dfrac{1}{16}$, então $N = \lfloor \dfrac{7}{2} \rfloor + 1 = 4$. Assim, se tomarmos $n = 5$, teremos

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{5}{11} - \frac{1}{2}\right| = \frac{9}{22} < \frac{1}{16}$$

O estabelecido prova que a sequência tem limite.

As propriedades de limites de sequências são análogas às propriedades de limites de funções, estudadas no capítulo 2. Vamos enunciá-las aqui, mas faremos a demonstração de algumas apenas, visto que são poucas as adequações a serem feitas.

Proposição 1.4 *O limite de uma sequência, se existir, é único.*

Demonstração. Por absurdo, seja (x_n) sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, com $a \neq b$.

Assim, tome $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$.
Disso, de $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Ainda, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Tomando $\widetilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$, segue que valem $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|x_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Disso, $\forall n \geq \tilde{n}$, temos

$$|b-a| = |b - x_n + x_n - a| \leq |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{1}{2}. \quad \text{(Absurdo!)}$$

Portanto, $a = b$.

$\square$

Proposição 1.5 *(Propriedades aritméticas dos limites de sequências) Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, então*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = a - b$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, *desde que* $b \neq 0$.

Demonstração de (i). Dado $\varepsilon > 0$.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Como $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, segue que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Tomando $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\} > 0$ temos que, $\forall n \geq \tilde{n}$ valem as duas desigualdades acima e daí

$$|(x_n - y_n) - (a+b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, para $\varepsilon > 0$ determinamos $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\forall n \geq \tilde{n} \Rightarrow |(x_n + y_n) - (a+b)| < \varepsilon,$$

isto é, vale (i).

□

Definição 1.6 Se a sequência $\{a_n\}$ tiver um limite, dizemos que ela é *convergente*, e a_n converge para o limite. Se a sequência não for convergente, ela é dita *divergente*.

Exemplo. Determine se a sequência $\left\{n \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}\right\}$ é convergente.

Solução. Como $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{n}$ e $\dfrac{1}{n}$ tendem a zero quando n tende a infinito, lembrando do primeiro limite notável, temos

$$\lim_{n\to+\infty} n \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \pi.$$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \pi$, se n for inteiro positivo. Dessa forma, a sequência dada é convergente e converge para π.

Exercícios

1. Prove que cada limite a seguir existe, encontrando um $\varepsilon > 0$ e um $n_0 \in \mathbb{N}$ adequados.

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3-5n} = -\dfrac{2}{5}$ (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$ (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-4n}{4n-7} = -1$

2. Prove o seguinte teorema, versão para sequências do Teorema do Sanduíche:
   Teorema. *Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$.*

3. Utilize o teorema anterior para provar que

   (a) $\dfrac{\cos n}{n} \to 0$ (b) $\dfrac{n!}{n^n} \to 0$

4. Sendo $a, b \geq 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

5. Seja (a_n) uma sequência de números positivos convergindo para um número $r > 0$. Prove que $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ (use o teorema do Sanduíche).

1.4 Sequências monótonas e limitadas

Definição 1.7 Dizemos que uma sequência (a_n) é

(i) *crescente*, se $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n;

(ii) *decrescente*, se $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n.

Chamamos de *monótona* uma sequência que seja crescente ou decrescente.
Se $a_n < a_{n+1}$ a sequência é estritamente crescente e se $a_n > a_{n+1}$ a sequência é estritamente decrescente.

Exemplo. Determine se a sequência $\left\{\dfrac{n}{2n+1}\right\}$ é crescente, decrescente ou não monótona.

Solução. Sabemos que os quatro primeiros elementos desta sequência são $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$ o que nos leva a considerar que a sequência pode ser crescente. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
a_n \leq a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad & \frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2(n+1)+1} \\
& \frac{n}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+3} \\
& n(2n+3) \leq (n+1)(2n+1) \\
& 2n^2 + 3n \leq 2n^2 + 3n + 1
\end{aligned}
$$

Como a desigualdade acima é válida para qualquer $n \in \mathbb{Z}^*$, concluímos que a sequência é crescente.

Definição 1.8 O número C é chamado de *limitante inferior* da sequência $\{a_n\}$ se $C \leq a_n$ para todo n inteiro positivo, e o número D é chamado de *limitante superior* da sequência $\{a_n\}$ se $a_n \leq D$ para todo n inteiro positivo.

Exemplo. Considerando a sequência $\left\{ \dfrac{n}{2n+1} \right\}$, temos que 0 é um limitante inferior da sequência e $\dfrac{1}{3}$ é um limitante superior da sequência.

Exemplo. Para a sequência $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$ cujos elementos são $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ..., \dfrac{1}{n}, ...,$ podemos considerar 1 um limitante superior, assim como 30 também é um limitante superior. 0 é um limitante inferior.

Definição 1.9 Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é limitada se, e somente se, ela tiver limitantes superior e inferior.

Ou seja, $\{a_n\}$ é dita limitada se, e somente se, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq a_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Por exemplo a sequência $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}$ tem por limitante inferior o 0, visto que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n} > 0$ e tem o 1 como um limitante superior pois $\dfrac{1}{n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, tal sequência é limitada.

Observamos que o fato de uma sequência ser limitada não implica que ela seja convergente. Por exemplo, a sequência dada por $a_n = (-1)^n$ é limitada, visto que seus termos são sempre -1 e 1, os ímpares e os pares, respectivamente. Portanto, $\nexists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. A convergência não ocorreu neste caso pois os seus termos oscilam nos seus valores. A garantia da convergência de uma sequência limitada é adicionar a hipótese da sequência, além de limitada, ser também monótona. Isto é provado no teorema que segue.

