A. de A. e Silva & M. P. Matos

Cálculo de Várias Variáveis

UFPB - CCEN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Antônio de A. e Silva & Marivaldo P. Matos

Prefácio

Este texto é produto da experiência dos autores quando ministraram, por diversas vezes, disciplinas envolvendo cálculo diferencial e integral para os cursos de Ciências Exatas e Engenharias da UFPB e de Licenciatura em Matemática a Distância da UFPBVirtual.

O principal objetivo deste texto é fazer com que os alunos compreendam com clareza os conceitos envolvendo funções de várias variáveis, de um ponto de vista geométrico e algébrico, e desenvolvam a capacidade de modelar problemas matemáticos e provas envolvendo conceitos topológicos, bem como as noções intuitivas de limites, continuidade, derivadas parciais, diferenciabilidade, comportamento de funções, integrais de linha e de superfície.

O público a que o livro se destina são os estudantes com conhecimento prévio de cálculo diferencial e integral, equivalente a um período letivo, familiarizados com as ideias de derivada e integral, em seus aspectos fundamentais, e com uma noção razoável sobre simbologia e lógica matemática, de modo a compreender etapas que vão da formulação à demonstração de resultados matemáticos pouco sofisticados. Conhecimentos básicos sobre cálculo vetorial, retas, planos, cônicas e quádricas são recomendados, mas não indispensáveis.

É nossa expectativa que este texto assuma o carater de espinha dorsal de uma experiência permanentemente renovável, sendo, portanto, bem vindas as críticas e/ou sugestões apresentadas por todos - professores ou alunos que dele fizerem uso.

Os termos ou expressões que consideramos pouco comuns foram grafados em *itálico* e indicam que estão sendo definidos naquele ponto do texto, ou que serão formalizados nas seções ou capítulos posteriores. Como parte do processo de treinamento e para desenvolver a capacidade do estudante de pensar por si mesmo em termos das novas definições, incluímos no final de cada seção uma extensa lista de exercícios.

O livro é composto de uma parte sobre cálculo diferencial e outra sobre cálculo integral, onde apresentamos os conceitos e métodos fundamentais, com vistas às aplicações. Por se tratar de um texto de cálculo, julgamos conveniente omitir a demonstração de alguns resultados, principalmente na parte de cálculo integral, mas levando em consideração dois aspectos: primeiro, a formulação matemática adequada e, depois, a exemplificação de como utilizá-los.

No capítulo 1 apresentaremos algumas definições e resultados sobre conceitos topológicos, funções reais de duas ou mais variáveis reais, limites e continuidade, que serão necessárias para o entendimento dos próximas capítulos.

No capítulo 2 apresentaremos as definições de derivadas parciais, diferenciabilidade, Regra da Cadeia, derivada direcional e gradiente que serão necessárias para as aplicações.

No capítulo 3 apresentaremos os problemas de maximazação e minimização, o Método dos Multiplicadores de Lagrange, derivação implícita e transformações.

No capítulo 4 apresentaremos algumas definições e resultados sobre integrais múltiplas e mudança de coordenadas.

No capítulo 5 apresentaremos algumas definições e resultados sobre campos de vetores, funções vetoriais, integrais de linha e independência do caminho.

Finalmente, no capítulo 6 apresentaremos os conceitos de superfícies parametrizadas e integrais de superfície, além dos teoremas clássicos do cálculo integral: Teorema de Green, Teorema da Divergência de Gauss e o Teorema de Stokes.

Agradecimentos

Os autores reconhecem e agradecem a gentileza dos colegas Ailton Ribeiro de Assis, Inaldo Barbosa de Albuquerque, João Bosco Batista Lacerda, João Bosco Nogueira, Jorge Costa Duarte Filho, José Gomes de Assis e Shirley Santos e Souza, todos do Departamento de Matemática do CCEN - UFPB, pelas sugestões incorporadas ao texto e, sobretudo, pelo encorajamento para realizar esta obra. Agradecemos especialmente a Luizalba Santos e Souza pela leitura cuidadosa e revisão linguística da primeira versão. Aos nossos inúmeros ex-alunos, que de alguma forma contribuíram para o sucesso deste trabalho, registramos nossos sinceros agradecimentos.

Antônio de A. e Silva
Marivaldo P. Matos

Sumário

1. Campos Escalares **1**

1.1 Conceitos Topológicos . . . 1

1.1.1 Posição Relativa Ponto × Conjunto . . . 2

Exercícios e Complementos . . . 7

1.2 Funções Reais de Várias Variáveis . . . 8

Curvas e Superfícies de Nível . . . 10

Exercícios e Complementos . . . 12

1.3 Limite e Continuidade . . . 13

1.3.1 Motivação . . . 13

1.3.2 Conceito e Regras . . . 14

1.3.3 Continuidade . . . 21

Exercícios e Complementos . . . 24

Respostas & Sugestões . . . 27

Seção 1.1 - Conceitos Topológicos . . . 27

Seção 1.2 - Funções de Várias Variáveis . . . 28

Seção 1.3 - Limite & Continuidade . . . 30

2. Diferenciabilidade **33**

2.1 Derivadas Parciais . . . 33

2.1.1 Derivadas Parciais de Ordem Superior . . . 35

2.1.2 Exemplos Clássicos I . . . 38

Exercícios e Complementos . . . 39

2.2 Campos Diferenciáveis . . . 40

2.2.1 A Diferencial . . . 46

2.2.2 A Derivada como Aplicação Linear . . . 48

2.2.3 Exemplos Clássicos II . . . 49

Exercícios e Complementos . . . 50

2.3 Regra da Cadeia . . . 51

Exercícios e Complementos . . . 54

2.4 Derivada Direcional e Gradiente . . . 56

2.4.1 Variação Estimada . . . 60

2.4.2 Reta Tangente e Reta Normal . . . 61

Exercícios e Complementos . . . 64

Respostas & Sugestões . . . 67

Seção 2.1 - Derivadas Parciais . . . 67

Seção 2.2 - Campos Diferenciáveis . . . 69

Seção 2.3 - Regra da Cadeia . . . 71
Seção 2.4 - Derivada Direcional & Gradiente . . . 73

3. Derivadas: aplicações 79
3.1 Máximos e Mínimos . . . 78
3.1.1 Classificação dos Pontos Críticos . . . 83
3.1.2 Funções Contínuas em Compactos . . . 88
Exercícios e Complementos . . . 91
3.2 Multiplicadores de Lagrange . . . 92
3.2.1 Considerações Finais . . . 98
Exercícios e Complementos . . . 101
3.3 Derivação Implícita . . . 102
3.3.1 Uma Equação e duas Variáveis . . . 103
3.3.2 Uma Equação e três Variáveis . . . 106
3.3.3 Duas Equações e quatro Variáveis . . . 107
Exercícios e Complementos . . . 109
3.4 Transformações . . . 110
3.4.1 Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas . . . 114
Exercícios e Complementos . . . 116
Respostas & Sugestões . . . 119
Seção 3.1 - Máximos & Mínimos . . . 119
Seção 3.2 - multiplicadores de lagrange . . . 120
Seção 3.3 - derivação implícita . . . 123
Seção 3.4 - transformações . . . 125

4. Integrais Múltiplas 129
4.1 Integral Dupla . . . 128
4.1.1 Integral Dupla sobre Retângulos . . . 129
4.1.2 Integral Dupla sobre Regiões não Retangulares . . . 133
4.1.3 Invertendo a Ordem de Integração . . . 138
4.1.4 Considerações Físicas . . . 141
4.1.5 Integral Dupla Imprópria . . . 144
Exercícios e Complementos . . . 145
4.1.6 Mudança de Variável em Integral Dupla . . . 147
Exercícios e Complementos . . . 155
4.2 Integral Tripla . . . 157
4.2.1 Mudança de Variável em Integral Tripla . . . 160
4.2.2 Considerações Físicas . . . 163
Exercícios e Complementos . . . 165
Respostas & Sugestões . . . 166
Seção 4.1 - Integral Dupla . . . 166
Seção 4.1.6 - Mudança de Variável . . . 167
Seção 4.2 - Integral Tripla . . . 168

5. Integral de Linha **171**
5.1 Campos Vetoriais . . . 172
5.1.1 Operadores Diferenciais . . . 176
Exercícios e Complementos . . . 179
5.2 Caminhos Regulares . . . 181
5.2.1 Curvas Orientadas . . . 183
Exercícios e Complementos . . . 189
5.3 Calculando Integral de Linha . . . 190
5.3.1 Integrando um Campo Vetorial . . . 190
5.3.2 Integrando um Campo Escalar . . . 194
5.3.3 Considerações Físicas . . . 197
Exercícios e Complementos . . . 199
5.4 Independência do Caminho . . . 201
5.4.1 O Potencial como Integral de Linha . . . 208
Exercícios e Complementos . . . 210
5.5 O Teorema de Green no Plano . . . 211
5.5.1 Regiões Multiplamente Conexas . . . 215
5.5.2 Aplicações do Teorema de Green . . . 216
Exercícios e Complementos . . . 220
Respostas & Sugestões . . . 221
Seção 5.1 - Campos Vetoriais . . . 221
Seção 5.2 - Caminhos Regulares . . . 223
Seção 5.3 - Calculando Integral de Linha . . . 224
Seção 5.4 - Independência do Caminho . . . 225
Seção 5.5 - Teorema de Green . . . 226

6. Integral de Superfície **229**
6.1 Superfícies Regulares . . . 227
6.1.1 Superfícies Orientadas . . . 234
Exercícios e Complementos . . . 237
6.2 Área de uma Superfície . . . 238
6.2.1 Forma Parametrizada . . . 243
Exercícios e Complementos . . . 246
6.3 Integral de Superfície . . . 247
6.3.1 Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia . . . 251
6.3.2 Integrando Formas Diferenciais . . . 253
Exercícios e Complementos . . . 255
6.4 Fluxo e o Teorema de Gauss . . . 256
6.4.1 Considerações Físicas . . . 262
Exercícios e Complementos . . . 265
6.5 Circulação e o Teorema de Stokes . . . 267
6.5.1 Interpretação do Rotacional . . . 275
Exercícios e Complementos . . . 276

Respostas & Sugestões 277
Seção 6.1 - Superfícies Regulares 277
Seção 6.2 - Área de uma Superfície 278
Seção 6.3 - Integral de Superfície 279
Seção 6.4 - Teorema de Gauss 280
Seção 6.5 - teorema de Stokes 281

Referências Bibliográficas **285**

Índice Remissivo **287**

1. Campos Escalares

Quando falamos que uma coisa é função de outra, queremos dizer, simplesmente, que a primeira delas depende da segunda. Situações de dependência, ou vinculação, estão presentes constantemente em nossa vida. Por exemplo, a área de um triângulo é igual a metade da base vezes a altura, ou seja, depende da base e da altura do triângulo.

A partir de agora, você está convidado a nos acompanhar neste passeio pelo mundo das funções reais de várias variáveis reais. Juntos analisaremos detalhadamente suas regras, conheceremos domínios, gráficos e curvas de nível, verdadeiras ferramentas de decoração utilizadas para exposição de mapas, e aprenderemos os conceitos de limites e continuidade de funções reais de várias variáveis reais.

A adequação de uma investigação sistemática, empírica ou crítica, nos leva à problematização ou à formulação de problemas com enunciados que devem ser explicitados de forma clara, compreensível e operacional. Portanto, um problema se constitui em uma pergunta científica quando explicita a relação entre as variáveis ou fatos envolvidos no fenômeno.

Como é comum no nosso dia-a-dia, os problemas envolvendo as funções reais de várias variáveis reais independentes aparecem com mais frequência do que as funções reais de uma variável real, e seu cálculo é ainda mais extenso. Suas derivadas são mais variadas e mais interessantes por causa das diferentes maneiras como as variáveis podem interagir. Considere, por exemplo, uma placa metálica circular com um metro de raio, colocada com centro na origem do plano xy e suponha que ela seja aquecida, de modo que a temperatura em um ponto $P(x, y)$, medida em $^\circ C$, seja dada por

$$T(x, y) = 16x^2 + 24xy + 40y^2,$$

com x e y medidos em metro. Um problema interessante de cálculo consiste em determinar os pontos da placa onde a temperatura é mais baixa e onde ela é mais alta.

1.1 Conceitos Topológicos

Nesta seção introduzimos os conceitos topológicos importantes para o estudo de funções reais de várias variáveis reais, mais precisamente funções cujo domínio é um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, com ênfase no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e no espaço $\mathbb{R}^3$, cuja imagem está contida em $\mathbb{R}$. Sempre que possível, é interessante esboçar graficamente um conjunto, que pode ser o gráfico de uma equação ou de uma inequação, porque a visualização geométrica nos propicia informações relevantes sobre esse conjunto.

Por *conjunto de pontos*, ou simplesmente *subconjunto* X do $\mathbb{R}^n$, entendemos qualquer coleção de pontos, finita ou infinita.

Exemplo 1.1 *Os conjuntos*

$$X = \{(1, 0), (0, 1)\}, \;\; Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \;\; e \;\; Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

são conjuntos de pontos no plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ■

Dados um ponto $P(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e um número real $\delta > 0$, denomina-se δ-*vizinhança* (*circular*) de P, em símbolos $V_\delta(P)$, ao conjunto de todos pontos $Q(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta.$$

Se representarmos por $|Q - P|$ a distância, em $\mathbb{R}^n$, entre os pontos P e Q, então

$$V_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n : |Q - P| < \delta\}.$$

A δ-*vizinhança* (*retangular*) de P, também representada por $V_\delta(P)$, é o conjunto de todos pontos $Q(x,y)$ do $\mathbb{R}^2$ tais que

$$|x - a| < \delta \ \text{ e } \ |y - b| < \delta,$$

isto é,

$$V_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2 : |x - a| < \delta \ \text{ e } \ |y - b| < \delta\}.$$

Abaixo exibimos graficamente as vizinhanças circular e retangular de um ponto P.

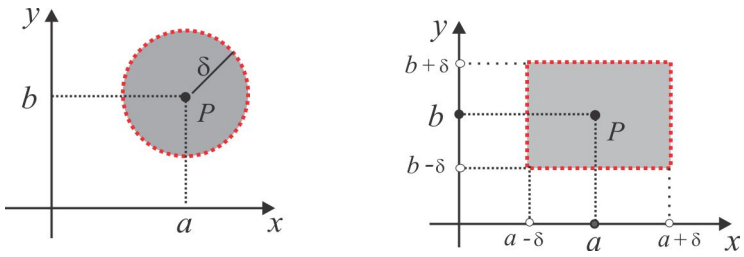


Figura 1.1: Vizinhanças circular e retangular

1.1.1 Posição Relativa Ponto × Conjunto

Dados um conjunto X e um ponto P do $\mathbb{R}^n$, o qual pode estar em X ou não, apenas uma das situações abaixo ocorre:

■ **Situação 1** existe um raio $\delta > 0$, tal que a vizinhança $V_\delta(P)$ está inteiramente contida no conjunto X;

■ **Situação 2** existe um raio $\delta > 0$, tal que a vizinhança $V_\delta(P)$ está inteiramente contida no complementar de X, isto é, não toca o conjnuto X;

■ **Situação 3** seja qual for o raio $\delta > 0$, a vizinhança $V_\delta(P)$ toca o conjunto X e também o seu complementar.

Quando ocorrer a situação 1, diremos que o ponto P é *interior* ao conjunto X; na situação 2 o ponto P é *exterior* ao conjunto X e, quando ocorrer a situação 3, diremos que o ponto P está na *fronteira* do conjunto X. Imagine-se viajando do estado da Paraíba (conjunto X) para o vizinho estado de Pernambuco (conjunto Y) e, de repente, surge uma placa de sinalização informando: divisa de estado PB-PE. A linha que separa os dois estados (conjuntos) é a fronteira; de um lado você está dentro (no interior) da Paraíba e do outro você está fora (no exterior) da Paraíba.

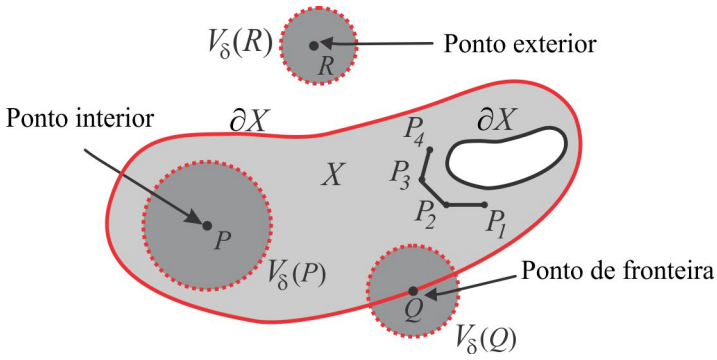


Figura 1.2: Posição relativa ponto × conjunto.

Na figura 1.2 exibimos as situações que descrevem a posição relativa de um ponto em relação ao um conjunto X e na sequência formalizaremos os conceitos de conjunto aberto, conjunto fechado, conjunto compacto e domínio.

Um conjunto X em $\mathbb{R}^n$ denomina-se *aberto* se para cada ponto $P \in X$, existir uma δ-vizinhança de P inteiramente contida em X, isto é,

$$\forall\ P \in X,\ \ \exists\ V_\delta(P)\ \text{ tal que }\ V_\delta(P) \subseteq X.$$

Neste caso, vemos que todos os pontos de X são *pontos interiores.*

Exemplo 1.2 *Consideremos os seguintes conjuntos em* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} X &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \\ Y &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \ \ e \ \ |y| < 1\} \\ Z &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \end{aligned}$$

e verifiquemos que em $\mathbb{R}^2$, X *e* Y *são abertos, enquanto* Z *não é um conjunto aberto.*

Solução Dado um ponto $P(a,b) \in X$, temos que $a^2 + b^2 < 1$ e se considerarmos $\delta = 1 - \sqrt{a^2+b^2}$, então a δ-vizinhança $V_\delta(P)$ está contida em X. De fato, dado $Q(x,y)$ na vizinhança $V_\delta(P)$, então $|Q - P| < \delta$ e, sendo assim,

$$\sqrt{x^2+y^2} = |Q - O| = |(Q-P) + (P-O)| \leq |Q-P| + |P-O| < \delta + \sqrt{a^2+b^2} = 1.$$

Portanto, $Q \in X$ e X é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$. Agora, dado um ponto $P(a,b) \in Y$, temos que $0 \leq |a| < 1$, $0 \leq |b| < 1$ e para construirmos uma δ-vizinhança $V_\delta(P)$, contida em Y, basta considerarmos

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}, \quad \text{sendo} \quad \delta_1 = \min\{|a|\,, 1 - |a|\} \ \text{ e } \ \delta_2 = \min\{|b|\,, 1 - |b|\},$$

e teremos $V_\delta(P) \subseteq Y$, pois se $Q(x,y) \in V_\delta(P)$, então $|Q - P| < \delta$ e, portanto,

$$|x - a| \leq |Q - P| < \delta \Rightarrow |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |x| \leq |x - a| + |a| < \delta_1 + |a| < 1.$$

Da mesma forma, obtemos

$$|y - b| \leq |Q - P| < \delta \Rightarrow |y - b| < \delta_2 \Rightarrow |y| < 1.$$

Assim, $Q \in Y$ e Y é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$. Finalmente, para comprovar que Z não é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$, basta observar que não existe uma δ-vizinhança $V_\delta(P)$, $\delta > 0$, do ponto $P(a, 0)$ do conjunto Z, inteiramente contida em Z. ■

Um conjunto X em $\mathbb{R}^n$ denomina-se *fechado* se seu complementar $\mathbb{R}^n - X$ for aberto. Por exemplo,

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^2$, pois seu complementar

$$\mathbb{R}^2 - X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$.

Um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de fronteira* de um conjunto X em $\mathbb{R}^n$, se qualquer δ-vizinhança de P contém pontos de X e pontos fora de X, isto é,

$$V_\delta(P) \cap X \neq \varnothing \ \text{ e } \ V_\delta(P) \cap (\mathbb{R}^n - X) \neq \varnothing.$$

Dado um conjunto X em $\mathbb{R}^n$, denomina-se *fronteira* de X, e anota-se $\partial(X)$, o conjunto de todos os pontos de fronteira de X. É claro que $\partial(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto vazio $\varnothing$ e para qualquer conjunto X temos que $\partial(X) = \partial(\mathbb{R}^n - X)$, isto é, um conjunto X e seu complementar $\mathbb{R}^n - X$ têm a mesma fronteira. Podemos utilizar a fronteira de um conjunto para determinar se ele é aberto ou fechado. Um conjunto X é aberto quando ele não tiver ponto em comum com sua fronteira e ele será fechado quando sua fronteira estiver inteiramente contida nele. Resumindo, temos:

$$\partial X \subseteq X \Rightarrow X \text{ é fechado} \quad \text{e} \quad \partial X \cap X = \varnothing \Rightarrow X \text{ é aberto.}$$

Exemplo 1.3 *Consideremos em $\mathbb{R}^2$ os seguintes conjuntos:*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \ \text{ e } \ Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Temos que

$$\partial(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} \quad \text{e} \quad \partial(Y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Solução Para comprovar nossa afirmação, fixemos um ponto $P(a, 0)$ do eixo x e um raio $\delta > 0$. Se $0 < y < \delta$, então o ponto $Q(a, y)$ está em X, porque $0 < y$, e também na vizinhança $V_\delta(P)$, de onde resulta que $V_\delta(P)$ toca o conjunto X. Por outro lado, o ponto $P \in V_\delta(P) \cap (\mathbb{R}^2 - X)$ e isso mostra que $V_\delta(P)$ toca o complementar de X. Logo, o ponto P está na fronteira de X. Reciprocamente, dado $P(a, b) \in \partial(X)$, se $b < 0$, a vizinhança $V_\delta(P)$, com $0 < \delta < -b$, está contida em $\mathbb{R}^2 - X$, o que é impossivel pois $P \in \partial X$; se $b > 0$, a vizinhança $V_\delta(P)$, com $0 < \delta < b$, está contida em X, o que é impossivel, pela mesma razão. Logo, $b = 0$ e a fronteira de X é o eixo x, isto é,

$$\partial(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

Na Figura 1.3, esboçamos a costrução feita acima. O conjunto X e sua fronteira ∂X não tem ponto em comum e, por essa razão, X é um conjunto aberto. Procedendo de forma similar, encontramos $\partial(Y) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e observamos que $Y \cap \partial Y = \varnothing$, de onde resulta que Y é um conjunto aberto. ■

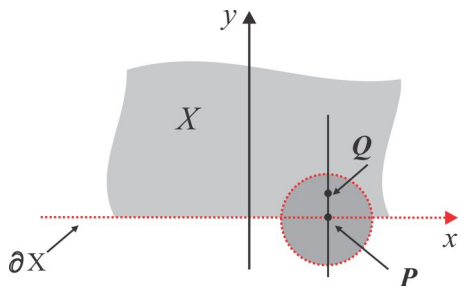


Figura 1.3: A fronteira de X.

Um conjunto X em $\mathbb{R}^n$ denomina–se *limitado* se existir uma vizinhança $V_r(O)$, de centro na origem O de $\mathbb{R}^n$ e raio r, suficientemente grande, tal que

$$X \subseteq V_r(O).$$

Em $\mathbb{R}^2$ um conjunto X é limitado quando existir $r > 0$ tal que $\sqrt{x^2 + y^2} < r$, seja qual for o ponto (x, y) do conjunto X. De forma equivalente, X será limitado quando existir um número $r > 0$ tal que

$$|x| < r \text{ e } |y| < r, \ \forall (x, y) \in X.$$

De maneira intuitiva, em $\mathbb{R}^2$ um conjunto X é limitado quando ele puder ser envolvido por uma circunferência ou por um retângulo.

Exemplo 1.4 *Vamos analisar, quanto a limitação, os seguintes subconjuntos do* $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \ \text{ e } \ -1 \leq y \leq 2\} \ \text{ e } \ Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

Solução Inicialmente observamos que o conjunto X é um retângulo com lados de comprimentos $a = 2$ e $b = 3$. Assim, considerando $r = \max\{2, 3\} = 3$, obtemos

$$X \subseteq V_3(O) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\},$$

Portanto, X é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, para cada $r > 0$ o ponto $P(r + 1, 0)$ está no conjunto Y e não está na vizinhança $V_r(O)$ de raio r e centro na origem. Isso mostra que não é possível se ter $Y \subseteq V_r(O)$ e, sendo assim, Y não é um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$. Vejamos as ilustrações gráficas abaixo. ■

Um conjunto X em $\mathbb{R}^n$ denomina-se *compacto* se ele é, ao mesmo tempo, limitado e fechado em $\mathbb{R}^n$. O conjunto X do Exemplo 1.4 é compacto. Também é compacto o conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

O conjunto $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ não é compacto, porque não é limitado, embora seja fechado. Já o conjunto $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ não é compacto, porque não é fechado, embora seja limitado.

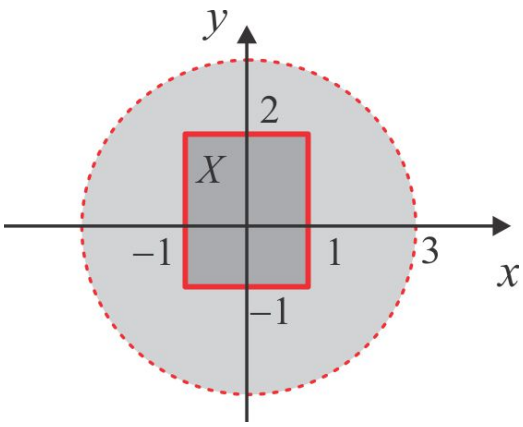


Figura 1.4: X é limitado

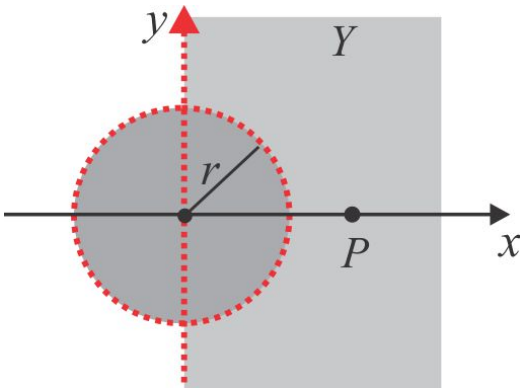


Figura 1.5: Y não é limitado

Um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto de acumulação* de um subconjunto X em $\mathbb{R}^n$, se para qualquer número real $\delta > 0$, tem-se

$$(V_\delta(P) - \{P\}) \cap X \neq \varnothing.$$

Isto significa que toda vizinhança de P contém um ponto de X, diferente de P. Um ponto de acumulação pode estar no conjunto ou não. Por exemplo, a origem é um ponto de acumulação do conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

e não pertence a X. Observamos, ainda, que todos os pontos desse conjunto X são pontos de acumulação de X. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não possui ponto de acumulação, pois dado $x \in \mathbb{Z}$, se considerarmos $\delta = 1$ vemos que $(V_\delta(x) - \{x\}) \cap \mathbb{Z} = \varnothing$.

Um ponto $P \in X$ que não é um ponto de acumulação de X recebe o nome de *ponto isolado* de X. Todos os pontos do conjunto $\mathbb{Z}$ são isolados.

Um conjunto X em $\mathbb{R}^n$ denomina-se *conexo* se quaisquer dois pontos distintos P e Q de X podem ser ligados por uma linha poligonal inteiramente contida em X (por linha poligonal entendemos uma *curva* constituída de um número finito de segmentos retilíneos em sucessão, tais que a extremidade de cada um coincida com a origem do seguinte). Um conjunto aberto e conexo recebe o nome de *domínio*. Por exemplo, o conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

é um domínio em $\mathbb{R}^2$. Vale ressaltar que um domínio não pode ser formado por dois conjuntos abertos disjuntos e não vazios. Assim, o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$ não é um domínio em $\mathbb{R}^2$, pois

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}$$

é a união de dois abertos disjuntos e não vazios.

Um conjunto X em $\mathbb{R}^n$ aberto e conexo (um domínio) acrescido de alguns ou todos os seus pontos de fronteira denomina-se *região*. Uma região X é *simplesmente conexa* em $\mathbb{R}^n$ se qualquer curva fechada em X pode ser reduzida, de maneira contínua, a um ponto em X, sem deixar X. Intuitivamente, uma região simplesmente conexa não possui *buracos* e isto significa que uma curva fechada em X só contém pontos de X no seu interior. Imaginemos um lago com uma ilha no seu interior; o espelho d'agua pode ser visto como uma região que não é simplesmente conexa. A título de ilustração, vamos

classificar topologicamente o conjunto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } -1 < y \leq 2\},$$

cujo gráfico está representado na Figura 1.6. Trata-se de um retângulo, cuja fronteira é constituída pelos segmentos (lados do retângulo) L_1, L_2, L_3 e L_4. A fronteira de X não está inteiramente contida em X, fazendo com que X não seja fechado; não sendo fechado não será compacto, embora X seja limitado. O conjunto X não é aberto, tendo em vista que ele tem ponto em comum com sua fronteira; não sendo aberto não será domínio. Finalmente, X é um conjunto conexo.

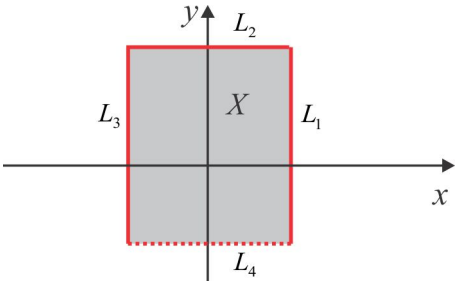


Figura 1.6: X é limitado e conexo.

Exemplo 1.5 *Se X é um conjunto compacto em $\mathbb{R}^2$, seu complementar $Y = \mathbb{R}^2 - X$ não é um conjunto simplesmente conexo em $\mathbb{R}^2$.*

Solução Sendo X um conjunto compacto em $\mathbb{R}^2$, ele é limitado e, portanto, existe uma vizinhança $V_r(O)$ de centro na origem O de $\mathbb{R}^2$ e raio $r > 0$ suficientemente grande, tal que

$$X \subseteq V_r(O).$$

Assim, a circunferência de centro na origem O de $\mathbb{R}^2$ e raio $r + 1$ está contida em Y, mas não pode ser reduzida de maneira contínua a um ponto qualquer em Y, sem deixar Y. Portanto, Y não é uma região simplesmente conexa em $\mathbb{R}^2$. Como consequência deduzimos que o conjunto

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2\}$$

não é simplesmente conexo em $\mathbb{R}^2$, porque é o complementar do conjunto compacto

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}. \qquad \blacksquare$$

Exercícios & Complementos

1. Em cada caso esboce o conjunto $\mathcal{R}$ do plano $\mathbb{R}^2$ e determine sua fronteira. Classifique $\mathcal{R}$ em: aberto, fechado, limitado, compacto ou conexo.

   (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.

   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 < 1\}$.

   (c) $\mathcal{R} =]1, 2[\times [0, +\infty[$.

(d) $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 2\right\}$.

(e) $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2 < 9\right\}$.

(f) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \text{ e } 1 \leq y \leq 2\}$.

(g) $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\right\}$.

(h) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } -1 \leq y < 2\}$.

(i) $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \geq 9\right\}$.

(j) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{sen} x \leq y \leq \cos x, \ \ 0 \leq x \leq \pi/4\}$.

(k) $\mathcal{R} = [0,1] \times [1,2]$.

(l) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

(m) $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 - y^2\right\}$.

(n) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2 - 1\right) y < 0\}$.

(o) $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 < y\right\}$.

(p) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2 \text{ e } 1 < x^2 + y^2\}$.

(q) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y^2\}$.

(r) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2 \text{ e } 1 < x^2 + y^2\}$.

(s) $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 16 \text{ e } |x| \geq 2\}$.

2. Esboce o conjunto $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left[(x-1)^2 + y^2 - 1\right] < 0\}$, identifique sua fronteira e verifique que ele é aberto.

1.2 Funções Reais de Várias Variáveis

O conceito de função real de duas ou mais variáveis reais é análogo ao conceito de função real de uma variável real. Por exemplo, a equação

$$z = x^2 - y^2$$

exprime z como função de x e y. Diremos que z é uma *função* de x e y quando existir uma regra f que a cada ponto $P(x,y)$ de um conjunto X em $\mathbb{R}^2$, denominado domínio de f, associar um único ponto $z \in \mathbb{R}$. Para indicar a conexão entre x, y e z usualmente escreve-se $z = f(x,y)$ ou $z = z(x,y)$. A Figura 1.7 ilustra a definição de uma função f de X em $\mathbb{R}$.

Escreveremos $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou, simplesmente, $f : X \to \mathbb{R}$ para indicar que f é uma função com domínio X e contradomínio $\mathbb{R}$. É comum usar $D(f)$ para indicar o domínio da função f e no caso em que $z = f(x,y)$, diremos que z é a *imagem* do ponto (x,y) pela função f ou que z é o *valor* da função f no ponto (x,y). As funções $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ também são denominadas de *campos ou funções escalares.*

Exemplo 1.6 *A função f definida pela regra $f(x,y) = x^2 + y^2$ tem para domínio todo o plano $\mathbb{R}^2$, já que a expressão $x^2 + y^2$ pode ser calculada em qualquer (x,y) do $\mathbb{R}^2$.* ■

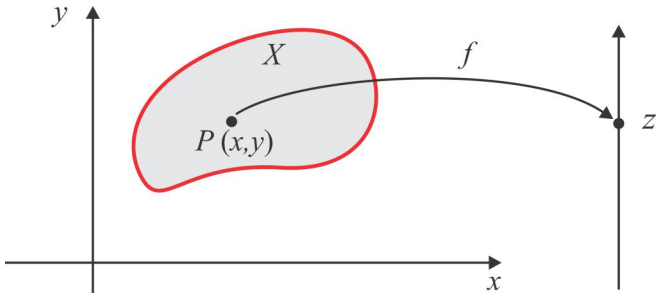


Figura 1.7: Ilustrando o conceito de função.

Exemplo 1.7 *Consideremos, agora, a função definida pela regra* $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. *Neste caso, para calcular a expressão* $\sqrt{1-x^2-y^2}$ *devemos impor às variáveis* x *e* y *a restrição* $1-x^2-y^2 \geq 0$, *isto é,* $x^2+y^2 \leq 1$. *Assim, o domínio da função* f *é o disco compacto* $D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\right\}$ *de centro na origem e raio 1.* ■

Exemplo 1.8 *Determinar o domínio da função* $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida pela regra*

$$f(x,y) = \log\left(36 - 4x^2 - 9y^2\right).$$

Solução No cálculo de uma variável aprendemos que o domínio da função $t \longmapsto \log t$ é o conjunto de todos os $t \in \mathbb{R}$, com $t > 0$. Logo, o domínio de f é o conjunto de todos os pontos (x,y) do $\mathbb{R}^2$ tais que $t = 36 - 4x^2 - 9y^2 > 0$, isto é, $D(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 < 36\right\}$ é o interior da elipse $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$, mostrado na Figura 1.8. ■

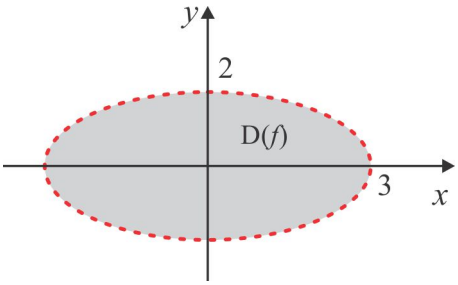


Figura 1.8: Domínio de $f(x,y) = \sqrt{36-4x^2-9y^2}$.

Dada uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o *gráfico* de f, denotado por $G(f)$, é o conjunto de todos os pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $z = f(x,y)$, isto é,

$$G(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D(f) \text{ e } z = f(x,y)\}.$$

A *imagem* da função f é o conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x,y), \text{ para algum ponto } (x,y) \in D(f)\}.$$

É oportuno ressaltar que o gráfico de uma função real de duas variáveis reais representa um objeto do $\mathbb{R}^3$. A Figura 1.9 ilustra a definição do gráfico de uma função $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exemplo 1.9 *Consideremos a função* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, *cujo domínio é todo o plano* $\mathbb{R}^2$. *A imagem da função* f *é* $\mathrm{Im}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$ *e seu gráfico á a folha superior do cone* $z^2 = x^2+y^2$.

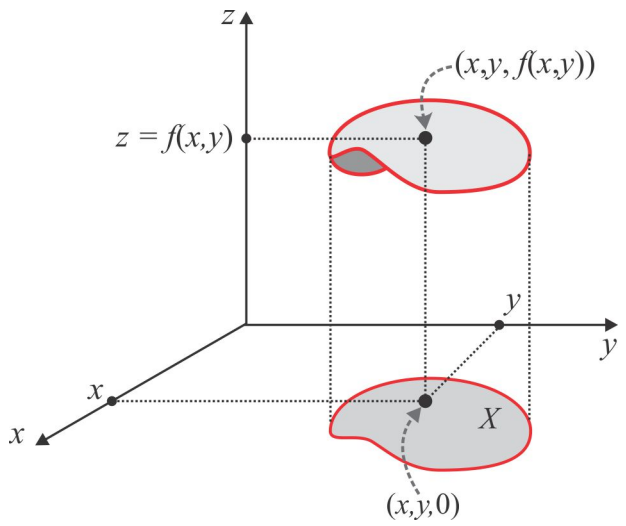


Figura 1.9: Gráfico da função $z = f(x, y)$.

Exemplo 1.10 *O domínio da função* $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$ *é o conjunto* $D(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ *e sua imagem é a reta real* $\mathbb{R}$. *Não parece óbvio, mas seu gráfico é a superfície obtida por rotação da curva* $z = \log x^2$, $x \neq 0$, *do plano* xz, *em torno do eixo* z.

1.2.1 Curvas e Superfícies de Nível

Consideremos uma função de duas variáveis $f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $z = f(x, y)$. Ao atribuirmos a z um valor constante k, geometricamente interceptamos o gráfico de f com o plano $z = k$ e essa interseção recebe o nome de *conjunto de nível*. Em geral, a projeção no plano xy do conjunto de nível

$$C_k = \left\{(x, y, k) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D(f)\right\}$$

é uma curva, denominada *curva de nível* da função f correspondendo ao valor k, e esta é constituída dos pontos (x, y) de X, para os quais $f(x, y) = k$. A Figura 1.10 expõe de maneira intuitiva um conjunto de nível C_k e sua projeção no plano xy.

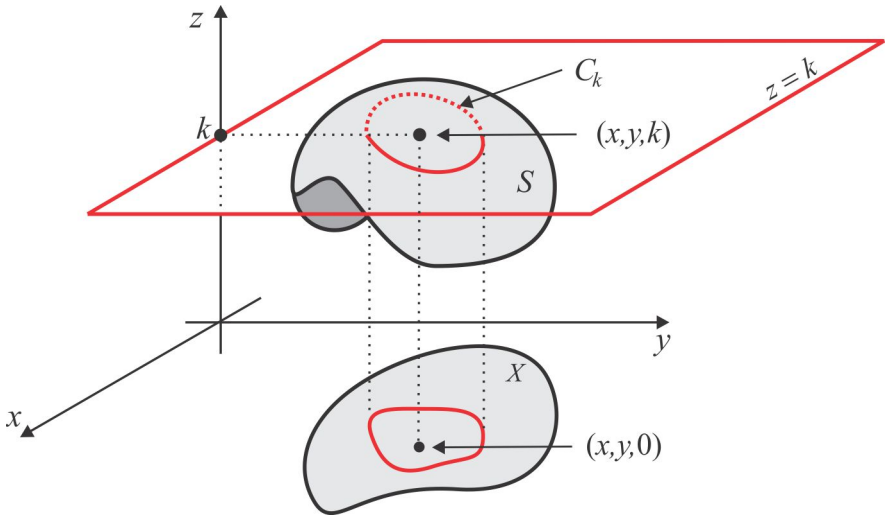


Figura 1.10: Curva de nível C_k.

No caso de uma função de três variáveis $f : X \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sendo $w = f(x, y, z)$, ao atribuirmos a

w um valor constante k, o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in X$ tais que $w = k$ é, em geral, uma superfície S_k, denominada de *superfície de nível* da função f correspondente ao valor k.

Exemplo 1.11 *Consideremos o paraboloide $z = x^2 + y^2$ e vejamos algumas curvas de nível. No nível $z = 0$, temos $x^2 + y^2 = 0$ e a curva se reduz ao ponto $(0, 0, 0)$. No nível $z = k$, $k > 0$, temos $x^2 + y^2 = k$, que representa uma circunferência de raio $\sqrt{k}$ e centro $C\,(0, 0, k)$, cuja projeção no plano xy é a circunferência de centro na origem e raio $\sqrt{k}$. Na Figura 1.11 mostramos alguns conjuntos de nível e suas projeções no plano xy.* ■

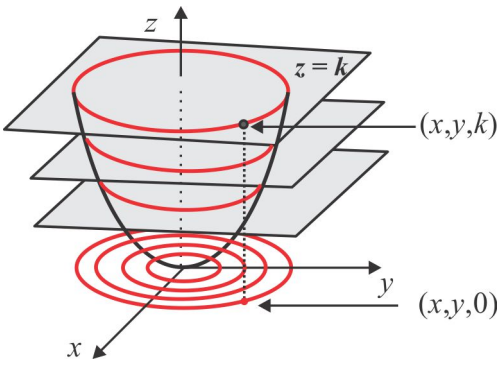


Figura 1.11: Curvas de nível de $z = x^2 + y^2$.

Exemplo 1.12 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida pela regra $f(x, y) = y^2 - x^2$. As curvas de nível de f são determinadas de forma similar ao caso anterior. No plano xy elas correspondem aos gráficos da equação $y^2 - x^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$, e há três casos a considerar:*

1. *se $k > 0$, então $y^2 - x^2 = k$ é uma hipérbole com vértices $(0, \pm\sqrt{k})$;*
2. *se $k = 0$, então $y^2 - x^2 = k$ é o par de retas $y = \pm x$;*
3. *se $k < 0$, então $y^2 - x^2 = k$ é uma hipérbole com vértices $(\pm\sqrt{-k}, 0)$.*

Algumas curvas de nível e o gráfico da função f estão expostos na Figura 1.12. ■

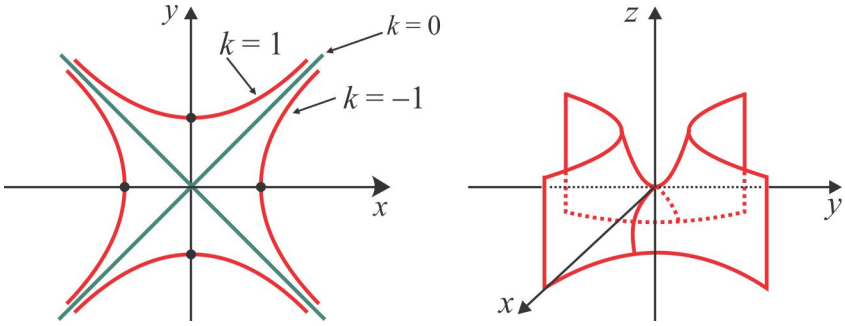


Figura 1.12: Paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$.

Exemplo 1.13 *As superfícies de nível da função de três variáveis* $w = f(x, y, z) = x + y + z$ *são os planos* $x + y + z = k$. *Já a função* $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *tem para superfícies de nível as esferas* $x^2 + y^2 + z^2 = k$, $k \geq 0$, *de centro na origem e raio* $\sqrt{k}$. *No nível* $k = 0$ *a superfície correspondente se reduz ao ponto* $O(0, 0, 0)$.

Exemplo 1.14 *A função* $f(x, y) = \log(|x| - |y|)$ *tem domínio* $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\}$ *e, no plano* xy, *as curvas de nível de* $z = f(x, y)$ *são descritas por* $\log(|x| - |y|) = k$, *isto é,* $|x| - |y| = \exp(k)$. *As constantes* $c = \exp(k)$ *são todas positivas e na Figura 1.13 mostramos o domínio de* f *e algumas curvas de nível. As curvas de nível nos proporciona uma visão geométrica do gráfico da função. Existem três entes geométricos distintos que merecem reflexão: o domínio, as curvas de nível e o gráfico da função.* ■

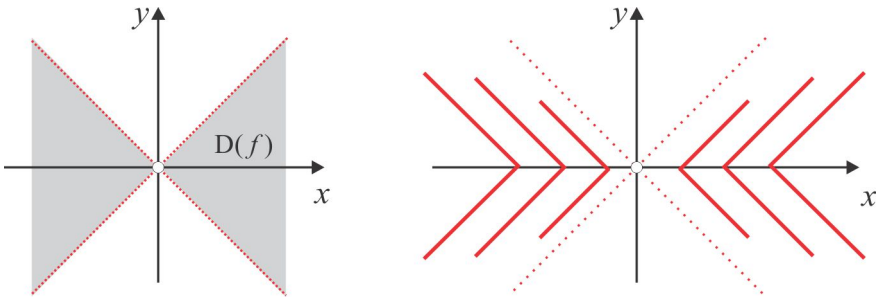


Figura 1.13: Domínio e curvas de nível de $z = \log(|x| - |y|)$.

Exercícios & Complementos

1. Em cada caso identifique e represente graficamente o domínio da função $z = f(x, y)$.

   (a) $z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}$
   (b) $z = \sqrt{|x| - |y|}$
   (c) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \leq 0$
   (d) $z = \log\left(1 - 4x^2 - \frac{y^2}{9}\right)$
   (e) $z = \sqrt{\log(x^2 + y^2 - 3)}$
   (f) $z = x \exp(y) - \log x$
   (g) $z = \arccos(y - x)$
   (h) $z = \sqrt{(x - 3)(y - 2)}$
   (i) $z = \operatorname{arcsen}[x/(x - y)]$
   (j) $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$
   (k) $z = \dfrac{x - y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}$
   (l) $z = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{y^2 - 1}}$

2. Em cada caso esboce algumas curvas de nível da função $z = f(x, y)$, de modo a obter uma visualização do seu gráfico.

   (a) $z = x^2 + y^2$
   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   (c) $z = \left(x^2 + y^2\right)^{-1}$
   (d) $z = \log\left(1 + x^2 + y^2\right)$
   (e) $z = x + y$
   (f) $z = \operatorname{sen}(x - y)$
   (g) $z = |x| - |y|$
   (h) $z = 8 - x^2 - 2y$
   (i) $z = 2x\left(x^2 + y^2\right)^{-1}$
   (j) $z = xy$
   (k) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   (l) $z = \sqrt{1 - x^2/4 - y^2/9}$
   (m) $z = |x - y|$
   (l) $z = |x| + |y|$
   (n) $z = x + y^2$
   (o) $z = x - y^2$

3. Esboce a curva de nível da função $z = 2y - 4x^3$ que passa no ponto $P(1,2)$. Observe o comportamento da função ao longo da tangente que passa no ponto P.

4. Identifique as superfícies de nível da função $w = x^2 + y^2 + z^2$, nos níveis 0, 1 e 2.

5. Identifique a superfície de nível da função $w = x^2 + y^2 - z^2$ que passa no ponto $P(1,1,1)$.

6. Esboce o gráfico da função $z = f(x,y)$ dada por:

   (a) $f(x,y) = 3$
   (b) $f(x,y) = x$
   (c) $f(x,y) = 1 - x - y$
   (d) $f(x,y) = \operatorname{sen} y$
   (e) $f(x,y) = \exp\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$
   (f) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$
   (g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$
   (h) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$
   (i) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$
   (j) $f(x,y) = 1 - x^2$
   (k) $f(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$
   (l) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2+y^2)$

7. Descreva as superfícies de nível da função $w = f(x,y,z)$.

   (a) $f(x,y,z) = x + 3y + 5z$
   (b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$
   (d) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$

1.3 Limite e Continuidade

Nesta seção apresentaremos as noções básicas sobre limites que serão necessárias para a formulação dos conceitos de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de uma função real de várias variáveis reais. Com o objetivo de tornar o texto mais leve, as demonstrações de alguns resultados serão omitidas.

1.3.1 Motivação

Para motivar o que será desenvolvido, vamos considerar a função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ definida para $(x,y) \neq (0,0)$. Quando (x,y) se aproxima do ponto $(1,0)$, indicamos isso escrevendo $(x,y) \to (1,0)$ e lê-se (x,y) *tende* para $(1,0)$, é razoável afirmar que os valores $f(x,y)$ se aproximam de 0, que é o valor da função no ponto $(1,0)$. Expressamos isso escrevendo

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

Esse raciocínio não pode ser usado para investigar o comportamento da função na origem $(0,0)$, porque a substituição direta de x e y por 0 na expressão $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ produz a indeterminação $0/0$. O que fazer neste caso? Essa questão será discutida posteriormente e ressaltamos que, neste caso, o valor do limite de $f(x,y)$ em $(0,0)$ depende do *caminho* que conduz o ponto (x,y) à origem. Vejamos o que ocorre com $f(x,y)$, quando (x,y) tende para $(0,0)$ através de dois caminhos distintos. Suponhamos inicialmente que $(x,y) \to (0,0)$, ao longo do eixo x, isto é, ao longo da reta $y = 0$. Nesse caso, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Se, por outro lado, (x, y) tende para $(0, 0)$ ao longo da reta $y = x$, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Quando lidamos com o limite $\lim\limits_{t\to a} g(t)$, no cálculo de uma variável, só há duas maneiras do ponto t se aproximar do ponto a: ou $t \to a^+$ ou $t \to a^-$, que resultam nos limites laterais $\lim\limits_{t\to a^+} g(t)$ e $\lim\limits_{t\to a^-} g(t)$ da função $g(t)$. Se esses limites laterais forem iguais, então esse valor comum é o limite da função $g(t)$ no ponto a. No caso do limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ a situação é um pouco mais complexa, tendo em vista que há uma infinidade de caminhos segundo os quais (x, y) se aproxima do ponto (a, b) e é literalmente impossível efetuar o cálculo ao longo de todos os caminhos. Contudo, fica a lição: *para que o limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ *exista é necessário que os limites ao longo de todos os caminhos que conduzem* (x, y) *ao ponto* (a, b) *existam e sejam iguais.*

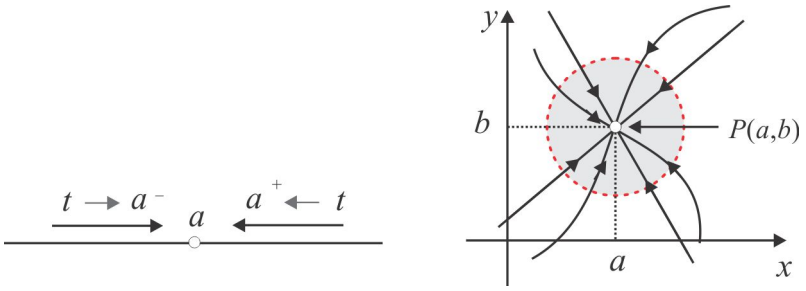


Figura 1.14: t tende para a e (x, y) tende para (a, b).

1.3.2 Conceito e Regras

Sabemos do cálculo de uma variável que uma função real de uma variável real $y = f(x)$ tem limite L no ponto a, e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x) = L,$$

se dado um número real $\varepsilon > 0$, existe em correspondência um $\delta > 0$ tal que

$$x \in D(f), \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Com respeito ao conceito de limite, vale ressaltar o seguinte: (i) a notação $x \to a$ indica que a variável x se aproxima arbitrariamente de a, sem atingí-lo, isto é, $x \neq a$; (ii) a condição $|f(x) - L| < \varepsilon$ deve ser atendida para os valores de $x \neq a$, do domínio de f, que estejam na δ-vizinhança $(a - \delta, a + \delta)$ e (iii) não é necessário que f esteja definida em a para que ela tenha limite em a. Portanto, a noção de limite de uma função f em um ponto a está relacionada ao comportamento de f nos pontos próximos de a, excluindo o próprio a. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = 4$$

mas claramente a função não está definida no ponto $x = 2$.

Esse conceito de limite se estende de maneira natural para o cálculo de várias variáveis, substituindo o intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ pela δ-vizinhança $V_\delta(P)$. Assim, dada uma função real de duas variáveis reais

$f(x,y)$ definida em um conjunto D, do qual o ponto $P(a,b)$ é um ponto de acumulação, então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

significa que dado um número real $\varepsilon > 0$, existe em correspondência um $\delta > 0$ tal que

$$\forall\ (x,y) \in D,\ \ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Dada a arbitrariedade do número ε, não há perda de generalidade se na definição de limite esse ε for substituido por $k\varepsilon$, seja qual for a constante $k > 0$. Intuitivamente, o conceito de limite estabelece que as imagens de todos os pontos da δ-vizinhança $V_\delta(P)$, exceto, possivelmente, o ponto $P(a,b)$, estão dentro do intervalo de centro L e raio ε, como sugere a Figura 1.15.

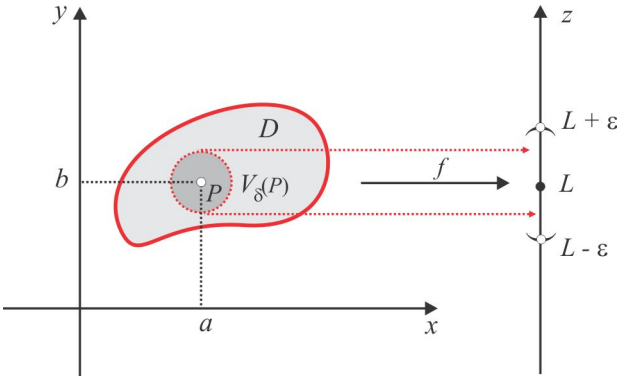


Figura 1.15: Limite de $f(x,y)$ no ponto P.

As propriedades básicas do limite no cálculo de uma variável continuam válidas no cálculo de várias variáveis e algumas demonstrações serão deixadas como parte do processo de treinamento. Usaremos a letra P para indicar os pontos (x,y) do $\mathbb{R}^2$ ou (x,y,z) do $\mathbb{R}^3$, indistintamente.