Teorema 1.10 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Seja $\{a_n\}$ uma sequência monótona e limitada. Sem perda de generalidade, suponhamos que tal sequência seja crescente, i.e., $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\{a_n\}$ é limitada (superiormente), por hipótese, segue que $\exists\, L \in \mathbb{R}$ tal que $L = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < a_{n_0} \leq L$.
Afirmamos que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$.
De fato, sendo $\{a_n\}$ crescente temos que $\forall n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a_n \geq a_{n_0}$, e daí, juntando

esta informação com as desigualdades montadas acima, temos

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = L < L + \varepsilon,$$

ou seja, $|a_n - L| < \varepsilon$, isto $\forall \varepsilon > 0$.

Portanto, mostramos que

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 > 0 \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon,$$

ou seja, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$. cqd.

Exemplo. Prove que a sequência $\left\{ \dfrac{2^n}{n!} \right\}$ é convergente.

Solução. Os primeiros elementos desta sequência são

$$2,\ 2,\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ \ldots,\ \frac{2^n}{n!},\ \frac{2^{n+1}}{(n+1)!},\ \ldots$$

Note que, $a_1 = a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$, logo a sequência parece ser decrescente. De fato, observe que

$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n+1} \quad \Rightarrow \quad & \frac{2^n}{n!} \geq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \\ & 2^{n+1} \cdot n! \leq 2^n \cdot (n+1)! \\ & 2^n \cdot 2^1 \cdot n! \leq 2^n \cdot (n+1) \cdot n! \\ & 2 \leq (n+1) \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$, concluímos que a sequência é decrescente, logo é monótona.

Ainda, a sequência dada é limitada inferiormente por $a_1 = 2$, uma vez que a ela é decrescente; e é limitada superiormente por 2, visto que

$$a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} < 2 \cdot \frac{2}{2} \cdot 1 = 2.$$

Assim, como a sequência é monótona e limitada, segue que ela é convergente.

Exercícios

1. Determine se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona.

   (a) $\left\{\dfrac{2n-1}{4n-1}\right\}$ (b) $\left\{\dfrac{1-2n^2}{n^2}\right\}$ (c) $\left\{\dfrac{n^3-1}{n}\right\}$

   (d) $\left\{\dfrac{2^n}{1+2^n}\right\}$ (e) $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}$ (f) $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}$

   (g) $\left\{\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\right\}$

2. Determine se a sequência dada é limitada.

   (a) $\left\{\dfrac{n^3+3}{n+1}\right\}$ (b) $\left\{3-(-1)^{n-1}\right\}$

3. Prove que cada sequência a seguir é convergente.

   (a) $\left\{\dfrac{3n-1}{4n+5}\right\}$ (b) $\left\{\dfrac{n}{3^{n+1}}\right\}$ (c) $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\right\}$

Teorema 1.11 *(Teorema dos intervalos fechados encaixados) Sejam $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ uma sequência de intervalos fechados tais que $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_n$, $\forall n$, ou seja, $c \in \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.*

Demonstração. Seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma sequência de intervalos fechados e encaixados, ou seja, $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall n$.
Seja $X = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$.
Observe que $X \neq \emptyset$ pois $a_1 \in X$.
Afirmamos que X é limitado superiormente por b_1. De fato, seja $n \in \mathbb{N}$. Como $[a_n, b_n] \subset [a_1, b_1]$, segue que $a_n \leq b_n \leq b_1$.
Portanto, sendo X limitado superiormente, temos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c = \sup X$.

Afirmamos também que $c \in [a_n, b_n], \forall n$. De fato, sendo $c = \sup X$, temos que c é cota superior do conjunto X e então

$$a_n \leq c, \forall n. \tag{1.2}$$

Afirmamos também que $\forall n$, b_n é uma cota superior de X. Realmente, seja $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\forall m \geq n$ temos $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$. Logo $a_m \leq b_m \leq b_n$, ou seja, $a_m \leq b_n$, $\forall m \geq n$.
Mas $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_m \leq b_n$, donde segue que $a_m \leq b_n$, $\forall m$.
Logo, b_n é uma cota superior de X e daí temos que $b_n \geq \sup X = c$, $\forall n$.
Portanto,

$$c \leq b_n, \ \forall n. \tag{1.3}$$

Juntando (1.2) e (1.3) segue o resultado.

$\square$

A seguir, apresentamos um importante teorema sobre sequências.

Teorema 1.12 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada. Então $\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, a_1 cota inferior e a_2 cota superior de (x_n).
Seja $I_1 = [a_1, b_1]$. Temos que $x_n \in I_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Dividimos I_1 em dois sub-intervalos pelo ponto médio. Escolhemos $I_2 = [a_2, b_2]$ uma das metades tal que $x_n \in I_2$, para uma infinidade de índices n. Após isto, dividimos I_2 em dois sub-intervalos ao meio. Tomamos $I_3 = [a_3, b_3]$ uma das metades tal que $x_n \in I_3$ para uma infinidade de índices n. Seguimos estas divisões recursivamente, sempre tomando-se aquele subintervalo que contém uma infinidade de índices n (se em alguma etapa de divisão em dois sub-intervalos ambos possuírem uma infinidade de termos de (x_n), então podemos tomar qualquer um deles para fazer a nova divisão).
Obtemos desta forma uma sequência de intervalos fechados encaixados $I_1, I_2, ...$ onde

$$... \subset I_k \subset I_{k-1} \subset ... \subset I_2 \subset I_1$$

tais que

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1} \subset I_k = [a_k, b_k].$$