Proposição 1.15 *Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções e seja $P_0(a,b)$ um ponto de acumulação do conjunto D. Se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L$ e $\lim\limits_{P\to P_0} g(P) = M$, então:*

1. **Linearidade:** $\lim\limits_{P\to P_0} \{f(P) + \lambda g(P)\} = L + \lambda M$, *sendo λ uma constante real.*
2. **Produto:** $\lim\limits_{P\to P_0} \{f(P)\cdot g(P)\} = L \cdot M$.
3. **Quociente:** $\lim\limits_{P\to P_0} \left\{\dfrac{f(P)}{g(P)}\right\} = \dfrac{L}{M}$, *desde que* $M \neq 0$.
4. **Confronto:** *se* $L = M$ *e* $f(P) \leq h(P) \leq g(P)$, $\forall\, P$, *então* $\lim\limits_{P\to P_0} h(P) = L$.

Demonstração Seja $\varepsilon > 0$ dado e escolhamos dois raios δ_1 e δ_2 de modo que:

$$\begin{aligned} |f(P) - L| &< \varepsilon, \quad \text{seja qual for o ponto } P \text{ em } D, \text{ tal que } 0 < |P - P_0| < \delta_1 \quad \text{e} \\ |g(P) - M| &< \varepsilon, \quad \text{seja qual for o ponto } P \text{ em } D, \text{ tal que } 0 < |P - P_0| < \delta_2. \end{aligned}$$

1. Se $\lambda = 0$, nada há a demonstrar. Suponhamos $\lambda \neq 0$ e seja $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$, o menor entre os números δ_1 e δ_2. Se $|P - P_0| < \delta$, então teremos simultaneamente $|P - P_0| < \delta_1$ e $|P - P_0| < \delta_2$ e, sendo assim:

$$|f(P) + \lambda g(P) - L - \lambda M| \leq |f(P) - L| + |\lambda|\,|g(P) - M| < (1 + |\lambda|)\,\varepsilon,$$

seja qual for o ponto P em D tal que $0 < |P - P_0| < \delta$.

2. Observamos inicialmente que se $P \in D$ e $0 < |P - P_0| < \delta_1$, então

$$|f(P)| \leq |f(P) - L| + |L| < \varepsilon + |L|,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |f(P)\,g(P) - LM| &= |f(P)\,g(P) - f(P)\,M + f(P)\,M - LM| \\ &\leq |f(P)|\,|g(P) - M| + |M|\,|f(P) - L| < (\varepsilon + |L|)\,\varepsilon + M\varepsilon = k\varepsilon, \end{aligned}$$

desde que $P \in D$ e $0 < |P - P_0| < \delta$.

4. se $f(P) \leq h(P) \leq g(P)$, então $f(P) - L \leq h(P) - L \leq g(P) - L$ e, por conseguinte,

$$-\varepsilon < f(P) - L \leq h(P) - L \leq g(P) - L < \varepsilon,$$

desde que $|P - P_0| < \delta$. Logo, $|h(P) - L| < \varepsilon$, se $|P - P_0| < \delta$ e com isso obtemos o resultado. ■

Exemplo 1.16 *Vamos usar a definição de limite para mostrar que* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} (2x + y) = 5$.

Solução Neste exemplo, $a = 2$ e $b = 1$ e devemos provar que a cada $\varepsilon > 0$ dado, corresponde um $\delta > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta \Rightarrow |2x + y - 5| < \varepsilon.$$

O foco é a desigualdade $|2x + y - 5| < \varepsilon$, que envolve ε. Temos

$$|2x + y - 5| = |2(x-2) + (y-1)| \leq 2\,|x-2| + |y-1| \tag{1.1}$$

e observando que

$$\begin{aligned} |x-2| &= \sqrt{(x-2)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta \\ |y-1| &= \sqrt{(y-1)^2} \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta \end{aligned}$$

resulta de (1.1) que $|2x + y - 5| \leq 2\,|x-2| + |y-1| < 2\delta + \delta = 3\delta$ e o próximo passo é escolher o δ a partir do ε. A desigualdade $|2x + y - 5| < 3\delta$ sugere que o δ deve ser tal que $3\delta \leq \varepsilon$. Se escolhermos, por exemplo, $\delta = \varepsilon/3$, teremos $|2x + y - 5| < \varepsilon$, sempre que $0 < \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} < \delta$. ■

Exemplo 1.17 *Imitando o que fizemos no Exemplo 1.16, vamos mostrar que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} (Ax + By) = aA + bB.$$

Solução Neste caso devemos provar que a cada $\varepsilon > 0$ dado, corresponde um $\delta > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |Ax + By - aA - bB| < \varepsilon.$$

Mais uma vez o foco é a desigualdade $|Ax + By - aA - bB| < \varepsilon$. Temos

$$|Ax + By - aA - bB| = |A\,(x-a) + B\,(y-b)| \leq |A|\,|x-a| + |B|\,|x-b| \tag{1.2}$$

e observando que

$$\begin{aligned} |x-a| &= \sqrt{(x-a)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ |y-b| &= \sqrt{(y-b)^2} \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \end{aligned}$$

então $|x-a|<\delta$ e $|y-b|<\delta$, sempre que $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$. Segue de (1.2) que

$$|Ax+By-aA-bB|<\delta\left(|A|+|B|\right), \tag{1.3}$$

e o δ será escolhido a partir de (1.3). Admitindo que A ou B não é zero, do contrário nada há a demonstrar, escolhemos $\delta=\varepsilon/\left(|A|+|B|\right)$ e teremos:

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\Rightarrow|Ax+By-aA-bB|<\varepsilon,$$

como exige a definição. ■

Exemplo 1.18 *Usando o Exemplo 1.17 e as propriedades do limite deduzimos que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\left(x^m+y^n\right)=a^m+b^n$$

e, de forma mais geral, se $p(x,y)$ é um polinômio nas variáveis x e y, então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}p(x,y)=p(a,b).$$

Por exemplo,

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)}\left(2x^2+xy^2+y^3\right)=2\times1^2+1\times(-1)^2+(-1)^3=2. \qquad ■$$

Exemplo 1.19 *No caso do quociente de dois polinômios $\dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$, em que o denominador $q(x,y)$ não se anula no ponto (a,b), a propriedade do quociente estabelece que*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\frac{p(x,y)}{q(x,y)}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}p(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}q(x,y)}=\frac{p(a,b)}{q(a,b)}.$$

Por exemplo,

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)}\frac{2x^2+xy^2+y^3}{x^2-y}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}\left(2x^2+xy^2+y^3\right)}{\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}\left(x^2-y\right)}=\frac{2\times2^2+2\times3^2+3^3}{2^2-3}=35. \qquad ■$$

Exemplo 1.20 *Vamos usar a definição para mostrar que $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3x^2+y)=5$.*

Solução Devemos provar que dado $\varepsilon>0$, existe um $\delta>0$ tal que

$$0<\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta\Rightarrow\left|3x^2+y-5\right|<\varepsilon.$$

Como já vimos nos exemplos anteriores, o foco é decompor a expressão $3x^2+y-5$ em parcelas onde devem figurar apenas os termos $|x-1|$ e $|y-2|$, a menos de constantes multiplicativas. Temos

$$\left|3x^2+y-5\right|=\left|3(x^2-1)+(y-2)\right|\leq3\,|x-1|\,|x+1|+|y-2|. \tag{1.4}$$

A expressão (1.4) contém o termo $|x+1|$ que não figura nos nossos planos e que deve ser majorado por uma constante. A noção intuitiva de limite nos leva a concluir que: quanto menor for o raio δ maior será a chance da função f levar a δ-vizinhança $V_\delta(P)$ dentro do intervalo $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$, de

modo que não há perda de generalidade em admitirmos que o δ procurado seja menor do que 1. Logo, se $|x-1|<\delta$ e $\delta<1$, teremos

$$|x+1| = |x-1+2| \leq 2+|x-1| < 2+\delta < 3,$$

e, dessa forma, obtemos

$$\left|3x^2+y-5\right| \leq 3\,|x-1|\,|x+1| + |y-2| < 3(3\delta)+\delta = 10\delta, \tag{1.5}$$

sempre que $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta$. A desigualdade (1.5) sugere que δ deve ser no máximo $\varepsilon/10$ e a condição $\delta<1$, imposta ao δ, nos obriga a escolher $\delta<\min\{1,\varepsilon/10\}$. Com essa escolha do δ, segue de (1.5) que

$$\left|3x^2+y-5\right| < 10\delta < \varepsilon, \qquad \text{se} \quad \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta.$$

Portanto, $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(3x^2+y)=5$. ■

Tivemos oportunidade de ver em alguns exemplos que o cálculo de limite por meio da definição pode ser complexo, até mesmo para funções simples, como é o caso de uma função quadrática, e o uso de técnicas facilitam o cálculo. Vejamos algumas dessas técnicas.

■ Usando os Limites Iterados

A fim de que a função $f(x,y)$ tenha limite no ponto (a,b) é necessário, mas não suficiente, que os limites iterados

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

sejam iguais. Em outras palavras, se

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right),$$

então $f(x,y)$ não tem limite no ponto (a,b). A igualdade entre os limites iterados, contudo, não assegura a existência do limite de $f(x,y)$ no ponto (a,b).

Exemplo 1.21 *Investigar, por meio dos limites iterados, a existência ou não do limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

Solução Não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois a substituição direta de x e y por 0 na expressão $\dfrac{x-y}{x+y}$ produz a forma indeterminada $0/0$. Calculando os limites iterados, encontramos

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

e, sendo os limites iterados diferentes, deduzimos que o limite não existe. ■

Exemplo 1.22 *Usando o mesmo argumento do Exemplo 1.21, investigar o limite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}.$$

Solução Os limites iterados são, neste caso,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}\right)=\lim_{x\to 0}(2)=2 \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-y^2}{x^2+3y^2}\right)=\lim_{y\to 0}(-1/3)=-1/3,$$

de onde resulta que o limite não existe. ■

■ Usando Caminhos Particulares

Como enfatizamos no início desta seção, para que $f(x,y)$ tenha limite no ponto (a,b) é necessário, mas não suficiente, que o valor do limite seja o mesmo ao longo de qualquer curva que conduza (x,y) ao ponto (a,b). Essa regra, como no caso anterior, é usada apenas para mostrar que o limite não existe e o procedimento é exibir dois caminhos (curvas) ao longo dos quais os limites são distintos.

Exemplo 1.23 *Investigar se a função* $f(x,y)=\dfrac{2xy^2}{x^3+y^3}$ *tem limite na origem.*

Solução Os limites iterados são, neste caso, iguais a zero, mas isso não assegura a existência do limite e muito menos que ele é zero. Fixemos os caminhos $\gamma_1 : y=0$ e $\gamma_2 : y=x$ e calculemos o limite de $f(x,y)$ ao longo desses caminhos.

$$\text{no caminho } \gamma_1 \quad : \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma_1}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}\frac{2xy^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=\lim_{x\to 0}0=0.$$

$$\text{no caminho } \gamma_2 \quad : \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma_2}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}\frac{2xy^2}{x^3+y^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{2x^3}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

Ao longo dos caminhos γ_1 e γ_2 a função tem limites diferentes e isso mostra que ela não tem limite na origem. ■

Exemplo 1.24 *Investigar a existência do limite da função* $f(x,y)=\dfrac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}$, *no ponto* $(0,1)$.

Solução Se na expressão $\dfrac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}$ substituirmos x por 0 e y por 1, chegaremos à forma indeterminada $0/0$. Investigaremos o limite no ponto $P_0(0,1)$, o qual dever ser ponto de acumulação dos caminhos a serem considerados. Se considerarmos as retas $\gamma_1 : 1+mx$ e a parábola $\gamma_2 : y-1=x^2$, teremos:

$$\text{no caminho } \gamma_1 \quad : \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in\gamma_1}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=1+mx}}\frac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=0.$$

$$\text{no caminho } \gamma_2 \quad : \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in\gamma_2}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y-1=x^2}}\frac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=1/2.$$

Observamos que o limite é zero ao longo de uma infinidade de retas e, ainda assim, o limite não existe, porque ao longo da parábola γ_2 o valor do limite é $1/2$. ■

Exemplo 1.25 *Verificar se a função* $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ *tem limite na origem.*

Solução Os limites iterados na origem são iguais a zero, ao longo das retas $y = mx$ e das parábolas $y = kx^2$ a função $f(x,y)$ tem limite zero na origem, e, ainda assim, ela não tem limite em $(0,0)$. De fato, considerando o caminho $\gamma : y = -xe^{-x}$ e usando a regra de L/Hôpital[1], chegamos a:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in\gamma}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=-xe^{-x}}} \frac{x^4e^{-2x}}{x^3(1-e^{-3x})} = \lim_{x\to 0}\frac{xe^{-2x}}{1-e^{-3x}} = 1/3.$$

Logo, o limite não existe, pois o seu valor depende do caminho que conduz o ponto P à origem. ■

■ Usando a Limitação

Suponhamos exista um $\delta > 0$, tal que a função $f(P)$ seja limitada no domínio $V_\delta(P_0) - \{P_0\}$, e que a função $g(P)$ tenha limite zero em P_0. O produto $h(P) = f(P)\,g(P)$ tem limite zero no ponto P_0. De fato, sendo $\lim_{P\to P_0} g(P) = 0$ segue da definição que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(P)| < \varepsilon$, para todo P na δ-vizinhança $V_\delta(P_0)$, $P \neq P_0$, e sendo f limitada, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe uma constante positiva M tal que $|f(P)| \leq M$, com P na vizinhança $V_\delta(P_0)$, $P \neq P_0$,. Logo,

$$|h(P) - 0| = |f(P)\times g(P)| = |f(P)|\times|g(P)| < M\varepsilon,$$

desde que P esteja em $V_\delta(P)$ e $P \neq P_0$, isto é, $0 < |P - P_0| < \delta$. Isso mostra que $\lim_{P\to P_0} h(x,y) = 0$.

Exemplo 1.26 *Mostrar que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Solução Vamos decompor a função $h(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ no produto de uma função limitada por outra que tem limite zero. Consideremos a decomposição

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{limitada}} \times \underbrace{y}_{\downarrow 0}$$

É claro que $g(x,y) = y$ tem limite zero na origem e a função $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é limitada, porque

$$|f(x,y)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1, \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Exemplo 1.27 *Mostrar que função* $f(x,y,z) = \dfrac{3x^2y + yz^3}{x^2+y^2+z^2}$ *tem limite zero na origem.*

Solução De fato,

$$\frac{3x^2y+yz^3}{x^2+y^2+z^2} = \underbrace{3y}_{\downarrow 0} \times \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}}_{\text{limitada}} + \underbrace{yz}_{\downarrow 0} \times \underbrace{\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}}_{\text{limitada}}$$

Logo, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$. ■

[1] Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704), um nobre francês que escreveu o primeiro texto introdutório de cálculo diferencial, em que a regra foi impressa pela primeira vez.

Exemplo 1.28 *A função* $f(x,y) = \left[x^2 + (y-1)\right] \operatorname{sen}(y^3 + 1/x^2)$ *tem limite zero no ponto* $P_0(0,1)$. *Isto decorre do fato da função* $f(x,y)$ *ser o produto da função* $g(x,y) = \operatorname{sen}(y^3 + 1/x^2)$, *que é limitada, pela função* $h(x,y) = x^2 + (y-1)$, *que tem limite zero no ponto* $P_0(0,1)$. *Logo,*

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left[x^2 + (y-1)\right] \operatorname{sen}(y^3 + 1/x^2) = 0. \qquad \blacksquare$$

Observação 1.29 *No Exemplo 1.28 não podemos usar a propriedade sobre o limite do produto, porque naquela propriedade admite-se a existência de cada limite envolvido. Ressaltamos que a função* $g(x,y) = \operatorname{sen}(y^3 + 1/x^2)$ *não tem limite no ponto* $P_0(0,1)$, *embora seja limitada.*

■ Usando Coordenadas Polares

Certos limites na origem podem ser calculados com auxílio das coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$. Como $r = \sqrt{x^2+y^2}$, segue que $(x,y) \to (0,0)$ se, e só se, $r \to 0$ e, assim, se o valor do limite, com $r \to 0$, não depender da direção θ, esse será o valor do limite original, com $(x,y) \to (0,0)$.

Exemplo 1.30 *Usando coordenadas polares, vamos mostrar que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0.$

Solução Efetuando a mudança para coordenadas polares, obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{3r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}\left(3r\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\right) = 0,$$

independente da direção θ. Daí segue o que queríamos. $\blacksquare$

Observação 1.31 *A mudança para coordenadas polares pode nos levar a conclusões falsas. Por exemplo, em coordenadas polares a função*

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

assume a forma:

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{2r\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta}, \quad \textit{quando } r \neq 0,$$

e se fizermos θ *constante, de modo que* $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, *teremos* $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 0$. *Esse cálculo induz a afirmação (falsa!) de que o limite da função na origem é igual a* 0. *Observamos que ao longo do parábola* $y = x^2$, *isto é,* $r\operatorname{sen}\theta = r^2\cos^2\theta$, *obtemos*

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{2r\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^4\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{2r^2\cos^2\theta\cos^2\theta}{r^2\cos^4\theta + r^2\cos^4\theta} = 1$$

e, portanto, $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = 1$. *Logo, a função* $f(x,y)$ *não tem limite na origem.*

1.3.3 Continuidade

Consideremos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e seja $P_0(a,b)$ um ponto fixado no conjunto D, domínio da função f. Diremos que f é *contínua* no ponto P_0, se P_0 for um ponto isolado de D ou se P_0 for um ponto de acumulação de D e as seguintes condições forem satisfeitas:

1. $\lim_{P\to P_0} f(x,y)$ existe, isto é, $\lim_{P\to P_0} f(x,y)$ é um número real.

2. $\lim_{P \to P_0} f(x,y) = f(P_0)$.

Quando f for contínua em cada ponto P do conjunto D, diremos que f é *contínua* em D.

Formalmente, f ser contínua no ponto P_0, do domínio D de f, significa que a cada número real $\varepsilon > 0$ dado, existe em correspondência um $\delta > 0$ tal que

$$(x,y) \in D, \;\; 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon.$$

Neste caso, teremos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(\lim_{x\to a} x, \lim_{y\to b} y).$$

Geometricamente, a função f ser contínua no ponto P_0 significa que, para cada intervalo aberto I_ε com centro em $f(P_0)$ e raio ε podemos encontrar uma δ-vizinhança $V_\delta(P_0)$ de P_0, tal que $f(x,y) \in I_\varepsilon$, para cada $(x,y) \in V_\delta(P_0)$. A Figura 1.16 ilustra a definição de continuidade da função f no ponto P_0.

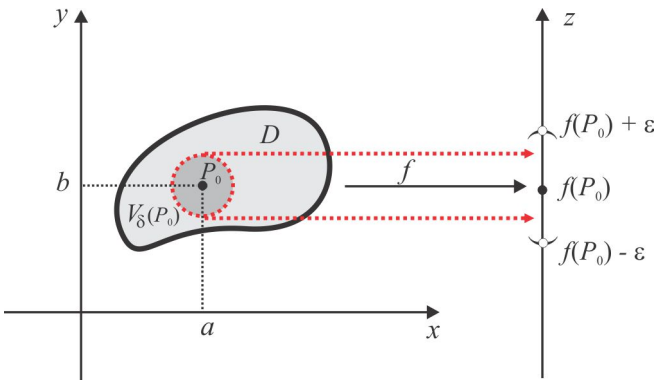


Figura 1.16: Continuidade de $f(x,y)$ no ponto P_0.

Quando f não for contínua em P_0, diremos que f é *descontínua* no ponto P_0 e isso ocorrerá se ao menos uma das condições da definição não for atendida. O ponto P_0 é uma *descontinuidade removível* de f se existir $\lim_{P\to P_0} f(x,y)$, mas $\lim_{P\to P_0} f(x,y) \neq f(P_0)$. Quando não existir o limite $\lim_{P\to P_0} f(x,y)$ o ponto P_0 denominar-se-á *descontinuidade essencial* de f.

Como consequência das propriedades do limite, segue o seguinte resultado:

Proposição 1.32 *Se f e g são funções contínuas em P_0 e λ é um número real, então as funções $f + \lambda g$, $|f|$ e fg são contínuas em P_0. Se $g(P_0) \neq 0$, então o quociente f/g é uma função contínua em P_0.* ■

Exemplo 1.33 *Os polinômios $p(x,y)$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$; as funções racionais (quociente de polinômios) $\dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ são contínuas nos pontos em que $q(x,y) \neq 0$.* ■

Exemplo 1.34 *Estudar a continuidade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \;\; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solução A função f tem uma descontinuidade essencial na origem, porque o limite de f na origem não existe. Por outro lado, no conjunto aberto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$, a função f é contínua por ser uma função racional com denominador diferente de zero. Portanto, o conjunto de continuidade de f é $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. ■

Exemplo 1.35 *Estudar a continuidade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solução No conjunto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, isto é, nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$ a função é contínua, porque é uma função racional com denominador diferente de zero. Por outro lado, vimos no Exemplo 1.30, que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ e, portanto, f é contínua, também, em $(0,0)$. O conjunto de continuidade de f é o plano $\mathbb{R}^2$. ■

Exemplo 1.36 *Classificar a descontinuidade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solução A única descontinuidade de f ocorre em $(0,0)$. De fato, conforme vimos no Exemplo 1.26, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e como $f(0,0) = 1$, então $(0,0)$ é uma descontinuidade removível de f. Para remover essa descontinuidade, basta redefinir a função f na origem pondo $f(0,0) = 0$. ■

Exemplo 1.37 (função com inúmeras descontinuidades) *Estudar a continuidade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & se\ x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & se\ x^2+y^2 > 1, \end{cases}$$

Solução Dado um ponto $P_0(a,b)$ na circunferência $x^2+y^2 = 1$, então

$$\lim_{\substack{P\to P_0 \\ |P|<1}} f(x,y) = a^2+b^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{P\to P_0 \\ |P|>1}} f(x,y) = 0,$$

e isso mostra que cada ponto da circunferência $x^2+y^2 = 1$ é uma descontinuidade essencial da função $f(x,y)$. Nos demais pontos do $\mathbb{R}^2$ a função é contínua.

Funções Elementares do Cálculo

Sabemos do cálculo de uma variável que e^t, $\log t$, $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\sqrt{t}$, $\arccos t$, etc. são funções contínuas em seus respectivos domínios. Essas são algumas das *funções elementares*, uma importante classe de funções do cálculo. São funções elementares: os polinômios, as funções racionais, exponenciais e logarítmos, as funções trigonométricas, além das composições e combinações dessas. Por exemplo, a função $f(t) = \sqrt{\operatorname{sen} t} + \cos\left(t^2+1\right) - \left(\operatorname{sen} t + e^t\right)\log t$ é uma função elementar, contínua em seu domínio. O que dizer sobre a continuidade da função

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} + \arctan(xy)$$

no seu domínio? Sobre a composição de funções contínuas temos o seguinte resultado:

Proposição 1.38 *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções reais e suponhamos que $\operatorname{Im}(f) \subseteq D(g)$. Se f é contínua em P_0 e g é contínua em $t_0 = f(P_0)$, então a função composta $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ é contínua em P_0.* ■

Com os resultados já estabelecidos podemos investigar a continuidade das demais funções elementares do cálculo de várias variáveis. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 1.39 *A função $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ tem para domínio o disco compacto $D : x^2+y^2 \leq 1$ e podemos escrever $f(x,y)$ como composição de funções contínuas elementares. De fato, considerando $g(t) = \sqrt{t}$, definida e contínua para $t \geq 0$, e $p(x,y) = 1-x^2-y^2$, então*

$$(g \circ p)(x,y) = g(p(x,y)) = g\left(1-x^2-y^2\right) = \sqrt{1-x^2-y^2} = f(x,y)$$

e resulta da Proposição 1.38 que $f(x,y)$ é contínua no seu domínio D.

Exercícios & Complementos

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$. Mostre que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = 0 \text{ e } \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0.$$

2. Mostre que a função $z = f(x,y)$ não tem limite quando $(x,y) \to (0,0)$.

(a) $z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ (e) $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ (i) $z = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$

(b) $z = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ (f) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (j) $z = \dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$

(c) $z = \dfrac{|x|}{x-y^3}$ (g) $z = \dfrac{x^6}{(x^3+y^2)^2}$ (k) $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(d) $z = \dfrac{xy}{2x^2+3y^2}$ (h) $z = \dfrac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$ (l) $z = \dfrac{x^4+y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

3. Verifique que a função

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

não tem limite na origem.

4. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \log(xy+1)$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\exp \operatorname{sen}\left(x^2y\right)+\cos y}{\cos(xy)}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(y^2-1\right)\operatorname{sen} x}{x}$ (g) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} z \operatorname{sen}\left[\left(x^2y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y+1)\operatorname{sen}(xy)}{y}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\sqrt{xy}}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$ (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} [x\cos(y/4)+1]^{2/3}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \operatorname{arctg}(y/x)$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt{x^3+2y}$

5. Use a definição de limite e prove que:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \left(3x^2-2y\right) = -1$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left(x^2+y^2\right) = 2$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} \left(2x^2-y^2\right) = -1$

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \left(x^2-1\right) = 0$

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-1)} \left(x^2+y^2-4x+2y\right) = -4$

(h) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{y^3+xz^2}{x^2+y^2+z^2} = 0$

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\,\mathrm{sen}\,(1/x) = 0$

(j) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} (2x+y+z) = 4$

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \left(x^2-y^2\right) = -3$

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{2\,(x-1)^2\,(y-2)}{3\,(x-1)^2+3\,(y-2)^2} = 0.$

6. Mostre que

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{x} = 0$. Use $1+\cos\sqrt{xy}$ como fator de racionalização.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{sen}\left(x^2+y^2\right)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} = 2$. Use coordenadas polares e a regra de L'Hôpital.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = \infty$. Use a desigualdade $\sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$.

7. Mostre que as funções

$$f\,(x,y) = \frac{xy}{y-x^3} \quad \text{e} \quad g\,(x,y) = \frac{xy^2}{x^2-y^2}$$

não têm limite na origem.

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f\,(x,y) = \dfrac{3x^4y^4}{\left(x^4+y^2\right)^3}$. Calcule os limites de $f\,(x,y)$ quando $(x,y) \to (0,0)$, ao longo dos seguintes caminhos: (a) eixo x; (b) reta $y = x$; (c) curva $y = x^2$. A função f tem limite em $(0,0)$? Por quê?

9. Verifique se a função $z = f\,(x,y)$ é contínua no ponto P indicado.

(a) $z = \sqrt{25-x^2-y^2}, \quad P\,(-3,4)$.

(b) $z = \exp\,(-xy)\log\left(7+x^2-2y\right), \quad P\,(0,0)$.

(c) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad P\,(0,0)$.

(d) $z = \dfrac{xy}{y-2x}$, se $y \neq 2x$ e $f\,(x,2x) = 1, \quad P\,(1,2)$.

10. Identifique a função $z = z\,(x,y)$ como combinação de funções elementares do cálculo e deduza que ela é contínua em seu domínio.

(a) $z = \sqrt{xy}$

(b) $z = \dfrac{4x^2-y^2}{2x-y}$

(c) $z = \dfrac{x}{y^2-1}$

(d) $z = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$

(e) $z = \mathrm{arcsen}\,(y/x)$

(f) $z = \log\,(xy-2)$

11. Discuta a continuidade das seguintes funções:

    (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$, se $x \neq y$ e $f(x,x) = 1$.

    (b) $f(x,y) = \exp\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)$, se $x^2 + y^2 < 1$ e $f(x,x) = 0$ se $x^2 + y^2 \geq 1$.

    (c) $f(x,y) = \dfrac{\exp\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 1$.

    (d) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$, se $x + y \neq 0$ e $f(x,-x) = 1$.

    (e) $f(x,y,z) = \dfrac{xz - y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$, se $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ e $f(0,0,0) = 0$.

    (f) $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$, se $4x^2 + 9y^2 \leq 1$ e $f(x,y) = 0$, se $4x^2 + 9y^2 > 1$.

    (g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, se $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e $f(x,y,z) = 0$, se $x^2 + y^2 + z^2 > 1$.

12. Sejam g e h funções definidas em $\mathbb{R}^2$ por: $g(0,0) = 1$, $h(0,0) = 1$ e para $(x,y) \neq (0,0)$ considere $g(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$ e $h(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Verifique que a origem é uma descontinuidade de $g(x,y)$ e de $h(x,y)$. Em que caso a descontinuidade pode ser removida? Recorde-se que *remover* uma descontinuidade significa redefinir a função de modo a torná-la contínua.

13. Verifique que a origem é uma descontinuidade da função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{1 - \cos\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Essa descontinuidade pode ser removida?

14. Sabendo que

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} \leq \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{xy} < 1 \ \text{ e } \ 2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|,$$

    calcule os seguintes limites: (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{xy}$ e (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$

15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    Verifique que f é contínua em todo ponto $P(x,y)$ do $\mathbb{R}^2$ e calcule os limites

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)}{k}.$$

16. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^3}, & \text{se } x^2 + y^3 \neq 0 \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcule o limite de f na origem, ao longo das retas $y = mx$.

(b) Calcule o limite de f na origem, ao longo da curva $y = -x^{2/3}e^x$.

(c) Calcule o limite de f na origem, ao longo da curva em coordenadas polares $r = \cos^2\theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$.

(d) Investigue a continuidade de f.

17. Use o item (c) do Exercício 6 e mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg}\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

18. Use coordenadas polares e mostre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\log\sqrt{x^2+y^2} = 0.$$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

SEÇÃO 1.1 CONCEITOS TOPOLÓGICOS

1. Tabela de classificação topológica.

Aberto	(e)	(g)	(o)	(q)											
Fechado	(a)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)								
Limitado	(b)	(d)	(h)	(j)	(k)	(l)	(r)	(s)							
Conexo	(a)	(b)	(c)	(d)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(o)	(p)	(r)	(s)
Compacto	(j)	(k)	(l)	(m)											

2. Identificando a fronteira. Como ilustração, faremos os detalhes dos itens (f) e (s).

(a) $\partial\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

(b) $\partial\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1,\ \ x \geq 0\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$.

(c) $\partial\mathcal{R} = \{(1,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \cup \{(2,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2\}$.

(d) $\partial\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 2\}$.

(e) $\partial\mathcal{R}$ é constituída das retas $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ e $x = 3$.

(f) Primeiro observamos que a região $\mathcal{R}$ é descrita por duas sentenças juntas pelo conectivo "e": $x > 0$ e $1 \leq y \leq 2$. A inequação $x > 0$, com y livre, representa graficamente o semiplano à direita do eixo y, confira Figura 1.17 (a), enquanto a inequação $1 \leq y \leq 2$, com x livre, representa graficamente a faixa horizontal compreendida entre $y = 1$ e $y = 2$, confira Figura 1.17 (b). Portanto, o esboço da região é dado pela Figura 1.17 (c). Observando o esboço da região $\mathcal{R}$ concluímos que $\mathcal{R}$ não é aberta e nem fechada, não é limitada e nem compacta, mas é uma região simplesmente conexa. Além disso,

$$\partial\mathcal{R} = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2\} \cup \{(x,1) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \cup \{(x,2) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}.$$

(g) $\partial\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

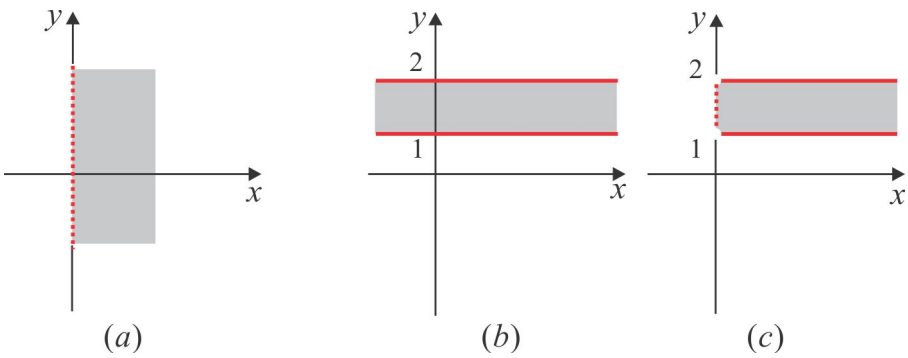


Figura 1.17: Esboço da região $\mathcal{R}$.

(h) $\partial\mathcal{R} = \{(\pm 1, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 2\} \cup \{(x, -1) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1\}$.

(i) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 9\}$.

(j) $\partial\mathcal{R} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \operatorname{sen} x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/4\} \cup \{(x, \cos x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/4\}$.

(k) $\partial\mathcal{R}$ é o quadrado de vértices $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$ e $(1, 1)$.

(l) $\partial\mathcal{R}$ é o quadrado de vértices $(0, \pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$.

(m) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$.

(n) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty\}$.

(o) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$.

(p) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$.

(q) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$.

(r) $\partial\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(s) O conjunto $\mathcal{R}$ é a interseção do interior mais a fronteira da elipse $x^2 + 4y^2 \leq 16$, com os semiplanos $x \leq -2$ e $x \geq 2$. Portanto, um conjunto fechado e limitado, ou seja, um conjunto compacto e a fronteira é constituida dos segmenos de reta $\left\{(\pm 1, y) : -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}\right\}$ e dos arcos

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 16,\ \ x \leq -2 \ \text{ e } \ -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}\right\} \quad \text{ e} \\ \gamma_2 &: \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 16,\ \ x \geq 2 \ \text{ e } \ -\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}\right\}. \end{aligned}$$

3. A fronteira de $\mathcal{R}$ é

$$\partial\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 = 1\}.$$

e temos que R é aberta, porque $\mathcal{R} \cap \partial\mathcal{R} = \varnothing$.

SEÇÃO 1.2 FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. Não esqueça de fazer o esboço de cada domínio!

(a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \text{ e } 2x \geq y\}$.

(b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| < y < |x|\}$.

(c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + \frac{y^2}{9} < 1\}$.

(e) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\}$.

(f) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

(g) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \leq y \leq x + 1\}$.

(h) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 3 \text{ e } y \leq 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 3 \text{ e } y \geq 2\}$.

(i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \dfrac{x}{x - y} \leq 1\}$.

(j) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

(k) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq (-1)^n x + n\pi\}$.

(l) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)^{-1} \geq 0\}$.

2. Em cada caso faça $z = k$, k constante, para obter as curvas de nível. Faça um esboço de pelo menos duas curvas de nível!

3. No ponto $P = (1, 2)$ tem-se que $z = 0$ e a curva de nível por P é $y = 2x^3$. A reta tangente tem equação $y = 6x - 4$ ($m = y' = 6$ é a inclinação da reta) e sobre essa reta $z = f(x) = -4x^3 + 12x - 8$. Assim, quando $x \to \pm\infty$, a função f tende para $\mp\infty$.

4. A origem $O = (0, 0, 0)$, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, respectivamente.

5. O hiperboloide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

6. Faça um esboço!

(a) $z = 3$, representa o plano passando por $P = (0, 0, 3)$ e paralelo ao plano xy.

(b) $z = x$, representa o plano contendo a reta $z = x$.

(c) $x + y + z = 1$.

(d) $z = \operatorname{sen} y$, representa uma superfície em forma de telha contendo a curva $z = \operatorname{sen} y$, pois x é livre.

(e) $z = \exp(\sqrt{x^2 + y^2})$.

(f) $z = 3 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3 - z$ $(z \geq 3)$, representa um paraboloide.

(g) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

(h) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

(i) $z = \left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}2}$.

(j) $z = 1 - x^2$.

(k) $z = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$.

(l) $z = \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right)$.

7. (a) planos (b) elipsoides (c) hiperboloides (d) cilindros.

SEÇÃO 1.3 LIMITE & CONTINUIDADE

2 Além dos caminhos canônicos como as retas, considere: $y = \sqrt{x}$ em (e), $y^2 = x^3$ em (g), $y = x^2$ em (h), $y = -x^2e^x$ em (i) e $y = -xe^x$ em (j).

4 (a) 0, (b) -1, (c) 1, (d) $\frac{1}{2}$, (e) $\frac{\pi}{4}$, (f) 2, (g) 0, (h) 0, (i) $\left(1+\sqrt{2}/2\right)^{2/3}$.

7 (a) Considere os caminhos $y = 0$ e $y = x^k e^x$, escolhendo k adequado (b) Idem.

8 (a) 0 (b) 0 (c) $\frac{3}{8}$. A função não tem limite em $(0,0)$.

9 (a) Sim (b) Sim (c) Não (d) Não.

10 A função $f(x,y)$ é combinação de funções elementares sendo, portanto, contínua em seu domínio.

(a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ e } y \leq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

(b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2x\}$.

(c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm 1\}$.

(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$.

11 Note que a função está definida em todo plano $\mathbb{R}^2$.

(a) f é descontínua nos pontos da reta $y = x$, exceto no ponto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) f é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$.

(c) f é descontínua na origem.

(d) f não tem ponto de descontinuidade, isto é, ela é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

(e) f é descontínua na origem;

(f) f é descontínua nos pontos da elipse $4x^2 + 9y^2 = 1$.

(g) f é descontínua nos pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

12 A função g é descontínua em $(0,0)$, pois o limite de $g(x,y)$ na origem é 0 e $g(0,0) = 1$. Para remover essa descontinuidade basta redefinir g na origem, pondo $g(0,0) = 0$. A função $h(x,y)$ é descontínua em $(0,0)$, pois não tem limite nesse ponto. Esse é o caso de uma descontinuidade que não pode ser removida, ou seja, uma descontinuidade essencial.

13 Usando coordenadas polares e a Regra de L'Hôpital, obtém-se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen} r^2}{1-\cos r} = \lim_{r\to 0} \frac{2r\cos r^2}{\operatorname{sen} r} = \lim_{r\to 0} \frac{2\cos r^2 - 2r \operatorname{sen} r^2}{\cos r} = 2.$$

Note que, sendo $f(0,0) = 0$, a função f é descontínua na origem. Essa descontinuidade pode ser removida redefinindo f na origem por $f(0,0) = 2$.

15 Sobre a continuidade de $f(x,y)$. Fora da origem a função f é combinação de funções elementares sendo, portanto, contínua. Na origem, tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\exp(1/r^2)} = 0 = f(0,0).$$

Logo, f é contínua em todo plano $\mathbb{R}^2$. Pondo $h = 1/u$, com $h > 0$, use a Regra de L'Hôpital e deduza que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{\exp(u^2)} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{2u\exp(u^2)} = 0.$$

Em que momento no cálculo do limite acima foi utilizada a Regra de L'Hôpital?

16 (a) Ao longo das retas $y = mx$, tem-se

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^3x^3} = 0.$$

(b) Na curva $y = -x^{2/3}e^x$, use a Regra de L'Hôpital e mostre que o limite não é 0.

18 Usando coordenadas polares e a Regra de L'Hôpital, deduza que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\log\sqrt{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\left(r^2\log r\right) = \lim_{r\to 0}\frac{\log r}{1/r^2} = 0.$$

Em que momento no cálculo do limite acima foi utilizada a Regra de L'Hôpital?

2. Diferenciabilidade

Neste Capítulo vamos apresentar os conceitos e regras envolvendo derivadas parciais, com aplicações a diversos problemas práticos. Imaginemos que uma situação prática (por exemplo, uma distribuição de temperatura em uma placa, ou um mapa cartográfico) seja modelada por uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$ e desejamos determinar as direções nas quais a temperatura $f(x, y)$ cresce (ou decresce) mais rapidamente, a partir de um ponto $P(x, y)$ da placa, e a taxa de crescimento (ou decrescimento) nessas direções. Este e outros tipos de problemas práticos serão modelados e resolvidos oportunamente.

Vamos recordar inicialmente o conceito e as regras básicas de derivação para uma função de uma variável real, como motivação para o cálculo diferencial de várias variáveis reais. Consideremos uma função de uma variável $y = f(x)$ definida em um intervalo I e fixemos um ponto c no interior desse intervalo. Seja $h \neq 0$ e suponhamos $|h|$ pequeno o bastante, de modo que $c+h$ ainda esteja no intervalo I. A declividade da reta que passa nos pontos $A(c, f(c))$ e $B(c+h, f(c+h))$ depende, naturalmente, de h e é dada por

$$m(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \tag{2.1}$$

Quando h tende a zero, o ponto B desliza sobre o gráfico em direção ao ponto A e a reta por A e B se aproxima da reta tangente ao gráfico de f no ponto A, como na Figura 2.1.

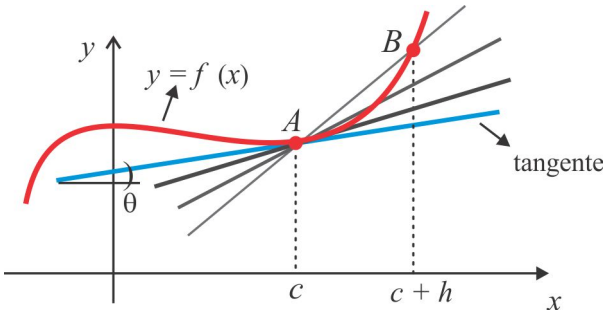


Figura 2.1: Visão geométrica da reta tangente.

A declividade da reta tangente é obtida de (2.1), com $h \to 0$, isto é,

$$m = \tan\theta = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Esse limite, caso exista, é a derivada no sentido de Newton-Leibniz[2] de f no ponto c, representada por $f'(c)$, $y'(c)$ ou $\frac{df}{dx}(c)$. Neste caso, a função f é *derivável* no ponto c.

São as seguintes as regras básicas de derivação:

1. **linearidade:** $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$, λ constante.
2. **produto:** $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
3. **quociente:** $(f/g)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $g \neq 0$.

[2] Sir. Issac Newton (1642-1727), físico e matemático inglês e Le Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) filósofo, cientista, matemático, diplomata e bibliotecário alemão.

4. regra da cadeia: $\frac{d}{dx}\left[f\left(g\left(x\right)\right)\right] = f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$ ou $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

2.1 Derivadas Parciais

Seja D um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, contendo o ponto $P(a,b)$ no seu interior, e consideremos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ao fixarmos $y = b$, obtemos uma função real de uma variável $g\left(x\right) = f(x,b)$ definida em um intervalo I contendo a no seu interior e a derivada da função g no ponto a, caso exista, é denominada *derivada parcial* de f em relação à variável x, no ponto $P\left(a,b\right)$. Essa derivada parcial é usualmente representada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \ f_x(a,b),\ \ \frac{\partial z}{\partial x}(a,b),\ \ z_x(a,b),\ \ D_x f(a,b),\ \ \partial_x f\left(a,b\right)\ \text{ ou }\ f_1(a,b).$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = g'\left(a\right) = \lim_{h\to 0}\frac{g\left(a+h\right)-g\left(a\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$

se o limite existir. A derivada parcial $f_x\left(a,b\right)$ mede a inclinação da reta T, tangente à curva de interseção da superfície $z = f(x,y)$ com o plano $y = b$, isto é, $\tan\theta = f_x\left(a,b\right)$.

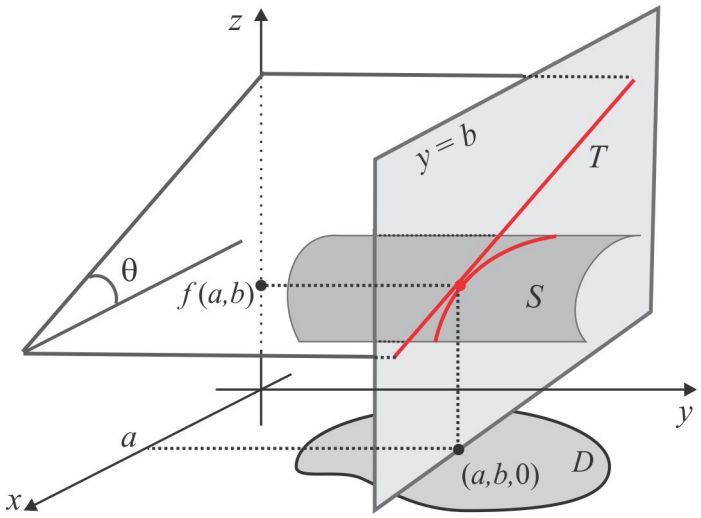


Figura 2.2: Visão geométrica da derivada parcial $f_x\left(a,b\right)$.

De modo similar, definimos a derivada parcial da função f com respeito à variável y como sendo o limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k},$$

caso o limite exista. Outras formas de representar essa derivada são

$$f_y\left(a,b\right),\ \ \frac{\partial z}{\partial y}(a,b),\ \ D_y f\left(a,b\right),\ \ \partial_y f\left(a,b\right)\ \text{ ou }\ f_2\left(a,b\right).$$

Observação 2.1 *Aparentemente não levamos em consideração o fato do ponto P ser interior ao domínio D da função f. Observamos que, no cálculo da derivada $f_x\left(a,b\right)$, é necessário calcular os valores $f\left(a+h,b\right)$, para h próximo de zero, e isso é possível porque o ponto P sendo interior ao domínio D, os pontos $(a+h,b+k)$ estão dentro do conjunto D, se h e k são suficientemente pequenos.*

As derivadas parciais das funções elementares são calculadas usando as regras de derivação do cálculo de uma variável. Para calcular a derivada f_x, interpretamos y temporariamente como constante e derivamos a função f como se ela fosse função apenas da variável x. No caso de uma função $f(x, y, z)$ de três variáveis, o processo é similar. Por exemplo, para calcular a derivada f_z, interpretamos x e y temporariamente como constantes e derivamos f com relação à varivel z, como se fosse ela uma função apenas de z.

Exemplo 2.2 *Calcular as derivadas parciais no ponto $P(1,3)$ da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x^2 + 5xy - 4y^2$.*

Solução Para calcular as derivadas $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ no ponto $P(1,3)$, primeiro obtemos as expressões das derivadas e em seguida avaliamos essas derivadas no ponto desejado. Para calcular a derivada parcial f_x devemos manter y temporariamente constante. Se fizermos $a = 5y$ e $b = 4y^2$, teremos $f(x,y) = 3x^2 + ax - b$ e, consequentemente,

$$f_x(x,y) = 6x + a = 6x + 5y.$$

De forma similar, mantendo x constante, encontramos $f_y(x,y) = 5x - 8y$. Portanto,

$$f_x(1,3) = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 21 \qquad \text{e} \qquad f_y(1,3) = 5.1 - 8.3 = -19. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.3 *Determinar a reta tangente à curva de interseção da superfície $z = 3x^2 - 5xy^3 - \operatorname{sen}(xy)$ com o plano $y = 0$, no ponto $Q(1,0,3)$.*

Solução Consideramos a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 3x^2 - 5xy^3 - \operatorname{sen}(xy)$, cuja derivada parcial $f_x(1,0)$ é a inclinação da reta tangente. Derivando parcialmente a função em relação à variável x, encontramos

$$f_x(x,y) = 6x - 5y^3 - y\cos(xy) \;\text{ e }\; f_x(1,0) = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 0 - 0\cos(0) = 6.$$

A reta tangente tem declividade $f_x(1,0) = 6$ e é descrita por $z = 6x - 3, \quad y = 0$ ou, na forma paramétrica, $x = t,\ y = 0,\ z = 6t - 3$. $\blacksquare$

Exemplo 2.4 (usando a definição) *Em alguns casos, as derivadas parciais devem ser calculadas pela definição. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

é definida por duas sentenças (por isso ela não é uma função elementar) e $(0,0)$ é o ponto de transição de uma sentença para a outra. As derivadas parciais, no ponto de transição $(0,0)$, devem ser calculadas pela definição e, neste caso, temos

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{t\to 0}(0) = 0.$$

De forma similar, encontramos $f_y(0,0) = 0$. $\blacksquare$

Do ponto de vista prático, algumas propriedades de simetria da função f ajudam no cálculo das derivadas parciais. Vejamos dois casos:

■ **A função f é simétrica:**

Se $f(x,y) = f(y,x)$, $\forall\,(x,y)$, dizemos que f é *simétrica.* Neste caso, temos $f_y(x,y) = f_x(y,x)$ e permutando x e y na expressão de f_x obtemos a derivada f_y. Por exemplo, a função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ é simétrica e nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$ usamos a regra do quociente, e obtemos:

$$f_x(x,y) = \frac{y\left(x^2+y^2\right) - xy\,(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}. \tag{2.2}$$

A derivada f_y é obtida de (2.2) permutando x e y. Temos,

$$f_y(x,y) = f_x(y,x) = \frac{x^3 - xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

De (2.2) e do Exemplo 2.4 obtemos

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

■ **A função f é antissimétrica:**

Dizemos que f é *antissimétrica* se $f(x,y) = -f(y,x)$, $\forall\,(x,y)$. Neste caso, $f_y(x,y) = -f_x(y,x)$ e calculando uma derivada parcial temos a outra. Vamos considerar como ilustração desse caso a função $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$, definida no conjunto $D = \{(x,y) : x+y \neq 0\}$. Temos

$$f(y,x) = \frac{y^2-x^2}{y+x} = -\left(\frac{x^2-y^2}{x+y}\right) = -f(x,y)$$

e, portanto, $f(x,y)$ é antissimétrica. Pela regra do quociente, encontramos

$$f_x(x,y) = \frac{2x(x+y) - \left(x^2-y^2\right)(1)}{(x+y)^2} = \frac{x^2+y^2+2xy}{(x+y)^2}, \quad \text{para } (x,y) \in D,$$

e a derivada f_y é dada por

$$f_y(x,y) = -f_x(y,x) = -\frac{x^2+y^2+2xy}{(x+y)^2}, \quad \text{para } (x,y) \in D.$$

2.1.1 Derivadas Parciais de Ordem Superior

A seguir fixaremos a notação para as derivadas parciais de ordem superior de uma dada função $z = f(x,y)$. As derivadas de segunda ordem são:

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, também representada por: f_{xx}, f_{11}, $\partial_{xx}f$ ou $D_{xx}f$.

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, também representada por: f_{yy}, f_{22}, $\partial_{yy}f$ ou $D_{yy}f$.

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$, também representada por: f_{yx}, f_{21}, $\partial_{yx} f$ ou $D_{yx} f$.

4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, também representada por: f_{xy}, f_{12}, $\partial_{xy} f$ ou $D_{xy} f$.

A classe de funções para as quais as derivadas parciais mistas f_{xy} e f_{yx} são iguais é bem ampla, ela inclui todas as funções elementares do cálculo, mas existem casos onde essas derivadas são diferentes, como veremos no Exemplo 2.7.

As derivadas de terceira ordem são indicadas de forma semelhante. Por exemplo,

1. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$, também representada por: f_{xxx}.

2. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)$, também representada por: f_{xxy}.

3. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)$, também representada por: f_{xyx}.

e assim por diante.

Exemplo 2.5 *Calcular as derivadas f_x, f_{xy}, f_{xz} e f_{xzy}, sendo $f(x,y,z) = x^2 + xy + xz^2$.*

Solução Das regras de derivação, obtemos:

$$f_x = 2x + y + z^2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{xz} = 2z \quad \text{e} \quad f_{xzy} = 0. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.6 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^3y^3 + \cos(xy)$. Trata-se de uma função simétrica e as derivadas de primeira ordem de f são*

$$f_x(x,y) = 3x^2y^3 - y\,\mathrm{sen}(xy) \;\; e \;\; f_y(x,y) = f_x(y,x) = 3x^3y^2 - x\,\mathrm{sen}(xy).$$

Derivando mais uma vez, encontramos

$$f_{xx} = 6xy^3 - y^2\cos(xy) \;\; e \;\; f_{xy} = 9x^2y^2 - \mathrm{sen}(xy) - xy\cos(xy)$$

e também

$$f_{yx} = 9x^2y^2 - \mathrm{sen}(xy) - xy\cos(xy) \;\; e \;\; f_{yy} = 6x^3y - x^2\cos(xy).$$

Sendo $f(x,y)$ uma função elementar, a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$ já era esperada. $\blacksquare$

Exemplo 2.7 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$, e $f(0,0) = 0$. Calcular as derivadas mistas f_{xy} e f_{yx} na origem.*

Solução Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, a derivada parcial f_x é calculada pela regra do quociente e obtemos

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Na origem, usando a definição, encontramos

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Logo,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Como a função f é antissimétrica, segue que $f_y(x,y) = -f_x(y,x)$ e, sendo assim,

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

As derivadas mistas $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$ são calculadas pela definição. Temos

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(f_x)(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{-k^5}{k^5} = -1$$

e

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(f_y)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

Portanto, $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$. ■

Finalizamos esta seção com um resultado, devido a Schwarz[3], que estabelece uma condição suficiente para se ter $f_{xy}(P) = f_{yx}(P)$.

Teorema 2.8 (Teorema de Schwarz) *Se as derivadas parciais f_x, f_y e f_{xy} são contínuas em uma vizinhança do ponto $P(a,b)$, então $f_{xy}(P) = f_{yx}(P)$.*

Demonstração O fundamento básico a ser utililizado é o Teorema do Valor Médio (TVM) para funções de uma variável. Seja $g(x) = f(x, b+k) - f(x,b)$ definida em um intervalo fechado contendo a no seu interior. Segue do TVM que existe c entre a e $a+h$ tal que

$$g(a+h) - g(a) = g'(c)\,h \tag{2.3}$$

e observando que $g'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x,b)$, resulta de (2.3) que

$$g(a+h) - g(a) = [f_x(c, b+k) - f_x(c,b)]\,h. \tag{2.4}$$

Usando mais uma vez o TVM, agora para expressão do lado direito de (2.4), no intervalo de extremos b e $b+k$, segue que existe d entre b e $b+k$ tal que

$$f_x(c, b+k) - f_x(c,b) = f_{xy}(c,d)\,k$$

e, portanto, $g(a+h) - g(a) = f_{xy}(c,d)\,hk$, isto é,

$$[f(a+h, b+k) - f(a+h,b)] - [f(a, b+k) - f(a,b)] = f_{xy}(c,d)\,hk. \tag{2.5}$$

Para concluir, usaremos a continuidade de f_{xy} no ponto P, observando que $c \to a$, quando $h \to 0$ e $d \to b$, quando $k \to 0$. Dividindo (2.5) por k e tomando o limite com $k \to 0$, obtemos

$$f_y(a+h,b) - f_y(a,b) = f_{xy}(c,b)\,h. \tag{2.6}$$

Agora, dividimos (2.6) por h, tomamos o limite com $h \to 0$ e obtemos

$$f_{yx}(a,b) = f_{xy}(a,b). \quad ■$$

[3] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921), matemático alemão.