Sendo ℓ_{I_j} é o comprimento do j-ésimo subintervalo temos

$$\ell_{I_{k+1}} = \frac{1}{2}\ell_{I_k} \Leftrightarrow b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2}, \ x_n \in I_k,$$

para uma quantidade infinita de índices n.
Pelo Teorema dos intervalos fechados encaixados temos que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c \in I_k$, $\forall k$.
Vamos mostrar que existe uma subsequência de (x_n) que tende para o número real c. Para isto, precisamos escolher índices $n_1 < n_2 > n_3 < ... < n_j < n_{j+1} <$ ..., com $x_{n_j} \to c$.
Note que

- $a_n \in I_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Então, escolhemos qualquer n_1. Seja $n_1 = 1$. Temos então que $a_{n_1} = a_1 \in I_1$.
- $a_n \in I_2$, para uma infinidade de índices n. Escolhemos $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que $a_{n_2} \in I_2$.
- $a_n \in I_3$, para uma infinidade de índices n. Escolhemos $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ tal que $a_{n_3} \in I_3$.

$$\vdots$$

Seguindo estes raciocínios, obtemos $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ de tal forma que $x_{n_k} \in I_k, \forall k$. Temos então uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n).
Note ainda que $x_{n_k} \in I_k$ e $c \in I_k$, isto implica que

$$|c - x_{n_k}| \leq \ell_{I_k} = b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = ... = \frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}} \to 0$$

quando $k \to +\infty$.
Portanto, (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n) tal que $x_{n_k} \to c$.

$\square$

Uma aplicação importante do teorema acima é ajudar na demonstração do teorema do valor extremo, cuja demonstração havia sido omitida por faltar o estudo de sequências que agora já fizemos:

Teorema do valor extremo. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo fechado $[a, b]$. Então f possui um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$.*

Demonstração. Mostraremos apenas que f assume valor máximo em $[a, b]$, visto que a prova da outra parte é feita analogamente.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostremos primeiramente que f é limitada superiormente. De fato, se por absurdo f não for limitada superiormente, então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$.
Como $x_n \in [a, b], \forall n$, temos que a sequência (x_n) é limitada. Então, pelo teorema de Bolzano-Weirestrass, existe uma subsequência x_{n_k} convergente, digamos $x_{n_k} \to c$.
Portanto,

$$a \leq x_{n_k} \leq b, \forall n_k \Rightarrow a \leq c \leq b \Rightarrow c \in [a, b].$$

Assim, temos que

$$x_{n_k} \to c \in [a, b] \;\text{ e }\; f \;\text{ é contínua em}\, c,$$

donde segue, por continuidade, que

$$f(x_{n_k}) \to c. \tag{1.4}$$

Mas $f(x_n) \to +\infty$, pois $f(x_n) > n$, $\forall n$. Em particular, $f(x_{n_k}) > n_k$, donde segue que $f(x_{n_k}) \to +\infty$, o que entra em contradição com (1.4). Absurdo!
Logo, f é limitada superiormente.

Por fim, mostremos que f assume um valor máximo em $[a, b]$. Como mostramos acima que f é limitada superiormente, segue que existe um supremo.
Seja então $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.
Precisamos mostrar que $\exists x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = M$.
Pela definição de supremo temos que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in [a, b]$ tal que $M - \dfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M$. Então, pelo Teorema do Sanduíche (teorema **??**) temos que $f(x_n) \to M$.
Como $x_n \in [a, b]$ temos que a sequência (x_n) é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weirestrass, existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente para um limite ℓ, i.e.,

$$x_{n_k} \to \ell,\; \ell \in [a, b].$$

Por continuidade de f segue que $f(x_{n_k}) \to f(\ell)$.
Mas $f(x_n) \to M$.
Portanto, pela unicidade do limite segue que $f(\ell) = M$, ou seja, f assume um valor máximo em $[a, b]$.

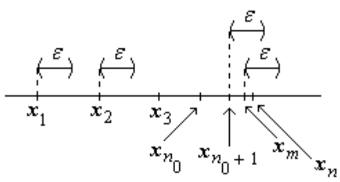
□

1.5 Sequência de Cauchy

Até o presente momento de nosso estudo de sequências vimos por exemplo, que para provar que uma sequência é convergente precisávamos, a priori, conhecer o candidato a limite. Porém, nem sempre isso é possível. Nesta seção vamos apresentar um outro critério mais interessante para mostrar se uma sequência é convergente sem precisar saber para quanto ela converge. Para isto vamos definir *sequência de Cauchy*.

Definição 1.13 Dizemos que uma sequência (x_n) é *de Cauchy* se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer índices $m, n \geq n_0$ implique em $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

A idéia geométrica desta definição é bastante simples: uma sequência (x_n) chama-se de Cauchy se, dado um raio $\varepsilon > 0$, existir um índice n_0 tal que a distância entre dois termos quaisquer da sequência, a partir do índice n_0, estarão próximos um do outro a menos de ε.



Observe na ilustração que, fixado um raio $\varepsilon > 0$, temos que a distância entre x_1 e x_2 é maior do que este ε, as distâncias entre x_1 e x_3 e entre x_2 e x_3 também são maiores do que ε, e assim por diante. Porém, a partir de um índice n_0 dois termos quaisquer da referida sequência equidistam entre si a menos de ε.

A proposição a seguir mostra um importante resultado.

Proposição 1.14 *Se uma sequência (x_n) for convergente, então ela é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente e seja a o seu limite. Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Desta forma, tomando $m, n \geq n_0$ temos

$$|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avaliando a distância entre x_m e x_n, temos

$$|x_m - x_n| = |x_m - a + a - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, mostramos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon$, ou seja, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

□

Queremos provar que a recíproca da proposição acima também é verdadeira. Porém, precisamos ver alguns resultados preliminares que chamaremos de lemas.

Lema 1.15 *Se (x_n) é uma sequência de Cauchy, então ela é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy e tome $\varepsilon = 1$. Então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < 1$.
Em particular, fixando $n = n_0$ (o que é válido), segue que $\forall m \geq n_0$ temos

$$|x_m - x_{n_0}| < 1 \Leftrightarrow -1 \leq x_m - x_{n_0} < 1 \Leftrightarrow x_{n_0} - 1 < x_m < x_{n_0} + 1.$$

Portanto, $x_m \in (x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1), \forall m \geq n_0$, ou seja, a partir do índice n_0 todos os termos da sequência (x_n) ficam no intervalo $(x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1)$.
Resta observar a quantidade finita de termos que ficaram fora deste intervalo, ou seja, os termos x_1, x_2, ..., $x_{n_0 - 1}$ e os extremos do intervalo acima $x_{n_0} - 1$ e $x_{n_0} + 1$. Para isto, defina o conjunto

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_{n_0 - 1}, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}.$$

Como X é um conjunto finito podemos destacar o menor e o maior elemento. Assim, tomamos $a = \min X$ e $b = \max X$. Desta forma, conseguimos encontrar um intervalo $[a, b]$ tal que $x_n \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sequência (x_n) de Cauchy é limitada.

□

Proposição 1.16 *Se* (x_n) *é uma sequência de Cauchy, então ela é convergente.*

Demontração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Pelo lema anterior segue que (x_n) é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência x_{n_k} convergente, digamos, $x_{n_k} \to a$.

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

De fato, primeiramente, sendo (x_n) de Cauchy, temos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainda, como $x_{n_k} \to a$, temos que, para o mesmo $\varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n_k \geq n_1 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tome $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$. Então, $\forall n \geq \tilde{n}$, escolhendo um índice $n_k > \tilde{n}$, temos

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) - (x_{n_k} - a)| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que prova que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

□

1.6 Espaços métricos

Definição 1.17 Seja M um conjunto não vazio. Definimos uma *métrica* d em M como sendo uma aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ que goza das seguintes propriedades: para quaisquer $x, y, z \in M$, valem

(a) $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*;*

(b) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

A propriedade (a) chama-se *positividade*, a propriedade (b) chama-se *simetria* e a propriedade (c) chama-se *desigualdade triangular*.

Um conjunto não vazio M munido de uma métrica d é denotado por (M, d) e recebe o nome de *espaço métrico*. Quando não houver confusão, podemos denotar um espaço métrico (M, d) simplesmente por M, isto quando a métrica d estiver subetendida.

De um espaço métrico (M, d) podemos obter um *subespaço* $(N, \tilde{d})$, onde $N \subset M$ e $\tilde{d}$ é a métrica d restrita a $N \times N$, ou seja, $\tilde{d} = d|_{N \times N}$, e $\tilde{d}$ chama-se uma *métrica induzida* em N por d.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1.18 A reta real $\mathbb{R}$, com a métrica $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

De fato, $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico pois cumpre as três propriedades apresentadas na Definição 1.17: para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$, valem

(a) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(b) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$;

(c) $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |y - z| = d(x, z) + d(z, y)$.

Exemplo 1.19 Espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ munido da métrica $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, é um espaço métrico.

De fato, dados quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, onde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ e $z = (z_1, z_2)$, temos

(a) $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq 0$, e

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } \ y_1 = y_2 \Leftrightarrow x = y.$$

(b) $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(y,x)$.

(c) A desigualdade triangular $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ será provada apenas na Observação 1.31 pois precisaremos desenvolver algumas técnicas auxiliares até lá.

A métrica deste exemplo é chamada de *métrica euclidiana*.

Exemplo 1.20 Seja M um conjunto não vazio, defina a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ por

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \neq y \\ 0 & \text{se} \quad x = y \end{cases}$$

É fácil ver que d define uma métrica em M, chamada de *métrica zero-um*.

Podemos adaptar a Definição 1.13 de sequência de Cauchy para espaços métricos da seguinte forma:

Definição 1.21 Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência definida em um espaço métrico (M, d). Dizemos que $(x_n)_n$ é uma *sequência de Cauchy* em M se, para todo $\varepsilon > 0$, existir um índice $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todos $m, n > n_0$, implicar em $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Todos os resultados referentes a sequências de Cauchy vistos anteriormente podem ser também facilmente adaptados para espaços métricos.

Vamos considerar um exemplo básico, mas importante. Considere $M = (0,1]$ e $d : M \times M \to \mathbb{R}$ a métrica definida por $d(x,y) = |x-y|$. Considere a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por $x_n = \frac{1}{n}$. Observe que $(x_n)_n \subset M$.

É fácil ver que esta sequência é de Cauchy. De fato, dado $0 < \varepsilon < 1$, escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$ (por exemplo, podemos tomar como n_0 a parte inteira da fração $\frac{1}{\varepsilon} + 1$).

Assim, $\forall m, n \geq n_0$, e sem perda de generalidade podemos assumir que $m > n \geq n_0$, temos que

$$d(x_m, x_n) = |x_m - x_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{n-m}{mn}\right| = \frac{m-n}{mn} < \frac{m}{mn} = \frac{1}{n},$$

e como

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \quad \text{e} \quad n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

segue que

$$d(x_m, x_n) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Logo, $(x_n)_n$ é de Cauchy em $M = (0,1]$.