Exemplo 2.9 *Vejamos o que ocorre com o polinômio* $f(x,y) = 3x^2 - xy^3 + y^4$, *que é uma função elementar do cálculo. Derivando a função* f *parcialmente, encontramos as funções contínuas (polinomiais)*

$$f_x = 6x - y^3, \quad f_y = -3xy^2 + 4y^3 \quad e \quad f_{xy} = -3y^2$$

e do Teorema de Schwarz segue que $f_{xy} = f_{yx}$.

2.1.2 Exemplos Clássicos I

Nesta seção dicutiremos os primeiros exemplos clássicos, alguns dos quais já apresentados nas seções anteriores.

■ Função descontínua e parcialmente derivável

No cálculo de uma variável aprendemos que se uma função $y = f(x)$ é derivável no ponto c ela é necessariamente contínua em c. Em outras palavras, uma função descontínua em um ponto não pode ter derivada, ou não é derivável, nesse ponto.

No nosso contexto, a existência das derivadas parciais não assegura a continuidade da função. Esse é o caso da função do Exemplo 2.4, que tem derivadas parciais de primeira ordem nulas em $(0,0)$ e, contudo, não é contínua na origem.

■ Função com derivadas parciais contínuas e derivadas mistas distintas

Ao contrário do que ocorre com as funções elementares do cálculo, a função do Exemplo 2.7 tem derivadas mistas $f_{xy}(0,0)$ e $f_{yx}(0,0)$ diferentes. A comprovação da continuidade das derivadas f_x e f_y deixamos no Exercício 4, como parte do processo de treinamento.

■ Função com derivadas parciais descontínuas e derivadas mistas iguais

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

As derivadas parciais f_x e f_y são calculadas da maneira como fizemos no Exemplo 2.7. Fora da origem, usamos regras de derivação e na origem a definição de derivada parcial. Notamos que essa função é simétrica e é bastante calcular uma das derivadas parciais. Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, temos:

$$f_x(x,y) = 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

e na origem usamos a definição para encontrar:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}\operatorname{sen}(1/|h|) = \lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}(1/|h|) = 0.$$

Logo,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e usando a simetria, obtemos

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 2y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A sequência de pontos $P_n\left(1/n\pi, 0\right)$ se aproxima da origem, à medida que $n \to \infty$, e nesses pontos temos $f_x\left(P_n\right) = -\cos\left(n\pi\right) = (-1)^{n+1}$ que não se aproxima de 0, como deveria, se f_x fosse contínua. Da mesma forma, a derivada f_y também não é contínua em $(0,0)$. Um cálculo análogo ao que fizemos no Exemplo 2.7 nos dá $f_{xy}\left(0,0\right) = 0$ e $f_{yx}\left(0,0\right) = 0$. ■

Exercícios & Complementos.

1. Em cada caso, calcule as derivadas parciais z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} e z_{yx}:

   (a) $z = 3x^2 + y^3$ (c) $z = xy \exp\left(x^2+y^2\right)$ (e) $z = \sqrt{x^2+y^2+1}$

   (b) $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ (d) $z = \operatorname{sen}\left(xy\right) + \log\left(x^2 y\right)$ (f) $z = \arccos\left(xy\right)$.

2. Em cada caso, calcule a derivada parcial indicada da função $z = f\left(x,y\right)$.

   (a) $z = x \operatorname{arcsen}\left(x-y\right)$; $f_x\left(1, \frac{1}{2}\right)$ (c) $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $f_{xy}\left(1,0\right)$ e $f_{yx}\left(1,0\right)$

   (b) $z = \exp\left(xy\right)\sec\left(x/y\right)$; $f_y\left(0,1\right)$ (d) $z = xy\log\left(x/y\right)$; $f_y\left(1,1\right)$.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Determine, caso existam, as derivadas parciais $f_x\left(0,0\right)$, $f_y\left(0,0\right)$, $f_{xy}\left(0,0\right)$ e $f_{yx}\left(0,0\right)$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada no Exemplo 2.7 e verifique a continuidade das derivadas parciais f_x e f_y na origem.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f\left(x,y\right) = x^2 + y^3$. Calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y^2, y) \text{ e } \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x^2+y^2, y)\right].$$

6. Mostre que a função $z = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ satisfaz à equação diferencial $xz_x + yz_y = z$.

7. Verifique que a função

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right),$$

   com $t > 0$ e k uma constante não nula, satisfaz a *equação de transmissão de calor*

$$u_t - ku_{xx} = 0.$$

8. O *operador de Laplace*[4] Δ em $\mathbb{R}^2$ é definido por

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}.$$

Mostre que as funções

$$u(x,y) = \arctan(y/x) \quad \text{e} \quad u(x,y) = e^x \cos y$$

satisfazem a equação de Laplace $\Delta u = 0$.

9. Determine condições sobre as constantes A, B, C, D, E e F para que a função

$$u(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

satisfaça à equação de Laplace.

10. Se $u(x,y)$ e $v(x,y)$ tem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem e satisfazem às *equações de Cauchy-Riemann*[5] $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, mostre que u e v satisfazem à equação de Laplace.

2.2 Campos Diferenciáveis

Na introdução deste capítulo vimos que, se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real de uma variável real derivável em um ponto c, interior ao intervalo I, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ tem equação cartesiana $y = f(c) + m(x-c)$, onde a declividade m é dada por

$$m = f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \tag{2.7}$$

Se fizermos $h = x - c$, segue de (2.7) que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{x-c} = 0, \quad x \in I,$$

e considerando $\varphi(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$, obtemos

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x) - \varphi(x)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{x-c} = 0, \quad x \in I. \tag{2.8}$$

De (2.8) deduzimos o seguinte fato geométrico de fundamental importância no cálculo: se a função $y = f(x)$ é derivável no ponto c, seu gráfico pode ser aproximado, em uma vizinhança de c, pela reta tangente, de maneira que o erro cometido na aproximação torna-se arbitrariamente pequeno. Nos referimos a essa aproximação linear do gráfico como a *suavidade* ou a *diferenciabilidade* da função f.

Observação 2.10 *Se f é derivável no ponto c, o erro $E(h)$ da aproximação linear de f é definido por*

$$E(h) = f(c+h) - f(c) - f'(c)h$$

e de (2.8) deduzimos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c) - f'(c)h}{h} = 0. \tag{2.9}$$

[4] Pierre Simon de Laplace (1749-1827), matemático francês.

[5] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês e Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão.

Essa relação nos proporciona uma nova versão para o conceito de função derivável. Sendo c um ponto interior ao intervalo I, existe $\delta > 0$ tal que o intervalo I_δ, de centro c e raio δ, está contido no intervalo I e f é derivável no ponto c se existirem uma função $E(h)$ definida em I_δ e uma constante m, tais que

$$f(c+h) = f(c) + mh + E(h), \quad com \quad \lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{h} = 0.$$

É claro que ocorrendo (2.9), teremos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

e se identificarmos o número $m = f'(c)$ com a aplicação linear $T_m : h \mapsto mh$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então f é derivável (ou diferenciável) em c se

$$f(c+h) = f(c) + T_m \cdot h + E(h), \quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} \frac{E(h)}{h} = 0.$$

Para generalizar o conceito de diferenciabilidade para funções reais de duas ou mais variáveis reais, devemos ter em mente que o quociente de Newton

$$\frac{f(P+\mathbf{H}) - f(P)}{\mathbf{H}}$$

agora não faz sentido, tendo em vista que $\mathbf{H}$ é um vetor, ou seja, um ponto em $\mathbb{R}^n$. Para contornar essa dificuldade, seguiremos a Observação 2.10 que sugere um modo de definir a diferenciabilidade sem envolver a divisão por $\mathbf{H}$.

Consideremos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e fixemos um ponto $P(a,b)$ no interior de D. Suponhamos que exista um plano T_Q de equação cartesiana

$$z = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b),$$

passando no ponto $Q(a,b,f(a,b))$ e que aproxima f no seguinte sentido:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{f(x,y) - z}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0,$$

ou, de forma equivalente,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - A(x-a) - B(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0. \tag{2.10}$$

A equação (2.10) diz que a porção do gráfico de f, em uma vizinhança do ponto Q, é aproximada pela porção correspondente do *plano tangente* T_Q. Essa é a maneira intuitiva de dizer que a função $f(x,y)$ é *diferenciável* no ponto $P(a,b)$. A Figura 2.3 retrata a situação geométrica:

Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 2.11 *Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $P(a,b)$, interior ao conjunto D, quando existirem constantes A e B tais que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - A(x-a) - B(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

Se D é um domínio e f é diferenciável em cada ponto de D, dizemos que f é diferenciável em D.

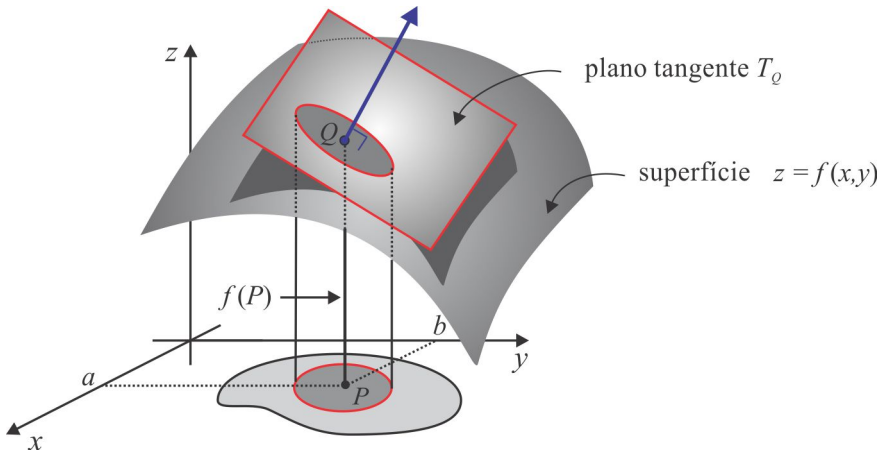


Figura 2.3: Visão geométrica do plano tangente.

Se fizermos $x - a = h$ e $y - b = k$, então f é diferenciável em $P(a,b)$ se, e somente se, existirem constantes A e B tais que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - Ah - Bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{2.11}$$

A expressão $f(a+h,b+k) - f(a,b) - Ah - Bk$ que figura em (2.11) é o *erro real* ou o *resto* da aproximação linear de f e será representada por $E(h,k)$. Assim, f é diferenciável em $P(a,b)$ quando existirem constantes A e B tais que

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + E(h,k), \qquad \text{com} \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0. \tag{2.12}$$

As funções elementares do cálculo são diferenciáveis em seus respectivos domínios e são elas que aparecem nas aplicações práticas. Ao substituir o valor $f(a+h,b+k) - f(a,b)$ pela boa aproximação linear $Ah + Bk$, o erro cometido $E(h,k)$, comparado com $\sqrt{h^2+k^2}$, é próximo de zero.

Exemplo 2.12 *Verificar que a função $f(x,y) = 2x^2 + y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, é diferenciável em $P(3,2)$.*

Solução Seguindo (2.12) com $a = 3$ e $b = 2$, resulta

$$\begin{aligned} f(3+h,2+k) &= 2(3+h)^2 + (2+k)^3 = 2\left(9+6h+h^2\right) + \left(8+6k^2+12k+k^3\right) = \\ &= 26 + 12h + 12k + \left(2h^2+6k^2+k^3\right) = f(3,2) + 12h + 12k + E(h,k), \end{aligned}$$

onde $E(h,k) = 2h^2 + 6k^2 + k^3$ e $\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) \big/ \sqrt{h^2+k^2} = 0$ e, com isso, concluímos que f é diferenciável em $(3,2)$. As constantes A e B que figuram em (2.12) são iguais a 12. ■

Teorema 2.13 *Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $P(a,b)$ do interior de D, então f é contínua no ponto P.*

Demonstração Para provar que f é contínua em $P(a,b)$ é suficiente provar que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) = f(a,b).$$

Sendo f diferenciável no ponto P, segue de (2.12) que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \{f(a,b) + Ah + Bk + E(h,k)\} \tag{2.13}$$

e tendo em vista que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} E(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\sqrt{h^2+k^2} = 0$$

aplicamos a propriedade da soma de limites em (2.13) e chegamos ao resultado

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) = f(a,b). \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.14 *Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $P(a,b)$ do interior de D, então as derivadas parciais f_x e f_y existem no ponto $P(a,b)$. Além disso, as constantes A e B que figuram em (2.12) são, respectivamente, $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ e o plano T_Q, tangente ao gráfico de f no ponto $Q(a,b,f(a,b))$, tem equação cartesiana*

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Demonstração Suponhamos f diferenciável no ponto P e sejam A e B números reais que satisfazem (2.11). Se considerarmos $k = 0$ em (2.11), obteremos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b) - Ah}{h} = 0 \tag{2.14}$$

e de (2.14) resulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A.$$

Portanto, $f_x(a,b)$ existe e $f_x(a,b) = A$. Considerando $h = 0$ em (2.11) e fazendo $k \to 0$, deduzimos que $f_y(a,b) = B$. $\blacksquare$

Observação 2.15 *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $P(a,b)$ um ponto fixado no interior do conjunto D.*

1. *Segue do Teorema 2.13 que se f não é contínua no ponto P, então f não é diferenciável no ponto P.*

2. *Do Teorema 2.14 resulta que se uma das derivadas parciais de f não existir no ponto P, então f não é diferenciável no ponto P.*

3. *Para provar que f é diferenciável no ponto P, é suficiente provar que as derivadas parciais f_x e f_y da função f existem no ponto P e que*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

4. *Se f é diferenciável em P, o plano T_Q, tangente ao gráfico de f no ponto $Q(a,b,f(a,b))$, é governado pela equação cartesiana*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

onde $A = f_x(a,b)$, $B = f_y(a,b)$, $C = -1$ e $D = f(a,b) - af_x(a,b) - bf_y(a,b)$.

Exemplo 2.16 *Determinar o plano tangente à esfera $x^2+y^2+z^2=4$ no ponto $Q(1,1,\sqrt{2})$.*

Solução Consideramos o hemisfério $z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ que contém o ponto Q e calculamos as derivadas $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$. Temos:

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \quad \text{e} \quad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

de modo que $f_x(1,1)=-1/\sqrt{2}$ e $f_y(1,1)=-1/\sqrt{2}$ e o plano tangente tem equação

$$z=\sqrt{2}-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(x-1)-\tfrac{1}{\sqrt{2}}(y-1) \quad \text{ou} \quad x+y+\sqrt{2}z-4=0. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.17 *Mostrar que a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y)=x^2+y^2$, é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$.*

Solução Temos $f_x(x,y)=2x$ e $f_y(x,y)=2y$ e, no ponto $P(a,b)$ do $\mathbb{R}^2$, obtemos $f_x(a,b)=2a$ e $f_y(a,b)=2b$. O erro $E(h,k)$ da aproximação linear é

$$E(h,k)=f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)\,h-f_y(a,b)\,k=h^2+k^2$$

e, portanto,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\sqrt{h^2+k^2}=0,$$

provando que f é diferenciável em todo ponto do $\mathbb{R}^2$. $\blacksquare$

Exemplo 2.18 *Vimos no Exemplo 1.34 do Capítulo 1 que a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & se\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

não é contínua na origem, embora as derivadas parciais $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existam e são ambas nulas. Não sendo contínua em $(0,0)$, a função f não é aí diferenciável. Fora da origem, isto é, no domínio $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ a função f é o quociente de dois polinômios (uma função elementar) com denominador diferente de zero sendo, portanto, diferenciável. $\blacksquare$

Exemplo 2.19 *A função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & se\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$, porque não é contínua nesse ponto. Aliás, a função f sequer tem limite na origem, já que ao longo das parábolas $y=mx^2$, com $x\neq 0$, temos

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^4}{x^4(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}.$$

e o valor do limite depende do coeficiente m. Assim, f não é contínua no ponto $(0,0)$ e muito menos diferenciável aí. No domínio $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ a função f é diferenciável, por ser uma função elementar. $\blacksquare$

Exemplo 2.20 *Verificar se a função* $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *é diferenciável em* $(0,0)$.

Solução Primeiro calculamos as derivadas parciais de f em $(0,0)$. Temos

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \text{ e } f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Em seguida analisamos o limite do quociente $E(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}$, com $(h,k) \to (0,0)$. Temos

$$E(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)\,h - f_y(0,0)\,k = \sqrt[3]{hk}$$

e ao longo da parábola $k = h^2$, encontramos

$$\lim_{\substack{h\to 0^+\\ k=h^2}} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{h\to 0^+\\ k=h^2}} \frac{\sqrt[3]{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{\sqrt{h^2+h^4}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} = 1. \tag{2.15}$$

Segue de (2.15) que a razão $E(h,k)/\sqrt{h^2+k^2}$ não tem limite zero, quando $(h,k) \to (0,0)$ e, portanto, a função f não é diferenciável na origem, embora aí seja contínua e tenha derivadas parciais. ■

Encerramos esta seção com um critério de diferenciabilidade, conhecido como *Lema Fundamental*. É com base nesse critério que afirmamos que as funções elementares do cálculo são diferenciáveis em seus respectivos domínios. Ao fazer tal afirmação tínhamos em mente o seguinte fato: as derivadas parciais f_x e f_y de uma função elementar $f(x,y)$ são contínuas no domínio D de f. Aliás, as derivadas parciais de uma função elementar são ainda funções elementares.

Teorema 2.21 (Lema Fundamental) *Suponhamos que as derivadas parciais* f_x *e* f_y *de uma função* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *existam em uma vizinhança de um ponto* $P(a,b)$ *e sejam contínuas em* P. *Então* f *é diferenciável no ponto* P.

Demonstração Consideremos uma δ-vizinhança $V_\delta(P)$, onde f é parcialmente derivável e apliquemos o TVM. Se $0 < h^2 + k^2 < \delta$, então

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) - f(a,b) &= [f(a+h,b+k) - f(a+h,b)] + [f(a+h,b) - f(a,b)] \\ &= hf_x(c,b) + kf_y(a+h,d). \end{aligned}$$

onde c está entre a e $a+h$ e d está entre b e $b+k$. Logo

$$\begin{aligned} E(h,k) &= f(a+h,b+k) - f(a,b) - hf_x(a,b) - kf_y(a,b) \\ &= hf_x(c,b) + kf_y(a+h,d) - hf_x(a,b) - kf_y(a,b) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$|E(h,k)| \le |h|\,|f_x(c,b) - f_x(a,b)| + |k|\,|f_y(a+h,d) - f_y(a,b)|. \tag{2.16}$$

Se dividirmos (2.16) por $\sqrt{h^2+k^2}$ e observarmos que

$$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le 1,$$

encontraremos

$$\left|\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le |f_x(c,b) - f_x(a,b)| + |f_y(a+h,d) - f_y(a,b)|. \tag{2.17}$$

Da continuidade das derivadas f_x e f_y no ponto $P(a,b)$, segue que $f_x(c,b)$ e $f_y(a+h,d)$ tendem para $f_x(a,b)$, com $(h,k) \to (0,0)$, e podemos tomar o limite em (2.17) para obtermos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = 0.$$

Com isso concluímos a demonstração. ■

Exemplo 2.22 *Investigar, via Lema Fundamental, a diferenciabilidade da função f definida em $\mathbb{R}^2$ por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solução Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, as derivadas parciais

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

são contínuas (funções racionais com denominador não nulo) e, portanto, f é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$. Na origem, temos $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$ e, para mostrar que f_x e f_y são contínuas em $(0,0)$, basta observar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{2r^5 \cos\theta \operatorname{sen}^4\theta}{r^4} = 0, \qquad \text{independente do } \theta,$$

e isso mostra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$, isto é, f_x é contínua em $(0,0)$. De modo similar mostramos a continuidade de f_y em $(0,0)$. Pelo Lema Fundamental concluímos que f é diferenciável, também, em $(0,0)$. Portanto, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. ■

2.2.1 A Diferencial

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $P(a,b)$ interior ao conjunto D. Representamos por Δf o *incremento* da função f entre P e $P+H$, isto é,

$$\Delta f = f(P+H) - f(P) = f(a+h, b+k) - f(a,b).$$

É comum representar os *infinitésimos* (quantidades próximas de zero) h e k por dx e dy, respectivamente, e com esta notação segue da definição de diferenciabilidade que

$$\Delta f = f_x(P)\,dx + f_y(P)\,dy + E(dx,dy),$$

onde o quociente $E(dx,dy) \big/ \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ tende para zero, quando $(dx,dy) \to (0,0)$. A expressão $f_x(P)\,dx + f_y(P)\,dy$ recebe o nome de *diferencial* da função f no ponto P e é indicada por $df(P)$. Assim,

$$\Delta f = f_x(P)\,dx + f_y(P)\,dy + E(dx,dy) = df(P) + E(dx,dy),$$

onde vemos que a diferencial $df(P)$ é uma *boa aproximação* de Δf e podemos escrever

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + df(P). \tag{2.18}$$

Essa aproximação será tão melhor quanto menor forem $|h|$ e $|k|$, isto é, $|dx|$ e $|dy|$.

Exemplo 2.23 *Calcular, via diferencial, o valor aproximado de* $\tan[2.01\log(0.99)]$.

Solução Consideramos a função $f(x,y) = \tan(x \log y)$, que é diferenciável em uma vizinhança de $P(2,1)$, e usamos (2.18) com $a+h = 2.01$ e $b+k = 0.99$. Conseguimos isto fazendo $a = 2$, $h = 0.01$, $b = 1$ e $k = -0.01$, de modo que

$$f(2.01, 0.99) \approx f(2,1) + df(2,1).$$

Temos que $f(2,1) = 0$ e por derivação direta encontramos

$$f_x(x,y) = \sec^2(x \log y) \log y \ \text{ e } \ f_y(x,y) = \sec^2(x \log y)(x/y),$$

de onde segue que $f_x(2,1) = 0$ e $f_y(2,1) = 2$. Portanto,

$$df = f_x(2,1)dx + f_y(2,1)dy = 2 \cdot (-0.01) = -0.02$$

e teremos $\tan[2.01 \log(0.99)] \approx -0.02 = -2 \times 10^{-2}$. ■

Exemplo 2.24 *Um tanque cilíndrico metálico tem altura $h = 1.2m$ e raio $R = 80cm$ em suas dimensões internas. Se a espessura das paredes é de 5mm, calcular, via diferencial, a quantidade de metal usada na fabricação do tanque.*

Solução Representemos por V o volume do cilindro de raio R e altura h. Então, $V(R,h) = \pi R^2 h$ e a diferencial dV é uma aproximação de ΔV, quantidade de metal usada na fabricação. Usando centímetro como unidade padrão, temos:

$$dV = 2\pi R h dr + \pi R^2 dh, \qquad R = 80, \quad h = 120, \quad dR = 0.5 \quad \text{e} \quad dh = 2 \times 0.5.$$

Portanto, a quantidade aproximada de metal é

$$dV = 2 \times 3.14 \times 80 \times 120 \times 0.5 + 3.14 \times (80)^2 \times 2 \times 0.5 = 50.264,7cm^3. \qquad ■$$

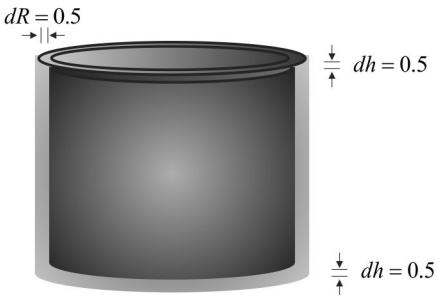


Figura 2.4: Ilustração para o Exemplo 2.24.

Exemplo 2.25 *Dois lados de uma área triangular medem $x = 200m$ e $y = 220m$, com possíveis erros de $10cm$. O ângulo α entre os lados x e y é de 60°, com possível erro de 1°. Calcular o erro aproximado da área triangular.*

Solução Inicialmente vamos padronizar as unidades que serão usadas: metro será usado como unidade de comprimento e radiano como medida do ângulo. A altura relativa à base y é $h = x \operatorname{sen} \alpha$ e a

área triangular é a função de três variáveis $A(x, y, \alpha) = \frac{1}{2}xy \operatorname{sen} \alpha$. A diferencial dA é uma aproximação da diferença (erro) entre as áreas $A(x + dx, y + dy, \alpha + d\alpha)$ e $A(x, y, \alpha)$. Temos

$$dA = (\tfrac{1}{2}y \operatorname{sen} \alpha)dx + (\tfrac{1}{2}x \operatorname{sen} \alpha)dy + (\tfrac{1}{2}xy \cos \alpha)d\alpha,$$

e os valores a serem utilizados são: $x = 200$, $y = 220$, $\alpha = \pi/3$, $dx = dy = 0.1$ e $d\alpha = \pi/180$. Usando $\sqrt{3} = 1.73$ e $\pi = 3.14$, obtemos

$$dA = \tfrac{1}{2} \times 220 \times \tfrac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \tfrac{1}{2} \times 200 \times \tfrac{\sqrt{3}}{2} \times 0.1 + \tfrac{1}{2} \times 220 \times 200 \times 0.5 \times \tfrac{\pi}{180} = 210.05m^2.$$

Se não houvesse erro nas medidas, o valor da área seria $38060m^2$, de modo que o erro cometido na aproximação da área representa menos de 6% do seu valor. ■

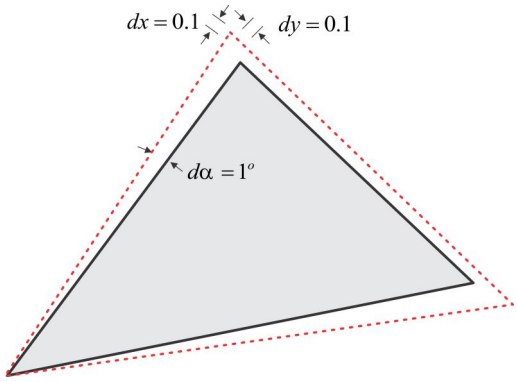


Figura 2.5: Ilustração geométrica para o Exemplo 2.25.

As variações da função f são de três naturezas: absoluta, relativa e percentual. No quadro abaixo especificamos essas variações.

	Real	Estimada	Erro
Variação absoluta	Δf	df	$\Delta f - df$
Variação relativa	$\Delta z / f(P)$	$df / f(P)$	$(\Delta f - df) / f(P)$
Variação percentual	$[\Delta f / f(P)] \times 100$	$[df / f(P)] \times 100$	$[(\Delta f - df) / f(P)] \times 100$

2.2.2 A Derivada como Aplicação Linear

Quando uma função $z = f(x, y)$ é diferenciável no ponto $P(a, b)$, sabemos determinar as derivadas parciais e o plano tangente que aproxima o gráfico de f. E a derivada da função f? O que é e como encontrá-la? Na expressão

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + E(h, k)$$

que define a diferenciabilidade de f em $P(a, b)$ destacamos a função linear $f'(P) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f'(P) \cdot (h, k) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

que aproxima f em uma vizinhança do ponto P. Essa aplicação linear $f'(P)$ é, por definição, a derivada de f no ponto P. Assim,

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f'(P) \cdot (h, k) + E(h, k)$$

onde a razão $E(h,k)\big/\sqrt{x^2+y^2}$ tem limite zero, quando $(h,k)\to(0,0)$. Na notação matricial, a derivada $f'(P)$ é a matriz 1×2

$$f'(P)=\begin{bmatrix} f_x(P) & f_y(P)\end{bmatrix},$$

denominada *matriz Jacobiana*. Temos, portanto:

$$f'(P)\cdot(x,y)=\begin{bmatrix} f_x(P) & f_y(P)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}=f_x(P)\,x+f_y(P)\,y.$$

Exemplo 2.26 *Como primeira ilustração, vamos determinar a derivada no ponto $P(1,2)$ da função diferenciável $f(x,y)=x^2+xy$. As derivadas parciais de f são $f_x=2x+y$ e $f_y=x$, de modo que $f_x(1,2)=4$ e $f_y(1,2)=1$. A derivada $f'(P)$ é a aplicação linear que associa a cada par (x,y) do $\mathbb{R}^2$ o escalar $4x+y$, isto é,*

$$f'(P)\cdot(x,y)=4x+y.$$

Exemplo 2.27 *Consideremos a função de três variáveis $f(x,y,z)=x^2+xyz+yz^2$ e determinemos sua derivada no ponto $P(1,0,1)$. Em se tratando de uma função escalar de três variáveis, a derivada é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$. Um cálculo direto nos dá $f_x=2x+yz$, $f_y=xz+z^2$ e $f_z=xy+2yz$ e a derivada $f'(P)$ é a aplicação linear*

$$f'(P)\cdot(x,y,z)=f_x(P)\,x+f_y(P)\,y+f_z(P)\,z=x+2y.$$

A matriz Jacobiana de f em P é

$$Jf(P)=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0\end{bmatrix}_{1\times 3}. \qquad \blacksquare$$

2.2.3 Exemplos Clássicos II

■ Função contínua não diferenciável

A função $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, é contínua em $(0,0)$ e as derivadas parciais f_x e f_y são ambas nulas em $(0,0)$, como é fácil de comprovar pela definição:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0.$$

O erro é $E(h,k)=\sqrt{|hk|}$ e ao longo do caminho $k=h$, temos

$$\lim_{\substack{h\to 0^+\\ k=h}}\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{\substack{h\to 0^+\\ k=h}}\frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{\sqrt{2}\,|h|}=1/\sqrt{2}$$

e, portanto, $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\dfrac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, caso exista, não é zero. Assim, f não é diferenciável em $(0,0)$.

■ Função diferenciável com uma derivada parcial descontínua

Para esta situação consideramos a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\sqrt{|x|}\,\operatorname{sen} y$. Temos:

1. f é diferenciável em $(0,0)$, porque $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ e o erro é $E(h,k)=\sqrt{|h|}\,\operatorname{sen} k$, de modo que,

$$\left|\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\frac{\left|\sqrt{h}\right|\,|\operatorname{sen} k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\le\frac{|\operatorname{sen} k|}{\sqrt{k^2}}=\left|\sqrt{h}\right|\left|\frac{\operatorname{sen} k}{k}\right|, \tag{2.19}$$

e como $\lim\limits_{h,k\to 0} \dfrac{h \operatorname{sen} k}{k} = 0$, segue de (2.19) e da propriedade do confronto que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

2. f_x não tem limite em $(0,0)$. De fato, nos pontos (x,y), $x>0$, a derivada parcial f_x é dada por $f_x(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} y}{2\sqrt{x}}$ e teremos:

$$\text{ao longo do eixo } x\text{, isto é, } y=0: \qquad \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} f_x(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} 0}{2\sqrt{x}} = 0.$$

$$\text{ao longo da parábola } y=\sqrt{x}: \qquad \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=\sqrt{x}}} f_x(x,y) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 1/2.$$

Portanto, $(0,0)$ é uma descontinuidade essencial de f_x. Observamos que $f_y(x,y) = \sqrt{|x|}\cos y$ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

■ Função diferenciável com derivadas parciais descontínuas

Consideremos para este caso a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(1/\sqrt{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Temos que:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}(1/\sqrt{h^2})}{h} = \lim_{h\to 0} h\operatorname{sen}(1/\sqrt{h^2}) = 0 = f_y(0,0).$$

(i) f é diferenciável em $(0,0)$. De fato, o erro é $E(h,k) = \left(h^2+k^2\right)\operatorname{sen}(1/\sqrt{h^2+k^2})$ e , portanto:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\operatorname{sen}(1/\sqrt{h^2+k^2}) = 0.$$

(ii) Nos Exemplos Clássicos I da seção 2.1 mostramos que as derivadas parciais f_x e f_y são descontínuas em $(0,0)$.

■ Função contínua parcialmente derivável e não diferenciável

No Exemplo 2.20 mostramos que a função $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ tem essas características.

Exercícios & Complementos.

---

1. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a função definida por: $f(0,0)=0$ e $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$, se $(x,y)\neq(0,0)$.

   (a) Mostre que f é contínua na origem $(0,0)$.

   (b) Mostre que as derivadas f_x e f_y existem em todo $\mathbb{R}^2$, mas não são contínuas em $(0,0)$.

   (c) Mostre que f não é diferenciável na origem $(0,0)$. Isso contradiz o Lema Fundamental?

2. Mostre que a função
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
não é diferenciável em $P(0,0)$.

3. Falso ou verdadeiro? Justifique

   (a) Toda função diferenciável é contínua.

   (b) Se f é diferenciável em P, então as derivadas parciais f_x e f_y existem em P.

   (c) Toda função contínua é diferenciável.

   (d) Se $z = f(x,y)$ tem derivadas parciais f_x e f_y no ponto P, então f é contínua em P.

   (e) Se uma função $z = f(x,y)$ tem derivadas parciais f_x e f_y contínuas, então f é diferenciável.

   (f) Toda função diferenciável possui derivadas parcias de primeira ordem contínuas.

   (g) Se as derivadas parciais f_x e f_y existem em P, então f é diferenciável em P.

4. Use o Lema Fundamental e mostre que a função $z = f(x,y)$ é diferenciável no domínio indicado.

   (a) $z = x^2y^4$; $D = \mathbb{R}^2$

   (b) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; $D = \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$

   (c) $z = \log\left(x^2+y^2\right)$; $D = \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$.

   (d) $z = \dfrac{\exp(xy)}{x-y}$; $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\right\}$.

5. Estude a diferenciabilidade da função $z = f(x,y)$ no ponto P indicado:

   (a) $z = x\exp(-y)$; $P(1,0)$

   (b) $z = \left|xy^2\right|$; $P(0,1)$

   (c) $z = \sqrt{|y|}\cos x$; $P(0,0)$

   (d) $z = \sqrt{|xy|}$; $P(0,0)$

   (e) $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $P(0,0)$

   (f) $z = \sqrt{|x|(1+y^2)}$; $P(x,y)$

6. Estude a diferenciabilidade da função $z = f(x,y)$, definida por: $f(x,y) = 1/xy$, se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, e $f(0,0) = 0$, no conjunto $X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\right\} \cup \{(0,0)\}$.

7. Calcule a diferencial das funções seguintes:

   (a) $f(x,y) = 5x^3 + 4x^2y - 2y^3$

   (b) $f(x,y,z) = e^x yz$

   (c) $f(x,y) = x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)$

   (d) $f(x,y) = \arctan(y/x)$.

8. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$
não é diferenciável em $(0,0,0)$, mas as derivadas parciais f_x, f_y e f_z existem na origem.

2.3 Regra da Cadeia

No início deste capítulo apresentamos a regra da cadeia no cálculo de uma variável como uma regra básica de derivação. Recordemos que se $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções reais

de uma variável real, onde $f(I) \subseteq J$, tais que $y = g(u)$ e $u = f(x)$, então a função composta é dada por

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in I.$$

e, caso f e g sejam deriváveis, então

$$\frac{d}{dx}\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right) = g'\left(f\left(x\right)\right) \cdot f'\left(x\right) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Nesta seção apresentaremos algumas versões da Regra da Cadeia envolvendo as derivadas parciais e, por simplicidade, dividiremos a explanação em três casos.

■ **1º caso: $z = f(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$**

Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em $P(a, b)$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva contida no gráfico de f e passando em P, isto é, $\gamma(t) = P$, para algum t no intervalo I. A função $\gamma(t)$ é derivável em t se, e somente se, as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são deriváveis em t e, neste caso, $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. Se usarmos Δx no lugar de h e Δy no lugar de k, obteremos da diferenciabilidade de f em P que

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = f_x(P)\,\Delta x + f_y(P)\,\Delta y + E(\Delta x, \Delta y)$$

e, portanto,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = f_x(P)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(P)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\Delta t}. \tag{2.20}$$

Observando que $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ e $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ tendem para zero, com $\Delta t \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t}\frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right) \\
&= \pm \lim_{\Delta t \to 0}\sqrt{\frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta t)^2}} \times \lim_{\Delta t \to 0}\frac{E(\Delta x, \Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \\
&= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \times 0 = 0
\end{aligned}$$

e fazendo em (2.20) $\Delta t \to 0$ chegamos a

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{\partial z}{\partial x}(P)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}(P)\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{ou} \quad z' = x' f_x + y' f_y. \tag{2.21}$$

Deixando um pouco de lado o rigor matemático, vemos que a fórmula (2.21) é obtida "dividindo" a diferencial $df = f_x dx + f_y dy$ por dt.

Na notação matricial a Regra da Cadeia (2.21) se escreve sob a forma

$$\left[\frac{dz}{dt}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}. \qquad \text{(produto matricial)}$$

Ainda com respeito à notação, a Regra da Cadeia pode se expressar como um produto escalar. Para isso, consideremos o vetor

$$\nabla f(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(P)\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(P)\,\mathbf{j}, \qquad \text{(também anotado grad } f(P)\text{)}$$

denominado *vetor gradiente* de f em P, e o vetor velocidade

$$\gamma'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j}$$

da curva $\gamma(t)$. Com esses ingredientes, a Regra da Cadeia assume a forma

$$\frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right] = \nabla f(P) \bullet \gamma'(t). \qquad \text{(produto escalar)} \tag{2.22}$$

Como consequência da fórmula (2.22), deduzimos que o vetor gradiente $\nabla f(P)$ é perpendicular à curva de nível de f que passa pelo ponto P. De fato, para uma tal curva de nível $\gamma(t)$ temos:

$$f[\gamma(t)] = k \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right] = 0 \Rightarrow \nabla f(P) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

Exemplo 2.28 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - y^2$ e, para $t \neq -1$, sejam $x = 1/(1+t)$ e $y = t/(1+t)$. Temos*

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y, \quad x'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \quad e \quad y'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$$

e pela Regra da Cadeia (2.21) obtemos

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{2}{1+t}\right)\left(\frac{-1}{(1+t)^2}\right) + \left(\frac{-2t}{1+t}\right)\left(\frac{1}{(1+t)^2}\right) = \frac{-2}{(t+1)^2}. \qquad \blacksquare$$

■ **2º caso:** $\boldsymbol{z = f(u,v),\ u = u(x,y)}$ **e** $\boldsymbol{v = v(x,y)}$

Suponhamos que as funções envolvidas f, u e v sejam diferenciáveis em seus domínios. As variáveis independentes são x e y e a variável z depende indiretamente de x e y, por meio das variáveis intermediárias u e v. Temos as seguintes regras de derivação:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.23}$$

A forma matricial da Regra da Cadeia é, neste caso,

$$\begin{bmatrix} z_x & z_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_u & z_v \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}. \qquad \text{(produto matricial)}$$

Exemplo 2.29 *Determinar z_x e z_y, sabendo que $z = f(u,v) = u^2 + v^3$, $u = 3x - y$ e $v = x + 2y$.*

Solução Temos $z_u = 2u$, $z_v = 3v^2$, $u_x = 3$, $u_y = -1$, $v_x = 1$ e $v_y = 2$ e usando (2.23) obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6u + 3v^2 = 3x^2 + 12xy + 18x + 12y^2 - 6y \qquad \text{e}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2u + 6v^2 = 6x^2 + 24xy + 24y^2 - 6x + 2y. \qquad \blacksquare$$

■ **3º caso:** $\boldsymbol{z = \varphi(t),\ t = t(x,y)}$

Observamos que z indiretamente depende das variáveis x e y e há duas derivadas parciais a calcular: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(t)\frac{\partial t}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(t)\frac{\partial t}{\partial y}. \tag{2.24}$$

Exemplo 2.30 *Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ o vetor posição do ponto $P(x, y)$. Se $f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$, o gradiente de f no ponto P é paralelo ao vetor $\mathbf{r}$. De fato, o gradiente de f em P é o vetor $\nabla f(P) = f_x(P)\,\mathbf{i} + f_y(P)\,\mathbf{j}$ e as derivadas parciais de f são calculadas pela Regra da Cadeia (2.24). Temos que $f(x, y) = \varphi(t)$, onde $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ e, portanto*

$$f_x = \varphi'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{x\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad e \quad f_y = \varphi'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{y\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Assim,

$$\nabla f(P) = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = \frac{\varphi'(t)}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.31 *Se no Exemplo 2.30 tivéssemos $f(x, y, z) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, sendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, então de modo similar encontraríamos*

$$f_x = \frac{x\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad f_y = \frac{y\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad e \quad f_z = \frac{z\varphi'(t)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

onde $t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. $\blacksquare$

Um dispositivo prático para memorizar a *Regra da Cadeia* ou *Regra da Derivação em Cadeia*, nas versões apresentadas, é dado pelo diagrama em árvore da Figura 2.6.

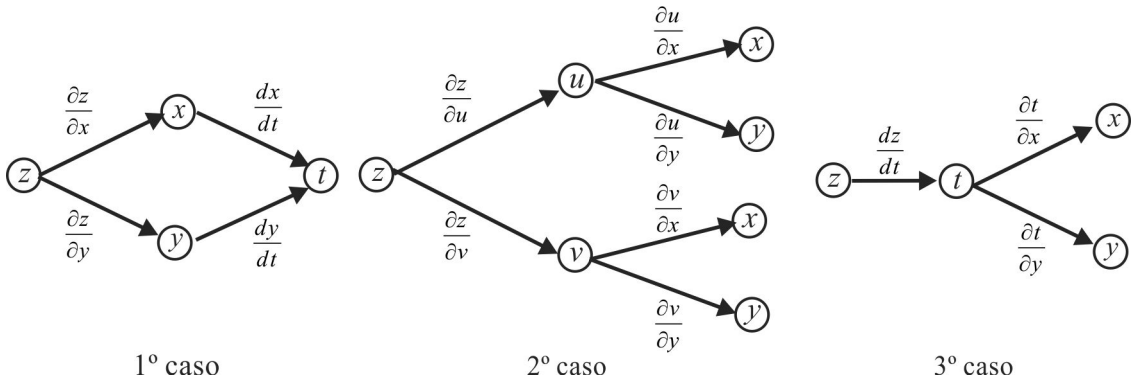


Figura 2.6: Diagrama em árvore da Regra da Cadeia.

No 1º caso, t é a variável independente, x e y são as variáveis intermediárias e z é a variável dependente; no 2º caso x e y são as variáveis independentes, u e v as variáveis intermediárias e z a variável dependente; finalmente, no 3º caso, x e y são as variáveis independentes, t é a variável intermediária e z a variável dependente.

Exercícios & Complementos.

1. Considere as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ definidas por

$$f(x, y) = \int_x^y \log(1 + (\operatorname{sen} t)^2)dt \quad \text{e} \quad g(x, y) = \int_x^{x^2 y} \exp(\cos t)\, dt.$$

Use o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia para calcular as derivadas parciais f_{xy} e g_{xy}.

2. Se $f(x,y) = \operatorname{sen}(x/y) + \log(y/x)$, mostre que $xf_x + yf_y = 0$.

3. Seja $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 0\right\}$ e defina $f : D \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \frac{|x+y|}{x+y} = \frac{\sqrt{x^2+2xy+y^2}}{x+y}.$$

Verifique que f_x e f_y são identicamente nulas em D, mas f não é constante.

4. Dada uma função derivável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, considere

$$\varphi(x,y) = f(x-y) \ \text{ e } \ \psi(x,y) = f(xy).$$

Mostre que $\varphi_x + \varphi_y = 0$ e $x\psi_x - y\psi_y = 0$.

5. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$ nos seguintes casos:

   (a) $z = ye^x + xe^y$; $x = t$ e $y = \operatorname{sen} t$

   (b) $z = \log\left(1 + x^2 + y^2\right)$; $x = \log t$ e $y = e^t$

   (c) $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $x = t^3$e $y = \cos t$

   (d) $z = u^2v + vw^2 + uvw^3$; $u = t^2$, $v = t$ e $w = t^3$.

6. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ nos seguintes casos:

   (a) $w = u^2 + v^3$; $u = 3x - y$ e $v = x + 2y$

   (b) $w = \log\left(t^2 + s^2\right)$; $t = x^3 + y^2$ e $s = 3xy$

   (c) $w = 3u + 7v$; $u = x^2y$e $v = \sqrt{xy}$

   (d) $w = \cos(\xi + \eta)$; $\xi = x + y$ e $\eta = \sqrt{xy}$

7. Considere a função

$$f(x,y) = \int_x^y \exp\left(t^2\right) dt.$$

Calcule as derivadas parciais f_s, f_r e f_{rs}, no caso em que $x = rs^4$ e $y = r^4s$.

8. Sejam $\mathbf{r} = xi + y\mathbf{j}$ o vetor posição do ponto $P(x,y)$ e $r = |\mathbf{r}|$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real de uma variável real duas vêzes derivável e $z = f(r)$, mostre que

$$\Delta z = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r.$$

9. Considere duas funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sejam $w = f(u)$ e $u = g(x,y)$. Admitindo a existência das derivadas envolvidas, deduza que

$$\Delta w = f''(u)\left(g_x^2 + g_y^2\right) + f'(u)\,\Delta g.$$

10. Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se *homogênea* de grau n quando

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \ \forall \ t \in R_+^* \ \text{ e } \ \forall \ (x, y) \in D.$$

Mostre que qualquer função homogênea f satisfaz à *Relação de Euler* [6]

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = n f(x, y) \ \text{ em } \ D.$$

Verifique que as funções

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad z = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}}$$

são homogêneas.

11. Com as hipóteses do Exercício 10 da Seção 2.1 e admitindo que $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, deduza as relações:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \ \text{ e } \ \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

12. Se $f(u, v)$ é diferenciável e $\varphi(x, y) = f(x - y, y - x)$, mostre que $\varphi_x + \varphi_y = 0$.

13. Sejam φ e ψ funções reais deriváveis e suponha que $\varphi'(1) = 4$.

    (a) Se $f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)\psi(x/y)$, mostre que $x f_x + y f_y = 2f$.

    (b) Se $g(x, y) = \varphi(x/y)$, calcule $g_x(1, 1)$ e $g_y(1, 1)$.

2.4 Derivada Direcional e Gradiente

As derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ de uma função diferenciável $z = f(x, y)$ foram interpretadas como a declividade das curvas $x \mapsto f(x, b)$ e $y \mapsto f(a, y)$, respectivamente. Podemos interpretá-las, também, como taxa instantânea de variação da função $f(x, y)$ nas direções dos eixo x e y. De fato, se representarmos por $\mathbf{e}_1 = (1, 0) = \mathbf{i}$, então

$$f_x(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P + t\mathbf{e}_1) - f(P)}{t}$$

e esse último limite é a taxa instantânea de variação da função f no ponto P, na direção do vetor $\mathbf{e}_1$. Da mesma forma, a derivada parcial $f_y(a, b)$ representa a taxa instantânea de variação da função f no ponto P, na direção do vetor $\mathbf{e}_2 = (0, 1) = \mathbf{j}$, isto é,

$$f_y(a, b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a, b + t) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(P + t\mathbf{e}_2) - f(P)}{t}.$$

Consideremos, agora, o problema de medir a taxa instantânea de variação da função f no ponto P, na direção unitária $\mathbf{u} = (\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\text{sen}\,\theta)\,\mathbf{j}$ do $\mathbb{R}^2$. Estenderemos a noção de derivadas parciais a outras direções que não sejam os eixos x e y.

Seja $P(a, b)$ um ponto interior ao conjunto D e consideremos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dada uma direção unitária

$$\mathbf{u} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta) = (\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\text{sen}\,\theta)\,\mathbf{j}$$

[6] Leonhard Euler (1707-1783), matemático suiço.

do $\mathbb{R}^2$, a *derivada direcional* de f no ponto P, *na direção do vetor* $\mathbf{u}$, é definida pelo limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\mathbf{u})-f(P)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\cos\theta,b+t\operatorname{sen}\theta)-f(a,b)}{t},$$

quando esse limite existir. As notações mais utilizadas para representar a derivada direcional são as seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P),\ \ \nabla_{\mathbf{u}}f\,(P)\ \text{ ou }\ D_{\mathbf{u}}f\,(P)\,.$$

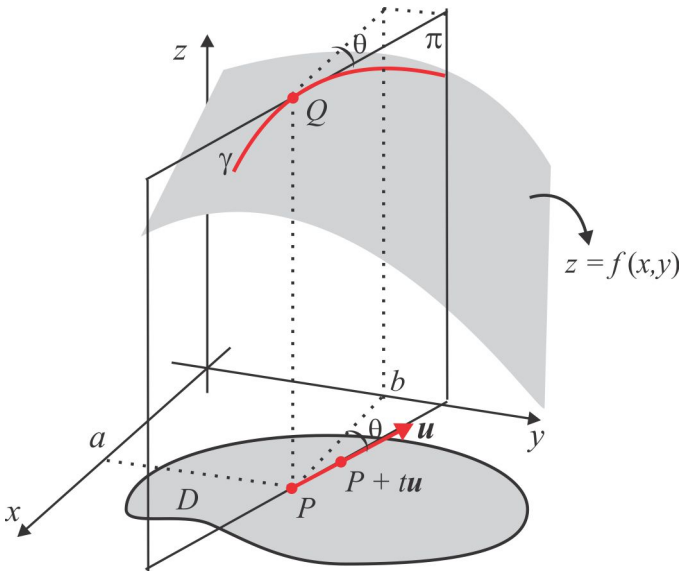


Figura 2.7: Visão geométrica da derivada direcional.

O plano π que passa no ponto P e é paralelo ao eixo z e ao vetor $\mathbf{u}$ intercepta o gráfico de f na curva γ, cuja declividade é $m=\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P)$, como mostra a Figura 2.7.

Observação 2.32 *Conforme ressaltamos no início da seção, as derivadas parciais f_x e f_y são derivadas direcionais específicas, nas direções* $\mathbf{i}$ *(direção x) e* $\mathbf{j}$ *(direção y), respectivamente. Quando a função f é diferenciável no ponto P, não apenas as derivadas parciais f_x e f_y existem no ponto P, as derivadas direcionais de f no ponto P existem , em qualquer direção.*

Exemplo 2.33 *Seja $f(x,y)=y\exp(xy)$ definida em $\mathbb{R}^2$ e determinemos a derivada direcional de f no ponto $P(0,0)$, na direção do vetor $\mathbf{v}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$. Temos que*

$$|\mathbf{v}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

e, considerando a direção unitária $\mathbf{u}=\mathbf{v}/\,|\mathbf{v}|=\frac{4}{5}\mathbf{i}+\frac{3}{5}\mathbf{j}$, colinear com $\mathbf{v}$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{4}{5}t,\frac{3}{5}t\right)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{3}{5}\exp\left(\frac{12}{25}t^2\right)=3/5.$$

O sinal positivo da derivada direcional indica um processo de crescimento de f. ■

Algumas funções do cálculo, embora descontínuas, têm derivada direcional em qualquer direção e outras só têm derivada direcional nas direções $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 2.34 *Na seção Exemplos Cássicos I, apresentamos uma função descontínua e parcialmente derivável. Na verdade, a derivada direcional pode existir em qualquer direção e, ainda assim, a função ser descontínua. Vamos mostrar que isto ocorre com a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & se\ \ x \neq 0 \\ 0, & se\ \ x = 0. \end{cases}$$

que é descontínua em $(0,0)$*, mas a derivada direcional* $D_{\mathbf{u}}f\,(0,0)$ *existe em qualquer direção.*

Solução No caminho $x = y^2$, temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f\,(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{y^4}{2y^4} = 1/2 \neq f\,(0,0)$$

e, portanto, f é descontínua em $(0,0)$. Se $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ é uma direção unitária do $\mathbb{R}^2$, então

$$\frac{f\,(0+ta,b) - f\,(0,0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{ab^2}{a^2+t^2b^4}, & \text{se}\ \ a \neq 0 \\ 0, & \text{se}\ \ a = 0 \end{cases}$$

e teremos

$$D_{\mathbf{u}}f\,(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\,(0+ta,b) - f\,(0,0)}{t} = \begin{cases} b^2/a, & \text{se}\ \ a \neq 0 \\ 0, & \text{se}\ \ a = 0. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.35 *Verificar que as derivadas direcionais na origem da função* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

só existem nas direções $\mathbf{i}$ *e* $\mathbf{j}$.

Solução De fato, no Exemplo 2.4 vimos que as derivadas direcionais $f_x\,(0,0)$ e $f_y\,(0,0)$ são ambas iguais a zero e se $\mathbf{u} = (\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j}$ é uma direção unitária não paralela ao eixos, isto é, se $\cos\theta \neq 0$ e $\operatorname{sen}\theta \neq 0$, então

$$\frac{f\,(\mathbf{0}+t\mathbf{u}) - f\,(\mathbf{0})}{t} = \frac{f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta)}{t} = \frac{1}{t}\frac{t^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{t^2} = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{t}$$

de onde concluímos que $\dfrac{f\,(\mathbf{0}+t\mathbf{u}) - f\,(\mathbf{0})}{t}$ não tem limite quando $t \to 0$, isto é, a derivada direcional de f na origem, na direção $\mathbf{u}$, não existe. $\blacksquare$

Teorema 2.36 *Se* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é uma função diferenciável no ponto* $P(a,b)$*, interior ao conjunto* D*, e* $\mathbf{u} = (\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j}$ *é uma direção unitária do* $\mathbb{R}^2$*, então a derivada direcional de* f *no ponto* P*, na direção* $\mathbf{u}$*, existe e*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\operatorname{sen}\theta. \tag{2.25}$$

Demonstração Se f é diferenciável no ponto P, então

$$f(P+t\mathbf{u}) = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(t\cos\theta) + f_y(a,b)\cdot(t\,\mathrm{sen}\,\theta) + E(t\mathbf{u}),$$

onde o erro $E(t\mathbf{u})$ é tal que

$$\lim_{t\to 0}\frac{E(t\mathbf{u})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{E(t\cos\theta, t\,\mathrm{sen}\,\theta)}{t} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(P+t\mathbf{u})-f(P)}{t} = f_x(a,b)\cos\theta + f_y(a,b)\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

como queríamos ■

De (2.25) resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) = (f_x(P)\,\mathbf{i} + f_y(P)\,\mathbf{j})\bullet\mathbf{u} \qquad \text{(produto escalar)},$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) = \nabla f(P)\bullet\mathbf{u} = |\nabla f(P)|\cos\phi,$$

sendo ϕ o ângulo entre os vetores $\nabla f(P)$ e $\mathbf{u}$. Em outras palavras, a derivada direcional de f no ponto P nada mais é do que a componente do vetor gradiente na direção do vetor unitário $\mathbf{u}$. Portanto, se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no ponto $P(a,b) \in D$, então:

1. O maior valor da derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P)$ é $|\nabla f(P)|$ e ocorre quando $\phi = 0$, isto é, quando $\mathbf{u}$ apontar na direção do gradiente: $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$.

2. O menor valor da derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P)$ é $-|\nabla f(P)|$ e ocorre quando $\phi = \pi$, isto é, quando $\mathbf{u}$ apontar na direção oposta ao gradiente.

3. Quando a derivada direcional é positiva, ela representa a taxa de crescimento da função e o gradiente aponta na direção segundo a qual a função cresce mais rápido.

4. Quando a derivada direcional é negativa, ela representa a taxa de decrescimento e na direção do gradiente a função decresce mais rápido.

No caso de funções de três ou mais variáveis, a definição e o cálculo da derivada direcional são semelhantes ao que descrevemos para funções de duas variáveis. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.37 *Calcular a derivada direcional da função* $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$, *no ponto* $P(2,1,3)$, *na direção do vetor* $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

Solução Temos que $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}$ e consideramos a direção unitária $\mathbf{u}$ colinear com $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}.$$

Um cálculo direto nos dá $\nabla f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k} = 4x\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$, de modo que $\nabla f(P) = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(P) = \nabla f(P)\bullet\mathbf{u} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

e o sinal negativo indica que a função decresce a partir do ponto P, na direção $\mathbf{u}$. ■

Exemplo 2.38 *O valor máximo da derivada direcional da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}, & se\ (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & se\ (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Solução Temos que

$$f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad f_y = \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} \text{ e } f_z = \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

e no ponto $P(1,\sqrt{2},-1)$, obtemos

$$f_x(P) = \frac{2}{16},\quad f_y(P) = \frac{2\sqrt{2}}{16} \text{ e } f_y(P) = -\frac{2}{16}.$$

O valor máximo da derivada direcional de f em $P(1,\sqrt{2},-1)$ é igual a

$$|\nabla f(P)| = \sqrt{f_x(P)^2 + f_y(P)^2 + f_z(P)^2} = \frac{1}{4}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 2.39 *A temperatura em um ponto (x,y) da placa circular $D : x^2+y^2 \leq 4$ é dada por $T(x,y) = x^3 + xy^2$. A direção a partir do ponto $P(1,1)$ da placa em que a temperatura cresce mais rápido é precisamente $\mathbf{v} = \nabla T(P)$, isto é,*

$$\mathbf{v} = T_x(1,1)\,\mathbf{i} + T_y(1,1)\,\mathbf{j} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

e a taxa máxima de crescimento da temperatura nessa direção é $|\nabla T(P)| = \sqrt{20}$. $\blacksquare$

2.4.1 Variação Estimada

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $P(a,b)$, interior ao conjunto D, e $\mathbf{u} = (\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j}$ é uma direção unitária do $\mathbb{R}^2$, a derivada direcional $D_{\mathbf{u}}f(P)$ mede a taxa de variação de $f(x,y)$ em relação à distância medida na direção unitária $\mathbf{u}$. De fato, observando a Figura 2.8

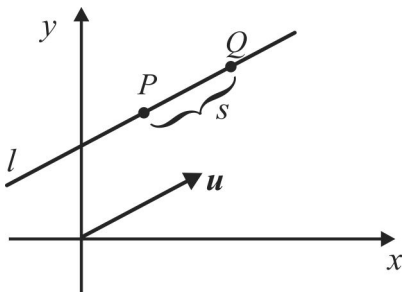


Figura 2.8: Variação em relação à distância.

vemos que $\mathbf{PQ} = s\mathbf{u}$ e, portanto, a reta l tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a + s\cos\theta \\ y = b + s\operatorname{sen}\theta, \end{cases}$$

de onde resulta que $x'(s) = \cos\theta$ e $y'(s) = \operatorname{sen}\theta$. Logo,

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = f_x(P)\cos\theta + f_y(P)\operatorname{sen}\theta = f_x(P)\,x'(s) + f_y(P)\,y'(s) = \frac{df}{ds}(P) \tag{2.26}$$

De (2.26) deduzimos que $df(P) = D_{\mathbf{u}}f(P)\,ds$ e ressaltamos aqui a semelhança com o caso unidimensional em que temos $df = f'(x)\,dx$.

Exemplo 2.40 *Determinemos a variação do valor de* $f(x,y) = x\exp(y)$, *se o ponto* (x,y) *se move* $ds = 0.1$ *unidade a partir do ponto* $P(2,0)$, *em direção ao ponto* $Q(4,1)$.

Solução Temos $f_x = \exp(y)$ e $f_y = x\exp(y)$, de modo que $f_x(P) = 1$ e $f_y(P) = 2$ e, portanto, $\nabla f(P) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. A derivada direcional de f no ponto P, na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{PQ} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, é

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \nabla f(P) \bullet \mathbf{u} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \bullet (\tfrac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \tfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}) = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

onde $\mathbf{u}$ é a normalização do vetor $\mathbf{v}$. Logo,

$$df = D_{\mathbf{u}} f(P)\, ds = \frac{4}{\sqrt{5}} \times (0.1) = \frac{0.4}{\sqrt{5}},$$

ou seja, $df \approx 0.18$ unidade é a varivação crescente de f. ■

2.4.2 Reta Tangente e Reta Normal

As superfícies consideradas até o momento foram descritas por uma equação do tipo $z = f(x,y)$, onde $(x,y) \in D$, e representaram gráficos de funções diferenciáveis. De forma mais geral, uma superfície S do $\mathbb{R}^3$ é descrita, na forma implícita, por uma equação do tipo $F(x,y,z) = 0$, sendo $F(x,y,z)$ uma função diferenciável em uma região Ω do espaço $\mathbb{R}^3$. Consideremos na superfície S uma curva $\gamma(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, $a < t < b$, cujo gráfico passa pelo ponto $P(a,b,c)$ de S. Então $F(\gamma(t)) = 0$ e da Regra da Cadeia resulta que

$$F_x(P)\,x'(t) + F_y(P)\,y'(t) + F_z(P)\,z'(t) = 0. \tag{2.27}$$

Como no caso de duas variáveis, o vetor

$$\nabla F(P) = F_x(P)\,\mathbf{i} + F_y(P)\,\mathbf{j} + F_k(P)\,\mathbf{k}$$

recebe o nome de *vetor gradiente* de F no ponto P, também denotado por $\operatorname{grad} F(P)$, e de (2.27) deduzimos que

$$\nabla F(P) \bullet \gamma'(t) = 0, \qquad \text{(produto escalar)}$$

de modo que o vetor $\nabla F(P)$ é perpendicular ao vetor velocidade $\gamma'(t)$.

A totalidade dos vetores velocidade $\gamma'(t)$ constituem o *plano tangente* à superfície S no ponto P. Assim, o plano tangente passa no ponto P e tem, para vetor normal, o vetor $\nabla F(P)$. A equação cartesiana do plano tangente é, portanto,

$$\mathbf{PQ} \bullet \nabla F(P) = 0 \;\text{ ou }\; F_x(P)(x-a) + F_y(P)(y-b) + F_z(P)(z-c) = 0.$$

A Figura 2.9 dá uma visão geométrica do plano tangente.

No caso em que a superfície é descrita na forma explícita por $z = f(x,y)$, consideramos

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z$$

e as derivadas parciais de F no ponto $P(a,b,f(a,b))$ são

$$F_x(P) = f_x(a,b)\,,\;\; F_y(P) = f_y(a,b) \;\text{ e }\; F_z(P) = -1.$$

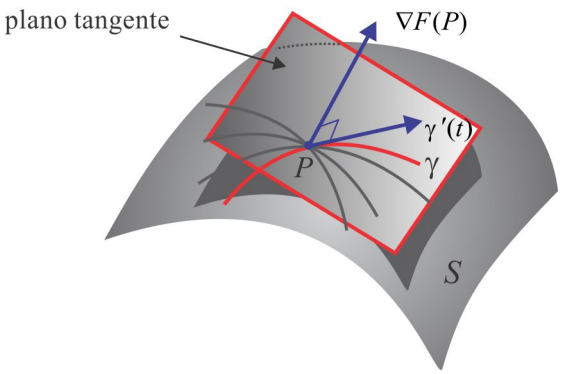


Figura 2.9: Visão geométrica do plano tangente.

O plano tangente é governado pela equação

$$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)-(z-f(a,b))=0,$$

conforme foi estabelecido na Seção 2.2..

A *reta normal* à superfície S, no ponto $P(a,b,c)$ da superfície, é a reta que passa em P, na direção do vetor $\nabla f(P)$. A *equação vetorial* da reta normal é

$$\mathbf{PQ}=t\ \nabla F(P),\ \ t\in\mathbb{R},$$

sendo $Q\,(x,y,z)$ um ponto genérico da reta. Na *forma paramétrica*, a reta normal é descrita por

$$\begin{cases} x=a+tF_x(P)\\ y=a+tF_y(P)\\ z=a+tF_z(P)\end{cases}$$

e, no caso em que as derivadas parciais $F_x(P)$, $F_y(P)$ e $F_z(P)$ são todas diferentes de zero, podemos expressar a reta normal na *forma simétrica*

$$\frac{x-a}{F_x(P)}=\frac{y-b}{F_y(P)}=\frac{z-c}{F_z(P)}.$$

Exemplo 2.41 *Determinar o plano tangente e a reta normal à superfície* $S: x^2+y^2+3z^2=5$, *no ponto* $P\,(1,1,1)$.

Solução Neste caso, consideramos $F\,(x,y,z)=x^2+y^2+3z^2-5$ e o vetor gradiente de F no ponto $P(1,1,1)$ é

$$\nabla F\,(P)=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}.$$

O plano tangente à superfície S no ponto P tem equação cartesiana

$$2(x-1)+2(y-1)+6(z-1)=0\quad\text{ou}\quad x+y+3z-5=0.$$

e a reta normal é

$$\begin{cases} x=1+2t\\ y=1+2t\\ z=1+6t,\ \ t\in\mathbb{R},\end{cases}\qquad\text{ou}\qquad \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{6}.\qquad\blacksquare$$

Exemplo 2.42 *Determinar as retas tangente e normal à curva* $\gamma : x^2 - xy + y^2 - 7 = 0$, *no ponto* $P(-1, 2)$.

Solução Se $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 7$, então $\nabla f(-1, 2) = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ e as retas tangente e normal no ponto $P(-1, 2)$ são descritas por

$$\begin{array}{ll} \text{reta tangente:} & \mathbf{PQ} \bullet \nabla f(-1, 2) = 0 \\ \text{reta normal:} & \mathbf{PQ} = t\nabla f(-1, 2), \end{array}$$

onde $Q(x, y)$ é um ponto genérico da reta. Em coordenadas, as equações dessas retas são

$$\begin{array}{ll} \text{reta tangente:} & 4x - 5y + 14 = 0 \\ \text{reta normal:} & x = -1 + 4t \ \text{ e } \ y = 2 + 5t \quad \text{ou} \quad 5x + 4y - 3 = 0. \end{array} \qquad \blacksquare$$

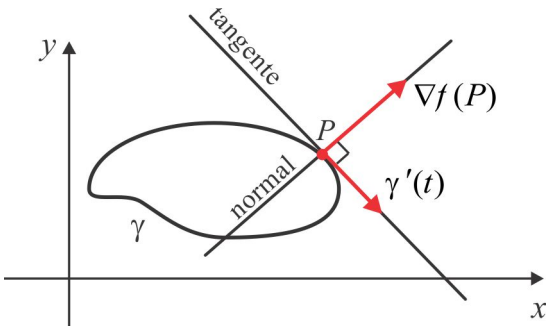


Figura 2.10: Retas tangente e normal.

Suponhamos que uma curva γ do $\mathbb{R}^3$ seja determinada pela interseção de duas superfícies

$$S_1 : F(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad S_2 : G(x, y, z) = 0,$$

como sugere a Figura 2.11. O vetor tangente à curva γ no ponto $P(a, b, c)$ é o produto vetorial $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$ dos vetores normais aos planos tangentes a S_1 e S_2 em P, e a equação vetorial da reta tangente é

$$\mathbf{PQ} = t\left[\nabla F(P) \times \nabla G(P)\right],$$

sendo $Q(x, y, z)$ um ponto genérico da reta. As equações paramétricas da reta tangente são

$$\begin{cases} x = a + t(F_y G_z - F_z G_y) \\ y = b + t(F_z G_x - F_x G_z) \\ z = c + t(F_x G_y - F_y G_x) \end{cases}$$

e na forma simétrica a reta tangente é descrita por

$$\frac{x - a}{F_y G_z - F_z G_y} = \frac{y - b}{F_z G_x - F_x G_z} = \frac{z - c}{F_x G_y - F_y G_x}, \tag{2.28}$$

onde as derivadas parciais são calculadas no ponto P. Os denominadores em (2.28) são precisamente as coordenadas do vetor $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$, supostas não nulas.

Exemplo 2.43 *Consideremos as funções diferenciáveis*

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 \quad e \quad G(x, y, z) = x + 2y - 2z - 1,$$

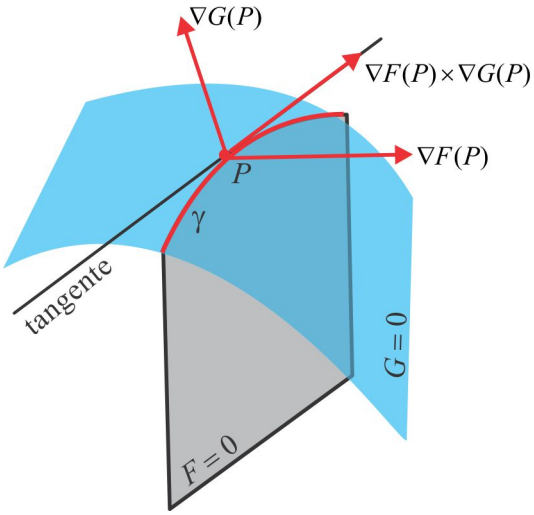


Figura 2.11: Interseção de duas superfícies.

e seja γ a curva interseção da esfera $F(x,y,z)=0$ com o plano $G(x,y,z)=0$. No ponto $P(1,1,1)$ temos $\nabla F(P)=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ e $\nabla G(P)=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e o vetor tangente à curva γ no ponto P é, portanto:

$$\nabla F(P)\times\nabla G(P)=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}=-8\mathbf{i}+6\mathbf{j}+2\mathbf{k}.$$

A reta tangente à curva γ em P é descrita por:

$$x=1-8t,\quad y=1+6t\quad e\quad z=1+2t. \qquad \textit{(forma paramétrica)}$$

$$\frac{x-1}{-8}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-1}{2}. \qquad \textit{(forma simétrica)} \qquad \blacksquare$$

Exercícios & Complementos.

1. Calcule a derivada direcional da função $z=f(x,y)$ no ponto P, na direção indicada:

   (a) $z=x^3+5x^2y$; $P(2,1)$, na direção da reta $y=x$.

   (b) $z=y\exp(xy)$; $P(0,0)$, na direção da reta $\mathbf{v}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$.

   (c) $z=x^2-y^2$; $P(2,3)$, na direção tangente à curva $2x+5y^2=15$, no ponto $(0,\sqrt{3})$.

2. Calcule a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}$ nos seguintes casos:

   (a) $f(x,y,z)=e^{-y}\operatorname{sen}x+\frac{1}{3}e^{-3y}\operatorname{sen}3x+z^2$; $P(\pi/3,0,1)$ e $\mathbf{u}=-\frac{1}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}$.

   (b) $f(x,y,z)=x^2y+3yz^2$; $P(1,-1,1)$ e $\mathbf{u}=\frac{1}{3}\mathbf{i}-\frac{2}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$.

   (c) $f(x,y,z)=\log\left(x^2+y^2+z^2\right)$; $P(1,1,1)$ e $\mathbf{u}=-\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{1}{3}\mathbf{j}+\frac{2}{3}\mathbf{k}$.

3. Calcule o valor máximo da derivada direcional de $w=f(x,y,z)$ no ponto P:

   (a) $w=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$; $P(1,2,-3)$ (b) $w=\exp(x)\cos(yz)$; $P(1,0,\pi)$.

4. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em cada ponto do círculo $x^2 + y^2 = 1$. Mostre que a derivada direcional de f no ponto (x, y) na direção tangente ao círculo é $-yf_x + xf_y$.

5. Encontre o plano tangente e a reta normal à superfície dada no ponto indicado:

   (a) $z = x^2 - y^2$; $P(1, 1, 0)$

   (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$; $P(1, 1, 1)$

   (c) $z = x\sqrt{x^2 + y^2}$; $P(3, -4, 15)$

   (d) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; $P(-1, 2, 2)$.

6. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva γ dada, no ponto P indicado.

   (a) $\gamma : \begin{cases} 3x - 5y - z + 7 = 0 \\ y = 2; \qquad P(1, 2, 0) \end{cases}$

   (b) $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x = 1; \qquad P(1, 3, 2). \end{cases}$

   (c) $\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = 1; \qquad P\left(1, 1, \sqrt{2}\right) \end{cases}$

   (d) $\gamma : \begin{cases} z = 2xy\left(x^2 + y^2\right)^{-1} \\ y = -1; \qquad P(1, -1, -1). \end{cases}$

7. Seja γ a curva em $\mathbb{R}^3$ descrita por: $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = \cos 2t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Mostre que a curva γ está contida no paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$ e determine a reta tangente e o plano normal à curva no ponto correspondente a $t = \pi/4$.

8. Em cada caso verifique que ∇f é normal às curvas ou superfícies de nível.

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   (b) $f(x, y) = \exp\left(x^2 + y^2\right)$.

   (c) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - xz$.

9. Seja $f(x, y, z) = 3x + 5y + 2z$ e denote por $\mathbf{n}$ o vetor normal exterior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Calcule a derivada direcional $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$.

10. Calcule a derivada direcional no ponto $P(3, 4, 5)$ da função $w = x^2 + y^2 + z^2$, na direção tangente à curva

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25 \end{cases}$$

    no ponto P.

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

    Verifique que f é contínua, tem derivada direcional na origem em qualquer direção, mas não é aí diferenciável.

12. Admitindo as operações possíveis e considerando a e b constantes reais, prove as seguintes *regras de derivação*:

    (a) $\nabla(af + bg) = a\nabla f + b\nabla g$.

    (b) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$.

    (c) $\nabla(f/g) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$.

13. Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$ e represente por $r = |\mathbf{r}|$. Se $f(t)$ é uma função real de uma variável real, derivável, mostre que

$$\nabla f(r) = f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Usando essa fórmula, calcule $\nabla(r)$, $\nabla(1/r)$ e $\nabla(\log r)$.

14. Sejam $0 < \alpha < 1/2$ e $f(x, y) = |xy|^{\alpha}$. Mostre que:

    (a) $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

    (b) f tem derivada direcional na origem apenas nas direções $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

15. Determine a reta tangente à curva γ, no ponto P indicado:

    (a) $\gamma : \begin{cases} 3x^2 + y^2 + z = 4 \\ -x^2 + y^2 + z^2 = 12; \end{cases}$ no ponto $P(1, 2, -3)$.

    (b) $\gamma : \begin{cases} 3xy + 2yz + 6 = 0 \\ x^2 - 2xz + y^2 z = 1; \end{cases}$ no ponto $P(1, -2, 0)$.

16. Calcule a derivada direcional no ponto $P(1, 2, 3)$ da função $w = 2x^2 - y^2 + z^2$, na direção da reta que passa nos pontos $A(1, 2, 1)$ e $B(3, 5, 0)$.

17. Seja γ a curva de equações paramétricas $x = t$, $y = t^2$ e $z = t^3$, $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Determine a reta tangente e o plano normal à curva γ, no ponto $P(2, 4, 8)$.

    (b) Determine a reta tangente à curva γ, que passa no ponto $P(0, -1, 2)$.

    (c) Verifique se existe reta tangente à curva γ, passando no ponto $P(0, -1, 3)$.

18. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com $f'(t) > 0$, $\forall\, t$, e $g(x, y) = f\left(x^2 + y^2\right)$. Mostre que a derivada direcional $D_{\mathbf{v}}g(x, y)$ será máxima quando $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

19. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real de uma variável real derivável, então os planos tangentes à superfície de equação $z = yf(x/y)$ passam todos pela origem.

20. Determine o plano tangente à superfície $z = 2x^2 + y^2 - 3xy$, paralelo ao plano de equação $10x - 7y - 2z + 5 = 0$.

21. Determine um plano que passa nos pontos $P(5, 0, 1)$ e $Q(1, 0, 3)$ e que seja tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$.

22. Determine os pontos da superfície $z = 8 - 3x^2 - 2y^2$, nos quais o plano tangente é perpendicular à reta $x = 2 - 3t$, $y = 7 + 8t$ e $z = 5 - t$.

23. Determine em que ponto da superfície $z = 3x^2 - y^2$o plano tangente é paralelo ao plano de equação $3x + y + 2z = 1$.

24. Determine em que pontos da superfície $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$ o plano tangente é horizontal.

25. Mostre que qualquer reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.

26. A temperatura T no ponto (x, y) de uma placa metálica circular, com centro na origem, vem dada por

$$T(x, y) = \frac{400}{2 + x^2 + y^2} \ {}^\circ C.$$

Qual a direção que se deve tomar a partir do ponto $A(1, 1)$, de modo que a temperatura aumente o mais rápido possível e com que velocidade $T(x, y)$ aumenta ao passar pelo ponto A nessa direção?

27. Um ponto P se move ao longo de uma curva γ em um campo escalar diferenciável $w = f(x, y, z)$ a uma velocidade $\dfrac{ds}{dt}$. Se $\mathbf{u}$ representa o vetor tangente unitário à curva γ, prove que a taxa instatânea de variação de w em relação ao tempo, no ponto P, é

$$(\nabla f \bullet \mathbf{u})\frac{ds}{dt}.$$

28. A superfície de um lago é representada por uma região D do plano xy de modo que a profundidade (medida em metros) sob o ponto (x, y) é $p(x, y) = 300 - x^2 - y^2$. Em que direção um bote no ponto $A(4, 9)$ deve navegar para que a profundidade da água decresça mais rapidamente? Em que direção a profundidade permanece a mesma?

29. A temperatura no ponto (x, y, z) do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ vem dada por

$$T(x, y, z) = xy + z \ {}^\circ C.$$

Qual a taxa instantânea de variação da temperatura, em relação a t, ao longo da *hélice* $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = t$? Qual a taxa no ponto $P(1, 0, 0)$ da hélice?

30. A temperatura no ponto (x, y) de uma placa retangular é $T(x, y) = x \operatorname{sen} 2y \ {}^\circ C$. Um ponto P se move no sentido horário, ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 1$, a uma velocidade constante de 2 unidades de comprimento de arco por segundo. Qual a velocidade de variação de temperatura no instante em que o ponto P se situar em $\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$?

RESPOSTAS & SUGESTÕES

SEÇÃO 2.1 DERIVADAS PARCIAIS

1. No Exercício 1 as derivadas são calculadas usando regras básicas de derivação. Por simplicidade, no item (c) substituímos a expressão $e^{x^2+y^2}$ por A.

	z_x	z_y	z_{xx}	z_{yy}	z_{yx}
(a)	$6x$	$3y^2$	6	$6y$	0
(b)	$\dfrac{-y}{x^2+y^2}$	$\dfrac{x}{x^2+y^2}$	$\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$	$\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$	$\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$
(c)	$\left(2x^2+1\right)yA$	$\left(2y^2+1\right)xA$	$\left(6+4x^2\right)xyA$	$\left(6+4y^2\right)xyA$	$\left(1+2x^2+2y^2\right)A$
(d)	$y\cos xy+\frac{2}{x}$	$x\cos xy+\frac{1}{y}$	$-y^2\operatorname{sen} xy-\frac{2}{x^2}$	$-x^2\operatorname{sen} xy-\frac{1}{y^2}$	$\cos xy - xy\operatorname{sen} xy$
(e)	$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$	$\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$	$\dfrac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\dfrac{-xy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
(f)	$\dfrac{-y}{1-x^2y^2}$	$\dfrac{-x}{1-x^2y^2}$	$\dfrac{-2xy^3}{(1-x^2y^2)^2}$	$\dfrac{-2x^3y}{(1-x^2y^2)^2}$	$\dfrac{x^2y^2-x-2x^2y^3}{(1-x^2y^2)^2}$

2. (a) $\pi/6+2/\sqrt{3}$ (b) 0 (c) $f_{xy}(1,0)=f_{yx}(1,0)=0$ (d) -1.

3. Se fizermos $A=A(x,y)=\exp\left(-1/\left(x^2+y^2\right)\right)$, então no ponto $(x,y)\neq(0,0)$, teremos

$$f_x(x,y)=\frac{2xA}{(x^2+y^2)^2} \text{ e } f_y(x,y)=\frac{2yA}{(x^2+y^2)^2}$$

e na origem as derivadas são calculadas pela definição. Usando a regra de L'Hôpital, obtemos

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-1/h^2}}{h}=0 \text{ e } f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{e^{-1/k^2}}{k}=0.$$

Agora,

$$f_{xy}(0,0)=\frac{\partial f_x}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{k}=0.$$

De modo inteiramente análogo, prova-se que $f_{yx}(0,0)=0$. Note que $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

4. As derivadas f_x e f_y ja foram calculadas no Exemplo 2.7 e para verificar a continuidade da derivada parcial f_x na origem, use a propriedade do confronto. Se $(x,y)\neq\mathbf{0}$, então

$$0\leq|f_x(x,y)|=\left|\frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right|\leq\frac{|y|\,y^4+|y|\,x^4+4x^2y^2\,|y|}{(x^2+y^2)^2}\leq 6\,|y|\,,$$

de onde resulta $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)=0=f_x(0,0)$ e, consequentemente, f_x é contúnua em $(0,0)$. De modo inteiramente análogo, prova-se que f_y é contúnua em $(0,0)$.

5. Como $f(x,y)=x^2+y^3$, então $f_x=2x$ e, sendo assim, $f_x(P)=2\left(x^2+y^2\right)$. Por outro lado,

$$f(P)=(x^2+y^2)^2+y^3=x^4+2x^2y^2+y^4+y^3$$

de onde resulta

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(P)]=4x\left(x^2+y^2\right).$$

6. Como $z_x=-(x^2-y^2)y^2\left(x^2+y^2\right)^{-2}$ e $z_y=2x^3y\left(x^2+y^2\right)^{-2}$, temos que

$$xz_x+yz_y=-\frac{x(x^2-y^2)y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{xy^2}{x^2+y^2}=z.$$

7. Procedimento semelhante ao Exercício 6.

8. Procedimento semelhante ao Exercício 6.

9. Como $u_{xx} = 2A$ e $u_{yy} = 2C$, temos que $\Delta u = 0$ se, e somente se, $A + C = 0$.

10. Das relações $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, segue que $u_{xx} = v_{yx}$ e $u_{yy} = -v_{xy}$.e como $v_{xy} = v_{yx}$, então

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

SEÇÃO 2.2 CAMPOS DIFERENCIÁVEIS

1. (a) Usando coordenadas polares, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{3r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = 0,$$

independente de θ e, portanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, de onde segue a continuidade de f em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais f_x e f_y são dadas por:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Assim, considerando os caminhos $y = 0$ e $y = x$, vê-se que f_x e f_y não têm limite em $(0,0)$, e portanto, f_x e f_y são descontínuas em $(0,0)$.

(c) Considerando os caminhos $h = 0$ e $k = h$, vê-se que

$$\frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{3h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

não tem limite em $(0,0)$. Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$. Isto não contradiz o Lema Fundamental, pois neste caso ele não se aplica.

2. As derivadas parciais $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem e

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = -1 \text{ e } f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)}{y} = 1.$$

Por outro lado,

$$E(h,k) = f(h,k) - \varphi(h,k) = \frac{h^2k - hk^2}{h^2+k^2} \text{ e } \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = -\frac{h^2k + hk^2}{\sqrt{(h^2+k^2)^3}},$$

e ao longo do caminho $k = mh$, com $h > 0$, tem-se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0} -\frac{h^3(m+m^2)}{h^3\sqrt{(1+m^2)^3}} = -\frac{m+m^2}{\sqrt{(1+m^2)^3}}$$

e o limite em $(0,0)$ não existe. Portanto, a função f não é diferenciável em $(0,0)$.

3. (a) Verdadeiro. (Teorema 2.12).
   (b) Verdadeiro. (Teorema 2.13).
   (c) Falso. A função do Exercício 1 é um contraexemplo
   (d) Falso. (Exemplo 2.4)
   (e) Verdadeiro. Esta afirmação é o Lema Fundamental!
   (f) Falso. veja um contraexemplo na seção 2.1.2 Exemplos Clássicos II.
   (g) Falso. A existência das derivadas f_x e f_y não garante sequer a continuidade.

4. Todas as funções apresentadas e suas derivadas z_x e z_y são funções elementares do cálculo sendo, portanto, contínuas no interior de seus respectivos domínios. Como as derivadas parciais são contínuas temos, pelo Lema Fundamental, que as funções são diferenciáveis.

5. Antes de responder, confira o Exercício 3.

   (a) Como $f_x(x,y) = \exp(-y)$ e $f_y(x,y) = -x\exp(-y)$ são contínuas no ponto $P\,(1,0)$, segue do Lema Fundamental, que f é diferenciável em P
   (b) Como f_x não existe em P, então a função f não pode ser diferenciável em P.
   (c) A derivada f_y não existe em $P\,(0,0)$ e a função não pode ser aí diferenciável.
   (d) Veja a seção 2.2.3 Exemplos Clássicos II.
   (e) As derivadas parciais f_x e f_y não existem em $P\,(0,0)$ e a função não é diferenciável em $P\,(0,0)$.
   (f) No domínio $D^+ = \{(x,y) : x > 0\}$ a função reduz-se a $z = \sqrt{x\,(1+y^2)}$, com derivadas parciais
   $$f_x(x,y) = \frac{1+y^2}{2\sqrt{x\,(1+y^2)}} \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x\,(1+y^2)}}$$
   contínuas em D^+. Deduza, a partir do Lema Fundamental, que f é diferenciável em D^+. No domínio $D^- = \{(x,y) : x < 0\}$ a conclusão é a mesma. Em um ponto $P\,(0,b)$, a derivada parcial f_x não existe, fazendo com que a função f não seja diferenciável. Concluímos então que z é diferenciável em $D^- \cup D^+$.

6. Calcule as derivadas parciais f_x e f_y e use a definição $df = f_x dx + f_y dy$.

   (a) $df = \left(15x^2 + 8xy\right) dx + \left(4x^2 - 6y^2\right) dy$.
   (b) $df = yze^x dx + ze^x dy + ye^x dz$.
   (c) $df = \left[\operatorname{sen} \frac{y}{1+x^2} - \frac{2x^2y}{(1+x^2)^2} \cos \frac{y}{1+x^2}\right] dx + \left[\frac{x}{1+x^2} \cos \frac{y}{1+x^2}\right] dy$.
   (d) $df = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$.

7. Note que $f(x,y,z) = f(y,x,z) = f(z,y,x)$ e
$$f_x(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{yz(-x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}, & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Usando simetria, segue que $f_y(x,y,z) = f_x(y,x,z)$ e $f_y(x,y,z) = f_x(z,y,x)$, ou seja, as derivadas parciais existem. Além disso,

$$\frac{E(h,k,l)}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} = \frac{hkl}{(h^2+k^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}$$

temos, ao longo do caminho $h = t$, $k = t$ e $l = t$, que

$$\lim_{(h,k,l)\to(0,0,0)} = \frac{hkl}{(h^2+k^2+l^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{(3t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Portanto, f não é diferenciável em $P(0,0,0)$.

SEÇÃO 2.3 REGRA DA CADEIA

1. Se $F(t)$ é uma primitiva de $\log(1+\operatorname{sen}^2 t)$, isto é, se $F'(t) = \log(1+\operatorname{sen}^2 t)$, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que
$$f(x,y) = F(y) - F(x)$$
e da Regra da Cadeia, obtém-se
$$f_x(x,y) = F'(y)\frac{\partial y}{\partial x} - F'(x)\frac{\partial y}{\partial x} = -[\log(1+(\operatorname{sen} x)^2)].$$
Portanto, $f_{xy} = 0$. De modo inteiramente análogo,
$$g_{xy} = 2x\exp\left(\cos x^2 y\right)\left[1 - x^2 y \operatorname{sen}\left(x^2 y\right)\right].$$
De forma geral, se $f(x,y) = \displaystyle\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} \varphi(t)\,dt$, então $f_x = \varphi(\beta(x,y))\beta_x - \varphi(\alpha(x,y))\alpha_x$.

2. Como
$$f_x = -\tfrac{1}{xy}(y - x\cos(x/y)) \quad \text{e} \quad f_y = \tfrac{1}{y^2}(y - x\cos(x/y)),$$
temos que
$$xf_x + yf_y = -\tfrac{x}{xy}(y - x\cos(x/y)) + \tfrac{y}{y^2}(y - x\cos(x/y)) = 0.$$

3. Use regras de derivação e mostre diretamente que $f_x = 0$ e $f_y = 0$.

4. Se $u = u(x,y) = x - y$ segue da Rega da Cadeia que
$$\varphi_x = f_u u_x = f_u \quad \text{e} \quad \varphi_y = f_u u_y = -f_u$$
e, portanto, $\varphi_x + \varphi_y = f_u - f_u = 0$.A outra relação prova-se de modo similar.

5. Usando a Regra da Cadeia $z'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t)$, encontra-se

   (a) $z'(t) = (\operatorname{sen} t + \cos t)\exp(t) + (1 + t\cos t)\exp(\operatorname{sen} t)$.

   (b) $z'(t) = \dfrac{2\log t + 2t\exp(2t)}{t\left[1 + \exp(2t) + (\log t)^2\right]}$.

   (c) $z'(t) = \dfrac{3t^5 - \cos t \operatorname{sen} t}{\sqrt{t^6 + \cos^2 t}}$.

(d) $z'(t) = 12t^{11} + 7t^6 + 5t^4$.

6. Da Regra da Cadeia, resulta

(a) $w_x = 3x^2 + 12y^2 + 12xy + 18x - 6y$ e $w_y = 6x^2 + 24y^2 + 24xy - 6x + 2y$.

(b) $w_x = \dfrac{6x^4 + 18y^2}{x^5 + 9xy^2}$ e $w_y = \dfrac{4xy + 18y}{x^4 + 9y^2}$.

(c) $w_x = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(6xy + 7y\right)$ e $w_y = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\left(3x^2 + 7x\right)$.

(d) $w_x = -\operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right) - \dfrac{y \operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right)}{2\sqrt{xy}}$,

$$w_y = -\operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right) + \frac{x \operatorname{sen}\left(x + y + \sqrt{xy}\right)}{2\sqrt{xy}}.$$

7. Usando o mesmo raciocínio do Exercício 1 da Seçao 2.3, obtém-se

$$\begin{aligned} f_r &= -s^4 e^{r^2 s^8} + 4r^3 s e^{r^8 s^2}, f_s = -4rs^3 e^{r^2 s^8} + r^4 e^{r^8 s^2} \\ f_{rs} &= -4s^3\left(1 + 2r^2 s^8\right) e^{r^2 s^8} + 2r^{12} e^{r^8 s^2}. \end{aligned}$$

8. Da Regra da Cadeia, resulta

$$z_{xx} = z_{rr}\frac{x^2}{r^2} + z_r\frac{y^2}{r^3} \text{ e } z_{yy} = z_{rr}\frac{y^2}{r^2} + z_r\frac{x^2}{r^3}.$$

Logo,

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = z_{rr}\frac{x^2 + y^2}{r^2} + \frac{1}{r}z_r\frac{x^2 + y^2}{r^2} = z_{rr} + \frac{1}{r}z_r$$

9. Da Regra da Cadeia, resulta

$$w_x = f'(u)\, u_x \text{ e } w_{xx} = f''(u)\, u_x^2 + f'(u)\, u_{xx}$$

e também $w_{yy} = f''(u)\, u_y^2 + f'(u)\, u_{yy}$. Logo, $\Delta w = f''(u)\left(u_x^2 + u_y^2\right) + f'(u)\,\Delta u$.

10. Derivando a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ em relação a t, chega-se a

$$f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y = nt^{n-1}f(x, y),$$

e considerando $t = 1$, resulta

$$f_x(x, y)x + f_y(x, y)y = nf(x, y).$$

11. Da Regra da Cadeia, segue

$$u_r = u_x x_r + u_y y_r \text{ e } v_\theta = v_x x_\theta + v_y y_\theta$$

e, usando as relações $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, $x_r = \cos\theta$, $y_r = \operatorname{sen}\theta$, $x_\theta = -r\operatorname{sen}\theta$ e $y_\theta = r\cos\theta$, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\theta v_y - \operatorname{sen}\theta v_x = \tfrac{1}{r}(-r\operatorname{sen}\theta v_x + r\cos\theta v_y) = \tfrac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

De modo inteiramente análogo chega-se a $v_\theta = -\frac{1}{r}u_\theta$.

12. Da Regra da Cadeia, resulta

$$z_x = f_u u_x + f_v v_x \text{ com } z_y = f_u u_y + f_v v_y,$$

com $u = x - y$ e $v = y - x$. Como $u_x = v_y = 1$ e $u_y = v_x = -1$ temos que

$$z_x + z_y = (f_u u_x + f_v v_x) + (f_u u_y + f_v v_y) = (f_u - f_v) + (-f_u + f_v) = 0.$$

13. Pondo $u = x/y$ e usando a Regra da Cadeia, resulta

    (a) $f_x = 2x\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2 + y^2\right)\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{1}{y}\right)$ e $f_y = 2y\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \left(x^2 + y^2\right)\psi'\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{-x}{y}\right)$ e, portanto,

    $$xf_x + yf_y = 2\left(x^2 + y^2\right)\psi\left(x/y\right) = 2f.$$

    (b) $g_x = \frac{1}{y}\varphi'\left(x/y\right)$ e $g_y = \frac{-x}{y^2}\varphi'\left(x/y\right)$. Logo, $g_x\left(1,1\right) = 1$ e $g_y\left(1,1\right) = -1$.

SEÇÃO 2.4 DERIVADA DIRECIONAL & GRADIENTE

1. (a) $26\sqrt{2}$, (b) $\frac{3}{5}$ e (c) $\pm\frac{1}{\sqrt{76}}\left(6 + 20\sqrt{3}\right)$.

2. (a) $\frac{5-\sqrt{6}}{4}$, (b) $\frac{-22}{3}$ e (c) $\frac{2}{9}$.

3. (a) $\frac{\sqrt{14}}{98}$ e (b) e.

4. Como $\mathbf{n} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ é o vetor normal ao círculo $x^2 + y^2 = 1$ temos que $\mathbf{v} = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$ é o vetor tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 1$ e

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

é o vetor unitário tangente. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \nabla f \bullet \mathbf{u} = (f_x, f_y) \bullet (-y, x) = -yf_x + xf_y.$$

5. A equação do plano T_P, tangente à superfície $F(x,y,z) = 0$, no ponto $P(a,b,c)$ é:

$$T_P : \nabla F(P) \bullet \overrightarrow{PQ} = 0.$$

    (a) $\nabla F\left(P\right) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\quad T_P : 2x - 2y - z = 0$ e

    $$\text{reta normal: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = -z.$$

    (b) $\nabla F\left(P\right) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\quad T_P : x + 2y + 3z = 6$ e

    $$\text{reta normal: } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{6}.$$

    (c) $\nabla F\left(P\right) = \frac{43}{5}\mathbf{i} + -\frac{24}{5}\mathbf{j} - 1\mathbf{k}$, $\quad T_P : 43x - 24y - 5z = 15$ e

    $$\text{reta normal: } \frac{5\left(x-3\right)}{43} = \frac{5\left(y+4\right)}{24} = -z + 15$$

(d) $\nabla F(P) = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\quad T_P : x - 2y - 2z + 9 = 0$ e

$$\text{reta normal:} \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{4}.$$

6. Confira o Exemplo 2.43.

   (a) Se $F(x,y,z) = 3x - 5y - z + 7$ e $G(x,y,z) = y - 2$, então

   $$\nabla F(P) = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 1\mathbf{k}, \quad \nabla G(P) = \mathbf{j} \text{ e } \mathbf{v} = \nabla F(P) \times \nabla G(P) = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$$

   e a reta tangente é: $x = 1 + t, \quad y = 2 \quad$ e $\quad z = 3t, \ t \in \mathbb{R}$.

   (b) $x = 1, \quad y = t \quad$ e $\quad z = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}t, \ t \in \mathbb{R}$.

   (c) $x = 1, \quad y = t \quad$ e $\quad z = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}t, \ t \in \mathbb{R}$.

   (d) $x = t, \quad y = -1 \quad$ e $\quad z = t - 2, \ t \in \mathbb{R}$.

7. Para mostrar que γ está contida no paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$, basta substituir as coordenadas de γ na equação do paraboloide e comprovar a identidade. O vetor tangente à curva γ é

   $$\mathbf{v} = \gamma'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

   e no ponto t_0, $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. A reta tangente é

   $$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \quad \text{e} \quad z = -2t, \ t \in \mathbb{R}.$$

   O plano normal passa no ponto P e é ortogonal ao vetor $\mathbf{v}$. Sua equação é

   $$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 4z = 2.$$

8. Os gradientes são: (a) $\nabla f = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$, (b) $\nabla f = 2x\exp(x^2+y^2)i + 2y\exp(x^2+y^2)\mathbf{j}$ e (c) $\nabla f = (4x - z)\,\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} - x\mathbf{k}$. Em (a) e (b) as curvas de nível são circunferências e o vetor tangente no ponto (x,y) é $\mathbf{v} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Logo, $\nabla f \bullet \mathbf{v} = 0$.

9. Se $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, então $\mathbf{n} = \nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ e, portanto,

   $$D_{\mathbf{u}}g(x,y,z) = \nabla g \bullet \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \tfrac{1}{2r}(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \bullet (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}) = \tfrac{1}{r}(3x + 5y + 2z).$$

10. Confira o Exercício 6. O vetor $\mathbf{v} = 80\mathbf{i} - 60\mathbf{j}$ é tangente a curva e a derivada direcional é

    $$\nabla w \bullet \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 0.$$

11. Seja $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ uma direção unitária qualquer. Então

    $$D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(at, bt)}{t} = a^2 b.$$

    Em particular, $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$ e o erro da aproximação linear de f é

    $$E(h,k) = f(h,k) - \varphi(h,k) = \frac{h^2 k}{h^2 + k^2},$$

    de modo que a razão $E(h,k) \big/ \sqrt{h^2 + k^2}$ não tem limite na origem e, consequentemente, f não é diferenciável em $(0,0)$.

12. Basta observar que
$$\frac{\partial}{\partial x}(af+bg)=a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial g}{\partial x}$$
e usar a definição do gradiente.

13. Se $w=f(r)=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, segue da Regra da Cadeia que
$$w_x=\frac{x}{r}f'(r)\,,\quad w_y=\frac{y}{r}f'(r)\ \text{ e }\ w_z=\frac{z}{r}f'(r)\,.$$
Logo,
$$\nabla w=\frac{f'(r)\,\mathbf{r}}{r}$$
e considerando
$$f(t)=t,\quad f(t)=\frac{1}{t}\ \text{ e }\ f(t)=\log t,$$
chega-se, respectivamente, às relações
$$\nabla r=\frac{\mathbf{r}}{r},\quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\ \text{ e }\ \nabla(\log r)=\frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

14. Confira o Exercício 11.

15. Confira o Exercício 6.

    (a) $\mathbf{v}=-28\mathbf{i}+34\mathbf{j}+32\mathbf{k}$; reta tangente: $\dfrac{1-x}{28}=\dfrac{y-2}{34}=\dfrac{z+3}{32}$

    (b) $\mathbf{v}=6\mathbf{i}+4\mathbf{j}-6\mathbf{k}$; reta tangente: $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+2}{4}=-\dfrac{z}{6}$.

16. A direção unitária é $\mathbf{u}=\frac{1}{\sqrt{14}}(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})$ e, portanto,
$$D_{\mathbf{u}}w=\nabla w\bullet\mathbf{u}=(4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+6\mathbf{k})\bullet\tfrac{1}{\sqrt{14}}(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})=-\tfrac{10}{\sqrt{14}}.$$
Note que o sinal negativo significa que w decresce na direção considerada.

17. Confira Exercício 7.

    (a) $x=2+t,\ y=4+4t$ e $z=8+12t,\ t\in\mathbb{R}$. O plano normal é $x+4y+12z$.

    (b) Em um ponto genérico da curva, o vetor tangente é $\mathbf{v}=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$ e, representando por Q o ponto de tangência, ao resolver a equação $\mathbf{PQ}=\lambda v$ encontra-se $t=-1$ e o ponto Q é $(-1,1-1)$. Portanto, a reta tangente é
$$x+1=\frac{1-y}{2}=\frac{z+1}{3}.$$

    (c) Para mostrar que não há reta tangente pelo ponto $P(0,-1,3)$, basta observar que não existe um ponto Q solução da equação $\overrightarrow{PQ}=\lambda v$.

18. A derivada direcional $D_{\mathbf{u}}g$ será máxima quando u apontar na direção do vetor gradiente. Agora, basta observar que
$$\nabla g(x,y)=2f'\left(x^2+y^2\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})$$
e que $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ aponta na direção de ∇g.

19. Basta provar que o plano tangente é governado por uma equação do tipo $Ax + By + Cz = 0$. A equação do plano tangente que passa no ponto $P(a, b)$ é

$$z = f_x(P)(x - a) + f_y(P)(y - b) + c, \text{ com } c = bf(a/b)$$

e usando a Regra da Cadeia, encontra-se

$$f_x(P) = f'(a/b) \text{ e } f_y(P) = f(a/b) - \tfrac{a}{b} f'(a/b)$$

e o plano tangente é $f'(a/b)\,x + \left[f(a/b) - \frac{a}{b} f'(a/b)\right] y - z = 0$.

20. Determina-se d tal que $10x - 7y - 2z + d = 0$. O vetor $\mathbf{n} = 10\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ é normal ao plano $10x - 7y - 2z + 5 = 0$ da equação $\nabla F = \lambda \mathbf{n}$, onde $F(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3xy - z$, resulta o ponto de tangência $P(1/2, -1, 3)$ e a equação do plano tangente é $10x - 7y - 2z - 6 = 0$.

21. Se o plano que passa nos pontos $P(5, 0, 1)$ e $Q(1, 0, 3)$ deve ser tangente à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 7$, então deve-se ter $\nabla F \bullet \mathbf{PQ} = 0$, onde $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 7$. Assim, obtém-se $z = 2x$ e considerando $x = 1$, encontra-se $z = 2$. Levando os valores $x = 1$ e $z = 2$ na equação da superfície, encontra-se $y = \pm 1$ e seleciona-se o ponto de tangência $P(1, 1, 2)$. Agora, determina-se o plano que passa por $P(1, 1, 2)$ e é normal ao vetor $\nabla F(P) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. Esse plano tem equação $2x + 4y + 4z = 14$.

22. Se $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$ é a direção da reta, então $\nabla F = \lambda \mathbf{v}$, onde $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + z - 8$. Assim, resolvendo o sistema $\nabla F = \lambda \mathbf{v}$, obtém-se o ponto de tangência $P = (1/2, -2, -3/4)$ e o plano procurado passa no ponto P e é normal ao vetor $\mathbf{v}$. Sua equação é $12x - 32y + 4z = 67$.

23. O vetor $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ é normal ao plano $3x + y + 2z - 1 = 0$ e se $F(x, y, z) = 3x^2 - y^2 - z$, então $\nabla F = \lambda \mathbf{n}$ e resolvendo essa equação encontra-se o ponto de tangência $(-1/4, 1/4, 1/8)$ e o plano tangente é $3x + y + 2z + 5/8 = 0$.

24. Se $F(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y - z$, então $\nabla F = (2x - y - 2)\mathbf{i} + (-x + 2y + 4)\mathbf{j} - \mathbf{k}$, e como o plano tangente deve ser horizontal, então $\nabla F = \lambda \mathbf{k}$, de onde resulta $x = 0$, $y = -2$ e $z = 4$. Portanto, o plano horizontal que passa em $P(0, -2, 4)$ é $z = 4$.

25. Se $P(a, b, c)$ é um ponto da esfera e $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, então$\nabla F(P) = 2\overrightarrow{OP}$ e a reta normal em P é dada por $\overrightarrow{PQ} = t\nabla F(P)$, $t \in \mathbb{R}$, isto é,

$$x = a + 2at, \quad y = b + 2bt \text{ e } z = c + 2ct.$$

Em $t = -1/2$, obtém-se o ponto $O(0, 0, 0)$ da reta que é o centro da esfera.

26. A temperatura $T(x, y)$ aumenta mais rapidamente na direção $\nabla T(1, 1) = -50\mathbf{i} - 50\mathbf{j}$, com velocidade $|\nabla T(1, 1)| = 50\sqrt{2}\ {}^\circ C/cm$.

27. A derivada direcional $D_{\mathbf{u}} w(P)$ mede a variação de w em relação à distância s, medida na direção $\mathbf{u}$. Portanto, a taxa de variação de w, em relação ao tempo t, é

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{ds}\frac{ds}{dt} = (\nabla w(P) \bullet \mathbf{u})\frac{ds}{dt}.$$

28. A profundidade permanece a mesma quando $\tan\theta = p_y/p_x = m$, com inclinação m constante. Assim,
$$m = \frac{-2y}{-2x} \Rightarrow y = mx.$$
Em particular, no ponto $A\,(4,9)$, obtemos $m = \frac{9}{4}$ e $y = \frac{9}{4}x$.

29. Confira o Exercício 27 da Seçao 2.4.

30. Confira o Exercício 27 da Seçao 2.4. $\quad -\cos\left(\sqrt{3}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{3}\right).$

3. Derivadas: aplicações

Neste Capítulo vamos aplicar os conceitos e regras envolvendo funções de várias variáveis, abordados nos capítulos anteriores, a problemas práticos de maximizar e minimizar funções, derivar implicitamente uma equação contendo várias variáveis, etc., com aplicações em Economia, Administração, Engenharia e outras áreas do conhecimento. Alguns problemas serão modelados e resolvidos, ocasião em que encontraremos os valores máximos e mínimos de funções reais de várias variáveis reais e descobriremos onde eles ocorrem; por exemplo, determinaremos a maior temperatura de uma placa de metal aquecida e em que ponto da placa a temperatura máxima ocorre. Outro problema que será resolvido consiste em determinar onde uma dada superfície atinge seu ponto mais alto sobre uma região do plano. Responderemos a essas questões usando as derivadas parciais de algumas funções apropriadas. Além disso, veremos o Método dos Multiplicadores de Lagrange[7], um poderoso método para encontrar os valores de máximo e mínimo de funções sujeitas a condições ou vínculos externos; por exemplo, dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, qual aquele de maior área? Suponhamos que os lados do triângulo sejam x, y e z, de modo que o perímetro fixo do triângulo é dado por $2p = x + y + z$, e queremos encontrar o ponto $P(x, y, z)$ que maximiza a função $A(x, y, z)$, área do triângulo, dada pela *fórmula de Heron*[8]

$$A(x, y, z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Outro problema envolvendo área pode assim ser formulado: suponhamos que uma região R_{xy} do plano xy seja transformada em uma região R_{uv} do plano uv, por meio de uma transformação $T : \mathbb{R}^2_{xy} \to \mathbb{R}^2_{uv}$, que pode ser linear ou não, e que desejamos saber como as áreas $A(R_{xy})$ e $A(R_{uv})$ estão relacionadas. Este é um problema que envolve *Jacobianos* e que será tratado oportunamente.

3.1 Máximos e Mínimos

Os conceitos e resultados apresentados a seguir para funções de duas variáveis reais são, em sua maioria, facilmente generalizados para funções de três ou mais variáveis reais. No que se segue, $z = f(x, y)$ representa uma função real de duas variáveis reais, definida em um subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definição 3.1 *Um ponto P, interior ao conjunto D, é um ponto de máximo local, ou máximo relativo de f, quando existir uma δ-vizinhança $V_\delta(P)$ do ponto P, tal que*

$$f(Q) \leq f(P), \ \forall \ Q \in V_\delta(P).$$

Neste caso, $f(P)$ é o valor máximo atingido por f em $V_\delta(P)$. Quando ocorrer

$$f(Q) \leq f(P), \ \forall \ Q \in D,$$

diremos que P é um ponto de máximo global, ou máximo absoluto de f, e $f(P)$ será o valor máximo de f em D.

[7] Joseph Louis Lagrange (1736-1813), matemático francês.
[8] Heron de Alexandria (aproximadamente 100 anos d. C.)

Definição 3.2 *Um ponto P interior ao conjunto D é um ponto de mínimo local, ou mínimo relativo de f, quando existir uma δ-vizinhança $V_\delta(P)$ do ponto P, tal que*

$$f(Q) \geq f(P), \ \forall \ Q \in V_\delta(P).$$

Neste caso, $f(P)$ é o valor mínimo atingido por f em $V_\delta(P)$. Quando ocorrer

$$f(Q) \geq f(P), \ \forall \ Q \in D,$$

diremos que P é um ponto de mínimo global, ou mínimo absoluto de f, e $f(P)$ será o valor mínimo de f em D.

Um ponto de máximo ou minimo de f será denominado *ponto extremo*. É claro que um extremo absoluto interior ao domínio da função é um extremo local e existem extremos locais que não são absolutos. O seguinte quadro resume os conceitos de extremos locais e absolutos de $z = f(x, y)$:

$$\begin{array}{lcl}
f(Q) \leq f(P), \ \forall \ Q \in V_\delta(P) & \longrightarrow & P \text{ é ponto de máximo local} \\
f(Q) \leq f(P), \ \forall \ Q \in D & \longrightarrow & P \text{ é ponto de máximo absoluto} \\
f(Q) \geq f(P), \ \forall \ Q \in V_\delta(P) & \longrightarrow & P \text{ é ponto de mínimo local} \\
f(Q) \geq f(P), \ \forall \ Q \in D & \longrightarrow & P \text{ é ponto de mínimo absoluto}
\end{array}$$

e a Figura 3.1 ilustra as diversas situações: P_1 e P_5 são pontos de máximo local e P_3 ponto de máximo absoluto; P_2 é ponto de mínimo absoluto e P_4 ponto de mínimo local.