No entanto, observe que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, mas $0 \notin M = (0,1]$. Ou seja, temos que (x_n) é uma sequência de Cauchy em M tal que o seu limite converge para um valor que não pertence a M. Em outras palavras, concluímos que a sequência (x_n) dada não converge em M (embora convirja para um valor, mas tal valor não pertence ao espaço métrico M).

No entanto, se o conjunto M incluísse o zero, como por exemplo, se $M = [0,1]$, o espaço métrico (M,d) com a mesma métrica dada acima seria tal que $x_n = \frac{1}{n}$, de Cauchy, fosse convergente em M.

Isso motiva a noção de *completude* de um espaço métrico M. Ou seja, temos a importante definição abaixo.

Definição 1.22 Dizemos que um espaço métrico (M, d) é *completo* se toda sequência de Cauchy em M for convergente (em M), i.e., se (x_n) é de Cauchy com $x_n \to a$, então $a \in M$.

1.7 Espaços normados e de Banach

Definição 1.23 Chama-se *norma* de um espaço vetorial X uma função $||\cdot|| : X \to [0, +\infty)$ tal que, para todos $x, y \in X$ e para todo escalar λ, cumprirem as propriedades:

(a) $||x|| \geq 0$ e $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(b) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

(c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. (desigualdade triangular)

O espaço vetorial X munido da norma $||\cdot||$, denotado por $(X, ||\cdot||)$, é chamado de *espaço vetorial normado*. Quando a norma usada em X fica perfeitamente clara e subtendida, podemos denotar simplesmente o espaço vetorial normado $(X, ||\cdot||)$ por X.

Podemos induzir uma métrica de um espaço normado X a partir da aplicação $d(x, y) = ||x - y||$. Assim, temos que todo espaço normado é também métrico.

De fato, é fácil verificar as propriedades de métrica para a métrica induzida pela norma acima. No entanto, faremos apenas a prova da desigualdade triangular da Definição 1.17 de métrica, usando a desigualdade triangular da Definição 1.23 de norma:

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||x - z + z - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y).$$

Essa métrica induzida pela norma será muito importante para definirmos espaço de Banach mais adiante.

No que segue, vamos trabalhar com tipos especiais de espaços normados que definiremos e provaremos serem realmete normados.

Definição 1.24 Seja $1 \leq p < \infty$ um número real fixado. Definimos o *espaço* ℓ_p o conjunto de todas as sequências $x = (x_n)_n = (x_1, x_2, x_3, ...)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Por exemplo, considere o elemento $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ a sequência infinita que assume o valor 1 na posição i e zero em todas as demais. Temos que para qualquer $p \in [1, +\infty)$, segue que $e_i \in \ell_p$, pois

$$\sum_{i=1}^{\infty} |e_i|^p = 1 < \infty.$$

Vejamos um outro exemplo mais interessante. Considere $x = (x_n)_n$, onde $x_n = \frac{1}{n}$. Ou seja, estamos dizendo que $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...)$. Vamos verificar se tal x pertence a algum conjunto ℓ_p. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Tal série é conhecida como p-série, e do estudo de séries temos que a mesma converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Portanto, concluímos que $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...) \in \ell_p$ se $p \in (1, \infty)$ e $x \notin \ell_1$.

Definiremos em ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, a aplicação $||\cdot||_p : \ell_p \to [0, +\infty)$ dada por

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

e mostraremos que tal aplicação é uma norma em ℓ_p. Para isso, precisamos apresentar alguns resultados preliminares.

Definição 1.25 Seja $p > 1$ um número real. Definimos o número real q pondo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dessa forma, dizemos que p e q são *expoentes conjugados* um do outro.

Assim, por exemplo, o expoente conjugado de 2 é o próprio 2 pois $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Já o expoente conjugado de 3 é $\frac{3}{2}$.

Lema 1.26 *Para todo $a, b \geq 0$ e para todo $0 < \lambda < 1$, vale a desigualdade*

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

Demonstração. Observe que quando $b = 0$ a desigualdade vale trivialmente. Suponha então que $b \neq 0$. Assim, dividindo a desigualdade procurada por b, temos que mostrá-la é equivalente a mostrar que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} \leq \lambda \left(\frac{a}{b}\right) + (1-\lambda).$$

Escreva $t = \frac{a}{b} \geq 0$ e defina a função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(t) = t^{\lambda} - \lambda t.$$

Vamos examinar seus pontos críticos. Para isso, estudemos o sinal da função derivada $f'(t) = \lambda t^{\lambda-1} - \lambda = \lambda(t^{\lambda-1} - 1)$.

É fácil ver que tal função derivada possui um ponto crítico quando $t = 1$. Estudando o sinal da derivada, temos que se $t > 1$, então $t^{\lambda-1} - 1 < 0$, e então f é decrescente em $(1, +\infty)$, e se $0 \leq t < 1$, temos que $t^{\lambda-1} - 1 > 0$ e então f é crescente em $[0, 1)$.

Assim, concluímos que

- sendo f decrescente em $(1, +\infty)$, temos que $\forall t > 1$, implica em $f(t) < f(1)$, ou seja,
$$t^{\lambda} - \lambda t < 1 - \lambda;$$
- sendo f crescente em $[0, 1)$, temos que $\forall 0 \leq t < 1$, implica em $f(t) < f(1)$, ou seja,
$$t^{\lambda} - \lambda t < 1 - \lambda.$$

Em qualquer dos casos, concluímos que

$$t^{\lambda} - \lambda t < 1 - \lambda, \; \forall t \geq 0, t \neq 1,$$

e para $t = 1$ vale a igualdade. Portanto, concluímos que

$$t^{\lambda} - \lambda t \leq 1 - \lambda, \ \forall t \geq 0,$$

Em particular, para $t = \frac{a}{b} > 0$, vale

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} - \lambda \left(\frac{a}{b}\right) \leq 1 - \lambda,$$

que equivale a

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

$\square$

Lema 1.27 *(Desigualdade de Hölder) Dados $x = (x_i)_i$ e $y = (y_i)_i$ elementos quaisquer de ℓ_p, e q o expoente conjugado de p, então*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Para simplificar a notação, vamos escrever

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{e} \quad ||y||_q = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

como é usual. Dessa forma, definimos os números

$$a = \left(\frac{|x_i|}{||x||_p}\right)^p, \quad b = \left(\frac{|y_i|}{||y||_q}\right)^q \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{1}{p}.$$

Logo, $1 - \lambda = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, e assim, a desigualdade

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

do Lema 1.26 fornece

$$\left[\left(\frac{|x_i|}{||x||_p}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\left(\frac{|y_i|}{||y||_q}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_i|^q}{||y||_q^q},$$

ou seja,

$$\frac{|x_i \cdot y_i|}{||x||_p \cdot ||y||_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_i|^q}{||y||_q^q}.$$

Como tal desigualdade é válida para todo índice i podemos somar até um certo índice n_0 e depois fazer n_0 tender ao infinito, obtendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i \cdot y_i|}{||x||_p \cdot ||y||_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q}{||y||_q^q},$$

ou seja,

$$\frac{1}{||x||_p \cdot ||y||_q} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot y_i| \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{||x||_p^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{||y||_q^q}{||y||_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

e portanto,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \cdot y_i| \leq ||x||_p \cdot ||y||_q.$$

□

Lema 1.28 *(Desigualdade de Minkowski) Dados $p \in [1, +\infty)$ e $x = (x_i), y = (y_i) \in \ell_p$, vale a desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Dado $p \in [1, +\infty)$, seja $q \in [1, +\infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Como para todo $i \in \mathbb{N}$ vale

$$|x_i + y_i|^p = |x_i + y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq (|x_i| + |y_i|)|x_i + y_i|^{p-1} \leq$$

$$\leq |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1},$$

somando de $i = 1$ até um certo n_0 fixado, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n_0} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n_0} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n_0} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1},$$

e para $m \geq n_0$ é válido que

$$\sum_{i=1}^{n_0} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{m} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{m} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Passando $m \to \infty$, obtemos para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ que

$$\sum_{i=1}^{n_0} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}. \tag{1.5}$$

Usando a desigualdade de Hölder (Lema 1.27) para cada somatório à direita de (1.5), obtemos

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$

Levando essas duas estimativas para (1.5), obtemos

$$\sum_{i=1}^{n_0} |x_i + y_i|^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tal desigualdade vale para todo $n_0 \in \mathbb{N}$. Assim, fazendo $n_0 \to \infty$, e notando que $(p-1)q = p$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

e então

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja, obtemos finalmente

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$\square$

Voltando ao ponto onde definimos o espaço ℓ_p, para $1 \leq p < \infty$ (Definição 1.24), vamos mostrar que a aplicação $||\cdot||_p : \ell_p \to [0, +\infty)$ dada por

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma em ℓ_p. De fato, com exceção da desigualdade triangular, todas as demais propriedades de norma apresentadas na Definição 1.23 são facilmente demonstradas. Verifiquemos então apenas a desigualdade triangular: dados $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ elementos de ℓ_p, então

$$x + y = (x_1, x_2, ...) + (y_1, y_2, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...) = (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}},$$

e daí temos que, usando a desigualdade de Minkowski,

$$||x+y||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = ||x||_p + ||y||_p.$$

Além disso, a desigualdade triangular acima provada mostra que ℓ_p é um espaço vetorial, pois dados $x, y \in \ell_p$, temos que $||x+y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p < \infty$, ou seja, concluímos que $x + y \in \ell_p$.

Logo, para $1 \leq p < \infty$, a aplicação $||\cdot||_p : \ell_p \to [0, +\infty)$ dada por

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

realmente define uma norma em ℓ_p.

Os comentários acima nos motivam definir:

Definição 1.29 Seja $p \in [1, \infty)$. O espaço $\ell_p = \ell_p(\mathbb{N})$ denota o espaço vetorial de todas as sequências de escalares $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, munido com a norma

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Naturalmente na definição acima temos que ℓ_p é um espaço vetorial normado, e deveríamos denotá-lo por $(\ell_p, ||\cdot||_p)$. No entanto, vamos escrever simplesmente ℓ_p e sua norma usual estará subtendida.

Mais adiante vamos mostrar que este espaço é o que chamaremos de *espaço de Banach*.

Podemos considerar as desigualdades de Hölder e de Minkowski para vetores $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ou seja, sequências finitas, onde suas demonstrações podem ser facilmente adaptadas dos Lemas 1.27 e 1.28, respectivamente, ou seja dados $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, valem as desigualdades

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.6}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Isto posto, definimos:

Definição 1.30 Dados $p \in [1, +\infty)$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados, definimos o espaço vetorial normado ℓ_p^n como sendo o espaço vetorial normado $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$, com a norma definida por $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \ell_p^n$,

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

De fato, é fácil ver que $||\cdot||_p$ realmente define uma norma e deixaremos isso para o leitor.