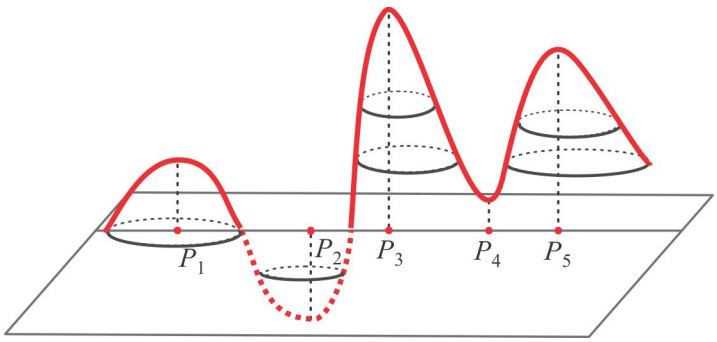


Figura 3.1: Ilustração dos pontos extremos.

Exemplo 3.3 *A origem é um ponto de mínimo absoluto de $f(x, y) = x^2 + y^2$ e de máximo absoluto de $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ em $\mathbb{R}^2$. De fato, isto decorre do seguinte*

1. $f(0, 0) = 0$ *e* $f(x, y) \geq 0, \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $g(0, 0) = 1$ *e* $g(x, y) \leq 1, \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

O valor mínimo de f é zero e o valor máximo de g é 1. A Figura 3.2 ilustra nossas afirmações. ■

Com relação ao Exemplo 3.3, ressaltamos que

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} g(x, y) = -\infty,$$

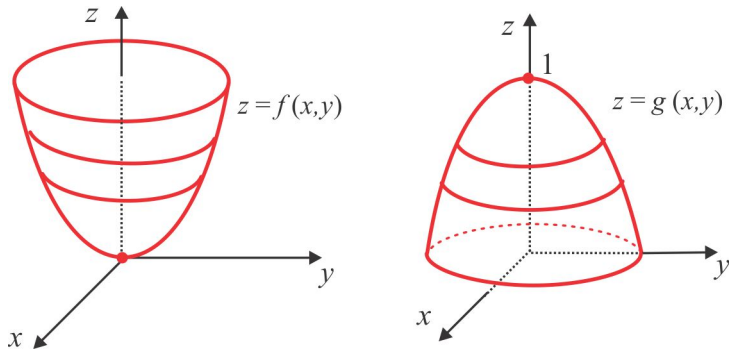


Figura 3.2: Máximo e mínimo absolutos.

de onde concluímos que $f(x,y)$ não tem máximo absoluto, porque seus valores tornam-se arbitrariamente grandes ($\uparrow +\infty$), enquanto $g(x,y)$ não tem mínimo absoluto, porque seus valores tornam-se arbitrariamente pequenos ($\downarrow -\infty$). Essa é uma boa maneira de mostrar que uma dada função $f(x,y)$ não tem extremos absolutos. Se ao longo de um caminho γ o limite de f for $+\infty$, então a função f não terá máximo absoluto; se o limite de f ao longo de γ for $-\infty$, a função f não terá mínimo absoluto.

Exemplo 3.4 *A origem* $(0,0)$ *não é máximo local nem mínimo local de* $z = f(x,y) = x^2 - y^2$.

Solução Consideremos $V_\delta(O)$ uma vizinhança qualquer da origem. Nos pontos $P(x,0)$ dessa vizinhança temos $f(x,0) = x^2$, de modo que f assume valores positivos arbitrariamente próximos de zero; nos pontos $Q(0,y)$ da mesma vizinhança temos que $f(0,y) = -y^2$ e nesses pontos f assume valores negativos e arbitrariamente próximos de zero. Como $f(0,0) = 0$, deduzimos que a origem $O(0,0)$ não é ponto de máximo local nem de mínimo local de f. Por outro lado,

$$\lim_{x\to\infty} f(x,0) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y\to\infty} f(0,y) = -\infty$$

o que mostra que f não tem ponto de máximo absoluto nem de mínimo absoluto. ■

Exemplo 3.5 (usando as curvas de nível) *As curvas de nível de* $f(x,y) = 2x - y$ *podem ser usadas para selecionar candidatos a pontos extremos no domínio*

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le y \ \text{ e } \ x + y \le 3\}.$$

Solução A Figura 3.3 exibe as curvas de nível γ_1, γ_2, e γ_3, passando por $A(0,3)$, $B(3/2,3/2)$ e $O(0,0)$, respectivamente. Observando o crescimento de z, é razoável pensar em $A(0,3)$ como um ponto de mínimo e em $B(3/2,3/2)$ como um ponto de máximo. Para comprovar nossa suspeita, observamos que

$$\begin{aligned} f(P) - f(A) &= f(x,y) - f(0,3) = 2x - y + 3 = \underbrace{2x}_{+} + \underbrace{3 - y}_{+} \ge 0 \quad \text{e} \\ f(P) - f(B) &= f(x,y) - f(3/2,3/2) = 2x - y - 3/2 = \underbrace{x - y}_{-} + \underbrace{x - 3/2}_{-} \le 0, \end{aligned}$$

seja qual for o ponto $P(x,y)$ no conjunto D. Logo, $A(0,3)$ é ponto de mínimo absoluto e $B(3/2,3/2)$ é ponto de máximo absoluto.

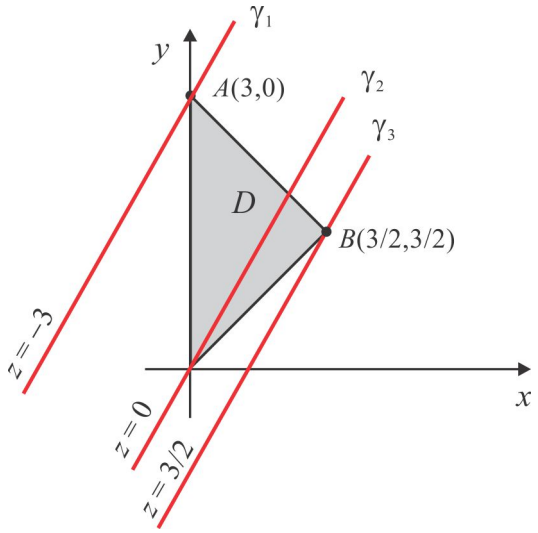


Figura 3.3: Extremos absolutos de $z = 2x - y$.

Exemplo 3.6 *Encontrar os extremos locais e/ou absolutos da função $z = f(x,y)$ definida em $\mathbb{R}^2$ por*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & se\ \ x^2 + y^2 \leq 4 \\ 1 - x^2 - (y-3)^2, & se\ \ x^2 + y^2 > 4. \end{cases}$$

Solução Em primeiro lugar, observamos que $f(x,y) \leq 4$, para todo ponto (x,y), e nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ a função f atinge o seu valor máximo 4. No disco aberto $x^2 + y^2 < 4$, a função f atinge seu valor mínimo na origem, isto é, $(0,0)$ é um ponto de mínimo local. A função não tem mínimo absoluto, porque $\lim_{x\to\infty} f(x,3) = -\infty$ e no aberto $x^2 + y^2 > 4$, temos que

$$f(x,y) = 1 - x^2 - (y-3)^2 \leq 1 \quad \text{e} \quad f(0,3) = 1$$

e, portanto, f tem um ponto de máximo local em $P(0,3)$. ■

Observação 3.7 *Um fato que nos parece óbvio é que se $f(P) \leq k$, $\forall\ P \in X$, e no ponto Q do conjunto X a função f atinge o valor k, isto é, $f(Q) = k$, então Q é um ponto de máximo de f em X. Da mesma forma, se $f(P) \geq k$, $\forall\ P \in X$, e no ponto Q do conjunto X temos $f(Q) = k$, então Q é um ponto de mínimo de f em X.*

Definição 3.8 *Seja $z = f(x,y)$ uma função definida em um subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e seja $P(a,b)$ um ponto do interior do conjunto D. O ponto P denomina-se ponto crítico ou ponto estacionário de f se $\nabla f(P) = \mathbf{0}$ ou $\nabla f(P)$ não estiver definido.*

Exemplo 3.9 *O único ponto crítico de $f(x,y) = x^2 - y^2$ é $(0,0)$. De fato, $\nabla f(x,y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ e, portanto, $\nabla f(x,y) = \mathbf{0}$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$.* ■

Exemplo 3.10 *Verificar que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$, e $f(0,0) = 0$, não tem derivada parcial em seu único ponto crítico $(0,0)$.*

Solução Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$, temos

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = f_x(y, x) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e nesses pontos $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$. Por outro lado,

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \pm 1,$$

de onde resulta que $f_x(0, 0)$ não existe. Logo, $\nabla f(0, 0)$ não está definido e, assim, a origem é o único ponto crítico de f. ■

Sobre os pontos críticos são necessárias as seguintes considerações:

1. O problema de encontrar pontos críticos de uma função diferenciável se reduz a resolver a equação vetorial $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. Por que os pontos críticos são importantes? Como veremos adiante, os possíveis extremos locais de uma função diferenciável estão entre seus pontos críticos.

3. Finalmente, ressaltamos que um ponto crítico não é, necessariamente, um extremo local. A função do Exemplo 3.4 tem $(0, 0)$ como único ponto crítico e este não é máximo nem mínimo local. Um tal ponto crítico denomina-se *Ponto de Sela*. Um ponto de sela é, portanto, um ponto crítico que não é extremo local.

Teorema 3.11 *Se $P(a, b)$ é um extremo local (máximo ou mínimo) de uma função diferenciável $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então $D_{\mathbf{u}} f(P) = \mathbf{0}$, em qualquer direção $\mathbf{u}$. Em particular, $\nabla f(P) = \mathbf{0}$, isto é, P é um ponto crítico de f.*

Demonstração Suponhamos que $P(a, b)$ seja um ponto de máximo local de f e seja $\mathbf{u}$ uma direção unitária em $\mathbb{R}^2$. Existe uma δ-vizinhança $V_\delta(P)$, do ponto P, tal que

$$f(Q) \leq f(P), \ \ \forall \ Q(x, y) \in V_\delta(P),$$

e se considerarmos δ suficientemente pequeno de modo que $P + t\mathbf{u}$ esteja em $V_\delta(P)$, para $|t| < \delta$, teremos $f(P + t\mathbf{u}) \leq f(P)$, $|t| < \delta$. A função de uma variável $g(t) = f(P + t\mathbf{u})$, $-\delta < t < \delta$, tem um máximo local em $t = 0$ e, sendo assim, $g'(0) = 0$. Ora, da Regra da Cadeia resulta

$$g'(t) = \nabla f(P + t\mathbf{u}) \bullet \mathbf{u}$$

e a condição $g'(0) = 0$ acarreta $\nabla f(P) \bullet \mathbf{u} = 0$, isto é, $D_{\mathbf{u}} f(P) = 0$. ■

Exemplo 3.12 *Localizar os pontos críticos da função $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$.*

Solução A função f é diferenciável e seus pontos críticos, caso exista algum, são as soluções do sistema $f_x = 0$, $f_y = 0$ que, neste caso, se reduz a

$$\begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 & \text{(I)} \\ 3y^2 - 3 = 0. & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) segue que $x = 0$ ou $x = 1$ e de (II) obtemos $y = 1$ ou $y = -1$. A combinação desses valores de x e y resulta nos pontos críticos $P_1(0, 1)$, $P_2(0, -1)$, $P_3(1, 1)$ e $P_4(1, -1)$.

Exemplo 3.13 *Localizar os pontos críticos de* $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$ *no retângulo aberto* $D: 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi$.

Solução Os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 0 = f_x = \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x+y) & \text{(I)} \\ 0 = f_y = \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x+y) & \text{(II)} \end{cases}$$

e no domínio D temos que $\operatorname{sen} x \neq 0$ e $\operatorname{sen} y \neq 0$. Por outro lado, $\operatorname{sen}(x+y) \neq 0$, do contrário teríamos, por (I), que $\cos(x+y) = 0$, o que não é possível, pois as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ não se anulam simultaneamente. Subtraindo (I) de (II), resulta

$$\operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen}(x+y) = \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y). \tag{3.1}$$

e de (3.1) obtemos $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} y$ e, portanto, $x = y$. De (II), com $x = y$, vem

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{sen}(2x) + (\operatorname{sen} x)^2 \cos(2x) &= 0 \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen} x \left[\cos x \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x \cos(2x)\right] &= 0 \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(3x) &= 0 \end{aligned}$$

e como $0 < x < \pi$, segue que $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x = 0$ se, e só se, $3x = \pi$ ou $3x = 2\pi$ e, portanto, $x = \pi/3$ ou $x = 2\pi/3$. Considerando que $x = y$, temos os pontos $P_1(\pi/3, \pi/3)$ e $P_2(2\pi/3, 2\pi/3)$ e observamos que apenas o ponto $P_1(\pi/3, \pi/3)$ está no domínio D, sendo este o único ponto crítico de f em D. ■

Exemplo 3.14 *Verificar que a função* $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$ *não tem ponto crítico na região* $D: 0 < x^2 + y^2 \leq 1$. *Há extremos absolutos de* f *em* D*?*

Solução Na região D as derivadas parciais de f são

$$f_x = \frac{x\left(x^2+y^2-2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \text{e} \qquad f_y = \frac{y\left(x^2+y^2-2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

que não se anulam simultaneamente em ponto algum de D, pois em D temos $x^2+y^2-2 < 0$ e $\nabla f = \mathbf{0}$ acarretaria $x = y = 0$. Nos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 1$, a função f atinge seu valor mínimo 0. Por outro lado, f não tem máximo absoluto em D, já que $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = +\infty$. ■

3.1.1 Classificação dos Pontos Críticos

A natureza de um ponto crítico será estabelecida pelo *Teste do Hessiano*, devido a Otto Hesse,[9] e também na versão conhecida como *Teste da Segunda Derivada*. Vamos recordar o Teste da Segunda Derivada no cálculo de uma variável, para compararmos com o teste no caso de funções de duas variáveis. Se c é um ponto crítico de uma função $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, duas vêzes derivável, então:

1. se $f''(c) > 0$, então c é um ponto de mínimo local de f;

2. se $f''(c) < 0$, então c é um ponto de máximo local de f.

[9] Ludwig Otto Hesse (1811 – 1874) matemático alemão.

Suponhamos, agora, que $z = f(x, y)$ seja uma função parcialmente derivável até a segunda ordem em um domínio D do $\mathbb{R}^2$. A *matriz Hessiana* de f no ponto $P(a, b)$ é, por definição, a matriz 2×2

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{bmatrix},$$

cujo determinante é

$$\det \mathcal{H}(P) = f_{xx}(P) f_{yy}(P) - f_{xy}(P) f_{yx}(P).$$

No caso em que $f_{xy}(P) = f_{yx}(P)$, e isso certamente ocorrerá se as derivadas de segunda ordem forem contínuas, então

$$\det \mathcal{H}(P) = f_{xx}(P) f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^2. \tag{3.2}$$

A diferenciabilidade de f no ponto P acarreta

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = f_x(a, b) h + f_y(a, b) k + E(h, k), \tag{3.3}$$

onde a razão $E(h, k) / \sqrt{h^2 + k^2}$ tende para zero, com $(h, k) \to (0, 0)$. Se P é um ponto crítico de f, então fazendo $H = (h, k)$ segue de (3.3) que

$$f(P + H) - f(P) = E(h, k)$$

e a natureza (máximo local, mínimo local ou sela) do ponto crítico P é determinada pelo sinal de $f(P + H) - f(P)$ e, naturalmente, depende do sinal do erro $E(h, k)$.

Para motivar o Teste do Hessiano, vamos reconsiderar três casos simples já abordados nos exemplos. Cada uma das funções

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^2 - y^2,$$

tem a origem $P(0, 0)$ como único ponto crítico e, conforme vimos nos exemplos, $P(0, 0)$ é mínimo local de f, máximo local de g e um ponto de sela da função h. Na tabela a seguir mostramos os valores das derivadas parciais de segunda ordem e do determinante Hessiano, na origem, para cada uma dessas funções.

	$\partial_{xx}(P)$	$\partial_{xy}(P)$	$\partial_{yy}(P)$	$\det \mathcal{H}(P)$	Natureza
$f = x^2 + y^2$	2	0	2	4	mínimo local
$g = 1 - x^2 - y^2$	-2	0	-2	4	máximo local
$h = x^2 - y^2$	2	0	-2	-4	sela

A natureza do ponto crítico na tabela está relacionada aos sinais da derivada parcial $\partial_{xx}(P)$ e do determinante Hessiano $\det \mathcal{H}(P)$, mais precisamente:

1. se $\det \mathcal{H}(P) > 0$ e $f_{xx}(P) > 0$, então o ponto crítico P é um mínimo local;

2. se $\det \mathcal{H}(P) > 0$ e $f_{xx}(P) < 0$, então o ponto crítico P é um máximo local;

3. se $\det \mathcal{H}(P) < 0$, então o ponto crítico P é um ponto de sela;

Antes de formalizar o teste para classificar o ponto crítico, vejamos alguns preliminares algébricos. Dada uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]_{n\times n}$, os *autovalores* da matriz M são as raízes do polinômio $p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$, denominado *polinômio característico* de M, onde I representa a matriz identidade $n \times n$. No caso $n = 2$, temos

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e o polinômio característico de M é, portanto,

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det M.$$

Não parece óbvio, embora seja verdadeiro, se a matriz M é simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n$, então os autovalores de M são todos reais

Exemplo 3.15 *Encontrar os autovalores da matriz*

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução Vemos que $a_{11} = -2$, $a_{22} = 1$ e $a_{12} = a_{21} = 2$ e, portanto, a matriz M é simétrica. Seus autovalores são as raízes reais da equação $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, isto é, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. ■

Suponhamos que M seja a matriz Hessiana $\mathcal{H}(P)$ de uma função $z = f(x, y)$, com derivadas mistas $f_{xy}(P)$ e $f_{yx}(P)$ iguais, o que torna a matriz simétrica, e representemos por λ_1 e λ_2 os autovalores reais de $\mathcal{H}(P)$, isto é, λ_1 e λ_2 são as raízes da equação

$$\lambda^2 - [f_{xx}(P) + f_{yy}(P)]\lambda + \det \mathcal{H}(P) = 0,$$

onde o determinante Hessiano $\det \mathcal{H}(P)$ é dado por (3.2). Temos que:

1. $\det \mathcal{H}(P) < 0 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1$ e λ_2 tem sinais opostos. Então, P é um ponto de sela se, e só se, λ_1 e λ_2 tem sinais opostos;

2. $\det \mathcal{H}(P) > 0 \Leftrightarrow f_{xx}(P) f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1$ e λ_2 têm o mesmo sinal.

   (a) Se λ_1 e λ_2 forem positivos, então

   $$f_{xx}(P) + f_{yy}(P) = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$$

   e, portanto, $f_{xx}(P)$ e $f_{yy}(P)$ são positivos, já que $f_{xx}(P) f_{yy}(P) > f_{xy}(P)^2$. Neste caso, o ponto P é um mínimo local.

   (b) Da mesma forma, se λ_1 e λ_2 forem negativos, então $f_{xx}(P)$ e $f_{yy}(P)$ são negativos e, neste caso, o ponto P é um máximo local.

A seguinte versão do Teste do Hessiano, conhecido como Teste da Segunda Derivada, não faz referência explícita aos autovalores da matriz Hessiana, embora eles estejam presentes. Observamos que a derivada parcial f_{xx} desempenha o papel de f'' no teste do ponto crítico no cálculo de uma variável.

Teorema 3.16 (Teste da Segunda Derivada) *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em uma δ-vizinhança de um ponto crítico $P(a,b)$, e sejam*

$$A = f_{xx}(P), \quad B = f_{xy}(P) = f_{yx}(P) \quad e \quad C = f_{yy}(P).$$

Então:

1. *Se $B^2 - AC < 0$ e $A < 0$, então P é um ponto de máximo local de f.*
2. *Se $B^2 - AC < 0$ e $A > 0$, então P é um ponto de mínimo local de f.*
3. *Se $B^2 - AC > 0$, então P é um ponto de sela de f.*
4. *Se $B^2 - AC = 0$, então o teste não se aplica.*

Observamos que a quantidade $AC - B^2$ é precisamente $\det \mathcal{H}(P)$. ■

Exemplo 3.17 *No interior do compacto $K = [0,1] \times [0,1]$ a função $f(x,y) = 8x^3 - 3xy + y^3$ tem um único ponto crítico, o qual é um mínimo local de f.*

Solução De fato,

$$\begin{cases} 0 = f_x = 24x^2 - 3y & \text{(I)} \\ 0 = f_y = -3x + 3y^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

e segue de (I) que $y = 8x^2$ e substituindo em (II), obtemos

$$-x + 64x^4 = 0 \Rightarrow x\left(-1 + 64x^3\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1/4$$

e $P(1/4, 1/2)$ é o único ponto crítico de f no interior do compacto K. Para classificá-lo, notamos que

$$f_{xx} = 48x, \ f_{xy} = f_{yx} = -3 \ \text{ e } f_{yy} = 6y$$

e, portanto, $A = f_{xx}(P) = 12$, $B = f_{xy}(P) = f_{yx}(P) = -3$ e $C = f_{yy}(P) = 3$. Assim, $A > 0$ e $B^2 - AC = -27 < 0$ e o ponto P é um mínimo local. ■

Exemplo 3.18 *Quando $B^2 - AC = 0$ o teste da derivada segunda não dá informação sobre a natureza do ponto crítico. Por exemplo, a origem $O(0,0)$ é um ponto de mínimo local de $f(x,y) = x^4 + y^4$ e, contudo, $B^2 - AC = 0$.* ■

Exemplo 3.19 *Classificar os pontos críticos $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,1)$ e $P_4(1,-1)$ da função $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$ do Exemplo 3.12.*

Solução Temos

$$f_{xx} = 12x - 6, \ f_{xy} = f_{yx} = 0 \ \text{ e } f_{yy} = 6y$$

e como há vários pontos críticos é aconselhável construir uma tabela de classificação.

$P(a,b)$	$A = f_{xx}(P)$	$B = f_{xy}(P)$	$C = f_{yy}(P)$	$B^2 - AC$	Natureza
$P_1(0,1)$	-6	0	6	36	sela
$P_2(0,-1)$	-6	0	-6	-36	máximo local
$P_3(1,1)$	6	0	6	-36	mínimo local
$P_4(1,-1)$	6	0	-6	36	sela

■

Exemplo 3.20 *Classificar os pontos críticos da função* $f(x,y) = x^4 + 2x^3y^2 + 4x$.

Solução Os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 0 = f_x = 4x^3 + 6x^2y^2 + 4 & \text{(I)} \\ 0 = f_y = 4x^3y. & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) segue que $x = 0$ ou $y = 0$ e o valor $x = 0$ é incompatível com (I). Logo, $y = 0$ e substituindo em (I), encontramos $x = -1$. O ponto crítico de f é $P(-1,0)$. Temos

$$A = f_{xx}(-1,0) = 12, \quad B = f_{xy}(-1,0) = 0 \quad \text{e} \quad C = f_{yy}(-1,0) = -4$$

e, portanto, $B^2 - AC = 48 > 0$ e o ponto $(-1,0)$ é um ponto de sela. ■

Generalização do Teste

Vimos no caso de funções de duas variáveis que a natureza do ponto crítico é determinada pelos sinais dos autovalores da matriz Hessiana. No caso $n = 3$, isto é, para funções de três variáveis o resultado é análogo. Suponhamos que $f(x,y,z)$ tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas, para que a matriz Hessiana $\mathcal{H}(P)$ seja simétrica. A natureza de um ponto crítico de f será determinada pelos sinais dos autovalores de $\mathcal{H}(P)$. Neste caso, a matriz Hessiana é

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) & f_{xz}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) & f_{yz}(P) \\ f_{zx}(P) & f_{zy}(P) & f_{zz}(P) \end{bmatrix}$$

e temos o seguinte critério para classificar os pontos críticos de f :

1. Se os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 são positivos, então o ponto P é um mínimo local;
2. Se os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 são negativos, então o ponto P é um máximo local;
3. Se dois dos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 têm sinais opostos, então o ponto P é uma sela;

Exemplo 3.21 *Localizar e classificar os pontos críticos da* $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz^2$.

Solução Os possíveis pontos críticos são as soluções da equação vetorial $\nabla f = \mathbf{0}$, a qual é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 0 = f_x = 2x + y & \text{(I)} \\ 0 = f_y = x + z^2 & \text{(II)} \\ 0 = f_z = 2yz. & \text{(III)} \end{cases}$$

De (II) segue que $x = -z^2$ e substituindo em (I) obtemos $y = 2z^2$. Levando esse valor de y em (III), resulta $z = 0$ e o ponto crítico é $P(0,0,0)$. A matriz Hessiana de f em P é

$$\mathcal{H}(P) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e os autovalores de $\mathcal{H}(P)$ são as raízes da equação $\det[\lambda I - \mathcal{H}(P)] = 0$, isto é,

$$\lambda[(\lambda - 2)\lambda - 1] = 0. \tag{3.4}$$

Resolvendo a equação (3.4) encontramos os autovalores $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{2} > 0$ e $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2} < 0$ e como dois autovalores têm sinais opostos, segue que o ponto crítico $P(0,0,0)$ é um ponto de sela da função f. ■

3.1.2 Funções Contínuas em Compactos

Consideremos a função $f(x,y) = x^3 - 3xy + y$, definida no compacto $K = [0,1] \times [0,1]$. É fácil verificar que o ponto $P(1/3, 1/9)$ é o único ponto crítico de f no interior de K e trata-se de um mínimo local. Seria P um mínimo absoluto de f em K? Observamos que $f(P) = 1/27$ e no ponto $Q(1/2, 1/2)$ a função f atinge o valor $-1/8$, menor do que $f(P)$ e, portanto, o ponto P não é mínimo absoluto de f no compacto K; se a função f atingir um valor mínimo em K, esse valor será assumido em um ponto da fronteira de K. Antes de fazer a análise de f na fronteira ∂K, deixe-nos mencionar um resultado importantíssimo de análise matemática, devido a Weierstrass[10], que estabelece a existência de extremos absolutos de uma função contínua em um conjunto compacto.

Teorema 3.22 (Teorema de Weierstrass) *Se $K \subseteq \mathbb{R}^2$ um subconjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f possui ao menos um ponto de máximo e ao menos um ponto de mínimo absolutos em K.* ■

O roteiro para encontrar os extremos absolutos de funções contínuas em conjuntos compactos divide-se em três etapas:

- **Etapa 1:** Localização e classificação dos pontos críticos no interior do compacto.
- **Etapa 2:** Análise da função na fronteira do compacto.
- **Etapa 3:** Avaliação da função nos possíveis pontos extremos.

Exemplo 3.23 *Determinar o máximo e o mínimo da função $f(x,y) = 8x^3 - 3xy + y^3$ no compacto $K = [0,1] \times [0,1]$.*

Solução Vimos no Exemplo 3.17 que f tem um mínimo local em $P(1/4, 1/2)$ e, como veremos, não se trata de um mínimo absoluto. De acordo com o Teorema de Weierstrass a função f tem extremos absolutos e estes estão localizados na fronteira de K, a qual é constituida dos segmentos γ_1, γ_2, γ_3, e γ_4, descritos por:

$$\gamma_1 : \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ y = 0 \end{array} \right. \qquad \gamma_2 : \left| \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ y = 1 \end{array} \right. \qquad \gamma_3 : \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ x = 0 \end{array} \right. \qquad \gamma_4 : \left| \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Em cada segmento, além dos pontos críticos no interior, devemos selecionar os pontos de fronteira correspondentes às extremidades do intervalo.

Sobre $\gamma_1 : f = 8x^3,\ 0 \le x \le 1$, sem ponto crítico no interior do intervalo e selecionamos $P_1(0,0),\ P_2(1,0)$.

Sobre $\gamma_2 : f = 8x^3 - 3x + 1,\ 0 \le x \le 1$, ponto crítico $x_1 = \sqrt{2}/4$ e selecionamos $P_3(1,1),\ P_4(0,1)$ e $P_5\left(\sqrt{2}/4, 1\right)$.

Sobre $\gamma_3 : f = y^3,\ 0 \le y \le 1$, sem ponto crítico no interior do intervalo e selecionamos $P_6(0,0),\ P_7(1,0)$.

[10] Karl Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.

Sobre $\gamma_4 : f = 8 - 3y + y^3,\ 0 \leq y \leq 1$, sem ponto crítico no interior do intervalo e selecionamos $P_8(1,0)$, $P_9(1,1)$.
Os pontos de máximo e mínimo absolutos de f estão entre os pontos:

$$P_1(0,0),\ P_2(0,1),\ P_3(1,1),\ P_5\left(\sqrt{2}/4, 1\right) \text{ e } P_7(1,0).$$

Avaliando a função f nesses pontos, encontramos

$$f(P) = \frac{-1}{8},\quad f(P_1) = 0,\quad f(P_2) = 1,\ f(P_3) = 6,\ f(P_5) = 1 - \sqrt{2},\ \text{e}\ \ f(P_7) = 8$$

e os extremos absolutos de f ocorrem em P_5 (mínimo absoluto) e em P_7 (máximo absoluto). ■

Exemplo 3.24 *Encontrar os extremos da função $f(x,y) = (x-2)^2y + y^2 - y$, no compacto*

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ \ y \geq 0\ \ e\ \ x + y \leq 4\}.$$

Solução Do Teorema de Weierstrass deduzimos que f possui extremos absolutos em K e seguiremos o roteiro para encontrá-los.

Etapa 1: (pontos críticos no interior de K) O(s) ponto(s) crítico(s), caso exista algum, são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 0 = f_x = 2y(x-2) & \text{(I)} \\ 0 = f_y = (x-2)^2 + 2y - 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

e de (I) segue que $x = 2$ ou $y = 0$. Se $x = 2$, obtemos de (II) $y = 1/2$ e selecionamos o ponto $P_1(2, 1/2)$; a condição $y = 0$ é descartada, porque os pontos $P(x,0)$ não estão no interior de K. Temos $f_{xx}(P_1) = 4$, $f_{yy}(P_1) = 2$ e $f_{xy}(P_1) = -4$ e, portanto, $A > 0$ e $B^2 - AC < 0$, de onde deduzimos que P_1 é um ponto de mínimo local.

Etapa 2: (análise de f na fronteira de K) A fronteira de K é constituída dos segmentos γ_1, γ_2, γ_3, como mostra a Figura 3.4, e a análise é feita em cada um deles, separadamente.

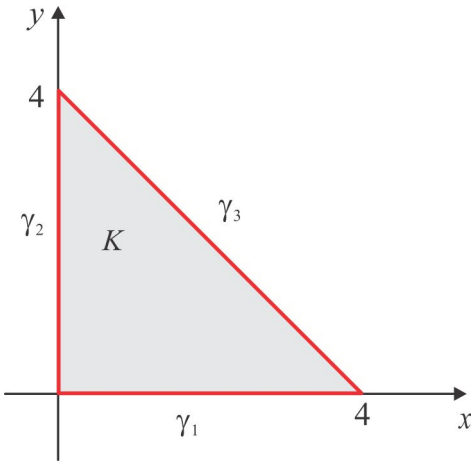


Figura 3.4: Esboço do conjunto K.

Sobre γ_1 temos $y = 0$ e $f(x,0) \equiv 0,\ 0 \leq x \leq 4$.

Sobre γ_2 temos $x = 0$ e $f(0,y) = y^2 + 3y,\ 0 \leq y \leq 4$. Como a função $g(y) = y^2 + 3y$ é crescente no intervalo $0 \leq y \leq 4$, pois $g'(y) > 0$, segue que os extremos absolutos de g ocorrem nas extremidades do intervalo e selecionamos os pontos $P_2(0,0)$ e $P_3(0,4)$.

Sobre γ_3 temos $x = 4-y$ e $f(4-y, y) = y^3-3y^2+3y$, $0 \leq y \leq 4$. Como a função $h(y) = y^3-3y^2+3y$ tem derivada $h'(y) = 3(y-1)^2 > 0$, ela é crescente e os extremos absolutos de h ocorrem nas extremidades do intervalo. Selecionamos $P_4(4,0)$ e $P_5(0,4)$.

Etapa 3: (avaliação de f nos pontos selecionados) Temos

$$f(P_1) = 1/4, \quad f(P_2) = 8, \quad f(P_3) = f(P_5) = 28 \quad \text{e} \quad f(P_4) = 0.$$

Observando os valores assumidos por f concluímos que $P_5(0,4)$ é o ponto de máximo absoluto e os pontos do segmento γ_1, onde f atinge valor zero, são pontos de mínimo absoluto. ■

Exemplo 3.25 *No compacto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$, encontrar o máximo e o mínimo da função*

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Solução A função f é contínua e, portanto, possui extremos absolutos em K. Nos pontos $(x,y) \neq (0,0)$, as derivadas parciais de f são

$$f_x = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{e} \qquad f_y = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

que não se anulam simultaneamente, de modo que f não tem ponto crítico no interior de K e passaremos para a Etapa 2 do roteiro. A fronteira de K é a circunferência $(x-2)^2 + y^2 = 1$, de onde obtemos

$$y^2 = 1 - (x-2)^2 = -3 + 4x - x^2$$

e na fronteira f se reduz à função de uma variável $g(x) = \dfrac{1}{4x-3}$, $1 \leq x \leq 3$, que não tem ponto crítico, de modo que os extremos de f ocorrem nos pontos de fronteira $P_1(1,0)$ e $P_2(3,0)$, indicados na Figura 3.5. Temos $f(P_1) = 1$ e $f(P_2) = 1/9$ e, assim, o valor máximo de f em K é 1, assumido em P_1, enquanto que o valor mínimo é $1/9$ e é assumido no ponto P_2. ■

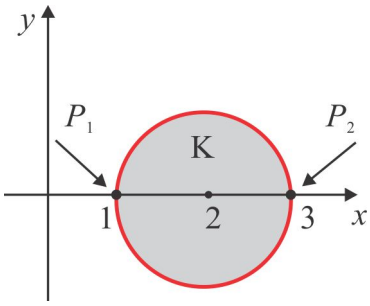


Figura 3.5: Extremos de $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-1}$ em K.

Exemplo 3.26 *Uma placa metálica circular com um metro de raio, colocada com centro na origem $O(0,0)$ do plano xy, é aquecida, de modo que a temperatura em um ponto $P(x,y)$ é dada por*

$$T(x,y) = (16x^2 + 24x + 40y^2)\ ^\circ C.$$

Determinar a temperatura mais alta e a temperatura mais baixa da placa.

Solução A placa pode ser vista como o conjunto compacto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e a função temperatura $T(x, y)$ sendo contínua em K, segue do Teorema de Weierstrass que ela possui extremos absolutos em K. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 0 = T_x = 32x + 24 \\ 0 = T_y = 80y, \end{cases}$$

vemos que $P_1(-3/4, 0)$ é o único ponto crítico de T no interior de K e para classificá-lo, notamos que $A = T_{xx}(P_1) = 32$, $B = T_{xy}(P_1) = 0$ e $C = T_{yy}(P_1) = 80$, de modo que $A > 0$ e $B^2 - AC < 0$, caracterizando P_1 como um ponto de mínimo local. A fronteira de K é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, cujos pontos em coordenadas polares são $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e sobre a fronteira temos

$$g(\theta) = T(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = 16 + 24\cos\theta + 24\operatorname{sen}^2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Os pontos críticos de $g(\theta)$, no intervalo $0 < \theta < 2\pi$, são as soluções da equação

$$g'(\theta) = -24\operatorname{sen}\theta + 48\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -24\operatorname{sen}\theta(1 - 2\cos\theta) = 0,$$

isto é, $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = \pi/3$ e $\theta_3 = 5\pi/6$, que produzem os pontos

$$P_2(-1, 0), \; P_3\left(1/2, \sqrt{3}/2\right), \; P_4\left(1/2, -\sqrt{3}/2\right),$$

respectivamente. Temos

$$g(\theta_1) = -8°C, \quad g(\theta_2) = 46°C \quad \text{e} \quad g(\theta_3) = 46°C$$

e observamos, ainda, que $g(0) = g(2\pi) = 24°C$ e no ponto crítico $P_1(-3/4, 0)$ a temperatura é $T(P_1) = -9°C$. Logo, a temperatura mais baixa é $-9°C$ e ocorre no ponto $P_1(-3/4, 0)$ no interior da placa e a mais alta é $46°C$ e ocorre nos pontos $P_3\left(1/2, \sqrt{3}/2\right)$ e $P_4\left(1/2, -\sqrt{3}/2\right)$ da fronteira ou borda da placa. ■

Exercícios & Complementos.

1. Localize e classifique os pontos críticos da função $z = f(x, y)$ e determine se ela tem extremo absoluto em seu domínio

   (a) $z = xy$
   (b) $z = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$
   (c) $z = xy^2 + x^2y - xy$
   (d) $z = x^2 - xy + y^2$
   (e) $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 6y$
   (f) $z = x^4 + y^3 + 32x - 9y$
   (g) $z = 1 - x^2 - 2y^2$
   (h) $z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 3x - 4y - 3$
   (i) $z = \log(xy) - 2x - 3y$
   (j) $z = x^2 - 2xy + y^2$
   (k) $z = xy^2 + 3y^2 - 3xy + 2x - 4y + 1$
   (l) $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$

2. Verifique que no domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$ a função f do Exercício 1 item (i) não tem mínimo. Qual o maior valor que f assume em D? Construa uma função contínua em D que não possua máximo nem mínimo absolutos.

3. Determine o máximo e o mínimo (absolutos) de $z = f(x, y)$ no conjunto D indicado:

   (a) $z = xy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) $z = x + y$, D é o quadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$.

   (c) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (d) $z = xe^{-x} \cos y$, $D = [-1, 1] \times [-\pi, \pi]$.

   (e) $z = x^2 + 2y^2 - x$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (f) $z = x^3 + y^3 - 3x - 3y$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } |y| \leq 2\}$.

4. Determine o(s) ponto(s) da curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = \operatorname{sen}(t/2)$ mais distante(s) da origem.

5. Quais das funções seguintes tem um máximo ou mínimo em todo plano $\mathbb{R}^2$?

   (a) $z = \exp(x^2 - y^2)$ (b) $z = \exp(-x^2 - y^2)$ (c) $z = x^2 - 2x(\operatorname{sen} y + \cos y)$.

6. Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, a função definida por $f(x, y) = x^2(1 - y)^3 + y^2$. Mostre que f contém um ponto crítico, mas sem máximo ou mínimo absoluto.

7. A temperatura T em um disco $x^2 + y^2 \leq 1$ é dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$. Em que ponto do disco a temperatura é mais alta e em que ponto ela é mais baixa?

8. Mostre que $(0, 0)$ é o único ponto crítico de $f(x, y) = x^2(1 - y)^3 + y^2$, o qual é mínimo local, mas não absoluto.

3.2 Multiplicadores de Lagrange

Na Seção 3.1 abordamos o problema de determinar os pontos de máximo e mínimo de uma função em uma região compacta. Nesta seção vamos apresentar um método para determinar, sob certas condições, os pontos críticos de uma função diferenciável na fronteira de uma região compacta. Para motivar o método, inicialmente vamos considerar o seguinte problema geométrico: encontrar o ponto da curva $\gamma : g(x, y) = 0$ mais próximo da origem. Para resolvê-lo, deixe-nos representar por $f(x, y)$ a distância do ponto $P(x, y)$ à origem. A curva de nível $z = r$ da função $z = f(x, y)$ é constituída dos pontos distantes r unidades da origem. Começando com $r = 0$ e deixando r crescer até o valor em que a curva de nível correspondente tocar a curva γ, então cada ponto de contato é um ponto de γ mais próximo da origem e em cada um desses pontos o gradiente de f é paralelo ao gradiente de g, isto é, existe um escalar λ, tal que $\nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0}$, como sugere a Figura 3.6. Este é um problema de *extremos vinculados ou condicionados*: buscamos o ponto da curva $g = 0$ (vínculo) mais próximo da origem.

De forma geral podemos formular o seguinte problema:

Problema de Extremos Vinculados: *Encontrar os extremos locais de $w = f(x, y, z)$ na superfície $S : g(x, y, z) = 0$ ou, de forma equivalente, encontrar os pontos $P(x, y, z)$ de S para os quais $D_{\mathbf{v}} f(P) = 0$, em qualquer direção v tangente a S em P.*

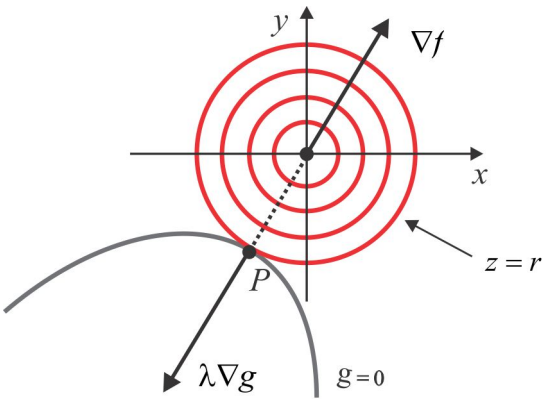


Figura 3.6: Extremos vinculados.

Suponhamos que o ponto P de S seja um ponto crítico de f e consideremos, em S, uma curva suave $\gamma : [-a, a] \to \mathbb{R}^3$ passando pelo ponto P, isto é, $\gamma'(t) \neq 0$ e $\gamma(0) = P$. Sendo P um extremo local de f, então $t = 0$ é um extremo local de $f(\gamma(t))$ e, portanto,

$$\frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right]\Big|_{t=0} = 0, \quad \text{isto é,} \quad \nabla f(P) \bullet \gamma'(0) = 0.$$

O vetor $\mathbf{v} = \gamma'(0)$ sendo tangente à curva $\gamma(t)$ no ponto P, concluímos que $\nabla f(P)$ é ortogonal ao plano tangente à superfície S em P. Ora, $\nabla g(P)$, suposto não nulo, é um vetor ortogonal ao plano tangente e, sendo assim, $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ são paralelos e daí deduzimos que

$$\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}, \tag{3.5}$$

para algum escalar λ real. Os pontos críticos de f na superfície S são, portanto, as soluções da equação vetorial (3.5) e este método de encontrar os pontos críticos de f, sujeita ao vínculo $g = 0$, é devido a Lagrange e, em sua homenagem, o método recebeu o nome de *Método dos Multiplicadores de Lagrange*. O número real λ que figura em (3.5) é denominado *multiplicador de Lagrange*. Formalmente, em dimensão $n = 2$, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.27 (Método dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções com derivadas parciais primeiras contínuas em uma δ-vizinhança $V_\delta(P)$ de um ponto P, e suponhamos que P seja um extremo local de f. Se a curva γ de equação cartesiana $g(x, y) = 0$ passa no ponto P e $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$, então existe um $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}.$$

Demonstração Veremos oportunamente que a condição $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$ propicia à curva γ uma parametrização $\gamma(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, com vetor tangente

$$\gamma'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

e, como vimos, a relação $\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}$ é consequência da Regra da Cadeia. ■

Observação 3.28 *Se considerarmos a função de três variáveis*

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

o Teorema 3.27 estabelece que os extremos locais da função $z = f(x, y)$ na curva $\gamma : g(x, y) = 0$ estão entre os pontos críticos de F, isto é, são soluções do sistema

$$\begin{cases} 0 = F_x = f_x + \lambda g_x \\ 0 = F_y = f_y + \lambda g_y \\ 0 = F_\lambda = g. \end{cases} \tag{3.6}$$

O resultado pode ser estendido para um número qualquer de variáveis.

Observação 3.29 *Ao resolver um problema de extremos vinculados, em primeiro lugar devemos identificar o vínculo $g(x, y) = 0$ e a função que desejamos minimizar ou maximizar. Nos problemas envolvendo distâncias, recomendamos usar, por simplicidade, o quadrado da distância como função a ser minimizada ou maximizada. Um ponto que minimiza (ou maximiza) a distância é o mesmo que minimiza (ou maximiza) o seu quadrado.*

Exemplo 3.30 *Qual o ponto da hipérbole $xy = 1$ mais próximo da origem?*

Solução Neste problema o vínculo é a hipérbole $xy = 1$ e a função que queremos minimizar é $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, que representa a distância do ponto $P(x, y)$ à origem. O cálculo torna-se mais simples se minimizarmos a função $f = x^2 + y^2$, quadrado da distância à origem. O sistema de Lagrange (3.6) é, neste caso,

$$\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 & \text{(I)} \\ 2y + \lambda x = 0 & \text{(II)} \\ xy - 1 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por x, (II) por y e subtraindo os resultados, obtemos $x^2 = y^2$ e, portanto, $y = \pm x$. Substituindo em (III), resulta $x^2 = 1$ ou $x = \pm 1$. Os pontos procurados são $P_1(1, 1)$ e $P_2(-1, -1)$ e a distância mínima é $d = \sqrt{2}$. Para mostrar que P_1 e P_2 são, de fato, pontos de mínimo de f, notamos que $f(P_1) = f(P_2) = 2$ e na hipérbole $xy = 1$ temos $f(x, y) \geq 2$. De fato,

$$f(x, 1/x) = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)^2 \geq 0.$$

Observamos, ainda, que

$$\lim_{x \to \infty} f(x, 1/x) = \lim_{x \to \infty} \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

e isso significa que f não tem máximo na hipérbole, isto é, não há na hipérbole um ponto *mais distante* da origem. ■

Exemplo 3.31 (distância de ponto a reta) *A distância do ponto $P_0(x_0, y_0)$ à reta*

$$r : ax + by + c = 0$$

é dada por

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Solução O vínculo é $g(x, y) = ax + by + c = 0$ e devemos minimizar a função

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

quadrado da distância do ponto $P(x,y)$ da reta ao ponto P_0. O sistema de Lagrange para este caso é

$$\begin{cases} 2(x-x_0)+a\lambda=0 & \text{(I)} \\ 2(y-y_0)+b\lambda=0 & \text{(II)} \\ ax+by+c=0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) e (II) obtemos, respectivamente, $x=x_0-a\lambda/2$ e $y=y_0-b\lambda/2$ que substituídos em (III) resulta

$$\lambda=\frac{2(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}$$

e, portanto,

$$x-x_0=\frac{-a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2} \qquad \text{e} \qquad y-y_0=\frac{-b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}.$$

A distância d procurada é

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Imitando o que fizemos neste Exemplo, pode-se mostrar que a distância do ponto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ao plano $\alpha: ax+by+cz+d=0$ é

$$d(P_0,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.32 *A distância da parábola $y=x^2+1$ à reta $x-y=2$.*

Solução A distância de um ponto $P(x,y)$ da parabóla $y=x^2+1$ à reta $r: x-y-2=0$ é dada por

$$d(P,r)=\frac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$$

e, mais uma vez, vamos minimizar a função $f(x,y)=\frac{1}{2}(x-y-2)^2$, quadrado da distância, sujeita ao vínculo $g(x,y)=y-x^2-1=0$. O sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} x-y-2-2\lambda x=0 & \text{(I)} \\ -x+y+2+\lambda=0 & \text{(II)} \\ y-x^2-1=0 & \text{(III)} \end{cases}$$

e somando (I) e (II), obtemos $\lambda(2x-1)=0$, de onde resulta $\lambda=0$ ou $x=1/2$. Se $\lambda=0$, segue de (I) que $y=x-2$ e levando em (III) chegamos à equação $x^2-x+3=0$, sem solução real. Resta-nos a opção $x=1/2$, o que acarreta por (III) $y=5/4$. Portanto,

$$d(P,r)=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{5}{4}-2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-\frac{11}{4}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{11\sqrt{2}}{8}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.33 *Determinar as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo e lados paralelos aos planos coordenados, que pode ser inscrita no elipsoide*

$$16x^2+4y^2+9z^2=144.$$

Solução Se x, y e z representam os comprimentos dos lados da caixa, a função a ser maximizada é o volume da caixa $f(x,y,z) = 8xyz$, sujeita ao vínculo

$$g(x,y,z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0.$$

Temos

$$\nabla f(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \nabla g(x,y,z) = 32x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} + 18z\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

e o sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} 8yz + 32\lambda x = 0 & \text{(I)} \\ 8xz + 8\lambda y = 0 & \text{(II)} \\ 8xy + 18\lambda z = 0 & \text{(III)} \\ 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por x, (II) por y, (III) por z e somando, obtemos

$$24xyz + 2(16x^2 + 4y^2 + 9z^2)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xyz}{12}$$

e, assim,

$$8yz(1 - \tfrac{1}{3}x^2) = 0, \;\; 8xz(1 - \tfrac{1}{12}y^2) = 0 \;\text{ e }\; 2xy(4 - \tfrac{3}{4}z^2) = 0.$$

Como $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$ temos que $x = \sqrt{3}$, $y = 2\sqrt{3}$ e $z = 4\sqrt{3}/3$ e, portanto, o volume é igual a $64\sqrt{3} \approx 111$ u. v. A Figura 3.7 ilustra a porção da caixa situada no primeiro octante. ■

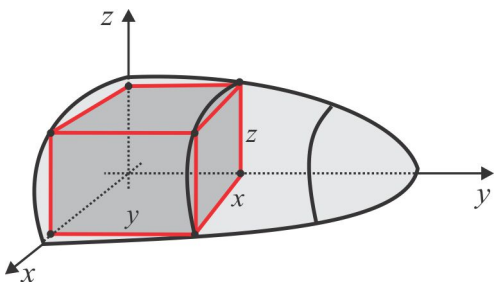


Figura 3.7: Caixa inscrita no elipsoide.

Exemplo 3.34 *Dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero tem a maior área.*

Solução Sejam x, y e z os lados do triângulo, com perímetro $2p = x + y + z$. Portanto, queremos encontrar o ponto $P(x,y,z)$ que maximiza a função área do triângulo, dada pela fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(x-p)(y-p)(z-p)}.$$

Neste caso, devemos maximizar a função $f(x,y,z) = p(x-p)(y-p)(z-p)$, sujeita ao vínculo $g(x,y,z) = x + y + z - 2p = 0$. Temos que $\nabla g = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ e

$$\nabla f(x,y,z) = p(y-p)(z-p)\mathbf{i} + p(x-p)(z-p)\mathbf{j} + p(x-p)(y-p)\mathbf{k}$$

e o sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} p(y-p)(z-p) + \lambda = 0 & \text{(I)} \\ p(x-p)(z-p) + \lambda = 0 & \text{(II)} \\ p(x-p)(y-p) + \lambda = 0 & \text{(III)} \\ x + y + z - 2p = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando (I) por $x-p$, (II) por $y-p$, (III) por $z-p$ e somando, obtemos

$$3p(x-p)(y-p)(z-p)-p\lambda=0,$$

de onde segue que

$$\lambda=3(x-p)(y-p)(z-p).$$

Assim,

$$(y-p)(z-p)(3x-2p)=0,\ \ (x-p)(z-p)(3y-2p)=0\ \text{ e }\ (x-p)(y-p)(3z-2p)=0$$

e, sendo $p>x$, $p>y$ e $p>z$, segue que $x=y=z=2p/3$ e o triângulo é equilátero. ■

Exemplo 3.35 (Média Aritmética × Média Geométrica) *Se x, y e z são números reais positivos, então*

$$\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3},$$

ou seja, a média geométrica é menor ou igual à média aritmética.

Solução Inicialmente vamos determinar três números positivos x, y e z, cuja soma seja k e o produto seja máximo. Maximizaremos a função $f(x,y,z)=xyz$, sujeita ao vínculo $g(x,y,z)=x+y+z-k=0$. Temos $\nabla g=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}\neq\mathbf{0}$ e $\nabla f=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ e o sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} yz+\lambda=0 & \text{(I)}\\ xz+\lambda=0 & \text{(II)}\\ xy+\lambda=0 & \text{(III)}\\ x+y+z-k=0 & \text{(IV)}\end{cases}$$

Multiplicando (I) por x, (II) por y, (III) por z e somando os resultados, resulta $3xyz+k\lambda=0$ e, por conseguinte, $\lambda=-\frac{3}{k}xyz$. Assim,

$$yz(1-\tfrac{3}{k}x)=0,\ \ xz(1-\frac{3}{k}y)=0\ \text{ e }\ xy(1-\tfrac{3}{k}z)=0$$

e como $x>0$, $y>0$ e $z>0$, obtemos $x=y=z=k/3$. Sendo $P\,(k/3,k/3,k/3)$ o ponto de máximo de f, então

$$f(x,y,z)\leq f(k,k,k)=\frac{k^3}{27},$$

para todos x, y, z positivos e tais que $x+y+z=k$, ou seja,

$$xyz\leq\frac{k^3}{27}\Leftrightarrow\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{k}{3}\Leftrightarrow\sqrt[3]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{3}. \tag{3.7}$$

A relação (3.7) pode ser generalizada para n números reais positivos $x_1,\ldots,x_n$, usando um raciocínio semelhante, aplicado à função $f(x_1,\ldots,x_n)=x_1\cdots x_n$ (veja o Exercício 24). ■

Exemplo 3.36 *A distância da origem à curva $\gamma: x^2-(y-1)^3=0$, com $y\geq 1$.*

Solução Observando o gráfico da curva $y=1+\sqrt[3]{x^2}$, na Figura 3.8, vemos que o ponto $P\,(0,1)$ é o ponto da curva γ mais próximo da origem.