Apenas como uma ilustração, vamos considerar o caso $n = 2$ e pensaremos em dois tipos de espaços: ℓ_1^2 (quando $p = 1$) e ℓ_2^2 (quando $p = 2$), ou seja,

- $\ell_1^2 = (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$, onde $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$,
- $\ell_2^2 = (\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)$, onde $||(x,y)||_2 = \left(|x|^2 + |y|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$.

Definimos a *bola centrada na origem e raio unitário* ao conjunto de pontos do $\mathbb{R}^2$:

$$B_0(1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, ||x|| < 1\}.$$

No entanto, tal bola pode não ser "redonda", pois depende de qual norma é usada.

Se usarmos a norma $||\cdot||_1$, chamada de *norma da soma*, então

$$B_0(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| + |y| < 1\},$$

e então $B_0(1)$ corresponde ao conjunto de todos os pontos dentro de um retângulo centrado na origem e diagonais em $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$. Faça um desenho.

No entanto, se usarmos a norma $||\cdot||_2$, chamada de *norma euclidiana*, temos que

$$B_0(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \sqrt{|x|^2 + |y|^2} < 1\}$$

corresponde ao conjunto de pontos dentro da circunferência unitária centrada na origem. Faça um desenho.

Observação 1.31 Como uma métrica d pode ser induzida de uma norma a partir da aplicação $d(x,y) = ||x - y||$, podemos provar a propriedade (c) do Exemplo 1.19 de métrica, bastando, para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, considerar a métrica $d(x,y) = ||x - y||_2$ e usar a desigualdade (1.7) de Minkowski para sequências finitas. Assim,

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{2} |x_i - z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{2} |z_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= d(x, z) + d(z, y),$$

onde $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Logo, realmente $(\mathbb{R}^2, d)$ com a métrica euclidiana d é um espaço métrico. Mais geralmente, $(\mathbb{R}^n, d)$, para $n \in \mathbb{N}$ fixado, é um espaço métrico.

Até aqui definimos os espaços normados ℓ_p, para $1 \leq p < \infty$. Quando $p = \infty$ definimos:

Definição 1.32 Definimos $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$ o espaço de todas as sequências limitadas, ou seja, o espaço das sequências $x = (x_i)_{i=1}^\infty$ munido da norma

$$||x||_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty.$$

Mostremos que a aplicação $||\cdot||_\infty$ definida acima é de fato é uma norma, chamada de *norma do supremo*: dados $x = (x_i)_i, y = (y_i)_i \in \ell_\infty$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

(a) $||x||_\infty = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \geq 0$ e $||x||_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i \Leftrightarrow x = 0.$

(b) $||\lambda \cdot x||_\infty = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |\lambda \cdot x_i| = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |\lambda| \cdot |x_I| = |\lambda| \cdot \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = |\lambda| \cdot ||x||_\infty.$

(c) $||x + y||_\infty = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i + y_i| \leq \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} (|x_i| + |y_i|) \leq \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i| + \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |y_i| =$

$$= ||x||_\infty + ||y||_\infty.$$

Da mesma forma que fizemos para os espaços ℓ_p, temos que, dados $x, y \in \ell_\infty$, então $||x||_\infty < \infty$ e $||y||_\infty < \infty$, e pela desigualdade triangular da norma,

$$||x + y||_\infty \leq ||x||_\infty + ||y||_\infty < \infty,$$

e isso faz com que ℓ_∞ se torne um espaço vetorial normado.

Proposição 1.33 *Dados $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $x \in \ell_p$. Então $||x||_q \leq ||x||_p$, ou seja, a norma $||\cdot||_q$ é mais fina do que a norma $||\cdot||_p$.*

Demonstração. Seja $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e tome $x \in \ell_p$. Vamos separar em dois casos:

- Caso 1. Se $||x||_p = 1$. Então, neste caso, temos que

  $$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

  e daí segue que $|x_i| < 1$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Assim, olhando como uma função exponencial decrescente de base $0 < |x_i| < 1$ temos que,

  $$p \leq q \Rightarrow |x_i|^p \geq |x_i|^q,$$

  e como tal desigualdade vale para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que

  $$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \geq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^q,$$

  ou seja, $||x||_p^p \geq ||x||_q^q$, e então

  $$||x||_q^q \leq ||x||_p^p = 1 \Rightarrow ||x||_q \leq 1.$$

  Assim, concluímos que

  $$||x||_q \leq 1 = ||x||_p.$$

- Caso 2. Se $||x||_p \neq 1$ (e finito, obviamente). Neste caso, basta tomar $\tilde{x} = \frac{x}{||x||_p}$. Disso, segue que $||\tilde{x}||_p = 1$, e pelo Caso 1, para $0 \leq p \leq q \leq \infty$ temos que $||\tilde{x}||_q \leq ||\tilde{x}||_p$, e então

  $$\left|\left|\frac{x}{||x||_p}\right|\right|_q \leq \left|\left|\frac{x}{||x||_p}\right|\right|_p \Rightarrow \frac{1}{||x||_p} \cdot ||x||_q \leq \frac{1}{||x||_p} \cdot ||x||_p \Rightarrow ||x||_q \leq ||x||_p.$$

□

Corolário 1.34 *Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $\ell_p \subset \ell_q$.*

Demonstração. De fato, dado $x \in \ell_p$, temos que $||x||_p < \infty$, e pela Proposição 1.33, sendo $p \leq q$, segue que $||x||_q \leq ||x||_p < \infty$, donde segue que $x \in \ell_q$.

□

.....

Definição 1.35 Um espaço vetorial normado X chama-se um *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica $d(x, y) = ||x - y||$, $\forall x, y \in X$ induzida pela norma.