A distância da origem a um ponto $P(x,y)$ da curva γ é $d(O,P) = \sqrt{x^2+y^2}$ e minimizaremos a função $f(x,y) = x^2+y^2$, sujeita ao vínculo $g(x,y) = x^2-(y-1)^3 = 0$. É fácil verificar que $\nabla f(x,y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ e $\nabla g(x,y) = 2x\mathbf{i} - 3(y-1)^2\mathbf{j}$ e temos que $\nabla g(x,y) = \mathbf{0}$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 1$. Se existisse um número λ tal que $\nabla f(x,y) + \lambda\nabla g(x,y) = \mathbf{0}$, teríamos

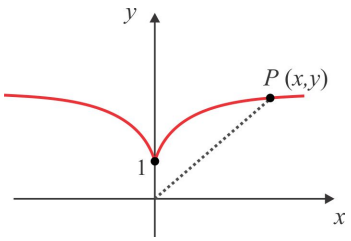


Figura 3.8: Curva $y = 1 + x^{2/3}$

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 & \text{(I)} \\ 2y - 3\lambda(y-1)^2 = 0 & \text{(II)} \\ x^2 - (y-1)^3 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) obtemos $x = 0$ ou $\lambda = -1$; se $x = 0$, segue de (III) que $y = 1$ e de (II) resulta $2 = 0$, o que é impossível; o valor $\lambda = -1$ é incompatível com a equação (II) e, portanto, o sistema de Lagrange não tem solução. Este exemplo mostra que a hipótese $\nabla g(x,y) \neq \mathbf{0}$ no Teorema 3.27 não pode ser omitida. ■

3.2.1 Considerações Finais

Encerramos esta seção com algumas considerações que julgamos relevantes sobre o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

1. Quando o vínculo $S : g = 0$ está contido no domínio de f, então os pontos críticos de f em S são os pontos críticos da restrição $f|_S$, já que

$$\nabla f(P) = \mathbf{0} \Rightarrow \nabla f(P) \bullet \mathbf{v} = 0,$$

para todo vetor $\mathbf{v}$ no plano tangente a S em P. A recíproca não é verdadeira, como mostra o exemplo: a função $f(x,y) = y$ não tem ponto crítico e, contudo, $P(0,\pm 1)$ são pontos críticos da restrição de f ao vínculo $S : x^2+y^2 = 1$, porque $\nabla f(P) \bullet \mathbf{v} = (\mathbf{j}) \bullet (\pm\mathbf{i}) = 0$.

2. A condição $\nabla f(P) + \lambda\nabla g(P) = \mathbf{0}$ significa que a superfície (ou curva, se $n = 2$) $S : g = 0$ é tangente à superfície (ou curva) de nível de f , que passa no ponto estacionário de $f|_S$.

3. Se o vínculo S é compacto e existirem em S apenas dois pontos críticos de f satisfazendo ao sistema de Lagrange $\nabla f(P) + \lambda\nabla g(P) = \mathbf{0}$, então um deles é o ponto de máximo e o outro é ponto de mínimo. Em alguns problemas práticos, pode não haver ponto de máximo ou de mínimo, como ocorre com alguns problemas envolvendo distância. Por exemplo, não existe um ponto da reta $x + y = 1$ mais distante da origem e neste caso a solução do sistema de Lagrange é um ponto de mínimo.

Para classificar os pontos críticos da restrição $f|_S$ mencionamos dois resultados.

Teorema 3.37 *Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções com derivadas parciais de segunda ordem contínuas e suponhamos que o conjunto de nível*

$$S = \{P \in D : g(P) = c\}$$

seja não vazio. Dado P em S tal que $\nabla g(P) \neq \mathbf{0}$ e $\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) = \mathbf{0}$, consideramos a função $h = f + \lambda g$ e definimos

$$d(P) = \det \begin{bmatrix} 0 & g_x(P) & g_y(P) \\ g_x(P) & h_{xx}(P) & h_{xy}(P) \\ g_y(P) & h_{xy}(P) & h_{yy}(P) \end{bmatrix}.$$

1. *Se $d(P) > 0$, então P é um ponto de máximo de $f|_S$.*
2. *Se $d(P) < 0$, então P é um ponto de mínimo de $f|_S$.*

Observação 3.38 *No caso $n = 3$, isto é, para funções de três variáveis, consideramos o determinante*

$$d^*(P) = \det \begin{bmatrix} 0 & g_x(P) & g_y(P) & g_z(P) \\ g_x(P) & h_{xx}(P) & h_{xy}(P) & h_{xz}(P) \\ g_y(P) & h_{xy}(P) & h_{yy}(P) & h_{yz}(P) \\ g_z(P) & h_{xz}(P) & h_{yz}(P) & h_{zz}(P) \end{bmatrix}$$

e formulamos o seguinte teste:

1. *se $d(P)$ e $d^*(P)$ têm mesmo sinal, então P é um ponto de mínimo de $f|_S$;*
2. *se $d(P)$ e $d^*(P)$ têm sinais opostos, então P é um ponto de máximo de $f|_S$.*

Exemplo 3.39 *O mínimo de $f(x, y) = xy$, sujeita ao vínculo $S : x + y = 1$.*

Solução Se considerarmos $g(x, y) = x + y - 1$, teremos $\nabla g = \mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ e

$$\nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = 1/2 \quad \text{e} \quad y = 1/2$$

e $P(1/2, 1/2)$ é o único ponto crítico de f em S. Na Figura 3.9 a reta (vinculo) $S : x + y - 1 = 0$ é tangente à curva de nível de f que passa pelo ponto estacionário $P(1/2, 1/2)$.

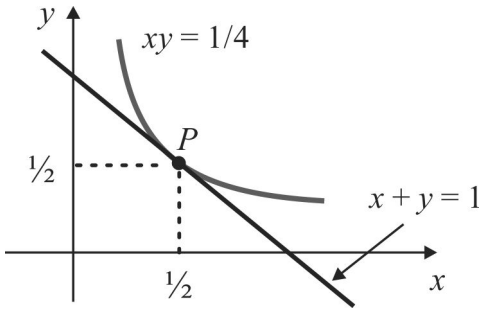


Figura 3.9: Máximo de xy na reta $x + y = 1$.

Para classificar o ponto P, observamos que

$$d(P) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 > 0$$

e, portanto, P é ponto de máximo de $f|_S$. Quando $x \to +\infty$, então $y = 1 - x \to -\infty$ e, assim, $xy \to -\infty$, o que nos leva a concluir que $f(x, y)$ não tem mínimo em S. ■

Problema com dois Vínculos

Se o problema envolve dois vínculos, digamos $S_1 : g(x, y, z) = 0$ e $S_2 : h(x, y, z) = 0$, com $\nabla g(P) \times \nabla h(P) \neq \mathbf{0}$, então a derivada direcional de f no ponto crítico P, na direção da tangente à curva $\gamma = S_1 \cap S_2$, em P, deve ser zero. Esta derivada direcional é a projeção do vetor $\nabla f(P)$ na direção tangente á curva γ e, portanto, $\nabla f(P)$ jaz no plano normal à curva γ em P, o qual é gerado por $\nabla g(P)$ e $\nabla h(P)$. Logo, existem escalares λ e μ tais que

$$\nabla f(P) + \lambda \nabla g(P) + \mu \nabla h(P) = \mathbf{0}. \tag{3.8}$$

Exemplo 3.40 *Determinar sobre a elipse γ, interseção do plano $x+z=4$ com o cilindro $x^2+y^2=1$, o ponto mais próximo e o ponto mais distante da origem.*

Solução Na Figura 3.10 ilustramos a situação geométrica e indicamos os pontos P_1 e P_2 que serão encontrados a seguir.

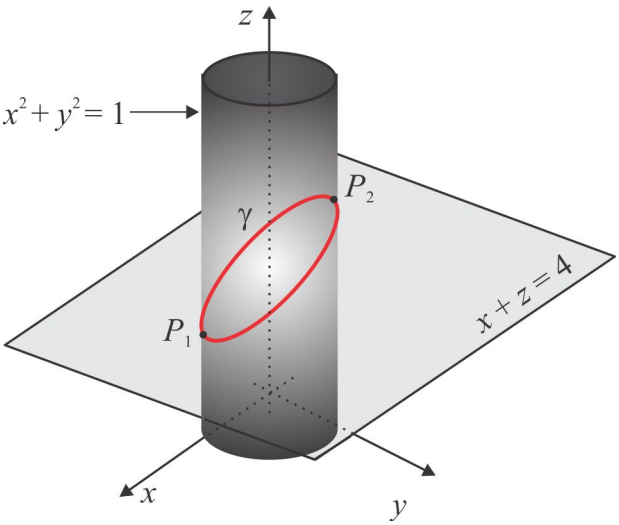


Figura 3.10: Extremos com dois vínculos.

Devemos encontrar o máximo e o mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita aos vínculos

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x + z - 4 = 0 && \leftarrow \text{plano} \\ h(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 && \leftarrow \text{cilindro.} \end{aligned}$$

Temos que $\nabla g = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $\nabla h = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$ e, portanto, $\nabla g \times \nabla h = -2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$, de onde segue que $\nabla g \times \nabla h = \mathbf{0}$ se, e só se, $x = y = 0$. O sistema de Lagrange (3.8) para este caso é

$$\begin{cases} 2x + \lambda + 2\mu x = 0 & \text{(I)} \\ 2y + 2\mu y = 0 & \text{(II)} \\ 2z + \lambda = 0 & \text{(III)} \\ x + z - 4 = 0 & \text{(IV)} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & \text{(V)} \end{cases}$$

De (II) segue que $y = 0$ ou $\mu = -1$. Se $y = 0$, resolvemos (IV) e (V) simultaneamente para encontrar os pontos correspondentes $P_1(1,0,3)$ e $P_2(-1,0,5)$ sobre a elipse. Se $\mu = -1$, obtemos de (I) $\lambda = 0$ e de (III) $z = 0$. Com $z = 0$, resulta de (IV) que $x = 4$ e esse valor de x é incompativel com (V). Avaliando f em P_1 e P_2, obtemos $f(P_1) = 10$ e $f(P_2) = 26$, de onde concluímos que P_1 é o ponto da elipse γ mais próximo da origem e P_2 o mais distante. ■

Exercícios & Complementos.

1. Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, resolva os seguintes problemas de extremos vinculados:

   (a) $z = 3x + 4y$; $x^2 + y^2 = 1$.

   (b) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$; $x - y = \frac{\pi}{4}$ e $0 \leq x \leq \pi$.

   (c) $z = x + y$; $xy = 16$, $x > 0$ e $y > 0$.

   (d) $w = xy + yz + xz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   (e) $z = x^2 + y^2$; $x^4 + y^4 = 1$.

   (f) $w = xyz$; $xy + yz + xz = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.

   (g) $w = x + y + z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   (h) $w = (x + y + z)^2$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

   (i) $z = x^2 + 2y^2$; $3x + y = 1$.

   (j) $z = x^2y^2$; $4x^2 + y^2 = 8$.

2. Determine a distância do ponto $P = (1,0)$ à parábola $y^2 = 4x$.

3. Determine a distância da origem à curva $5x^2 + 5y^2 + 6xy = 1$.

4. Determine os pontos da curva interseção do elipsoide $x^2+4y^2+4z^2 = 1$ com o plano $x-4y-z = 0$ mais próximos da origem.

5. Determine três números positivos cuja soma seja k e o produto o maior possível.

6. Determine o ponto do paraboloide $z = x^2 + y^2$ mais próximo do ponto $P = (3,-6,4)$.

7. Determine na elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ o ponto mais próximo e o mais distante da reta $x - y = 10$.

8. Determine o maior valor da expressão $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y)$ na região compacta

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi,\ \ 0 \leq y \leq \pi \ \text{ e } \ 0 \leq x + y \leq \pi\}.$$

9. Determine os extremos da função $f(x,y) = 8x^3 - 3xy + y^3$ no quadrado

$$Q = [0,1] \times [0,1].$$

10. Determine o maior valor da expressão $x(y+z)$, quando $x^2 + y^2 = 1$ e $xz = 1$.

11. Entre todos os pontos do paraboloide $z = 10 - x^2 - y^2$, encontre aquele acima e mais afastado do plano $x + 2y + 3z = 0$.

12. Identifique os pontos críticos da função $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$ sujeita à condição $x^2yz = 1$.

13. Determine a menor distância da origem à hipérbole de equação cartesiana $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$.

14. Determine o máximo e o mínimo de $f(x, y) = xy^2 + 2x + y^4 + 1$ no compacto $K : x^2 + y^2 \leq 1$.

15. Determine a distância do paraboloide $z = x^2 + y^2 + 10$ ao plano $3x + 2y - 6z = 0$.

16. Quais os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos e mais distantes da origem?

17. A temperatura T em um ponto $P(x, y, z)$ da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é dada por $T(P) = 100xy^2z$. Em qual ponto da esfera a temperatura é máxima e em qual ponto ela é mínima?

18. Uma caixa retangular sem tampa deve ter 32 m^3 de volume. Determine suas dimensões, de modo que sua área total seja mínima.

19. Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio a.

20. Mostre que, dentre todas as caixas retangulares com mesma área, o cubo tem o maior volume.

21. Um paralelepípedo retângular possui três de suas faces nos planos coordenados. Seu vértice oposto à origem está no plano $4x + 3y + z = 36$ e no primeiro octante. Determine esse vértice de tal forma que o paralelepípedo tenha volume máximo.

22. Uma indústria fabrica caixas retangulares de 8 m^3 de volume. Quais as dimensões que tornam o custo mínimo, se o material para a tampa e base custa o dobro do material para os lados?

23. Determine o retângulo de maior perímetro inscrito na elipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

24. Determine o valor máximo de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se os números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$. Usando o resultado mostre a relação entre as médias aritmética e geométrica:
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

25. Qual o ponto do plano $\alpha : x + y + z = 1$ mais próximo da reta $r : x = t,\ y = 1,\ z = -2t$?

3.3 Derivação Implícita

Ao derivar parcialmente uma relação do tipo

$$F(x, y, z) = 0 \tag{3.9}$$

devemos ter em mente quais variáveis são independentes e quais são dependentes. Quando a equação (3.9) puder ser resolvida para expressar z como função de x e y, então entendemos x e y como variáveis independentes e z como variável dependente. Neste caso,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = 0.$$

Por exemplo, próximo do ponto $P(1,1,1)$ a equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ define uma das variáveis como função das outras duas:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad y = \sqrt{1 - x^2 - z^2} \qquad \text{e} \qquad x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$$

e as derivadas parciais são calculadas como de costume. Quando uma das variáveis for condicionada, devemos ter atenção no cálculo das derivadas parciais. Por exemplo, se

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{e} \qquad z = x^2 + y^2$$

a derivada parcial F_x assume dois valores, dependendo de quais variáveis são consideradas independentes. Se as variáveis independentes são x e y, então

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + \left(x^2 + y^2\right)^2 \Rightarrow F_x = 2x + 4x^3 + 4xy^2.$$

Por outro lado, se as variáveis independentes são x e z, então $y^2 = z - x^2$ e obtemos

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + \left(z - x^2\right) + z^2 = z + z^2 \Rightarrow F_x = 0.$$

Apresentaremos três casos do Teorema da Função Implícita que aparecem com mais frequência nos cursos de cálculo.

3.3.1 Uma Equação e duas Variáveis

A equação em duas variáveis

$$\sqrt{2 - x^2 - y^2} + \log(xy) = 0 \tag{3.10}$$

não pode ser resolvida para expressar y como função de x ou x como função de y, embora ela tenha solução; é claro que o ponto $P(1,1)$ é solução de (3.10). Já a equação

$$x(1+y)\cos y + y^4 = 2 \tag{3.11}$$

não pode ser resolvida, próxima da origem, para expressar y como função de x, mas ela define *implicitamente* x como função de y. De fato, resolvendo a equação (3.11), obtemos

$$x = \frac{2 - y^4}{(1+y)\cos y}.$$

Como saber se a equação $F(x,y) = 0$ pode ser resolvida de modo que possamos interpretar uma das variáveis como função da outra, isto é,

$$y = f(x) \qquad \text{ou} \qquad x = g(y)$$

e se isso é possível, como calcular a derivada y' ou x', sem resolver a equação? Observamos inicialmente que se a tangente à curva $F(x,y) = 0$ no ponto $P(a,b)$ for paralela ao eixo y, certamente a variável y não pode ser interpretada como uma função de x em vizinhança alguma de $x = a$. Isso está ilustrado na Figura 3.11.

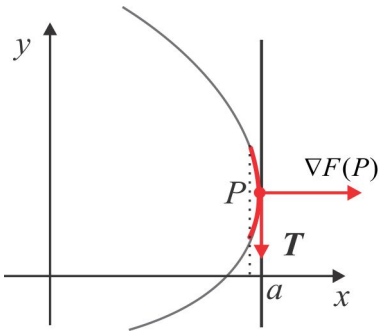


Figura 3.11: y não é função de x.

Se $\mathbf{T} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ é o vetor tangente à curva no ponto P, então $\mathbf{T} \bullet \nabla F(P) = 0$ e, portanto,

$$\alpha F_x(P) + \beta F_y(P) = 0. \tag{3.12}$$

Se escolhermos $\alpha = F_y(P)$ e $\beta = -F_x(P)$ como solução de (3.12) e observarmos que $\mathbf{T}$ é paralelo ao eixo y, teremos $F_y(P) = 0$. Portanto, uma condição necessária para que a equação $F(x, y) = 0$ defina y como função de x é que $F_y(P) \neq 0$.

O Teorema da Função Implícita que enunciaremos a seguir é um dos resultados mais importantes de análise matemática. Sua demonstração é um pouco delicada e não será apresentada aqui.

Teorema 3.41 (Função Implícita - 1º caso) *Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais F_x e F_y, contínuas em uma vizinhança de um ponto $P(a, b)$, e suponhamos que $F(P) = 0$ e $F_y(P) \neq 0$. Então, existe um intervalo I contendo a no seu interior e uma função $y = f(x)$ derivável em I tal que*

1. *$(x, f(x)) \in D$, para todo x no intervalo I, e $f(a) = b$.*
2. *$F(x, f(x)) = 0$, $\forall\ x \in I$.*
3. *Vale a fórmula de derivação*
$$y'(a) = -\frac{F_x(P)}{F_y(P)}.$$

Neste caso, a equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x. ■

A regra de derivação implícita contida no Teorema 3.41 é consequência da Regra da Cadeia. De fato, se fizermos $z = F(x, y)$, com $y = f(x)$, então

$$0 = F(x, f(x)) \Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow F_x + F_y y' = 0$$

e daí segue a fórmula de derivação implícita

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

A Figura 3.12 ilustra o gráfico da função $y = f(x)$ como a imagem inversa do valor 0 pela função F, isto é, $G(f) = F^{-1}(0)$.

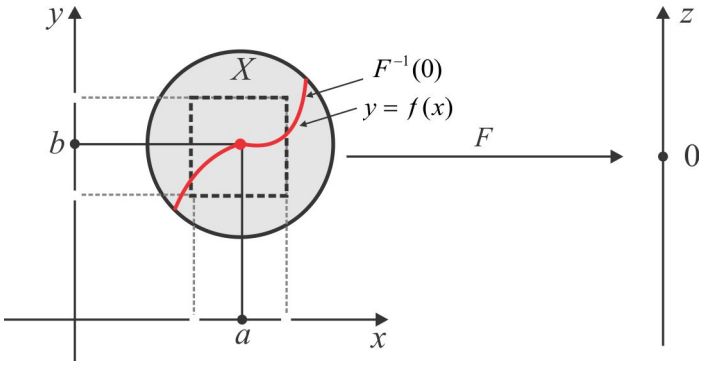


Figura 3.12: O gráfico de $y = f(x)$.

Exemplo 3.42 *Em uma vizinhança de $P(2,1)$, a equação $y^3 - xy + x^2 = 3$ pode ser resolvida para explicitar y como uma função diferenciável de x.*

Solução A função $F(x,y) = y^3 - xy + x^2 - 3$ atende às condições do Teorema da Função Implícita e, por conseguinte, podemos definir em uma vizinhança de $x = 2$ uma função diferenciável $y = y(x)$, tal que:

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \text{e} \quad y'(2) = -\frac{F_x(2,1)}{F_y(2,1)} = -3. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.43 (calculando a segunda derivada) *A partir da relação $F_x + F_y y' = 0$, deduzir uma expressão para a segunda derivada y''.*

Solução Suponhamos que $F(x,y)$ tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Derivando a equação $F_x + F_y y' = 0$ com respeito à variável x, encontramos

$$\underbrace{F_{xx} + F_{xy}y'}_{\partial_x(F_x)} + \underbrace{\left(F_{yx} + F_{yy}y'\right)y' + F_y y''}_{\partial_x(F_y y')} = 0$$

e substituindo y' por $-F_x/F_y$, encontramos:

$$y'' = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.44 *Determinar y', supondo que $y = f(x)$ seja definida pela relação*

$$y^4 + 3y - 4x^3 - 5x + 1 = 0.$$

Solução Se no Teorema 3.41 considerarmos $F(x,y) = y^4 + 3y - 4x^3 - 5x + 1$, teremos $F_x = -12x^2 - 5$ e $F_y = 4y^3 + 3$ e, consequentemente,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.45 (Teorema da Função Inversa) *Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua no ponto $c \in I$ e suponhamos $f'(c) \neq 0$. Então existe uma função $x = g(y)$ diferenciável em um intervalo aberto contendo $d = f(c)$ tal que $f(g(y)) = y$ e*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Solução Se $F(x,y) = f(x) - y$, então $F_x(c,d) = f'(c) \neq 0$ e pelo Teorema Função Implícita existe uma função $x = g(y)$, diferenciável em um intervalo aberto contendo $d = f(c)$, tal que

$$F(g(y), y) = f(g(y)) - y = 0,$$

ou seja, $f(g(y)) = y$. Como $F_x = f'(x)$ e $F_y = -1$ temos que

$$g'(y) = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{-1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(x)}. \qquad \blacksquare$$

3.3.2 Uma Equação e três Variáveis

A generalização para o caso de uma equação e três variávis é natural. Suponhamos que a equação

$$F(x,y,z) = 0 \tag{3.13}$$

defina implicitamente z como função de x e y, digamos $z = f(x,y)$. Conforme ressaltamos no início, as variáveis x e y são independentes e as derivadas z_x e z_y são obtidas derivando parcialmente a relação (3.13). Se $w = F(u,v,z)$, sendo $u(x,y) = x$, $v(x,y) = y$ e $z(x,y) = f(x,y)$, resulta da Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} w_x &= F_u u_x + F_v v_x + F_z z_x = F_u + F_z z_x, && \text{(usamos } u_x = 1 \text{ e } v_x = 0) \\ w_y &= F_u u_y + F_v v_y + F_z z_y = F_v + F_z z_y, && \text{(usamos } u_y = 0 \text{ e } v_y = 1). \end{aligned}$$

Considerando que $w = F(x,y,f(x,y)) = 0$, então $w_x = 0$ e $w_y = 0$ e, resumindo, encontramos:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = 0 \Rightarrow F_x + F_z z_x = 0 \qquad &\text{(I)} \quad \longleftarrow \text{derivando em relação a } x \\ F(x,y,z) = 0 \Rightarrow F_y + F_z z_y = 0 \qquad &\text{(II)} \quad \longleftarrow \text{derivando em relação a } y \end{aligned}$$

De (I) e (II) resultam as seguintes regras de derivação implícita:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

onde, naturalmente, admitimos as operações possíveis. De forma precisa, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.46 (Função Implícita - 2º caso) *Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais F_x, F_y e F_z contínuas em uma vizinhança de um ponto $P(a,b,c)$ e suponhamos que $F(P) = 0$ e $F_z(P) \neq 0$. Existe uma δ-vizinhança $V_\delta(Q)$ do ponto $Q(a,b)$ e uma função diferenciável $z = f(x,y)$, tal que*

1. *$(x,y,f(x,y)) \in D$, $\forall$ $(x,y) \in V_\delta(Q)$, e $f(a,b) = c$.*
2. *$F(x,y,f(x,y)) = 0$, $\forall$ $(x,y) \in V_\delta(Q)$.*
3. *São válidas as fórmulas de derivação*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad e \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Neste caso, a equação $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente z como função de x e y. $\blacksquare$

Exemplo 3.47 *Determinar z_x e z_y, supondo que $z = f(x,y)$ seja definida pela relação*

$$x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5 = 0.$$

Solução Se $F(x,y,z) = x^2z^2 + xy^2 - z^3 + 4yz - 5$, então

$$F_x = 2xz^2 + y^2, \quad F_y = 2xy + 4z \ \text{ e } \ F_z = 2x^2z - 3z^2 + 4y$$

e do Teorema 3.46 resulta

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2xz^2 + y^2}{2x^2z - 3z^2 + 4y} \ \text{ e } \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2xy + 4z}{2x^2z - 3z^2 + 4y}. \qquad \blacksquare$$

3.3.3 Duas Equações e quatro Variáveis

Sejam $\xi(u,v)$ e $\eta(u,v)$ duas funções reais com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$. O determinante funcional

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{vmatrix} = \xi_u\eta_v - \xi_v\eta_u,$$

em homenagem a Jacobi[11], recebe o nome de *Jacobiano* de ξ e η em relação a u e v. Quando não houver ambiguidade, esse Jacobiano será indicado por $J(u,v)$.

Teorema 3.48 (Função Implícita - 3º caso) *Sejam $F(x,y,u,v)$ e $G(x,y,u,v)$ duas funções reais definidas em um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^4$, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança do ponto $P(a,b,c,d)$, e suponhamos que*

$$F(P) = 0, \ \ G(P) = 0 \ \ e \ \ J = J(u,v) = \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(P)} \neq 0.$$

Então o sistema

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

define, ao menos implicitamente, u e v como funções diferenciáveis de x e y em uma vizinhança $V_\delta(Q)$ do ponto $Q(a,b)$. As funções $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ são tais que

1. $(x,y,u,v) \in D, \ \forall \ (x,y) \in V_\delta(Q)$.
2. $F(x,y,u(x,y),v(x,y)) = 0 \quad e \quad G(x,y,f(x,y)) = 0, \ \forall \ (x,y) \in V_\delta(Q)$.
3. *São válidas as fórmulas de derivação*

$$u_x = -\frac{J(x,v)}{J}, \ v_x = -\frac{J(u,x)}{J}, \ u_y = -\frac{J(y,v)}{J} \ e \ v_y = -\frac{J(u,y)}{J}. \qquad \blacksquare \tag{3.14}$$

[11] Carl Gustav Jacob Jocobi (1804-1851), matemático alemão.

Como nos casos anteriores, as fórmulas de derivação (3.14) são determinadas pela Regra da Cadeia. De fato, derivando com respeito a x as relações $F(x,y,u,v)=0$ e $G(x,y,u,v)=0$, levando em conta que x e y são independentes, chegamos ao sistema não homogêneo

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0 \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_u u_x + F_v v_x = -F_x \\ G_u u_x + G_v v_x = -G_x \end{cases}$$

cujo determinante principal é $J \neq 0$. Da Regra de Cramer segue que

$$u_x = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \quad \text{e} \quad v_x = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}.$$

Para encontrar as derivadas u_y e v_y, repetimos o processo derivando as equações

$$F(x,y,u,v)=0 \quad \text{e} \quad G(x,y,u,v)=0$$

com respeito a y e usamos a Regra de Cramer.

Exemplo 3.49 *Calcular u_x e v_x, admitindo que o sistema*

$$\begin{cases} 3x^2 + y - u^2 + v = 0 \\ x - 2y - u + 2v^2 = 0 \end{cases}$$

defina u e v como funções de x e y.

Solução Na origem $O(0,0,0)$ as funções

$$F(x,y,u,v) = 3x^2 + y - u^2 + v \ \text{ e } \ G(x,y,u,v) = x - 2y - u + 2v^2$$

satisfazem as hipóteses do Teorema 3.48 e as derivadas parciais de F e G são

$$F_x = 6x, \ \ F_y = 1, \ \ F_u = -2u, \ \ F_v = 1, \ G_x = 1, \ \ G_y = -2, \ \ G_u = -1, \ \ G_v = 4v.$$

Temos $J(u,v) = -8uv + 1$, $J(x,v) = 24xv - 1$ e $J(u,x) = -2u + 6x$ e, portanto,

$$u_x = \frac{24xv - 1}{8uv - 1} \ \text{ e } \ v_x = \frac{-2u + 6x}{8uv - 1} \qquad \blacksquare$$

O Teorema da Função Implícita pode ser generalizado para o caso de m equações e n variáveis, sendo $m < n$. Neste caso, com hipóteses similares àquelas dos casos particulares tratados, demonstra-se que m variáveis se expressam como funções diferenciáveis das $n - m$ variáveis independentes que restam. Como ilustração, vejamos um exemplo em que temos três equações e cinco variáveis.

Exemplo 3.50 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \operatorname{sen} u \cos v + z = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

e o ponto P de coordenadas $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, $u = \pi/2$ e $v = 0$. Verificar que o sistema (3.15) define x, y e z como funções de u e v e calcular a derivada x_u.

Solução O sistema (3.15) com 3 equações e 5 variáveis permite explicitar três variáveis em função das duas variáveis independentes que restam. Temos

$$J = \frac{\partial (F, G, H)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & \cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{vmatrix}$$

e no ponto P temos $F(P) = 0,\ G(P) = 0,\ H(P) = 0$ e

$$J = \frac{\partial (F, G, H)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Decorre do Teorema da Função Implícita que existe uma vizinhança do ponto $Q(\pi/2, 0)$, na qual as variáveis x,y e z são funções diferenciáveis de u e v e as derivadas são calculadas pelas fórmulas:

$$x_u = -\frac{1}{J}\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (u, y, z)}, \quad y_u = -\frac{1}{J}\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (x, u, z)} \quad \text{e} \quad z_u = -\frac{1}{J}\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (x, y, u)}.$$

Fórmulas semelhantes se obtém para as derivadas $x_v,\ y_v$ e z_v :

$$x_v = -\frac{1}{J}\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (u, v, z)}, \quad y_v = -\frac{1}{J}\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (x, v, z)} \quad \text{e} \quad z_v = -\frac{1}{J}\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (x, y, v)}.$$

No ponto P, temos

$$\frac{\partial (F, G, H)}{\partial (u, y, z)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_u(P) = 0. \qquad \blacksquare$$

Exercícios & Complementos.

1. Verifique a aplicabilidade do Teorema da Função Implícita e determine $y'(P)$ e $y''(P)$.

   (a) $y^3 - xy + x^2 - 3 = 0;\quad P(2, 1)$ (c) $x \log x + y \exp(y) = 0;\quad P(1, 0)$

   (b) $\log(xy) + xy^2 - 1 = 0;\quad P(1, 1)$ (d) $\log(xy) - 2xy + 2 = 0;\quad P(1, 1)$.

2. Use o Teorema da Função Implícita e calcule $\dfrac{dx}{dy}$ no ponto P especificado.

   (a) $y^3 + x^3 - \cos(xy) = 0;\quad P = (1, 0)$

   (b) $2x^2 + y^2 - \log\left(x^2 + y^2\right) = 2;\quad P = (1, 0)$.

3. Determine z_x e z_y, com $z = f(x, y)$ definida implicitamente pela equação:

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (b) $xy(1 + x + y) - z^2 = 0$ (c) $xz^2 - 3yz + \cos z = 0$.

4. Resolva o sistema

$$\begin{cases} u + v + \operatorname{sen}(xy) = 0 \\ 3u + 2v + x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

   e determine u e v como funções de x e y.

5. Um gás ideal obedece à seguinte lei: $PV = kT$, sendo k uma constante real, P, V e T, respectivamente, a pressão, o volume e a temperatura. Deduza a relação

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

6. Seja $F(x, y, z) = 0$, sendo $w = F(x, y, z)$ uma função diferenciável tal que

$$F(P) = 0, \quad F_x(P) \neq 0, \quad F_y(P) \neq 0 \text{ e } F_z(P) \neq 0.$$

Usando derivação implícita mostre que, em P, vale a relação

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

7. Admitindo a continuidade das derivadas envolvidas, prove as seguintes relações:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, w)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, w)} \text{ e } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1.$$

8. Admita que o sistema

$$\begin{cases} u^3 - 2u - v - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - u - 4 = 0 \end{cases}$$

defina u e v como funções de x e y. Determine as derivadas v_x e v_y, no ponto em que $x = 1$ e $y = 2$.

9. Considere x, y e z como funções de u e v, definidas pelo sistema

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \operatorname{sen} u \cos v + z = 0 \end{cases}$$

Calcule x_u e y_v, no ponto de coordenadas $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$, $u = \frac{\pi}{2}$ e $v = 0$.

10. Admita que o sistema

$$\begin{cases} x^2 - xt - y^2t^2 + 2s + 2 = 0 \\ y^2 - 2yt + xt^2 - ys + s^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

defina x e y como funções de s e t. Determine as derivadas x_s, x_t, y_s e y_t, no ponto em que $x = 2$, $y = 0$, $s = 1$ e $t = 1$.

3.4 Transformações

Nesta seção vamos apresentar as *transformações* que são funções $T : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas em uma parte não vazia X do $\mathbb{R}^2$ ou $T : X \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, no caso tridimensional. Daremos ênfase às transformações lineares e às mudanças de coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas, que serão bastante utilizadas no cálculo integral. Essas mudanças de coordenadas têm por finalidade simplificar a descrição de certas regiões ou funções.

Dada uma transformação $T : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, a imagem de um subconjunto $\mathcal{R}$ de X pela transformação T é representada por $T(\mathcal{R})$, isto é,

$$T(\mathcal{R}) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (u,v) = T(x,y), \text{ para algum } (x,y) \in \mathcal{R}\}.$$

Neste caso, diremos que T *transforma* $\mathcal{R}$ sobre $T(\mathcal{R})$; é comum representar uma transformação por meio das equações simultâneas

$$u = u(x,y) \quad \text{e} \quad v = v(x,y), \tag{3.16}$$

sendo $T(x,y) = (u,v)$. As regiões do plano xy e do plano uv são representadas por $\mathcal{R}_{xy}$ e $\mathcal{R}_{uv}$, respectivamente. No caso em que a transformação T é invertível, nos referimos às equações (3.16) como uma *mudança de coordenadas*.

As curvas $u(x,y) = c_1$ e $v(x,y) = c_2$ do plano xy são as imagens das retas $u = c_1$ e $v = c_2$ do plano uv pela transformação T, como ilustra a Figura 3.13, e as quantidades u e v são denominadas *coordenadas curvilíneas*. Neste caso, a imagem de um retângulo R_{uv} no plano uv é uma figura curvilinear delimitada pelas curvas de nível $u = c_1$ e $v = c_2$, respectivamente.

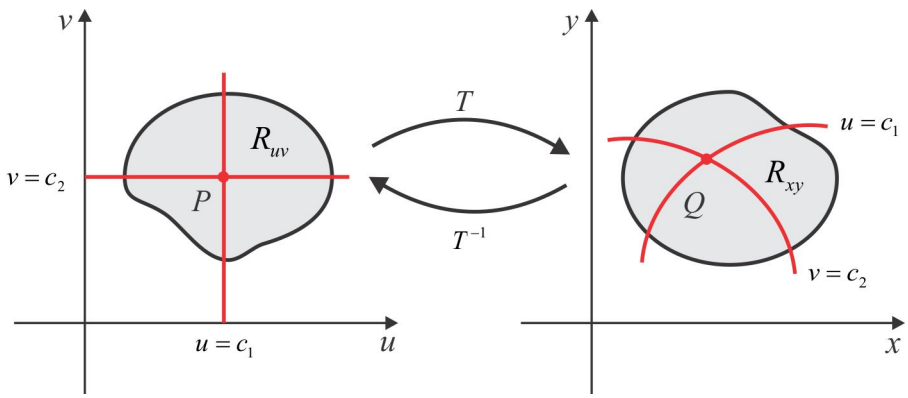


Figura 3.13: Representação grágica da ação de T.

Exemplo 3.51 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por*

$$T : \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \tag{3.17}$$

e suponhamos que o Jacobiano $J = ad - bc \neq 0$. Determinar a imagem de uma reta do plano xy pela transformação T.

Solução Como $J \neq 0$, o sistema (3.17) pode ser resolvido e encontramos a transformação inversa T^{-1}, dada por

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{J}(du - bv) \\ y = \frac{1}{J}(-bu + av) \end{cases} \tag{3.18}$$

Dada uma reta do plano xy desctita pela equação $Ax + By = C$, substituindo os valores de x e y dados em (3.18) na equação da reta, encontramos

$$(dA - bB)\,u + (aB - bA)\,v = JC,$$

que representa uma reta no plano uv. ■

Exemplo 3.52 *Seja a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$x = r\cos\theta \quad e \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Determinar a imagem pela transformação T da reta reta $r = 1$ e do retângulo

$$\mathcal{R} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 1 \;\; e \;\; 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Solução A reta $r = 1$ é transformada no círculo $x^2 + y^2 = 1$, já que $r^2 = x^2 + y^2$. Por outro lado, o retângulo $\mathcal{R}$ é transformado no disco $x^2 + y^2 \le 1$. ■

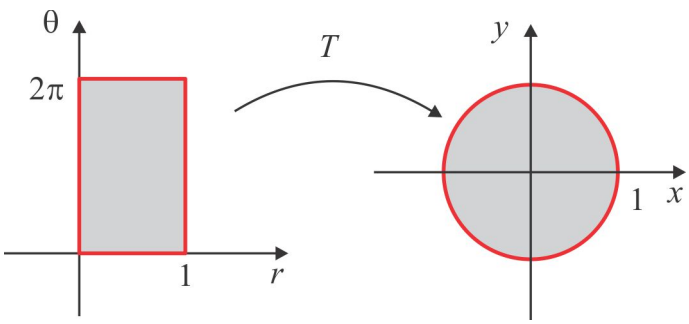


Figura 3.14: A transformação $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

Exemplo 3.53 (trajetórias ortogonais) *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação definida por*

$$u = u(x,y) \;\; e \;\; v = u(x,y),$$

onde u e v têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e satisfazem às equações de Cauchy-Riemann: $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. As famílias de curvas de nível $u = c_1$ e $v = c_2$ são ortogonais. Investiguemos o caso $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$, esboçando algumas curvas de nível.

Solução As curvas $u = c_1$ e $v = c_2$ serão ortogonais quando as retas tangentes às curvas forem perpendiculares. Temos

$$u = c_1 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y}$$

e a declividade da reta tangente à curva $u = c_1$ é $m_1 = -u_x/u_y$. De forma similar obtemos $m_2 = -v_x/v_y$ como sendo a declividade da curva $v = c_2$. Assim, considerando que $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, resulta

$$m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = \left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(\frac{u_y}{u_x}\right) = -1$$

e as famílias de curvas de nível $u = c_1$ e $v = c_2$ são ortogonais. No caso $u = x^2 - y^2$ e $v = 2xy$, temos $u_x = 2x = v_y$ e $u_y = -2y = -v_x$ e as trajetórias ortogonais estão ilustradas na Figura 3.15. ■

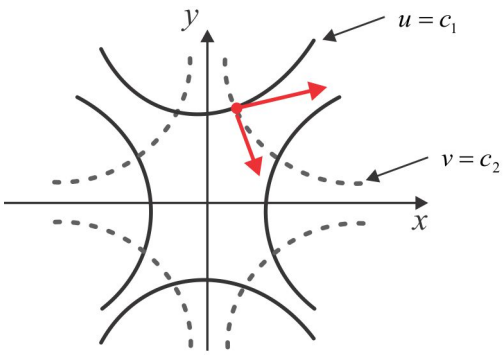


Figura 3.15: Trajetótrias ortogonais.

Suponhamos que a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \tag{3.19}$$

tenha Jacobiano não nulo, isto é,

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Então a transformação T é invertível e o sistema (3.19) pode ser resolvido para explicitar x e y como funções diferenciáveis de u e v, digamos

$$T^{-1} : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v). \end{cases} \tag{3.20}$$

Os sistemas (3.19) e (3.20) denominam-se fórmulas de *mudança de coordenadas*. O cálculo das derivadas parciais x_u, x_v, y_u, y_v da transformação inversa é feito por derivação implícita. De fato, se considerarmos as funções $F(x, y, u, v) = u(x, y) - u$ e $G(x, y, u, v) = v(x, y) - v$, teremos

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0$$

e das fórmulas de derivaçao (3.14), resulta

$$x_u = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} -1 & F_y \\ 0 & G_y \end{vmatrix} = \frac{G_y}{J} = \frac{v_y}{J}.$$

De forma similar, obtemos as outras derivadas. Temos, então, o seguinte resultado:

Teorema 3.54 (Teorema da Função Inversa) *Suponhamos que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma vizinhança $V_\delta(a, b)$ do ponto $P(a, b)$ e que o Jacobiano*

$$J = J(T) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

não se anula no ponto P. Então as equações $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ podem ser resolvidas implicitamente para x e y em função de u e v e as derivadas parciais x_u, x_v, y_u, y_v são dadas por

$$x_u = \frac{v_y}{J}, \quad x_v = -\frac{u_y}{J}, \quad y_u = -\frac{v_x}{J} \quad e \quad y_v = \frac{u_x}{J}. \qquad \blacksquare \tag{3.21}$$

Observação 3.55 *Se $J\left(T^{-1}\right)$ é o Jacobiano da transformação inversa T^{-1}, então*

$$J\left(T^{-1}\right) = x_u y_v - x_v y_u$$

e usando as fórmulas de derivação (3.21) deduzimos a relação entre os Jacobianos de T e T^{-1} :

$$J(T) \times J\left(T^{-1}\right) = 1.$$

3.4.1 Coordenadas Polares, Cilíndricas e Esféricas

■ Coordenadas Polares

As *coordenadas polares* (r, θ) do ponto $P(x, y)$ do plano $\mathbb{R}^2$ são definidas pelas equações:

$$\boxed{x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad r > 0 \ \text{ e } \ 0 \leq \theta < 2\pi,} \tag{3.22}$$

deduzidas a partir da Figura 3.16.

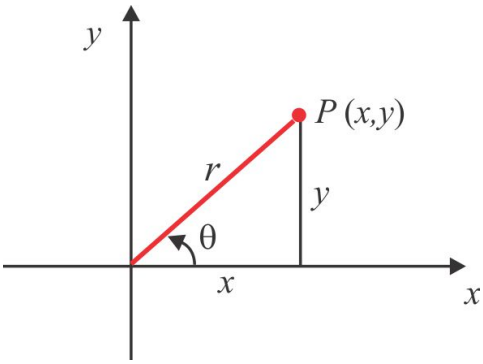


Figura 3.16: Coordenadas Polares r e θ.

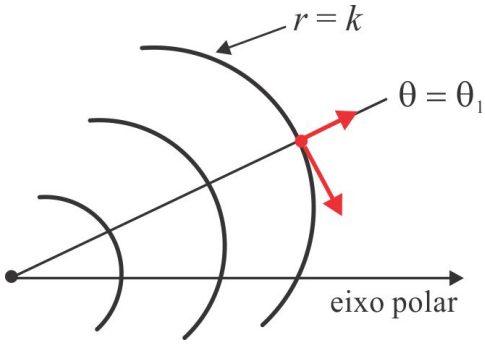


Figura 3.17: Trajetórias ortogonais.

Segue de (3.22) que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta) = r > 0$$

e se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a mudança de coordenadas definida por $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$, então T é invertível, porque $J(T) > 0$, e a transformação inversa T^{-1} é definida por $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta(x, y) = \arctan(y/x)$. As trajetórias $r = \text{cte}$ e $\theta = \text{cte}$ são ortogonais, já que os gradientes

$$\nabla r = \frac{x}{r}\mathbf{i} + \frac{y}{r}\mathbf{j} \qquad \text{e} \qquad \nabla\theta = -\frac{y}{r}\mathbf{i} + \frac{x}{r}\mathbf{j}$$

são perpendiculares. Algumas trajetórias estão mostradas na Figura 3.17. ■

Exemplo 3.56 *A equação polar $r = a$, $a > 0$, representa a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$.*

■ Coordenadas Cilíndricas

As *coordenadas cilíndricas* (r, θ, z) do ponto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são definidas pelas relações:

$$\boxed{x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad z = z,} \tag{3.23}$$

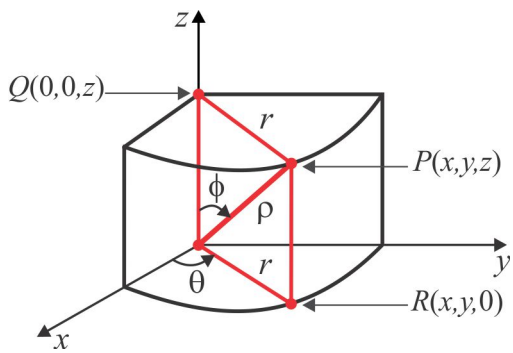


Figura 3.18: Coordenadas cilíndricas e esféricas.

sendo r e θ as coordenadas polares do ponto $R(x,y,0)$, projeção do ponto P no plano xy, como na Figura 3.18. De (3.23) deduzimos que

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

e, assim, a representação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ possui inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ z = z. \end{cases}$$

Exemplo 3.57 *Determinar as coordenadas cilíndricas do ponto $P(3,3,7)$.*

Solução Como $x = y = 3$ temos que $r = 3\sqrt{2}$ e $\theta = \pi/4$. Portanto, $\left(3\sqrt{2}, \pi/4, 7\right)$ são as coordenadas cilíndricas do ponto $P(3,3,7)$. ■

Exemplo 3.58 *Em coordenadas cilíndricas, o cilindro $x^2+y^2=a^2$ é representado pela equação*

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = a^2 \Leftrightarrow r = a.$$

ou seja, a equação do cilindro é $r = a$. ■

■ Coordenadas Esféricas

Fixado um ponto $P(x,y,z)$ no espaço $\mathbb{R}^3$, as *coordenadas esféricas* (ρ,θ,ϕ) do ponto P são definidas como segue: consideramos $\rho = |OP|$, ϕ o ângulo entre o vetor **OP** e o vetor unitário **k** e θ o ângulo polar associado à projeção de P no plano xy. A Figura 3.18 além de ilustrar graficamente as coordenadas esféricas do ponto P, nos dá as relações

$$r = |PQ|,\ x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta,\ z = \rho\cos\phi \text{ e } |PQ| = \rho\operatorname{sen}\phi,$$

de onde resulta

$$\boxed{x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi, \quad y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \quad \text{e} \quad z = \rho\cos\phi.} \tag{3.24}$$

Das relações (3.24), obtemos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\phi \\ y_\rho & y_\theta & y_\phi \\ z_\rho & z_\theta & z_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}\phi.$$

Assim, a representação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida pelo sistema (3.24), com $\rho > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$ e $\phi \in (0, \pi]$, tem inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ \phi = \arctan\left(\sqrt{x^2 + y^2} \big/ |z|\right) \quad \text{ou} \quad \phi = \arccos\left(z \big/ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right). \end{cases}$$

Exemplo 3.59 *Determinar as coordenadas retangulares do ponto P que tem coordenadas esféricas $(4, \pi/3, \pi/6)$.*

Solução Como $\rho = 4$, $\theta = \pi/3$ e $\phi = \pi/6$. temos que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 & \text{(I)} \\ y/x = \sqrt{3} & \text{(II)} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \big/ |z| = \sqrt{3}/3. & \text{(III)} \end{cases}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (III), obtemos

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \tfrac{1}{3} \Rightarrow 16 = x^2 + y^2 + z^2 = \tfrac{1}{3}z^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = 12,$$

de onde segue $z = 2\sqrt{3}$ e $x^2 + y^2 = 4$. Agora, elevando ao quadrado ambos os membros de (II), obtemos

$$\frac{y^2}{x^2} = 3 \Rightarrow 4 = x^2 + y^2 = x^2 + 3x^2 \Rightarrow x^2 = 1.$$

Logo, $x = 1$ e $y = \sqrt{3}$ e o ponto P tem coordennadas $\left(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$. ■

Exemplo 3.60 *Em coordenadas esféricas, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ é representado pela equação*

$$\rho^2 \cos^2\theta \sin^2\phi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\phi + \rho^2 \cos^2\phi = a^2 \Leftrightarrow \rho = a.$$

ou seja, a equação da esfera é $\rho = a$. ■

Exercícios & Complementos.

1. Em cada caso, determine o Jacobiano da transformação T.

   (a) $T : \begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 4y \end{cases}$

   (b) $T : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$

   (c) $T : \begin{cases} u = \exp(x) - y \\ v = x + 5y \end{cases}$

   (d) $T : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

   (e) $T : \begin{cases} u = 2x + y \\ v = 2y - z \\ w = 3x \end{cases}$.

   (f) $T : \begin{cases} u = x\cos y - z \\ v = x\,\mathrm{sen}\,y + 2z \\ w = x^2 + y^2 \end{cases}$

   (g) $T : \begin{cases} u = 3x + 2y \\ v = x - y \end{cases}$

   (h) $T : \begin{cases} x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = \rho\cos\phi. \end{cases}$

   (i) $T : \begin{cases} u = ax \\ v = by \\ w = cz \end{cases}$

2. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $u = e^x + y^3$ e $v = 3e^x - 2y^3$.

   (a) Calcule o Jacobiano da transformação T e de sua inversa T^{-1}.

(b) Calcule as derivadas $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial v}$ no ponto em que $x = 0$ e $y = 1$.

3. Considere a transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)),$$

com Jacobiano $J(u, v, w) \neq 0$. Mostre que

$$u_x = \frac{1}{J}\frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} \quad \text{e} \quad u_y = -\frac{1}{J}\frac{\partial(x, z)}{\partial(v, w)}.$$

Deduza expressões análogas para as derivadas: u_z, v_x, v_y, v_z, w_x, w_y e w_z.

4. Verifique que a mudança de coordenadas $\rho = x + ct$ e $\sigma = x - ct$ transforma a equação de ondas $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ na equação simplificada $u_{\rho\sigma} = 0$.

5. Mostre que a mudança de coordenadas $u = ax + by$ e $v = cx + dy$ transforma o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$ em um paralelogramo de área

$$\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|.$$

6. Verifique que a mudança de coordenadas $u = x/a$ e $v = y/b$ transforma a elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ no círculo unitário de centro na origem do plano uv.

7. Defina uma mudança de coordenadas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que aplica o elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

na esfera unitária.

8. Qual a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ pela transformação $T(x, y) = (4x, y)$?

9. Qual a imagem da reta $x = c$ pela transformação $T(x, y) = (\exp(x)\cos y, \exp(x)\operatorname{sen} y)$?

10. Esboce a região $\mathcal{R}_{xy}$ delimitada pelas parábolas $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$ e $y^2 = 2x$, e determine a imagem $\mathcal{R}_{xy}$ pela mudança de coordenadas $x^2 = yu$ e $y^2 = xv$.

11. Determine a imagem dos subconjuntos

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$

pela mudança de coordenadas $u = x + y$ e $v = x - y$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real com derivada contínua e positiva. Mostre que a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(u, v) = (f(u), -v + uf(u))$$

tem Jacobiano não nulo em qualquer ponto (u, v) sendo, portanto, invertível. Verifique que

$$T^{-1}(x, y) = \left(f^{-1}(x), -y + xf^{-1}(x)\right).$$

13. Em cada caso é dada uma mudança de coordenadas $(u, v) = T(x, y)$. Descreva as retas $u = k$ e $v = k$ nos dois sistemas de coordenadas (plano xy e plano uv), para os valores: $k = -2$, -1, 0, 1, 2. Determine a transformação inversa T^{-1}.

    (a) $T(x, y) = (3x, 5y)$
    (b) $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$
    (c) $T(x, y) = \left(x^3, x + y\right)$
    (d) $T(x, y) = \left(x + 1, 2 - y^3\right)$
    (e) $T(x, y) = (e^x, e^y)$
    (f) $T(x, y) = (e^{2x}, e^{-3y})$.

14. Em cada caso encontre a imagem da curva γ pela mudança de coordenadas $T(x, y)$.

    (a) γ é o retângulo de vértices $(0, 0), (0, 1), (2, 1)$, $(2, 0)$ e $T(x, y) = (3x, 5y)$.
    (b) γ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ e $T(x, y) = (3x, 5y)$.
    (c) γ é o triângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 6)$, $(9, 4)$ e $T(x, y) = (y/2, x/3)$.
    (d) γ é a reta $3x - 2y = 4$ e $T(x, y) = (y/2, x/3)$.
    (e) γ é a reta $x + 2y = 1$ e $T(x, y) = (x - y, 2x + 3y)$.
    (f) γ é o quadrado de vértices $(0, 0), (1, -1), (2, 0)$, $(1, 1)$ e $T(x, y) = (5x + 4y, 2x - 3y)$.
    (g) γ é o círculo $x^2 + y^2 = 1$ e $T(x, y) = (5x + 4y, 2x - 3y)$.

15. Seja γ a curva do plano xy descrita pela equação $a\left(x^2 + y^2\right) + bx + cy + d = 0$.

    (a) Considere a possibilidade de a ou d ser zero e identifique γ como sendo um círculo ou uma reta.
    (b) Determine a imagem da curva γ pela transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
    $$T(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

16. Complete a seguinte tabela de coordenadas:

Cartesianas: (x, y, z)	Cilíndricas: (r, θ, z)	Esféricas: (ρ, θ, ϕ)
$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right)$		
		$(12, \pi/6, 3\pi/4)$
$(1, 1, -\sqrt{2})$		

17. Identifique a superfície descrita em coordenadas cilíndricas por:

    (a) $r = 4$
    (b) $\theta = \pi/4$
    (c) $z = 2r$
    (d) $3r^2 + z^2 = 9$
    (e) $r^2 + z^2 = 16$
    (f) $r \sec\theta = 4$.

18. Identifique a região do $\mathbb{R}^3$ descrita em coordenadas esféricas por:

    (a) $\rho = 6\cos\theta \operatorname{sen}\phi$
    (b) $\rho = 5 \operatorname{cosec}\phi$
    (c) $\theta = \pi/6$
    (d) $\cos\phi = 4$
    (e) $\phi = \pi/4$
    (f) $\rho^2 - 3\rho = 0$
    (g) $\rho\cos\theta \operatorname{sen}\phi = 1$
    (h) $\rho = 2\cos\phi$
    (i) $\tan\theta = 4$
    (j) $\rho = a$
    (k) $\rho^2 - 3\rho + 2 \leq 0$
    (l) $\rho = \operatorname{cosec}\phi \operatorname{cotg}\phi$.