No que segue, apresentaremos vários exemplos de espaços de Banach.

Exemplo 1. Para $n \in \mathbb{N}$ fixado, os espaços normados $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||)$ são espaços de Banach.

Exemplo 2. Para $1 \leq p < \infty$, os espaços ℓ_p são espaços de Banach

....

Definição 1.36 O espaço $C([0, 1])$ denota o espaço de todas as funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$, munido da norma

$$||f||_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|,$$

chamada de norma do supremo.

É fácil ver que $||\cdot||_\infty$ de fato define uma norma em $C([0, 1])$ e que tal espaço é um espaço vetorial normado e deixaremos estes detalhes para o leitor. Note que como um espaço normado deveríamos denotá-lo por $C([0, 1], || \cdot ||_\infty)$, mas como tal norma do supremo está subtendida em tal espaço, podemos denotá-lo simplesmente por $C([0, 1])$.

Temos o seguinte resultado importante.

Proposição 1.37 *O espaço vetorial normado $C([0, 1])$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Considere uma sequência de Cauchy $(f_n)_n$ de funções em $C([0, 1])$ Precisamos mostrar que tal sequência converge para uma função f em $C([0, 1])$ com a métrica induzida pela norma do supremo. Assim, sendo

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy, temos que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$, implica em $d(f_m, f_n) = ||f_m - f_n||_\infty < \varepsilon$

Note que, $\forall t \in [0,1]$ vale que

$$|f_m(t) - f_n(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f_m(t) - f_n(t)| = ||f_m - f_n||_\infty < \varepsilon,$$

e, portanto, temos que $\forall t \in [0,1]$, a sequência $(f_n(t))_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Escreva $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$.

Vamos mostrar que f é contínua em $[0,1]$, e daí que $f \in C([0,1])$ e que f_n converge para f uniformemente.

Como $(f_n(t))_n$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, segue que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall t \in [0,1] \ \text{ e } \ \forall m, n \geq N. \tag{1.8}$$

Fixando $n \geq N$ e fazendo $m \to \infty$ vamos obter

$$|f(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \geq N \ \text{ e } \ \forall t \in [0,1]. \tag{1.9}$$

Sejam $t_0 \in [0,1]$ e $\varepsilon > 0$ fixados. Escolha $\delta > 0$ tal que, para todo t tal que $|t - t_0| < \delta$, tenhamos

$$|f_N(t) - f_N(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.10}$$

Então, para todo t tal que $|t - t_0| < \delta$, usando (1.8), (1.9) e (1.10) obtemos

$$|f(t) - f(t_0)| = |f(t) - f_N(t) + f_N(t) - f_N(t_0) + f_N(t_0) - f(t_0)| \leq$$
$$\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ou seja, mostramos que

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon, \ \text{ sempre que } \ |t - t_0| < \delta,$$

e portanto, concluímos que f é contínua em $[0,1]$, ou seja, $f \in C([0,1])$.

Além disso, obtemos que $f_n \to f$ uniformemente, e portanto temos que $f_n \to f$ na norma $||\cdot||_\infty$, o que mostra que $C([0,1])$ é completo.

Portanto, $C([0,1])$ é um espaço de Banach.

$\square$

Definição 1.38 Dizemos que duas normas $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ em um espaço vetorial normado X são *equivalentes* quando existirem constantes positivas $K_1, K_2 > 0$ tais que, $\forall x \in X$, tivermos

$$K_1 \cdot ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq K_2 \cdot ||x||_1.$$

Proposição 1.39 *Se $||\cdot||_1$ e $||\cdot_2||$ são duas normas equivalentes em um espaço vetorial X e se $(X, ||\cdot||_1)$ for um espaço de Banach, então $(X, ||\cdot||_2)$ também é um espaço de Banach.*

Demonstração. Suponha que $(X, ||\cdot||_1)$ seja um espaço de Banach em relação à norma $||\cdot||_1$ e seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em $(X, ||\cdot||_1)$. Logo, para todo $\varepsilon > 0$ segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$ implique em

$$d(x_m, x_n) := ||x_m - x_n||_1 < \varepsilon,$$

e como X é completo para a norma $||\cdot||_1$, segue que existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$ na norma $||\cdot||_1$, o que equivale dizer que

$$||x_n - x||_1 \to 0.$$

Como as normas $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ são equivalentes, segue que existe $K > 0$ tal que

$$K \cdot ||x_n - x||_2 \leq ||x_n - x||_1 < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow ||x_n - x||_2 \leq \frac{\varepsilon}{K},$$

ou seja, mostramos que $x_n - x \to 0$ na norma $||\cdot||_2$, ou seja, $(x_n)_n$ também é uma sequência convergente na norma $||\cdot||_2$ e, portanto, de Cauchy. Como $x \in X$, concluímos que $(X, ||\cdot||_2)$ também é um espaço de Banach.

$\square$

Índice Remissivo

Bibliografia

[Rc] CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. Ed. McGrall-Hill do Brasil LTDA, SP, 1979.

[La] MEDEIROS, L. A. da J. *Introdução às funções complexas*. Ed. McGrall-Hill do Brasil e LTDA, PS, 1972.

[Ss] SHOKRANIAN, S. *Variável complexa 1*. Editora da UnB, 2002.

[Rs] SILVERMAN, R. A. *Complex analysis with applications*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffis, New Jersey, 1974.

[Ms] SPIEGEL, M. R. *Variáveis complexas*. Col. Schaum, Ed. McGraw-Hill do Brasil, LTDA, SP, 1981.