19. As superfícies dadas abaixo estão representadas por suas equações cartesianas. Passe as equações para coordenadas cilíndricas e esféricas.

    (a) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
    (b) Cilindro: $x^2 + y^2 = 4$.
    (c) Cone: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$
    (d) Hiperboloide: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$
    (e) Plano: $3x + y - 4z = 0$
    (f) Paraboloide: $4z = x^2 + y^2$

20. Sejam $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ definidas implicitamente pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 u = v \\ x + y^2 = u \end{cases} \tag{3.25}$$

(a) Expresse as derivadas x_u e y_v em termos de x, y, u e v.

(b) Determine um par de funções $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ definidas implicitamente pelo sistema (3.25)

RESPOSTAS & SUGESTÕES

SEÇÃO 3.1 MÁXIMOS & MÍNIMOS

1. Na tabela abaixo apresentamos os pontos críticos com a seguinte classificação: S (sela), mL (mínimo local) e ML (máximo local). Em alguns casos a existência ou não de extremos absolutos pode ser investigada por observação do limite da função.

	pontos críticos	natureza	mA	MA
(a)	$(0,0)$	S	não	não
(b)	$(0,0)$,$(-1,2)$ e $(4,-8)$	S, mL e mL	sim	não
(c)	$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1/3,1/3)$	S, S, S e mL	não	não
(d)	$(0,0)$	mL	sim	não
(e)	$(-3/2,-1/2)$	mL	sim	não
(f)	$(-2,\sqrt{3})$ e $(-2,-\sqrt{3})$	mL e S	não	não
(g)	$(0,0)$	ML	não	sim
(h)	$(\sqrt{3},1)$, $(\sqrt{3},-1)$, $(-\sqrt{3},1)$, $(-\sqrt{3},-1)$	mL, S, S e ML	não	não
(i)	$(1/2,1/3)$	ML	não	sim
(j)	infinitos (x,x)	o teste falha	não	não
(k)	$(2,1)$ e $(-8,2)$	mL e ML	não	não
(l)	$(0,0)$	o teste falha	não	não

2. O ponto $P = (1/2,1/3)$ é um ponto de máximo absoluto da função de $z = f(x,y)$ em D. A função

$$g(x,y) = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$$

é contínua em D, mas não possui máximo nem mínimo.

3. Cada uma das funções é contínua e está definida em um conjunto compacto. Assim, pelo Teorema de Weierstrass, cada função tem ao menos um ponto de máximo e um ponto de mínimo absolutos.

	pontos de máximo	pontos de mínimo
(a)	$\left(1/2,\sqrt{2}/2\right)$ e $\left(-1/2,-\sqrt{2}/2\right)$	$\left(-1/2,\sqrt{2}/2\right)$ e $\left(1/2,-\sqrt{2}/2\right)$
(b)	$(1,1)$	$(-1,-1)$
(c)	$(1,0)$	$(3,0)$
(d)	$(-1,\pm\pi)$	$(1,\pm\pi)$
(e)	$(-1,0)$	$(1/2,0)$
(f)	$(0,-1)$ e $(0,2)$	$(1,1)$

4. Já vimos que a distância da origem a um ponto $P = (x, y, z)$ dessa curva é dada por

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Portanto, devemos maximizar a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, ou seja,

$$g(t) = f(t, t, t) = 1 + [\operatorname{sen}(t/2)]^2 .$$

Como

$$g'(t) = 2 \operatorname{sen}(t/2) \cos(t/2) = \operatorname{sen} t = 0$$

temos que $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, são os pontos críticos de g. Logo, $g''(t) = \cos t < 0$ em $t = \pi + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Portanto, $P = (-1, 0, 1)$ e $Q = (-1, 0, -1)$ são os pontos desejados.

5. Vamos fazer um esboço da solução, por isso, tente completar!

   (a) Note que se $z = f(x, y) = \exp(x^2 - y^2)$, então $f_x = 2x \exp(x^2 - y^2)$ e $f_x = -2y \exp(x^2 - y^2)$. Logo, $\nabla f = (0, 0)$ se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$. Assim, $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f e $f(0, 0) = 1$. Agora, se fixarmos $y = 0$ e $x \neq 0$, então $g(x) = f(x, 0) = \exp(x^2)$, com

   $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \infty \ \text{ e } \ \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0,$$

   isto é, g é estritamente crescente. Neste caso, g não tem máximo e nem mínimo absoluto. Se fixarmos $x = 0$ e $y \neq 0$, então $h(x) = f(0, y) = \exp(-y^2)$, com

   $$\lim_{y \to +\infty} h(y) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{y \to -\infty} h(y) = \infty,$$

   isto é, h é estritamente decrescente. Neste caso, não tem máximo e nem mínimo absoluto. Portanto, f não tem máximo e nem mínimo absoluto.

   (b) Não tem mínimo absoluto. A origem é um ponto de máximo, com valor máximo.

   (c) Não tem máximo absoluto. Os pontos

   $$P_k\left(\sqrt{2}, k\pi + \pi/4\right) \ \text{ e } \ Q_k\left(-\sqrt{2}, k\pi + 5\pi/4\right), \ \ k \in \mathbb{Z}$$

   são pontos de mínimo absoluto, com o valor mínimo igual a -2.

6. Como $f_x = 2x(1 - y)^3$ e $f_y = -3x^2(1 - y)^2 + 2y$ temos que $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ se, e somente se, $2x(1 - y)^3 = 0$ e $-3x^2(1 - y)^2 + 2y = 0$. Logo, $x = 0$ ou $y = 1$. Se $x = 0$, então $y = 0$. Se $y = 1$, então $2 = 0$, o que é impossível. Assim, $(0, 0)$ é o único ponto crítico de f e $f(0, 0) = 0$. Note que $f_{xx}(x, y) = 2(1 - y)^3$, $f_{xy}(x, y) = -6x(1 - y)^2$ e $f_{yy}(x, y) = 6x^2(1 - y) + 2$. Daí, se $P(0, 0)$, então

$$B^2 - AC = 0^2 - 2 \cdot 2 = -4 < 0 \ \text{ e } \ A = 2 > 0.$$

Assim, $P(0, 0)$ é um ponto de mínimo local de f. Agora, veja o item (a) do Exercício 5.

7. $-\frac{1}{4}{}^\circ C$ e $\frac{3}{2}{}^\circ C$ são os valores de menor e maior temperatura na placa, nos pontos $(0, 1/2)$ e $\left(\pm\sqrt{3}/2, -1/2\right)$, respectivamente.

SEÇÃO 3.2 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

1. Usando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, obtemos

	pontos de máximo	pontos de mínimo
(a)	$(3/4, 4/5)$	$(-3/4-, 4/5)$
(b)	$(\pi/8, -\pi/8)$	$(5\pi/8, 3\pi/8)$
(c)	não há	$(4, 4)$
(d)	$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	pontos da curva
(e)	$(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$
(f)	$\left(\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)$	$P(x, y, z)$ tal que $x = 0$, ou $y = 0$ ou $z = 0$
(g)	$\left(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right)$	$\left(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}\right)$
(h)	$\left(\pm\sqrt{\frac{6}{11}}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{11}}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{6}{11}}\right)$	pontos do plano $x + y + z = 0$
(i)	não há	$(6/19, 1/19)$
(j)	$(\pm 1, \pm 2)$	não há.

2. $d = 1$ u c.

3. $P = (1/4, 1/4)$ e $Q = (-1/4, -1/4)$; $d = \sqrt{2}/4$ u c.

4. $P = (0, \frac{1}{\sqrt{68}}, -\frac{4}{\sqrt{68}})$ e $Q = (0, -\frac{1}{\sqrt{68}}, \frac{4}{\sqrt{68}})$; $d = 0.25$ u c.

5. $x = y = z = \frac{k}{3}$.

6. $P = (1, -2, 5)$.

7. $P = (\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$; $d = \sqrt{10}(\sqrt{5} - 1)$ u c.

8. $f(\pi/3, \pi/3) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

9. Máximo no ponto $M = (1, 0)$ e mínimo no ponto $m = (1/4, 1/2)$.

10. O maior valor da expressão $x(y + z)$ é 1 e ocorre quando $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = \sqrt{2}$; ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = -\sqrt{2}$.

11. $P = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$.

12. $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (1, -1, -1)$, $P_3 = (-1, 1, 1)$ e $P_4 = (-1, -1, -1)$.

13. Já vimos que a distância da origem a um ponto $P = (x, y)$ dessa hipérbole é dada por $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto, devemos minimizar a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225$. É fácil verificar que $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ e $\nabla g(x, y) = (2x + 8y, 8x + 14y)$. Logo, $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ se, e somente se, $x = y = 0$. Como $g(0, 0) \neq 0$ temos que existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = (0, 0),$$
com (x, y) satisfazendo $g(x, y) = 0$. Agora, vamos resolver o sistema para obtermos os pontos críticos de f.
$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x + 8y) = 0 \\ 2y + \lambda(8x + 14y) = 0 \\ x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$

As duas primeiras equações desse sistema são equivalentes a:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + 4\lambda y = 0 \\ 4\lambda x + (1+7\lambda)y = 0 \end{cases}$$

e se $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$, então $x = y = 0$ é uma solução do sistema, o que é impossível, pois $g(0,0) \neq 0$. Logo, $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq -1$. Assim,

$$x = -\frac{4\lambda}{1+\lambda}y \Rightarrow \left(-\frac{16\lambda}{1+\lambda} + 1 + 7\lambda\right)y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{7} \text{ ou } \lambda = 1,$$

pois $y \neq 0$. Se $\lambda = \frac{1}{7}$, então $y = -2x$. Logo, a equação $x^2 - 16x^2 + 28x^2 - 225 = 0$ tem soluções $x = \pm\frac{15\sqrt{13}}{13}$. Portanto,

$$\left(-\frac{15\sqrt{13}}{13}, \frac{30\sqrt{13}}{13}\right) \text{ e } \left(\frac{15\sqrt{13}}{13}, -\frac{30\sqrt{13}}{13}\right)$$

são os pontos mais próximos da origem, pois se $\lambda = 1$, então $x = -2y$. Logo, a equação $4y^2 - 16y^2 + 7y^2 - 225 = 0$ não tem solução. Portanto, $d(O,P) = \frac{15\sqrt{65}}{13}$ u c.

14. Como $f_x(x,y) = y^2 + 2 > 0$, em todos os pontos do interior de D, temos, pelo Teorema de Weierstrass, que os pontos de máximos e mínimos de f ocorrem na fronteira de D. Sejam $(1,\theta)$ as coordenadas polares do ponto $(x,y) \in X$. Então $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Assim, $P = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ percorre toda a fronteira de X. Como

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + 2\cos\theta + \operatorname{sen}^4\theta + 1$$

temos que

$$g'(\theta) = -\operatorname{sen}^3\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta + 4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}^3\theta(4\cos\theta - 3) = 0$$

se, e somente se, $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\cos\theta = \frac{3}{4}$ e $\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{17}}{6}$ Assim,

$$P = (-1,0), \quad Q = (1,0), \quad R = \left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \text{ e } S = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

É fácil verificar que

$$f(P) = -1, \quad f(Q) = 3 \text{ e } f(R) = f(S) = \frac{823}{256} > 3,$$

ou seja, P é ponto de mínimo e R, S pontos de máximos.

Outra maneira de resolver o problema é via Multiplicadores de Lagrange. Seja $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Então é fácil verificar que $\nabla f(x,y) = (y^2 + 2, 2xy + 4y^3)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$. Logo, $\nabla g(x,y) = (0,0)$ se, e somente se, $x = y = 0$. Como $g(0,0) \neq 0$ temos que o ponto $(0,0)$ não está na curva. Assim, existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x,y) + \lambda\nabla g(x,y) = (0,0),$$

com (x,y) satisfazendo $g(x,y) = 0$. Logo, devemos resolver o sistema para obtermos os pontos críticos de f.

$$\begin{cases} y^2 + 2 + 2\lambda x = 0 \\ 2xy + 4y^3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Note que a segunda equação

$$xy + 2y^3 + \lambda y = 0 \Leftrightarrow y(x + 2y^2 + \lambda) = 0.$$

Logo, temos duas possibilidades: se $y = 0$, obtemos $x = \pm 1$. Se $y \neq 0$, então

$$x + 2y^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -x - 2y^2.$$

Substituindo na primeira equação e usando a terceira, obtemos

$$y^2 + 2 - 2x^2 - 4xy^2 = 0 \Rightarrow 1 - x^2 + 2 - 2x^2 - 4x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Assim, $x = \frac{3}{4}$, pois $x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$. Portanto, os pontos críticos são:

$$P = (-1, 0), \;\; Q = (1, 0), \;\; R = \left(\tfrac{3}{4}, -\tfrac{\sqrt{7}}{4}\right) \;\text{ e }\; S = \left(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

É fácil verificar que

$$f(P) = -1, \;\; f(Q) = 3 \;\text{ e }\; f(R) = f(S) = \tfrac{823}{256} > 3,$$

ou seja, P é ponto de mínimo e R, S pontos de máximos.

15. $d = \frac{1427}{168}$ u c.

16. Máximos $(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$ e mínimos $(\pm 1, \pm 1)$.

17. Em um ponto $P(x, y, z)$ em que alguma coordenada é 0, a temperatura é $T(P) = 0$ e esta, seguramente, não é a temperatura máxima nem mínima. De fato,

$$T\left(1, 1, \sqrt{2}\right) = 100\sqrt{2} > 0 \quad e \quad T\left(1, 1, -\sqrt{2}\right) = -100\sqrt{2} < 0.$$

A temperatura máxima é $200°C$, e ocorre nos pontos $\left(\pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm 1\right)$; a temperatura mínima é $-200°C$ e ocorre nos pontos $\left(-1, \pm\sqrt{2}, 1\right)$ e $\left(1, \pm\sqrt{2}, -1\right)$

18. $x = 4\,m$, $y = 4\,m$ e $z = 2\,m$.

19. Para um cilindro de raio r e altura h, devemos maximizar a área lateral $f = 2\pi rh$, sujeita ao vínculo $g = r^2 + (h/2)^2 - a^2 = 0$. Encontramos $r = a/\sqrt{2}$ e $h = a\sqrt{2}$.

20. Semelhante ao Exemplo 3.17.

21. $V = (3, 4, 12)$.

22. Base quadrada de lado $\sqrt[3]{4}\,m$ e altura $2\sqrt[3]{4}\,m$

23. O retângulo de lados

$$x = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \;\text{ e }\; y = \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

SEÇÃO 3.3 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

1. (a) $y' = -3$ e $y'' = -62$; (b) $y' = -\frac{2}{3}$ e $y'' = \frac{23}{27}$; (c) $y' = -1$ e $y'' = -3$; (d) $y' = -1$ e $y'' = 2$.

2. (a) $x' = \dfrac{dx}{dy} = 0$; (b) $x' = \dfrac{dx}{dy} = 0$.

3. (a) $z_x = -x/z$ e $z_y = -y/z$; (b) $z_x = \left(y + 2xy + y^2\right)/2z$ e $z_y = \left(x + 2xy + x^2\right)/2z$; (c) $z_x = z^2/\left(\operatorname{sen} z + 3y - 2xz\right)$ e $z_y = 3z/\left(2xz - 3y - \operatorname{sen} z\right)$.

4. $u = 2\operatorname{sen}(xy) - x^2 - y^2$ e $v = -3\operatorname{sen}(xy) + x^2 + y^2$.

5. Derivando implicitamente a equação $PV - kT = 0$, em que P é uma função de V, obtemos

$$\frac{\partial P}{\partial V}V + P = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{P}{V}.$$

De modo inteiramente análogo, obtemos

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{k}{P} \text{ e } \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{k}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -\frac{P}{V}\cdot\frac{k}{P}\cdot\frac{V}{k} = -1.$$

6. Semelhante ao Exercício anterior com a equação $F(x, y, z) = 0$, em que x é uma função de y, obtemos

$$F_x\frac{\partial x}{\partial y} + F_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}.$$

7. Se $x = f(u, v)$ e $y = g(u, v)$, com $u = h(z, w)$ e $v = k(z, w)$, então usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)} &= \begin{vmatrix} x_z & x_w \\ y_z & y_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u u_z + x_v v_z & x_u u_w + x_v v_w \\ y_u u_z + y_v v_z & x_u u_w + x_v v_w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_z & u_w \\ v_z & v_w \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(z,w)}.\end{aligned}$$

Em particular, pondo $x = z$ e $y = w$, obtemos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

8. Sejam $F(x, y, u, v) = u^3 - 2u - v - 3$ e $G(x, y, u, v) = x^2 + y^2 - u - 4$. Então use as relações

$$v_x = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)} \text{ e } v_y = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}$$

para determinar que $v_x = 4$ e $v_y = 2$.

9. Semelhante ao Exercício anterior.

10. Sejam $F(x, y, s, t) = x^2 - xt - y^2t^2 + 2s + 2$ e $G(x, y, s, t) = y^2 - 2yt + xt^2 - ys + s^2 - 6$. Então

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = -9.$$

Agora, usando as fórmulas de derivação encontramos

$$x_s = \frac{2}{3},\ \ x_t = -\frac{2}{3},\ \ y_s = \frac{4}{9} \text{ e } y_t = -\frac{14}{9}.$$

SEÇÃO 3.4 TRANSFORMAÇÕES

1. (a) $J = 9$; (b) $J = r$; (c) $J = 5\exp(x) + 1$; (d) $J = r$; (e) $J = -3$; (f) $J = 2\left(x^2 - 2y\right)\cos y - 2\left(2x^2 + y\right)\operatorname{sen} y$; (g) $J = -5$, (h) $J = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$, (i) $J = abc$.

2. (a) $J(T) = -15\exp(x)y^2 J$ e $J\left(T^{-1}\right) = -\frac{1}{15\exp(x)y^2}$, nos pontos com $y \neq 0$; (b) Em $x = 0$ e $y = 1$, obtemos $J = -15$. Portanto,
$$x_u = \frac{1}{J}v_y = \frac{6}{15} \text{ e } y_v = \frac{1}{J}u_x = -\frac{1}{15}.$$

3. Confira a prova do Teorema 3.32.

4. Note que $u = f(\rho, \sigma)$, $\rho = g(x,t)$ e $\sigma = h(x,t)$. Assim, pela Regra da Cadeia, obtemos
$$u_x = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} \text{ e } u_t = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$
e como
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = c, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 1 \text{ e } \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -c$$
resulta $u_x = u_\rho + u_\sigma$ e $u_t = c\left(u_\rho - u_\sigma\right)$. Logo,
$$u_{xx} = \partial_x\left(u_\rho\right) + \partial_x\left(u_\sigma\right) = u_{\rho\rho}\rho_x + u_{\rho\sigma}\sigma_x + u_{\sigma\rho}\rho_x + u_{\sigma\sigma}\sigma_x = u_{\rho\rho} + 2u_{\rho\sigma} + u_{\sigma\sigma}$$
e
$$u_{tt} = c\left[\partial_t\left(u_\rho\right) - \partial_t\left(u_\sigma\right)\right] = c\left(u_{\rho\rho}\rho_t + u_{\rho\sigma}\sigma_t - u_{\sigma\rho}\rho_t + u_{\sigma\sigma}\sigma_t\right) = c^2\left(u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}\right).$$
Portanto,
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2\left(u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}\right) - c^2(u_{\rho\rho} + 2u_{\rho\sigma} + u_{\sigma\sigma}) = -2c^2 u_{\rho\sigma} \Rightarrow u_{\rho\sigma} = 0.$$

5. Note que o vetor $\mathbf{z}_1 = (1,0)$ no plano xy é transformado no vetor $\mathbf{w}_1 = (a,c)$ no plano uv, e o vetor $\mathbf{z}_2 = (0,1)$ no plano xy é transformado no vetor $\mathbf{w}_2 = (b,d)$ no plano uv. Já vimos que a área do paralelogramo determinada pelos vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ é dada por
$$|ad - bc| = |\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2| = |\mathbf{w}_1|\,|\mathbf{w}_2|\operatorname{sen}\theta = |\mathbf{w}_1|\left(|\mathbf{w}_2|\operatorname{sen}\theta\right) = b \cdot h,$$
com θ o ângulo entre os vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$. Por outro lado,
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$
Portanto,
$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = |ad - bc| = |\mathbf{w}_1 \times \mathbf{w}_2|.$$

6. Como $x = au$ e $y = bv$ temos que
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} = u^2 + v^2 \Rightarrow u^2 + v^2 = 1.$$

7. A mudança de coordenadas é $u = x/a$, $v = y/b$ e $w = z/c$.

8. Note que se $u = 4x$ e $v = y$, então a imagem é a elipse $u^2 + 16v^2 = 16a^2$.

9. Note que se $u = \exp(x)\cos y$ e $v = \exp(x)\operatorname{sen} y$, então a imagem da reta $x = c$ é o círculo $u^2 + v^2 = \exp(2c)$.

10. A imagem da região é o quadrado de vértices $(1/2, 1/2)$, $(1/2, 1)$, $(1, 1/2)$ e $(1, 1)$.

11. A imagem da região $\mathcal{R}$ é o quadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ no plano uv. Como $x = \frac{1}{2}(u + v)$ e $y = \frac{1}{2}(u - v)$, temos que

$$xy = 1 \Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{2}(u+v)\right)\left(\tfrac{1}{2}(u-v)\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4} = 1,$$

e a imagem da hipérbole $\mathcal{H}$ é a hipérbole $\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}v^2 = 1$ do plano uv.

12. Note que $x = f(u)$ e $y = -v + uf(u)$. Logo,

$$J(T) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f'(u) & 0 \\ f(u) + uf'(u) & -1 \end{vmatrix} = -f'(u) \neq 0.$$

pois $f'(u) > 0$, para todo u. Como f é contínua e $f'(u) > 0$ temos, pelo Teorema da Função Inversa, que existe uma função $u = g(x)$, $g = f^{-1}$ tal que $f(g(x)) = x$. Portanto, $u = f^{-1}(x)$ e $v = -y + xf^{-1}(x)$, ou seja,

$$T^{-1}(x, y) = \left(f^{-1}(x), -y + xf^{-1}(x)\right).$$

13. Vamos fazer apenas o item (a). Como $u = 3x$ e $v = 5y$ temos que $x = \frac{k}{3}$ e $y = \frac{k}{5}$ são retas no plano xy paralelas aos eixos dos y e dos x, respectivamente. Faça um esboço. Neste caso,

$$T^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{3}, \frac{v}{5}\right).$$

14. A imagem em cada caso é:

    (a) O retângulo de vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(6, 5)$ e $(0, 5)$.
    (b) A elipse $25x^2 + 9y^2 = 225$.
    (c) O triângulo de vértices $(0, 0)$, $(3, 1)$ e $(2, 3)$.
    (d) A reta $4u - 9v = 1$.
    (e) A reta $u - 3v + 5 = 0$.
    (f) O paralelogramo de vértices $(0, 0)$, $(1, 5)$, $(10, 4)$ e $(9, -1)$.
    (g) A elipse $13u^2 + 41v^2 + 4uv = 529$.

15. (a) Representa um círculo se $a \neq 0$ e $b^2 + c^2 - 4ad > 0$; representa uma reta se $a = 0$ e $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. (b) Se

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

então a imagem de γ por esta transformação é a curva do plano uv desrita por

$$d\left(u^2 + v^2\right) + bu - cv + a = 0,$$

que representa um círculo, se $d \neq 0$, ou uma reta se $d = 0$.

16. A tabela completa é:

Cartesianas: (x, y, z)	Cilíndricas: (r, θ, z)	Esféricas: (ρ, θ, ϕ)
$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right)$	$\left(2, \pi/4, 2\sqrt{3}\right)$	$(4, \pi/4, \pi/6)$
$(3\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$	$(6\sqrt{2}, \pi/6, -6\sqrt{2})$	$(12, \pi/6, 3\pi/4)$
$(1, 1, -\sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \pi/4, -\sqrt{2})$	$(2, \pi/4, 3\pi/4)$

17. (a) o cilindro $x^2 + y^2 = 16$; (b) o par de planos $(x - y)(x + y) = 0$; (c) a folha superior do cone $z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$; (d) o elipsoide $9x^2 + 9y^2 + 3z^2 = 27$; (e) a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; (f) o cilindro circular reto $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

18. (a) a esfera de centro $(3, 0, 0)$ e raio 3; (b) o cilindro circular reto de raio 5; (c) os planos $x \pm \sqrt{3}y = 0$; (d) o plano $z = 4$; (e) o cone $x^2 + y^2 = z^2$; (f) a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, juntamente com a origem; (g) o plano $x = 1$; (h) a esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$; (i) um par de palnos; (j) a esfera de centro na origem e raio a; (k) a região entre as esferas de raios 1 e 2 centradas na origem; (l) o paraboloide $z = x^2 + y^2$.

19. As identificações são:

    (a) $r^2 + z^2 = 4$ e $\rho = 2$
    (b) $r = 2$ e $\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi = 4$
    (c) $r^2 - 4z^2 = 0$ e $\operatorname{tg} \phi = 2$
    (d) $r^2 - z^2 = 1$ e $\rho^2 \cos 2\phi = 1$
    (e) $4z = r(3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$ e $(3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{tg}\phi = 1$
    (f) $4z = r^2$ e $\rho = 4 \operatorname{cotg}\phi \operatorname{cosec}\phi$

20. Sejam $F(x, y, u, v) = x^2 + y^2 u - v = 0$, $G(x, y, u, v) = x + y^2 - u = 0$ e

$$J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}.$$

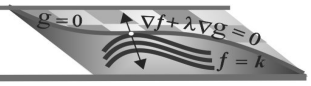
    (a) Agora, usando as fórmulas de derivação implícita, obtemos

$$x_u = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}.$$

    (b) Resolvendo o sistema encontramos, por exemplo,

$$x = \frac{1}{2}\left(u - \sqrt{4v - 3u^2}\right) \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u + \sqrt{4v - 3u^2}}.$$

4. Integrais Múltiplas



Os problemas de "medida", relacionados com os conceitos de comprimento, área e volume, remontam aos tempos dos egípcios há mais de 4.000 anos, às margens do rio Nilo, quando problemas como o cálculo de áreas de campos e volumes de grãos começaram a ter importância. Com os conhecimentos das integrais simples obtemos áreas de regiões planas limitadas por gráficos de funções, volumes de sólidos de revolução, usando os métodos das fatias e dos discos circulares, de aplicações na geometria, na física, etc. Neste Capítulo, esses problemas relacionados ao conceito de integrais simples serão estendidos para integrais múltiplas.

No Capítulo 3 calculamos derivadas parciais de funções reais de duas variáveis reais, considerando uma das variáveis independentes como sendo constante e diferenciando em relação à outra. De modo inteiramente análogo, é possível considerar uma integral indefinida como uma função em relação a uma dessas variáveis. Por exemplo,

$$\int x^3y^2dx = y^2\int x^3dx = y^2\left(\frac{x^4}{4}\right) + C.$$

No cálculo da integral mantivemos a variável y temporariamente com um valor constante, no entanto, valores fixados e distintos assumidos por y poderiam requerer diferentes valores da constante de integração C. Assim, devemos considerar a constante de integração como uma função de y e escreveremos

$$\int x^3y^2dx = y^2\int x^3dx = y^2\left(\frac{x^4}{4}\right) + C(y).$$

Da mesma forma que as integrais simples, as integrais duplas ou triplas podem ser utilizadas como eficientes ferramentas de modelagem em diversas situações-problema, sobretudo aquelas que envolvem o cálculo de área ou volume de uma determinada região. Como exemplo, mostraremos que o volume do elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

sendo $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$, é igual a $\frac{4}{3}\pi abc$. Mais geralmente, calcularemos o volume do sólido Ω descrito por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\},$$

sendo $f(x, y)$ uma função contínua na região compacta $\mathcal{R}$ do plano xy e

4.1 Integral Dupla

Sabemos do cálculo de uma variável que a integral simples

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

onde $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa (o gráfico de f se situa acima do eixo x) no intervalo $I = [a, b]$, é definida como a área delimitada pelo eixo x, pelas retas $x = a$ e $x = b$ e

acima pelo gráfico da função $y = f(x)$. Esse conceito de integral simples pode ser estendido a uma função real de duas variáveis reais $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua na região compacta D, por exemplo, no retângulo

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}.$$

4.1.1 Integral Dupla sobre Retângulos

Consideremos uma função $z = f(x, y)$, contínua no retângulo compacto

$$D_{xy} = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\} \tag{4.1}$$

e, para melhor clareza, suponhamos que f seja não negativa, isto é, o gráfico de f é uma superfície situada acima do plano xy. Para melhor compreensão do conceito, definiremos a *integral dupla* de função contínua f sobre o retângulo compacto D passo a passo e faremos referência a uma partição do intervalo $[a, b]$ como um *particionamento* de $[a, b]$.

■ **Etapa 1: Particionando o retângulo D_{xy}**

Particionemos os intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente, por

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b \quad \text{e} \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d,$$

e com essas partições formemos mn retângulos $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, de lados iguais a

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{m} \quad \text{e} \quad \Delta y = y_{i+1} - y_i = \frac{d-c}{n},$$

de modo que

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x, \;\; i = 1, \ldots, m \quad \text{e} \quad y_j = y_{j-1} + \Delta y, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Quando m e n tornam-se arbitrariamente grandes ($m \to \infty$ e $n \to \infty$), então os lados dos retângulos se aproximam de zero, isto é, $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$.

■ **Etapa 2: Avaliando f em um ponto (u_i, v_j) do retângulo R_{ij}**

Em cada retângulo R_{ij} escolhemos um ponto (u_i, v_j), $i = 0, 1, \ldots, m-1$ e $j = 0, 1, \ldots, n-1$, e nesse ponto avaliamos a função f, isto é, calculamos o valor $z_{ij} = f(u_i, v_j)$.

■ **Etapa 3: Construindo as Somas de Riemann**

Cada parcela $f(u_i, v_j)\Delta x \Delta y$ que figura na soma

$$S_{m,n} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} z_{ij} \Delta x \Delta y, \tag{4.2}$$

é uma aproximação do volume da caixa retangular de base R_{ij} e altura $z_{ij} = f(u_i, v_j)$ e cada soma $S_{m,n}$ nos dá uma aproximação por falta ou por excesso do volume do sólido cuja base é o retângulo D e o topo é o gráfico da função f. As somas $S_{m,n}$ são denominadas *somas de Riemann* de f.

Com esses ingredientes, definiremos a *integral de Riemann* (integral dupla) de f sobre o retângulo D. Quando a função f é contínua no retângulo D, demonstra-se que o limite

$$\lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} z_{ij} \Delta x \Delta y$$

existe e esse limite é, por definição, a integral dupla de f sobre o retângulo D e anota-se:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} z_{ij}\Delta x\Delta y.$$

O elemento dA é a *área infinitesimal ou área elementar*, usualmente indicada por $dxdy$. No cálculo de integrais, quando for necessário enfatizar as variáveis de integração, a notação

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

é mais adequada. A Figura 4.1 ilustra a construção da integral dupla sobre o retângulo D.

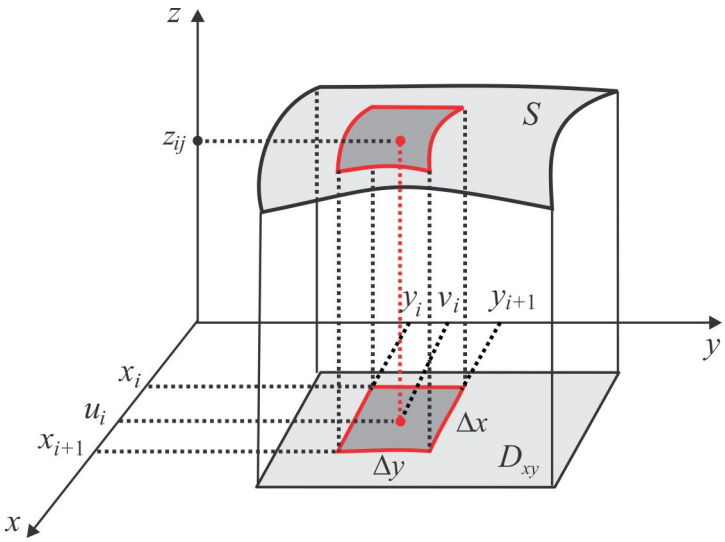


Figura 4.1: Área elementar $dA = dxdy$.

As propriedades básicas da integral dupla são similares àquelas para integral simples e o seguinte resultado, admitido sem demonstração, é na verdade consequência das propriedades do limite

Proposição 4.1 *Se $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções contínuas no retângulo compacto D e λ é uma constante real, então*

1. **Linearidade.** $\iint_D [f(x,y) + \lambda g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)dA + \lambda \iint_D g(x,y)dA.$

2. **Aditividade.** $\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$, *sendo $D = D_1 \cup D_2$ e D_1 e D_2 têm apenas pontos de fronteira em comum.*

3. **Valor Médio.** *Existe ao menos um ponto $P(a,b)$ no retângulo D tal que*

$$\iint_D f(x,y)dA = f(a,b)A(D),$$

onde $A(D)$ é a área da região D. ■

Exemplo 4.2 *Vamos ilustrar, neste exemplo, como usar a definição para calcular a integral dupla da função $f(x,y) = xy^2$ sobre o retângulo*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \text{ e } \ 0 \le y \le 1\}.$$

Solução Usando o Método de Indução Finita, demonstra-se que

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{e} \quad 1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

e consideramos a partição do retângulo D determinada pelos pontos

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1 \quad \text{e} \quad 0=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}<y_n=1,$$

onde

$$x_k=k\Delta x \quad \text{e} \quad y_k=k\Delta y,\ k=1,2,\ldots n, \ \text{sendo}\ \Delta x=\Delta y=\frac{1}{n}.$$

As somas de Riemann (4.2), com $u_i=x_i$ e $v_j=y_j$, são

$$\begin{aligned} S_{n,n} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f\left(u_i,v_j\right)\Delta x\Delta y=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} i(\Delta x)^2\right)j^2(\Delta y)^3 \\ &= \frac{n+1}{2n}\left(\sum_{j=0}^{n} j^2(\Delta y)^3\right)=\frac{(n+1)^2(2n+1)}{12n^3}, \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\iint_D xy^2dxdy=\lim_{n\to\infty}S_{n,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2(2n+1)}{12n^3}=\frac{1}{6}. \qquad \blacksquare$$

O Exemplo 4.2 é uma demonstração clara de que o cálculo de integrais duplas pela definição pode não ser uma tarefa fácil, exceto em casos elementares. O cálculo de integral dupla sobre retângulos e, também, sobre regiões compactas simples não retangulares, será feito como uma *integral repetida* ou *integral iterada*, com auxílio do Teorema de Fubini[12].

Teorema 4.3 (Teorema de Fubini) *Seja $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função contínua no retângulo*

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b \ \ e \ \ c\le y\le d\}.$$

Então

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy=\int_c^d\left[\int_a^b f\left(x,y\right)dx\right]dy=\int_a^b\left[\int_c^d f\left(x,y\right)dy\right]dx. \qquad \blacksquare \tag{4.3}$$

As integrais

$$\int_c^d\left[\int_a^b f\left(x,y\right)dx\right]dy \quad \text{e} \quad \int_a^b\left[\int_c^d f\left(x,y\right)dy\right]dx$$

que figuram em (4.3) são as integrais iteradas ou integrais repetidas de $f\left(x,y\right)$ sobre o retângulo D e nelas estão especificadas a ordem de integração. Por exemplo, na integral iterada

$$\int_c^d\left[\int_a^b f\left(x,y\right)dx\right]dy$$

primeiro calculamos a integral parcial $\int_a^b f\left(x,y\right)dx$, mantendo y temporariamente constante, e o resultado integramos com respeito à variável y no intervalo $[c,d]$.

[12] Guido Fubini (1879-1943), matemático italiano.

Corolário 4.4 *Se $g(x)$ e $h(y)$ são contínuas em $[a,b]$ e $[c,d]$, respectivamente, então*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)\,h(y)\,dxdy = \left[\int_a^b g(x)\,dx\right]\left[\int_c^d h(y)\,dy\right]. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.5 *Reconsiderar o Exemplo 4.2 e calcular, via Teorema de Fubini, a integral dupla*

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} xy^2 dA.$$

Solução No retângulo $D=[0,1]\times[0,1]$ o Teorema de Fubini nos dá

$$\begin{aligned}\iint_D xy^2 dA &= \int_0^1\left[\int_0^1 xy^2dx\right]dy = \int_0^1 y^2\left[\int_0^1 xdx\right]dy = \int_0^1 y^2\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{x=0}^{x=1}dy\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 y^2dy = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{3} = 1/6. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 4.6 (o volume como integral dupla) *Calcular o volume do sólido Ω acima da região $D=[0,1]\times[0,1]$ do plano xy e abaixo do plano $x+y+z=2$.*

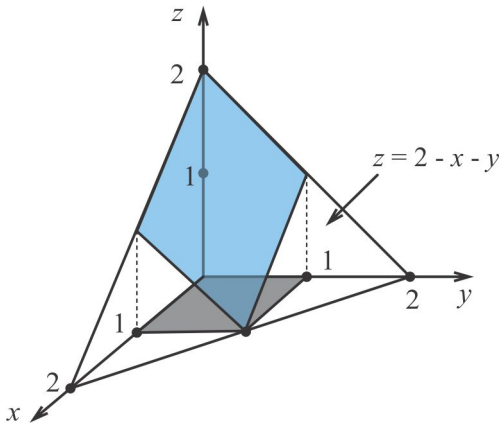


Figura 4.2: Volume abaixo do plano $x+y+z=2$.

Solução Quando integramos uma função contínua e não negativa $z=f(x,y)$ sobre uma região D, o resultado é o volume do sólido Ω acima da região D e abaixo do gráfico de f. O sólido Ω é limitado superiormente pelo gráfico da função $z=2-x-y$ e está ilustrado na Figura 4.2. O volume, calculado por integral dupla, é dado por

$$\begin{aligned}\text{vol}(\Omega) &= \iint_D (2-x-y)\,dA = \int_0^1\left[\int_0^1(2-x-y)\,dx\right]dy\\ &= \int_0^1\left[2x-\tfrac{1}{2}x^2-xy\right]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^1\left(\tfrac{3}{2}-y\right)dy = \left(\tfrac{3}{2}y-\tfrac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1 = 1. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 4.7 *Calcular o volume do sólido Ω acima do retângulo $D=[-1,1]\times[0,1]$ e abaixo do cilindro $z=1-x^2$.*

Solução A base do sólido Ω é o retângulo D e superiormente ele é limitado pelo gráfico da função $z=1-x^2$, como está ilustrado na Figura 4.3. O volume, calculado por integral dupla, é dado por

$$\begin{aligned}\text{vol}(\Omega) &= \iint_D (1-x^2)\,dA = \int_{-1}^1\left[\int_0^1(1-x^2)\,dy\right]dx = \int_{-1}^1(1-x^2)\left[\int_0^1 dy\right]dx\\ &= \int_{-1}^1(1-x^2)\,dx = \left(x-\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^1 = 4/3. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

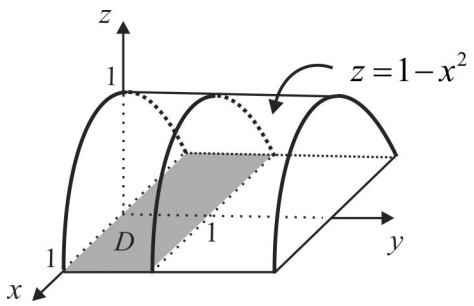


Figura 4.3: Volume abaixo do cilindro$z = 1 - x^2$.

Exemplo 4.8 *O volume de um sólido Ω é dado por*

$$\text{vol}\,(\Omega) = \int_0^2 \int_{-1}^1 \left(x^2 + y^2\right) dydx.$$

Por observação da integral, vemos que a base do sólido é o retângulo $D = [0,2]\times[-1,1]$ e superiormente o sólido é delimitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$.

4.1.2 Integral Dupla sobre Regiões não Retangulares

Do ponto de vista teórico, a integral de uma função contínua $z = f\,(x,y)$ sobre uma região compacta D do plano xy se reduz ao caso em que a região de integração é retangular.

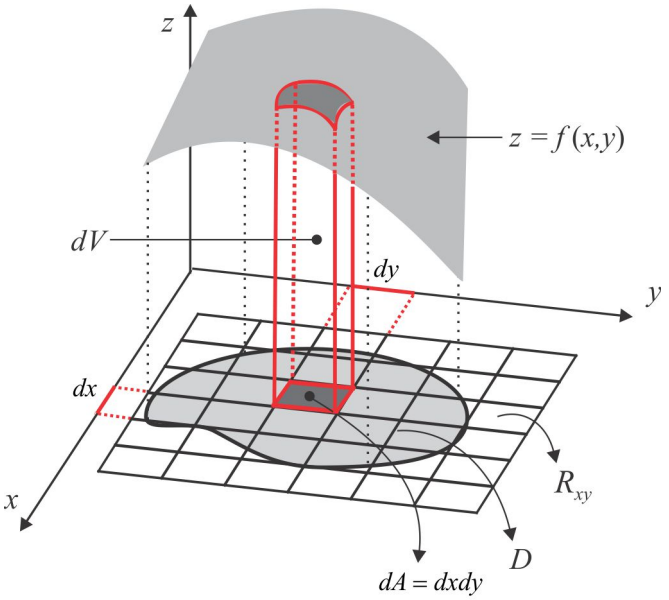


Figura 4.4: Volume elementar $dV = f(x,y)dA$.

De fato, seja $R_{xy} = [a,b] \times [c,d]$ um retângulo contendo a região D e consideremos a extensão $\tilde{f}$ de f ao retângulo R_{xy}, nula fora de D, isto é, $\tilde{f} : R_{xy} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f\,(x,y)\,, & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Embora a extensão $\tilde{f}$ não seja, em geral, contínua na região R_{xy}, sua integral dupla pode serd efinida de forma similar ao caso de uma função contínua em retângulo. Então, a integral dupla de f sobre D é, por definição, a integral dupla da extensão $\tilde{f}$ sobre o retângulo R_{xy}, isto é,

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{R_{xy}} \tilde{f}(x,y)\,dA.$$

A Figura 4.4 ilustra a situação geométrica, que mostra o *volume elementar* $dV = f(x,y)\,dA$ e sugere que a integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$, no caso em que a função f é não negativa, representa o volume do sólido com base D e limitada superiormente pelo gráfico de $z = f(x,y)$.

O cálculo da integral dupla sobre regiões compactas D não retangulares é feito, também, por meio de integrais iteradas, como estabelece o Teorema de Fubini, em sua versão um pouco mais geral, desde que a região D tenha um formato simples, como descreveremos a seguir.

Região Vertical Simples

Uma região do tipo

$$R_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b \ \text{ e } \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\},$$

onde $g_1, g_2 : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, é denominada *região vertical simples*. A Figura 4.5 exibe uma região vertical simples, onde observamos que as retas verticais (paralelas ao eixo y) $x = k$, $a < k < b$, intercepta a fronteira da região em exatamente dois pontos. A integral dupla de f sobre a região R_x é calculada pelo Teorema de Fubini para regiões não retangulares:

$$\iint_{R_x} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx.$$

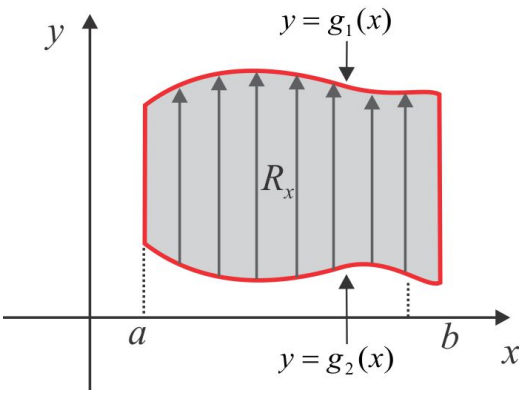


Figura 4.5: Região vertical simples

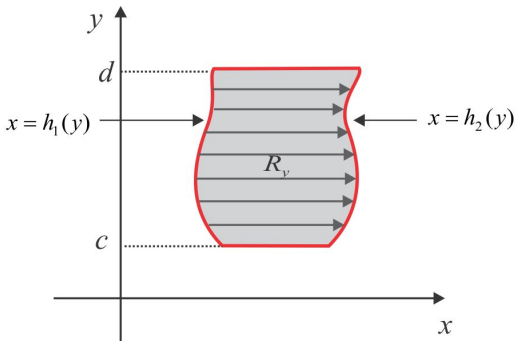


Figura 4.6: Região horizontal simples

Região Horizontal Simples

Denomina-se *região horizontal simples* qualquer região do tipo

$$R_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \le x \le h_2(y) \ \text{ e } \ c \le y \le d\},$$

onde $h_1, h_2 : [c,d] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. A integral dupla de f sobre a região R_y é, via Teorema de Fubini, dada por:

$$\iint_{R_y} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy.$$

A Figura 4.6 mostra uma região horizontal simples, em que as retas horizontais (paralelas ao eixo x) $y = k,\ c < k < d$, intercepta a fronteira da região em exatamente dois pontos.

Exemplo 4.9 *Exemplos de regiões que são, ao mesmo tempo, vertical e horizontal simples citamos as regiões retangulares* $R = [a, b] \times [c, d]$ *e os discos* $x^2 + y^2 \leq a^2$. ■

Suponhamos que D seja uma região limitada com a seguinte propriedade: qualquer reta vertical (paralela ao eixo y) ou horizontal (paralela ao eixo x) intercepta a fronteira de D em no máximo dois pontos. Uma tal região pode ser decomposta em regiões simples do tipo vertical R_x ou horizontal R_y e a integral dupla sobre D é calculada usando a propriedade aditiva da integral. Veja na Figura 4.7 uma decomposição em regiões simples D_1 e D_2 do tipo 1 ou 2 e a integral sobre D é a soma das integrais sobre D_1 e sobre D_2, isto é,

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_{D_1} f(x, y)\, dA + \iint_{D_2} f(x, y)\, dA.$$

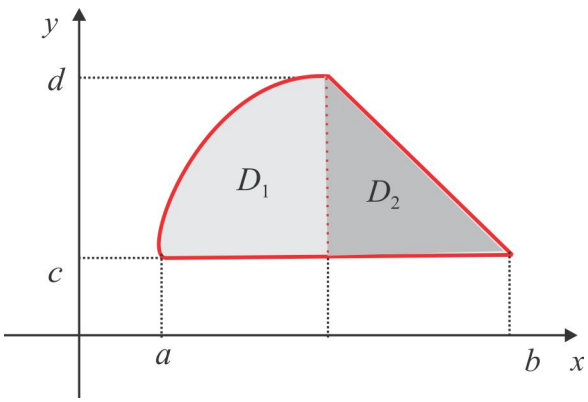


Figura 4.7: Decomposição em regiões simples.

Exemplo 4.10 *Calcular a integral de* $f(x, y) = xy^2$ *sobre o quarto de círculo do primeiro quadrante*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ \ y \geq 0 \ \text{ e } \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Solução A região D pode ser descrita por

$$D = R_x = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \text{ e } \ 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}$$

e, do Teorema de Fubini, resulta

$$\iint_D xy^2 dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy^2 dy\right] dx = \int_0^1 x \left[\tfrac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \tfrac{1}{3}\int_0^1 x(1 - x^2)^{3/2} dx.$$

Assim, fazendo a substituição $u = 1 - x^2$, obtemos

$$\tfrac{1}{3}\int_0^1 x(1 - x^2)^{3/2} dx = -\tfrac{1}{6}\int_1^0 u^{3/2} du = \tfrac{1}{6}\int_0^1 u^{3/2} du = \tfrac{1}{15}u^{5/2}\Big|_0^1 = 1/15$$

e, portanto,

$$\iint_D xy^2 dxdy = \frac{1}{15}. \qquad ■$$

Exemplo 4.11 *Calcular a integral* $\iint_D (x^3+3y)\,dA$, *onde* D *é a região delimitada pelas curvas* $y=x^2$ *e* $y=2x$.

Solução Para encontrar os pontos de interseção das curvas $y=x^2$ e $y=2x$, resolvemos a equação $x^2=2x$ e obtemos $x=0$ e $x=2$. A regiaõ D é a região vertical simples

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2 \ \text{ e } \ x^2\le y\le 2x\},$$

ilustrada na Figura 4.8.

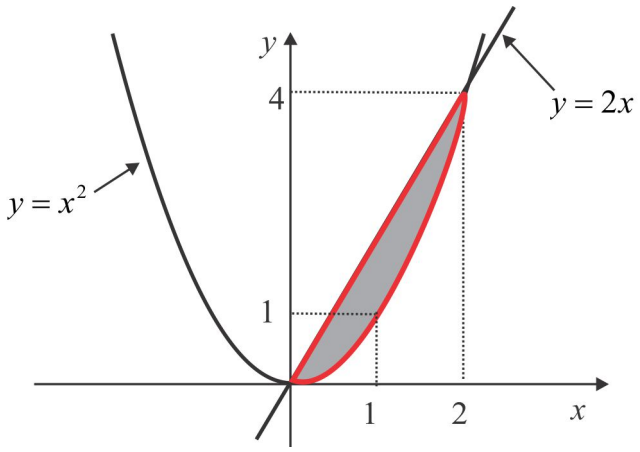


Figura 4.8: Região entre as curvas $y=x^2$ e $y=2x$.

Do Teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned}\iint_D (x^3+3y)\,dxdy &= \int_0^2\left[\int_{x^2}^{2x}(x^3+3y)\,dy\right]dx=\int_0^2 \left(x^3y+\tfrac{3}{2}y^2\right)\Big|_{y=x^2}^{y=2x}dx\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^2(-2x^5+x^4+12x^2)dx\\ &= \left(-\tfrac{2}{6}x^6+\tfrac{1}{5}x^5+\tfrac{12}{3}x^3\right)\Big|_0^2=128/15. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 4.12 *Calcular o volume do tetraedro* Ω *delimitado pelo plano* $x+y+z=1$ *e pelos planos coordenados.*

Solução A Figura 4.9 ilustra o tetraedro Ω, onde observamos que as seções pelos planos $x=c$, c constante real, são triângulos.
O volume elementar é $dV=zdxdy$, sendo $z=f(x,y)=1-x-y$ e, portanto, o volume de Ω é

$$\text{vol}\,(\Omega)=\iint_D zdxdy,$$

onde a integração é feita sobre a região vertical simples

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1 \ \text{ e } \ 0\le y\le 1-x\}.$$

Do Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}\text{vol}\,(\Omega) &= \iint_D (1-x-y)\,dxdy=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\right]dx\\ &= \int_0^1\left[y-xy-\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=1-x}dx=\tfrac{1}{2}\int_0^1(1-2x+x^2)dx=1/6. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

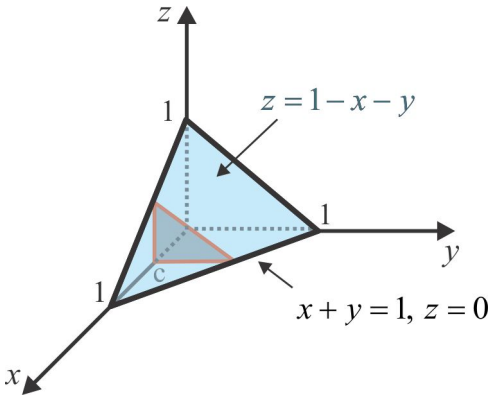


Figura 4.9: Esboço do tetraedro.

Exemplo 4.13 (área como integral dupla) *Calcular, por integral dupla, a área da região D delimitada pelas curvas $x^2 + 2y = 16$ e $x + 2y = 4$.*

Solução Se $f(x, y) \equiv 1$ em D, então o volume elementar é $dV = dA$ e, sendo a integral dupla a *soma* desses volumes elementares, o resultado é a área $A(D)$ da região D, isto é,

$$\text{vol}(\Omega) = \iint_D dA = A(D).$$

Para descrever e esboçar a região de integração D, primeiro determinamos os pontos de interseção das curvas $x^2 + 2y = 16$ e $x + 2y = 4$, os quais são obtidos a partir das soluções da equação $16 - x^2 = 4 - x$. Essas soluções são $x = -3$ e $x = 4$ e, portanto, as curvas se interceptam nos pontos $A(-3, 7/2)$ e $B(4, 0)$ indicados na Figura 4.10.

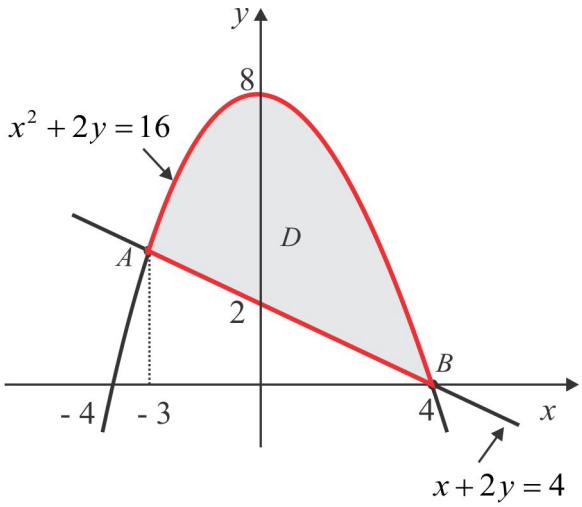


Figura 4.10: Área por integral dupla.

A região D é descrita por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 4 \text{ e } 2 - \frac{x}{2} \leq y \leq 8 - \frac{x^2}{2}\}$$

e pelo Teorema de Fubini, temos

$$A(D) = \iint_D dxdy = \int_{-3}^{4} \left[\int_{2-x/2}^{8-x^2/2} dy \right] dx = \tfrac{1}{2} \int_{-3}^{4} (12 + x - x^2) dx = \tfrac{343}{12}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.14 *Calcular, por integral dupla, a área da região D entre as curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.*

Solução A área da região D é dada por

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right] dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 - \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}. \qquad \blacksquare$$

4.1.3 Invertendo a Ordem de Integração

Ao fazer a decomposição da região D em regiões simples, a escolha da região R_x ou R_y depende, naturalmente, do formato da região D. Em uma determinada ordem de integração, o integrando pode não ter uma primitiva elementar e, neste caso, uma inversão na ordem de integração deve ser efetuada. Vale ressaltar, contudo, que ao inverter a ordem de integração a região D não sofre alteração, apenas o cálculo da integral iterada se processa na ordem inversa. Na Figura 4.11 exibimos uma região $D = D_1 \cup D_2$ sobre a qual expressamos a integral dupla como uma integral iterada nas duas ordens de integração possíveis: $dxdy$ e $dydx$.

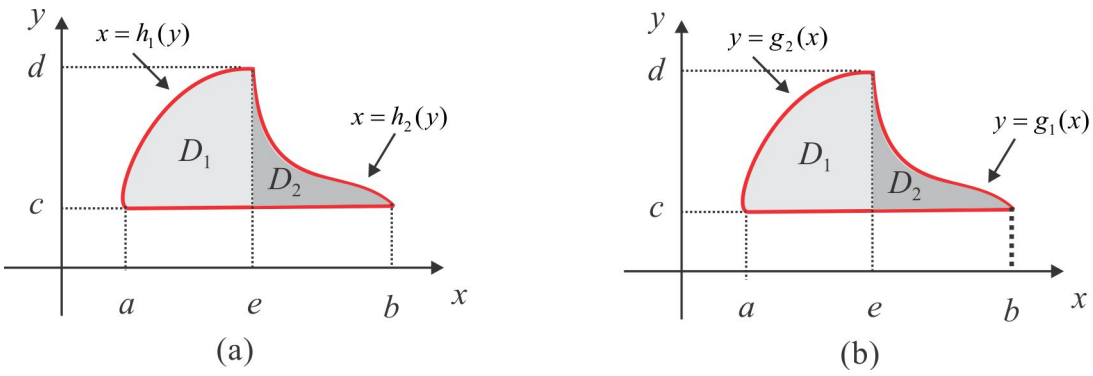


Figura 4.11: Decomposição de D em regiões simples.

Vejamos como descrever a região $D = D_1 \cup D_2$. A Figura 4.11 (a) sugere a seguinte descrição para a região D:

$$D : c \leq y \leq d \quad \text{e} \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

e a integral dupla sobre D é calculada pela integral iterada

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\right] dy. \tag{4.4}$$

Por outro lado, da Figura 4.11 (b) vemos que as regiões simples D_1 e D_2 são descritas por

$$D_1 : a \leq x \leq e \quad \text{e} \quad c \leq y \leq g_2(x) \qquad \text{e} \qquad D_2 : e \leq x \leq b \quad \text{e} \quad c \leq y \leq g_1(x)$$

e a integral dupla, com a ordem invertida, é

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^e \left[\int_c^{g_2(x)} f(x,y)\, dy\right] dx + \int_e^b \left[\int_c^{g_1(x)} f(x,y)\, dy\right] dx. \tag{4.5}$$

Aparentemente o cálculo da integral (4.4) é mais simples, porque só há uma integral iterada a calcular. Isso aparentemente, porque o cálculo depende do integrando $f(x,y)$. Como ressaltamos no início, em uma determinada ordem, que pode ser aquela em (4.4), o integrando pode não ter primitiva elementar.

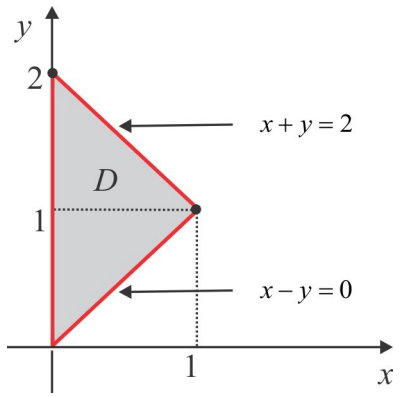


Figura 4.12: Região de integração.

Exemplo 4.15 *Como primeira ilustração, vamos calcular* $\iint_D xydA$ *nas duas ordens, onde* D *é a região do plano* xy *exibida na Figura* 4.12.

Solução A região D pode ser decomposta em regiões simples verticais ou horizontais e para descrevê-la é fundamental observar cuidadosamente a Figura 4.12. .

1. Como uma região vertical simples, temos

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \text{ e } \ x \leq y \leq 2-x\right\}$$

e, neste caso, o cálculo da integral fica assim:

$$\begin{aligned}\iint_D xydA &= \int_0^1 \left[\int_x^{2-x} xydy\right] dx = \int_0^1 x\left[\tfrac{1}{2}y^2\Big|_{y=x}^{y=2-x}\right] dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 x\left[(2-x)^2 - x^2\right] dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 x\,(4-4x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(4x-4x^2\right) dx = \tfrac{1}{2}\left(2x^2 - \tfrac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = 1/3.\end{aligned}$$

2. Decompondo D em regiões horizontais simples, temos $D = D_1 \cup D_2$, onde a região simples D_1 é descrita por

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq y\right\}$$

e a região D_2 é descrita por

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 2-y\right\}.$$

Neste caso, invertendo a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned}\iint_D xydA &= \iint_{D_1} xydA + \iint_{D_2} xydA = \int_0^1 \left[\int_0^y xydx\right] dy + \int_1^2 \left[\int_0^{2-y} xydx\right] dy = \\ &= \int_0^1 y\left[\tfrac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=y}\right] dy + \int_1^2 y\left[\tfrac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=2-y}\right] dy \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 y^3 dy + \tfrac{1}{2}\int_1^2 y\,(2-y)^2\,dy = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left(4y - 4y^2 + y^3\right) dy \\ &= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2}\left[\left(8 - \tfrac{32}{3} + 4\right) - \left(2 - \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{4}\right)\right] = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{4}{3} - \tfrac{11}{12}\right] = 1/3.\end{aligned}$$

Exemplo 4.16 (uma função sem primitiva elementar) *Neste exemplo vamos calcular a integral dupla da função* $f(x,y) = \exp\left(-y^2\right)$ *sobre a região* D *entre as retas* $x = 0$, $y = 4$ *e* $y = 4x$.

Solução Este é um daqueles exemplos onde o cuidado na escolha da ordem de integração deve ser redobrado. Inicialmente observamos que a ordem de integração $dydx$ não é adequada neste caso, porque a integral $\int \exp\left(y^2\right) dy$ não pode ser calculada pelos métodos elementares do cálculo integral, isto é, a função $g(y) = \exp\left(-y^2\right)$ não tem primitiva elementar. Com um esboço do gráfico da região D, que deixamos para o leitor como treinamento, é fácil deduzir que ela é descrita por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 \text{ e } 0 \leq x \leq y/4\} \qquad \text{(uma região horizontal simples)}$$

e usando o Teorema de Fubini, encontramos

$$\iint_D \exp(-y^2)dxdy = \int_0^4 \exp(-y^2)\left[\int_0^{y/4} dx\right] dy = \tfrac{1}{4}\int_0^4 y\exp(-y^2)dy.$$

Com a substituição $u = -y^2$, obtemos

$$\tfrac{1}{4}\int_0^4 y\exp(-y^2)dy = -\tfrac{1}{8}\int_0^{-16} \exp(u)du = -\tfrac{1}{8}\exp(-y^2)\Big|_0^{-16} = -\tfrac{1}{8}(e^{-16} - 1)$$

e, portanto,

$$\iint_D \exp(-y^2)dxdy = \frac{1}{8}(1 - e^{-16}). \qquad \blacksquare$$

Encerramos esta seção com um exemplo mostrando que a inversão da ordem de integração nem sempre produz resultados iguais.

Exemplo 4.17 *Calcular a integral iterada*

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dA,$$

nas duas ordens possíveis.

Solução Temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy &= \int_0^1 \frac{2x-(x+y)}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \frac{2x}{(x+y)^3} dy - \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy \\
&= -\frac{x}{(x+y)^2}\bigg|_0^1 + \frac{1}{(x+y)}\bigg|_0^1 = \frac{1}{(1+x)^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\right] dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = -\frac{1}{1+x}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Se em (4.6) permutarmos as variáveis x e y, obteremos

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dx\right] dy = \frac{1}{2}$$

e, assim, na ordem $dxdy$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx\right] dy = -\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{y-x}{(x+y)^3} dx\right] dy = -\frac{1}{2}.$$

Por que isso não contradiz o Teorema de Fubini? Uma das condições de aplicabilidade do Teorema de Fubini é que o integrando $f(x,y)$ seja uma função limitada na região de integração D, o que não ocorre com a função

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$

De fato, ao longo da reta $y = 2x$, obtemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{(x+y)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x-2x}{(x+2x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{27x^3} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{27x^2} = -\infty.$$

O que dizer da integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$ neste caso? Se a integral dupla existisse, as integrais iteradas seriam iguais e como isso não ocorreu, a função não é integrável na região D. Uma coisa é a integral dupla e a outra é a integral iterada. ■

4.1.4 Considerações Físicas

Vimos nos fundamentos teóricos que se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa na região compacta D, a integral dupla

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad \text{ou} \quad \iint_D f(x,y)\,dA$$

representa o volume do sólido Ω acima da região D e limitado superiormente pelo gráfico de f, como na Figura 4.1. No caso em que $f(P) < 0$, para todo $P \in D$, então definimos $\text{vol}(\Omega)$ por

$$\text{vol}(\Omega) = -\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Além disso, se $f(x,y) = 1$, para todo ponto (x,y) em D, então a integral dupla representa a área da região D, isto é,

$$A(D) = \iint_D dxdy.$$

Quando interpretamos o integrando $f(x,y)$ como *densidade superficial de massa* $\sigma(x,y)$, isto é, como massa por unidade de área, e a região D como uma lâmina (placa fina), a integral dupla assume outros significados. Na Figura 4.13 ilustramos uma lâmina D de massa M e a área elementar dA.

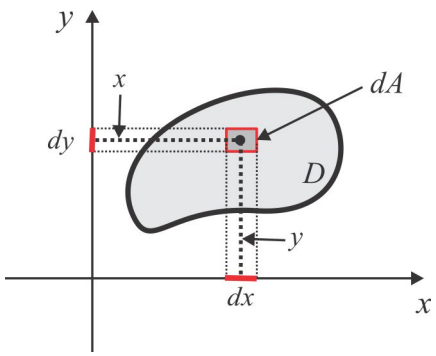


Figura 4.13: Lâmina D de massa M

■ **Massa e Centro de Massa**

Representemos por dm a *massa elementar* da porção dA, de modo que xdm e ydm representam os *momentos* da massa dm em relação aos eixos y e x, respectivamente, isto é,

$$xdm = x\sigma(x,y)\,dA \quad \text{e} \quad ydm = y\sigma(x,y)\,dA,$$

sendo $\sigma(x,y)$ a densidade no ponto (x,y) da lâmina. A massa total M da lâmina é a *soma* (integral dupla) das massas elementares dm, ou seja,

$$M = \iint_D \sigma(x,y)\,dA \tag{4.7}$$

e se representarmos por $C_M(\overline{x},\overline{y})$ o *centro de massa* da lâmina D, isto é, o ponto que concentra toda massa da placa, é razoável definir os momentos da placa D pelas relações

$$\overline{x}M = \iint_D xdm = \iint_D x\sigma(x,y)\,dA \quad \text{e} \quad \overline{y}M = \iint_D ydm = \iint_D y\sigma(x,y)\,dA.$$

Os *momentos* da massa M, isto é, da lâmina D, são definidos pelas integrais

$$M_x = \iint_D ydm = \iint_D y\sigma(x,y)\,dA \ \text{ e } \ M_y = \iint_D x\sigma(x,y)\,dA \tag{4.8}$$

e as coordenadas do centro de massa são, portanto,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M}. \tag{4.9}$$

Momento de Inércia

Imaginemos a lâmina D girando em torno de um eixo L, com velocidade angular constante ω e seja $\delta(x,y)$ a distância da massa elementar (pontual) dm ao eixo L, como na Figura 4.14. Se dE representa a energia cinética da massa dm, então

$$dE = \tfrac{1}{2}(\omega\delta)^2\,dm = \tfrac{1}{2}(\omega\delta)^2\,\sigma(x,y)\,dA,$$

onde $\omega\delta$ é a velocidade escalar do corpo e a energia cinética total é, portanto,

$$E = \iint_D dE = \tfrac{1}{2}\omega^2 \iint_D \delta^2 dm = \tfrac{1}{2}\omega^2 \iint_D \delta^2\sigma(x,y)\,dA. \tag{4.10}$$

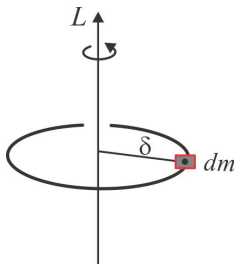


Figura 4.14:

A integral que figura do lado direito de (4.10) é o *momento de inércia* da *placa* D em relação ao eixo L e anota-se

$$I_L = \iint_D \delta^2\sigma(x,y)\,dA.$$

Em relação aos eixos coordenados, os momentos de inércia da placa D são:

$$I_x = \iint_D y^2\sigma(x,y)\,dxdy \ \text{ e } \ I_y = \iint_D x^2\sigma(x,y)\,dxdy, \tag{4.11}$$

enquanto o *momento de inércia polar* em relação à origem é dado por

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2+y^2)\sigma(x,y)\,dxdy. \tag{4.12}$$

O termo x^2+y^2 que aparece na expressão do momento de inércia polar é precisamente o quadrado distância de um ponto $P(x,y)$ da placa D à origem $O(0,0)$.

Podemos interpretar o momento de inércia como uma resistência ao movimento. Quanto maior o momento de inércia, maior deve ser a energia para colocar o corpo em movimento ou fazê-lo parar.

Exemplo 4.18 *Uma lâmina tem o formato da região $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ no primeiro quadrante. Determinar a massa, o centro de massa e os momentos de inércia I_x e I_y da lâmina D, se a densidade em um ponto $P(x, y)$ da lâmina é $\sigma(x, y) = xy$.*

Solução Um esboço da região D ajudará no cálculo da integral dupla. A Figura 4.15 sugere as seguintes descrições para a região D :

$$D : 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{ou} \quad D : 0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}.$$

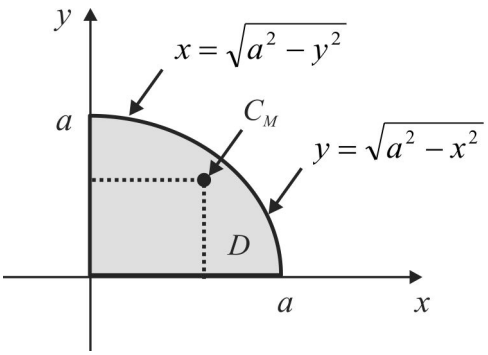


Figura 4.15: O quarto de círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$.

1. A massa é calculada pela fórmula (4.7). Temos

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \sigma(x, y)\, dA = \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy dy \right] dx = \int_0^a x \left(\tfrac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} \right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^a x \left(a^2 - x^2\right) dx = (\text{faça } t = a^2 - x^2) = \tfrac{1}{4} \int_0^{a^2} t dt = a^4/8. \end{aligned}$$

2. As coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do centro de massa são calculadas pelas fórmulas (4.9). Temos

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y\sigma(x, y)\, dA = \iint_D xy^2 dA = \int_0^a x \left[\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y^2 dx \right] dy \\ &= \tfrac{1}{3} \int_0^a x \left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx = (\text{faça } t = a^2 - x^2) = \tfrac{1}{6} \int_0^{a^2} t^{3/2} dt = a^5/15 \end{aligned}$$

   e, portanto, $\overline{y} = M_x/M = 8a/15$. De modo inteiramente análogo encontra-se $\overline{x} = 8a/15$ e o centro de massa é o ponto $C_M(8a/15, 8a/15)$.

3. Os momentos de inércia I_x e I_y são dados pelas fórmulas (4.11). Temos

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \sigma(x, y)\, dA = \iint_D xy^3 dA = \int_0^a x \left[\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y^3 dx \right] dy \\ &= \tfrac{1}{4} \int_0^a x \left(a^2 - x^2\right)^2 dx = (\text{faça } t = a^2 - x^2) = \tfrac{1}{8} \int_0^{a^2} t^2 dt = a^6/24. \end{aligned}$$

   O momento de inércia I_y é calculado de modo similar e encontra-se $I_y = a^6/24$. ■

Exemplo 4.19 *O centroide*[13] *da região triangular de vértices* $O(0,0)$, $A(1,1)$ *e* $B(1,0)$ *é o ponto* $C_M(1/3,1/6)$, *cujas coordenadas são dadas por:*

$$\overline{x} = \int_0^1 \int_0^x x dy dx = 1/3 \quad e \quad \overline{y} = \int_0^1 \int_0^x y dy dx = 1/6.$$

4.1.5 Integral Dupla Imprópria

Para integrar uma função $f(x,y)$ sobre uma região D do plano xy, a função não precisa ser contínua nem a região ser limitada. O fato é que a continuidade do integrando f e a compacidade da região D implicam na integrabilidade da função em D. Existem funções que não são contínuas em uma região e, ainda assim, são integráveis. Uma condição necessária para a integrabilidade é que a função seja limitada na região de integração. Uma integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$ recebe a denominação de *integral imprópria* em duas situações: (i) a região de integração D não é limitada ou (ii) a função $f(x,y)$ que desejamos integrar não é limitada na região D. Quando a integral dupla imprópria existir, isto é, for um número real, diremos que a integral é *convergente* e caso contrário a integral imprópria será denominada *divergente*.

Exemplo 4.20 *Vamos investigar a convergência da integral imprópria*

$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy.$$

no compacto $D = [0,1] \times [0,1]$.

Solução Trata-se de uma integral imprópria, porque a função $f(x,y)$ náo é limitada em D, embora a região seja compacta. Vimos no Exemplo 4.17 que a função f não é integrável em D. Logo, a integral dupla é divergente. ■

Exemplo 4.21 (uma função contínua não integrável) *Na região* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y < x \le 1\right\}$ *a função* $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$ *não é integrável, embora seja contínua.*

Solução Temos uma situação em que a função é continua, a região é limitada e, contudo, a função não é integrável. Na Figura 4.16 esboçamos a região D e a região auxiliar

$$D_\varepsilon : 0 \le x \le 1 \quad \text{e} \quad 0 \le y \le x - \varepsilon$$

que é compacta e na qual f é contínua, tornando aplicável o Teorema de Fubini.
Ressaltamos que a função não é limitada, o que caracteriza uma integração imprópria. Temos que

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dxdy$$

e do Teorema de Fubini resulta

$$\begin{aligned} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dxdy &= \int_\varepsilon^1 \left[\int_0^{x-\varepsilon} \frac{dy}{x-y}\right] dx = \int_\varepsilon^1 \left[\int_\varepsilon^x \frac{dt}{t}\right] dx = \int_\varepsilon^1 (\log x - \log \varepsilon)\,dx \\ &= (x \log x - x)\big|_\varepsilon^1 - (1-\varepsilon)\log\varepsilon = \varepsilon - 1 - \log\varepsilon. \end{aligned}$$

[13] *centroide* é a denominação dada ao centro de massa de um corpo homogêneo de densidade $\sigma \equiv 1$.

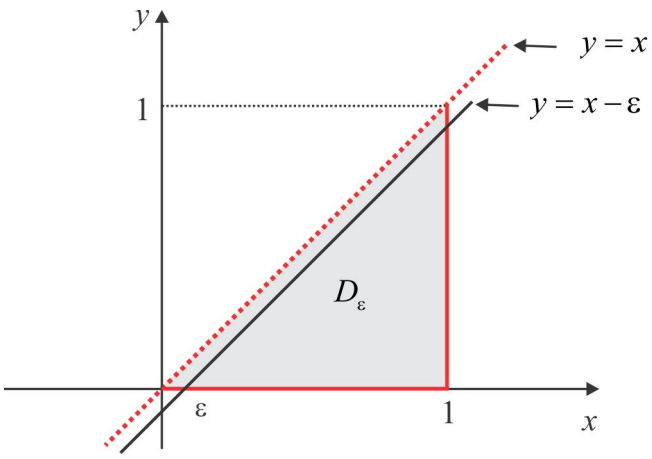


Figura 4.16: Região auxiliar D_ε.

Portanto,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon - 1 - \log\varepsilon) = +\infty$$

e a integral dupla é divergente. ■

Exercícios & Complementos.

1. Em cada caso, esboce a região de integração e calcule a integral iterada. Se achar conveniente inverta a ordem de integração.

   (a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{|x|} dydx$

   (b) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{x} \cos\left(x^2\right) dydx$

   (c) $\int_{0}^{3}\int_{1}^{2} \left(12xy^2 - 8x^3\right) dydx$

   (d) $\int_{1}^{3}\int_{1-x}^{\sqrt{x}} xydydx$

   (e) $\int_{0}^{\pi}\int_{-y}^{y} \operatorname{sen} xdxdy$

   (f) $\int_{1}^{2}\int_{0}^{1} (x - 3\log y)\,dxdy$

   (g) $\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} \exp(\frac{y}{x})dydx$

   (h) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} \exp(x^2)dydx$

   (i) $\int_{0}^{2}\int_{1}^{3} |x-2| \operatorname{sen} ydxdy$

   (j) $\int_{0}^{\pi}\int_{-1}^{\cos y} x \operatorname{sen} ydxdy$

   (k) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} ydydx$

   (l) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x\cos y - y\cos x)\,dydx$

   (m) $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} xydydx$

   (n) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} x \operatorname{sen} ydydx$

   (o) $\int_{0}^{2}\int_{1}^{2} \left(2xy - y^3\right) dydx$

   (p) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} ydxdy$

   (q) $\int_{0}^{2}\int_{1}^{\exp(x)} dydx$

   (r) $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} xydxdy$

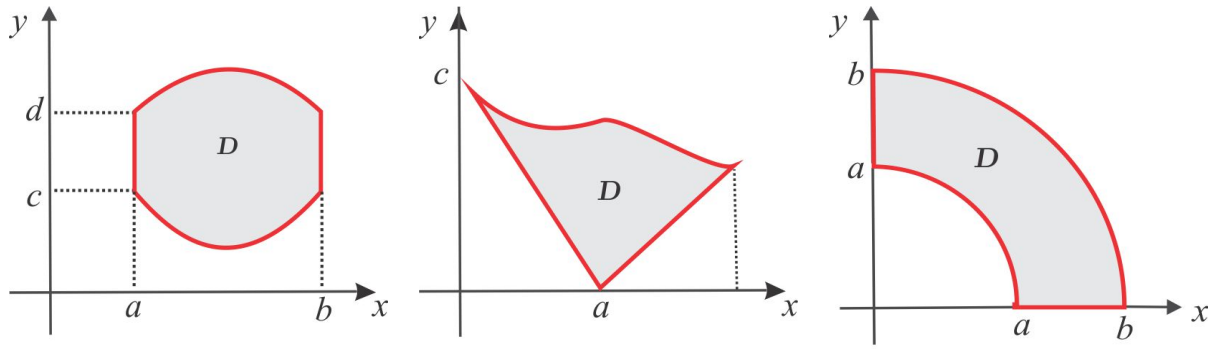
   (s) $\int_{-2}^{1}\int_{x^2+4x}^{3x+2} dydx$

   (t) $\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} xydxdy$

   (u) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2} \operatorname{sen}\left(x^3\right) dydx$

   (v) $\int_{0}^{1}\int_{1}^{1/y} \ln x\; dxdy + \int_{0}^{1}\int_{1}^{2} \ln x\; dxdy$

2. Em cada caso, decomponha a região em regiões verticais simples ou horizontais simples e escreva a integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$ nas duas ordens.



(a) (b) (c)

3. Em cada caso, esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$. Escolha a ordem de integração de modo a tornar o cálculo mais simples.

   (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 2x \leq y \leq 2\}$; $\quad f = \exp(y^2)$.

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 8 \text{ e } \sqrt[3]{y} \leq x \leq 2\}$; $\quad f = xy$.

   (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$; $\quad f = x^2$.

   (d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2 \text{ e } -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 4 - x^2\}$; $\quad f = 1$.

4. Ao calcular o volume de um sólido Ω abaixo de um paraboloide e acima de certa região D do plano xy, obteve-se a seguinte expressão:

$$\text{vol}\,(\Omega) = \int_0^1 \int_0^y \left(x^2 + y^2\right) dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

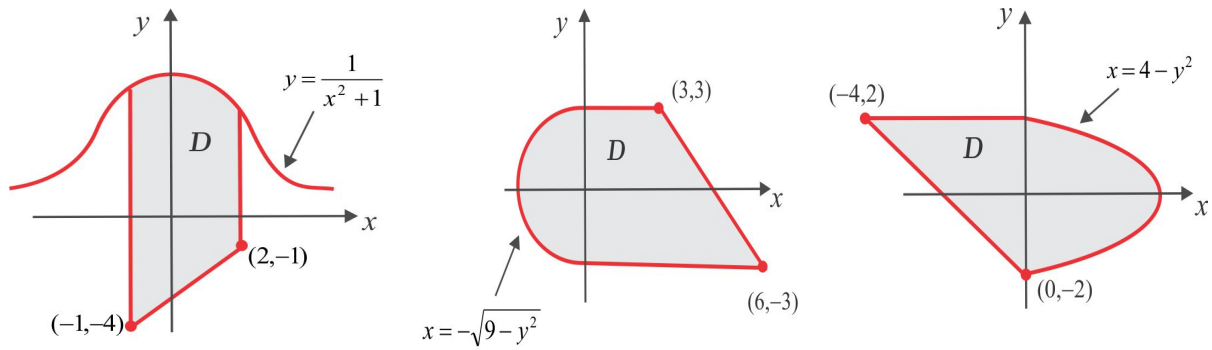
   Identifique a região D, expresse vol (Ω) por uma integral dupla com a ordem invertida e calcule o volume.

5. Identifique o sólido Ω cujo volume é dado pela expressão

$$\text{vol}\,(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)\,dydx$$

   e em seguida calcule vol (Ω).

6. Em cada caso, use integral dupla e calcule a área da região D indicada na figura.



(a) (b) (c)

7. Calcular, por integral dupla, o volume do sólido delimitado acima pelo cilindro $x^2 + z^2 = a^2$, abaixo pelo plano xy e nos lados pelos planos $y = x$ e $y = 2x$.

8. Calcular o volume da cunha cortada do primeiro octante pelo cilindro $z = 12 - 3y^2$ e pelo plano $x + y = 2$.

4.1.6 Mudança de Variável em Integral Dupla

Ao calcular uma integral por substituição, na verdade efetuamos uma mudança de variável para obter uma primitiva. Mais precisamente, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ é uma função derivável, com derivada g' integrável, e, além disso, $g(c) = a$ e $g(d) = b$, então

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx = \int_c^d f(g(u))\, g'(u)\, du.$$

Exemplo 4.22 *Por meio de uma mudança de variável, calcular a integral simples*

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx.$$

Solução Se $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le 1$, então com a substituição $x = g(u) = \operatorname{sen} u$, obtemos

$$f(g(u)) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} = \cos u \quad \text{e} \quad g'(u) = \cos u, \quad 0 \le u \le \pi/2,$$

e, portanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2u)) du = \frac{\pi}{4} \qquad \blacksquare$$

Para deduzirmos uma fórmula de mudança de variável para integral dupla, deixe-nos considerar uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

onde as funções coordenadas $x(u, v)$ e $y(u, v)$ têm derivadas parciais de primeira ordens contínuas em uma região R_{uv} do plano uv e suponhamos que o Jacobiano

$$J(T) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

não se anula em R_{uv}. A transformação T é localmente invertível e, como estabelece o Teorema da Função Inversa, as coordenadas da inversa $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região $R_{xy} = T(R_{uv})$, imagem de R_{uv} pela transformação T. Usaremos a Figura 4.17 como orientação para a dedução da fórmula. Se $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j}$ é o vetor posição do ponto $Q(x, y)$ e a região R_{xy} for particionada pelas curvas de nível $u = c_1$ e $v = c_2$, então a área elementar $dxdy$ será aproximada pela área do paralelogramo de lados $\mathbf{a} = \mathbf{r}_u du$ e $b = \mathbf{r}_v dv$. Temos

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_u du = x_u \mathbf{i} + y_u \mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}_v dv = x_v \mathbf{i} + y_v \mathbf{j}$$

e, consequentemente,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dudv = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} dudv = [(x_u y_v - x_v y_u)\, dudv]\, \mathbf{k}.$$

Logo, as áreas elementares $dxdy$ e $dudv$ estão relacionadas por

$$dxdy = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |J(T)|\, dudv \tag{4.13}$$

e se $f(x,y)$ é uma função integrável sobre a região R_{xy}, então da definição de integral dupla, resulta

$$\begin{aligned}
\iint_{R_{xy}} f(x,y)\, dxdy &\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, dxdy \\
&\approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x(u_i,v_j), y(u_i,v_j))\, |J(u_i,v_j)|\, dudv \\
&\approx \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(T)|\, dudv.
\end{aligned}$$

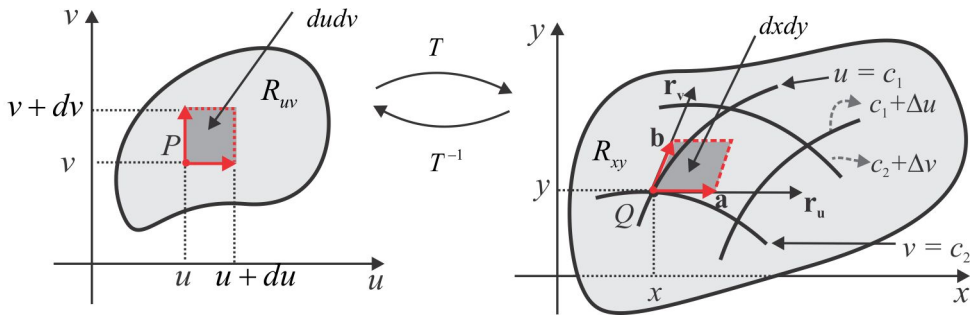


Figura 4.17: Mudança de variável

Formalmente, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.23 (Mudança de Variável) *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, contendo a região R_{xy}. Se as funções $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região R_{uv} e o Jacobiano $J(u,v)$ não se anula em R_{uv}, então*

$$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\, dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)|\, dudv. \qquad \blacksquare \tag{4.14}$$

A fórmula (4.14) é conhecida como *Fórmula de Mudança de Variável* em integral dupla.

Observação 4.24 *Se a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ for localmente invertível, vimos como consequência do Teorema 3.54 que*

$$J(u,v) \cdot J(x,y) = 1$$

e, se for conveniente, podemos usar a fórmula de mudança de variável (4.14) na ordem inversa. Se a transformação T tem Jacobiano $J(T)$ constante (isso ocorre com as transformações lineares) e a função $f(x,y) \equiv 1$, segue de (4.14) que

$$A(R_{xy}) = A(T(R_{uv})) = |J|\, A(R_{uv}) \tag{4.15}$$

e o Jacobiano pode ser visto como fator de relação entre as áreas de R_{xy} e R_{uv}.

Exemplo 4.25 *Calcular a integral dupla da função* $f(x,y) = \exp\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right)$ *sobre a região* D *delimitada pelas retas* $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$ *e* $y=0$.

Solução Se considerarmos $u = y - x$ e $v = y + x$, teremos

$$x = \tfrac{1}{2}(v-u) \ \text{ e } \ y = \tfrac{1}{2}(u+v)$$

e a transformação (linear) $T(u,v) = (x,y)$ tem Jacobiano

$$J(T) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -1/2.$$

Além disso, sendo T linear ela transforma retas em retas e um cálculo direto nos dá:

$$x+y=1 \Rightarrow v=1, \quad x+y=2 \Rightarrow v=2, \quad x=0 \Rightarrow v=u \quad \text{e} \quad y=0 \Rightarrow v=-u$$

e a Figura 4.18 expõe as regiões de integração R_{xy} e R_{uv}.

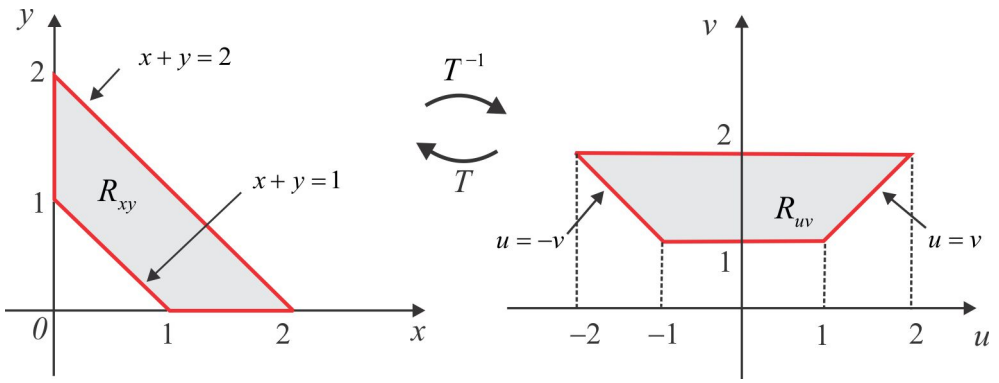


Figura 4.18: Regiões de integração R_{xy} e R_{uv}.

Da fórmula de mudança de variável (4.14), resulta

$$\begin{aligned} \iint_D \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA &= \tfrac{1}{2}\iint_{R_{uv}} e^{u/v} du dv = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left[\int_{-v}^{v} e^{u/v} du\right] dv \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left(v e^{u/v}\Big|_{-v}^{v} \right) dv = \tfrac{1}{2}\left(e - \tfrac{1}{e}\right)\int_1^2 v dv = \tfrac{3}{4}\left(e - \tfrac{1}{e}\right). \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.26 *Com a mudança de coordenadas* $u = y - x$ *e* $v = y + x$, *calcular*

$$\iint_{|x|+|y|\le\pi} (x+y)^2 \left[\operatorname{sen}(x-y)\right]^2 dA.$$

Solução A transformação linear $T(u,v) = (x,y)$ transforma o quadrado $R_{uv} : [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ na região $R_{xy} : |x| + |y| \le \pi$, como mostra a Figura 4.19.

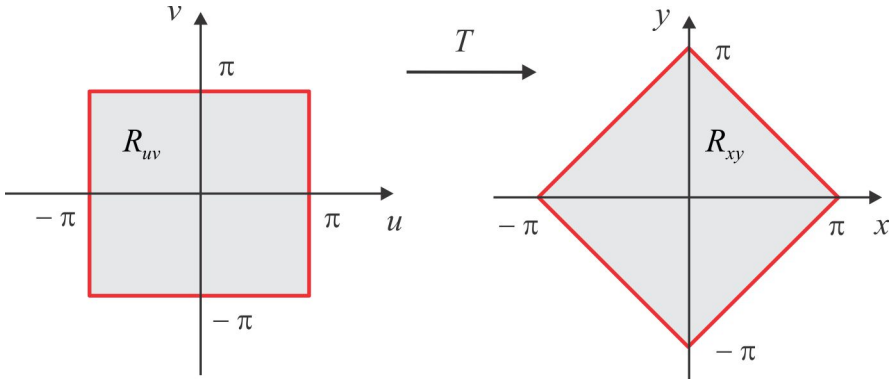


Figura 4.19: Regiões de integração R_{xy} e R_{uv}.

Temos

$$J(T^{-1}) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

de onde segue que $J(T) = -1/2$ e da fórmula (4.14), resulta

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} (x+y)^2 [\operatorname{sen}(x-y)]^2 \, dA &= \tfrac{1}{2} \iint_{R_{uv}} u^2 (\operatorname{sen} v)^2 \, dudv = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} u^2 (\operatorname{sen} v)^2 \, du \right] dv \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\tfrac{1}{3} u^3 \right]_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} v)^2 \, dv = \tfrac{\pi^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} v)^2 \, dv \\ &= \tfrac{\pi^3}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2} (1 - \cos 2v) \, dv = \pi^4/3. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 4.27 *Calcular, por integral dupla, a área da elipse* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0$ *e* $b > 0$.

Solução Se representarmos por R_{xy} a região delimitada pela elipse, isto é,

$$R_{xy} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},$$

então a área da região R_{xy} é dada por $A(R_{xy}) = \iint_{R_{xy}} dxdy$. O cálculo da integral dupla torna-se mais simples por meio de uma mudança de variáveis que transforma a elipse em uma circunferência. Consideremos, então, a transformação linear $x = au$ e $y = bv$, com Jacobiano

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab,$$

que leva a região R_{xy} sobre o disco compacto

$$R_{uv} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

e usemos a fórmula de mudança de variáveis. Temos

$$A(R_{xy}) = \iint_{R_{xy}} dxdy = ab \iint_{R_{uv}} dudv. \tag{4.16}$$

A integral dupla que aparece do lado direito de (4.16) nada mais é do que a área do círculo de raio $r = 1$, cujo valor é π. Logo,

$$A(R_{xy}) = ab \times A(R_{uv}) = \pi ab. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.28 *Seja D a lâmina do primeiro quadrante delimitada pelas hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$ e $x^2 - y^2 = 4$, e suponhamos que a densidade da lâmina seja constante $\sigma \equiv 1$. Calcular o momento de inércia polar da lâmina D.*

Solução A transformação $u = xy$ e $v = x^2 - y^2$ leva o retângulo $R_{uv} = [1,3] \times [1,4]$ sobre a região R_{xy}, como sugere a Figura 4.20, onde a lâmina D está representada pela região R_{xy}.

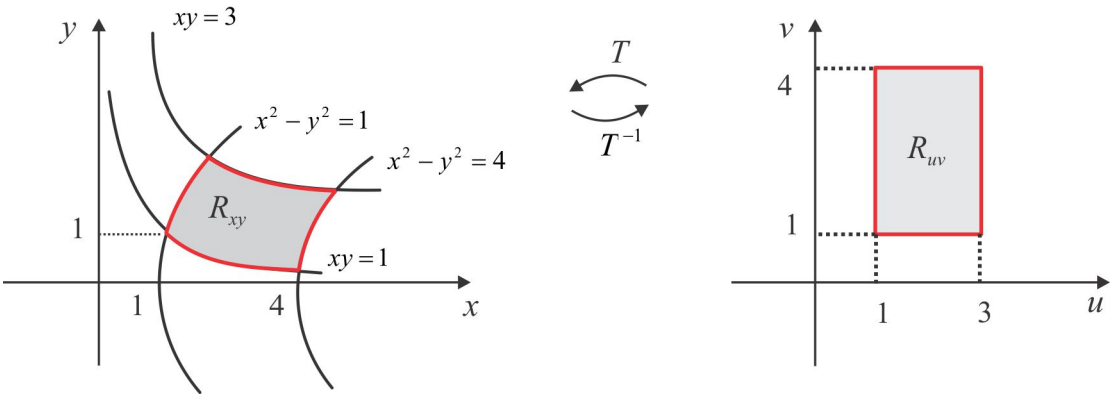


Figura 4.20: Regiões de integração R_{xy} e R_{uv}.

O Jacobiano dessa transformação é

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2),$$

que não se anula em D e, portanto, $J(u,v) = -\dfrac{1}{2(x^2+y^2)}$. A densidade da lâmina D é $\sigma(x,y) \equiv 1$ e o momento de inércia polar 4.12 neste caso se reduz a

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

e, considerando que, $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = 4u^2 + v^2$, obtemos

$$I_0 = \iint_D \left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_1^4 \int_1^3 \frac{\sqrt{4u^2+v^2}}{2\sqrt{4u^2+v^2}} dudv = \tfrac{1}{2}\int_1^4 \int_1^3 dudv = 3. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.29 *Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear $T(x,y) = (ax + cy, bx + dy)$ e suponhamos que $ad - bc \neq 0$. Se $\mathcal{R}$ é o paralelogramo gerado pelos vetores linearmente independentes $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$, então*

$$A(T(\mathcal{R})) = |J(T)| \cdot A(\mathcal{R}). \tag{4.17}$$

Como consequência, calcular a área do paralelogramo $\mathcal{R}$ com três vértices nos pontos $O(0,0)$, $A(2,1)$ e $B(3,-1)$.

Solução Se $u = ax + cy$ e $v = bx + dy$, então

$$J(x,y) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \ \text{ e } \ J(u,v) = \frac{1}{ad-bc}$$

e a relação (4.17) é uma variante de (4.15), contida na Observação 4.24. O paralelogramo $\mathcal{R}$ é gerado pelos vetores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e se considerarmos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por $T(x,y) = (2x + 3y, x - y)$, com Jacobiano $J(x,y) = -5$, teremos $\mathcal{R} = T(\mathcal{S})$, onde $\mathcal{S}$ é o quadrado $[0,1] \times [0,1]$. Portanto, a área do paralelogramo $\mathcal{R}$ é igual $|J(T)| = |-5| = 5$. $\blacksquare$

A Integral Dupla em Coordenadas Polares

Sempre que usamos coordenadas polares, substituímos a área elementar $dA = dxdy$ por $rdrd\theta$. Isso é consequência do Teorema de Mudança de Variável, mas pode ser deduzido facilmente usando argumentos geométricos. De fato, observando a Figura 4.21, vemos que $dA = drds$, onde $ds = rd\theta$ é o comprimento do arco.

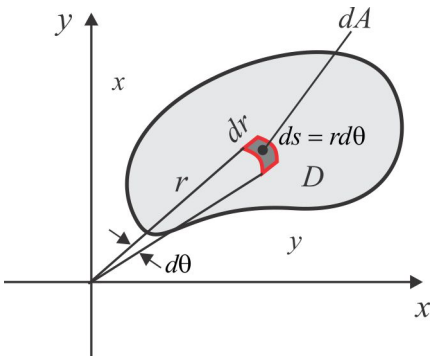


Figura 4.21: Área elementar $dA = rdrd\theta$.

Exemplo 4.30 *Determinar a imagem pela transformação $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ da região R_{xy} do primeiro quadrante, delimitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$, e em seguida calcular a integral dupla*

$$\iint_{R_{xy}} \log\left(x^2 + y^2\right) dA.$$

Solução Se T é a transformação em coordenadas polares $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, então

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

e a imagem da região R_{xy} pela transformação T^{-1} é o retângulo

$$R_{r\theta} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le r \le 2 \ \text{ e } \ 0 \le \theta \le \pi/2\right\}$$

no plano $r\theta$. A Figura 4.22 mostra as ações da transformação T e de sua inversa T^{-1}.

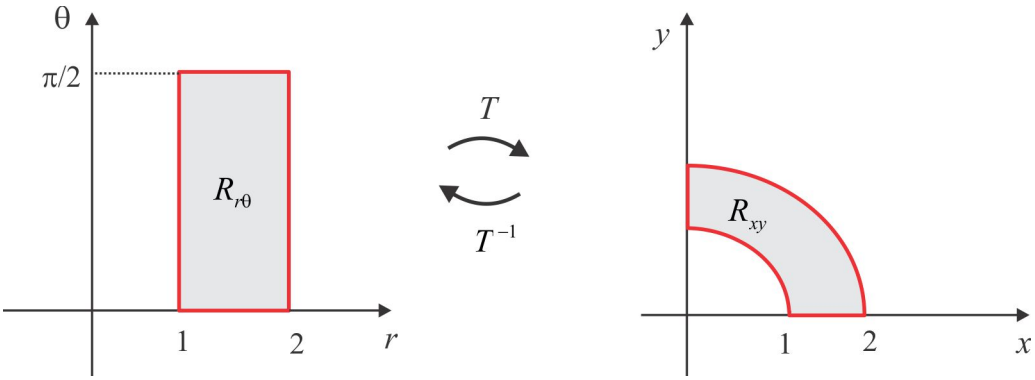


Figura 4.22: Regiões de integração R_{xy} e $R_{r\theta}$.

Em coordenadas polares $x^2+y^2=r^2$ e a área elementar é $dA = rdrd\theta$ e, sendo assim,

$$\begin{aligned}\iint_{R_{xy}} \log\left(x^2+y^2\right) dA &= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\log r^2 drd\theta = (\text{usar } t=r^2) = \tfrac{\pi}{4}\int_1^4 \log t dt \\ &= \tfrac{\pi}{4}\left(t\log t - t\right)\Big|_1^4 = \tfrac{\pi}{4}\left(4\log 4 - 3\right). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 4.31 *Calclular a área da região R_{xy} delimitada pelas retas $y=x$ e $y=0$ e pelos círculos $x^2+y^2=2x$ e $x^2+y^2=4x$.*

Solução Em coordenadas polares as curvas $y=x$, $x^2+y^2=2x$ e $x^2+y^2=4x$ são descritas, respectivamente, por $\theta=\pi/4$, $r=2\cos\theta$ e $r=4\cos\theta$ e na Figura 4.23 mostramos a região R_{xy}, onde fizemos o eixo polar coincidir com o eixo x.

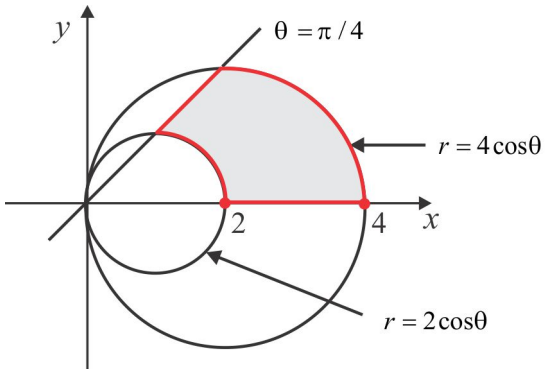


Figura 4.23: Regiões de integração R_{xy} e $R_{r\theta}$.

Usando a fórmula de mudança de variáveis, temos:

$$\begin{aligned}A\left(R_{xy}\right) &= \iint_{R_{xy}} dxdy = \int_0^{\pi/4}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} rdrd\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 12\cos^2\theta d\theta \\ &= 6\int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}\left(1+\cos 2\theta\right) d\theta = 3\left[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi 4} = 3\left(\tfrac{1}{2}+\pi/4\right).\end{aligned}$$

Exemplo 4.32 *Consideremos a região do primeiro quadrante*

$$R_{xy} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^2 \le x^2+y^2 \le b^2, \quad x\ge 0 \text{ e } y\ge 0\right\}.$$

1. *Expressar a integral dupla $\iint_{R_{xy}} x^2 dA$ nas duas ordens $dxdy$ e $dydx$ e na forma polar.*
2. *Calcular a integral.*

Solução A região R_{xy} é semelhante àquela do lado direito da Figura 4.22.

1. Em coordenadas a integral dupla se expressa nas formas:

na ordem $dydx$ $$\iint_{R_{xy}} x^2 dA = \int_0^a\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} x^2 dydx + \int_a^b\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} x^2 dydx.$$

na ordem $dxdy$ $$\iint_{R_{xy}} x^2 dA = \int_0^a\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} x^2 dxdy + \int_a^b\int_0^{\sqrt{b^2-y^2}} x^2 dxdy.$$

forma polar: $$\iint_{R_{xy}} x^2 dA = \int_0^{\pi/2}\int_a^b r^3\cos^2\theta drd\theta \qquad (x = r\cos\theta,\ dA = rdrd\theta).$$

2. O cálculo da integral é mais simples na forma polar. Temos

$$\iint_{R_{xy}} x^2 dA = \int_0^{\pi/2}\int_a^b r^3\cos^2\theta dr d\theta = \tfrac{1}{4}\left(b^4-a^4\right)\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta = \tfrac{\theta}{16}\left(b^4-a^4\right).$$

Exemplo 4.33 *Determinar o volume do sólido Ω interior à esfera $x^2+y^2+z^2=25$ e exterior ao cilindro $x^2+y^2=9$.*

Solução No primeiro octante o sólido Ω é limitado inferiormente pela região $R_{xy}: 9\leq x^2+y^2\leq 25$ e superiormente pelo hemisfério $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$. O volume de Ω é, portanto:

$$\text{vol}\,(\Omega) = 8\iint_{R_{xy}}\sqrt{25-x^2-y^2}dA$$

e usando coordenadas polares encontramos

$$\text{vol}\,(\Omega) = 8\int_0^{\pi/2}\int_3^5\sqrt{25-r^2}r dr d\theta = (\text{usar } t=25-r^2) = 2\pi\int_0^{16}\sqrt{t}dt = \tfrac{256\pi}{3}.$$

Exemplo 4.34 *Calcular o volume do sólido Ω interior ao cilindro $x^2+y^2=2y$, $z\geq 0$, e abaixo do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.*

Solução O sólido Ω é a porção interior ao cilindro $x^2+(y-1)^2=1$, limitada inferiormente pelo plano xy, porque $z\geq 0$, e acima pelo cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, como sugere a Figura 4.24.

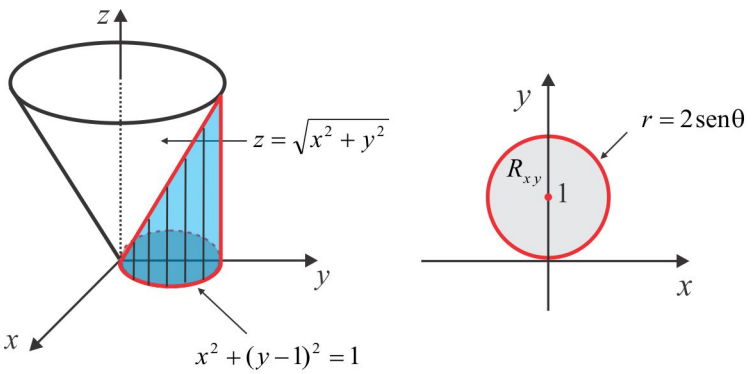


Figura 4.24: Volume abaixo do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Como subconjunto do $\mathbb{R}^3$, o sólido Ω é descrito por

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2} \text{ e } (x,y)\in R_{xy}\right\}$$

onde $R_{xy}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2\leq 1\}$ é a projeção do sólido Ω no plano xy. Em coordenadas polares a regiãoR_{xy} é descrita por

$$0\leq\theta\leq\pi \quad \text{e} \quad 0\leq r\leq 2\,\text{sen}\,\theta$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\text{vol}\,(\Omega) &= \iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} r^2 dr d\theta = \tfrac{8}{3}\int_0^{\pi}(\text{sen}\,\theta)^3\,d\theta \\ &= \tfrac{8}{3}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\text{sen}\,\theta d\theta = (\text{usar } t=\cos\theta) = \tfrac{8}{3}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)dt = \tfrac{32}{9}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 4.35 (Integral Gaussiana) *Calcular a integral imprópria*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dA$$

e com o resultado deduzir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \tag{4.18}$$

A integral (4.18) é a Integral Gaussiana, utilizada em teoria de probabilidade.

Solução Em coordenadas polares temos que $x^2 + y^2 = r^2$ e a área elementar é $dA = rdrd\theta$. Além disso,

$$\mathbb{R}^2 = \{(r, \theta)\,; 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad \text{e} \quad 0 \leq r < \infty\},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dA &= \lim_{B\to\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^B e^{-r^2} rdrd\theta = 2\pi \lim_{B\to\infty} \int_0^B e^{-r^2} rdr \\
&= (\text{usar } t = -r^2) = \pi \lim_{B\to\infty} \int_{-B^2}^0 e^t dt = \pi \lim_{B\to\infty} \left(1 - e^{-B^2}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Corolário 4.4, obtemos

$$\begin{aligned}
\pi &= \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dA = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right] e^{-y^2} dy \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right] = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt\right]^2
\end{aligned}$$

de onde resulta que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. ■

Exercícios & Complementos.

---

1. Em cada caso, esboce a região D e calcule a integral dupla

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

   (a) D é a região triangular de vértices $(2, 9)$, $(2, 1)$ e $(-2, 1)$; $f = xy^2$.

   (b) D é a região retangular de vértices $(-1, -1)$, $(2, -1)$, $(2, 4)$ e $(-1, 4)$; $f = 2x + y$.

   (c) D é a região delimitada por $8y = x^3$, $y = -x$ e $4x + y = 9$; $f = x$.

   (d) D é a região do 1.º quadrante delimitada por $x^2 + y^2 = 1$; $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

   (e) D é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(-1, 4)$; $f = x^2 - y^2$.

   (f) D é a região delimitada por $y^2 = x$, $x = 0$ e $y = 1$; $f = \exp(x/y)$.

   (g) D é a região delimitada por $2y = x^2$ e $y = x$; $f = x\left(x^2 + y^2\right)^{-1}$.

   (h) D é a região delimitada por $y = x$, $y = 0$, $x = 5$ e $xy = 16$; $f = 1$.

   (i) D é a região delimitada por $y = \exp x$, $y = \log x$, $x + y = 1$ e $x + y = 1 + e$; $f = 1$.

   (j) D é a região delimitada por $y = x^2$, $y = 0$ e $x + y = 2$; $f = xy$.

2. Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais duplas:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x dx dy$

   (b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x \left(x^2+y^2\right)^{-1} dy dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2} dy dx$

   (d) $\displaystyle\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp\left(-x^2-y^2\right) dy dx$

   (e) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(x^2+y\right) dx dy$

   (f) $\displaystyle\iint_D (x+y)\, dx dy$, sendo $D: x^2+y^2-2y \leq 0$

3. A fronteira da região D é o paralelogramo de vértices $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ e $(1,0)$. Use a mudança de coordenadas do Exemplo 4.26 e calcule a integral dupla sobre D da função

$$f(x,y) = (x-y)^2 \cos^2(x+y).$$

4. Ainda com a mudança de variável do Exemplo 4.26 calcule a integral dupla da função

$$f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

sobre a região D delimitada pelo quadrilátero de vértices $(1,1)$, $(2,2)$, $(4,0)$ e $(2,0)$.

5. Use a mudança de coordenadas $u = xy$; $y = v$ e calcule a integral dupla

$$\iint_D \left(x^2+2y^2\right) dx dy,$$

sobre a região D do plano xy delimitada pelas curvas

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = |x| \quad \text{e} \quad y = 2x.$$

6. Use a mudança de coordenadas $x = u - v$, $y = 2u - v$ e calcule a integral dupla

$$\iint_D xy dx dy,$$

sobre a região D do plano xy delimitada pelas retas $y = 2x$, $y = 2x-2$, $y = x$ e $y = x+1$.

7. Use a mudança de coordenadas $u = \frac{1}{2}y$, $v = x - 2y$ e calcule a integral dupla da função

$$f(x,y) = \sqrt{x-2y} + y^2/4,$$

sobre a região D do plano xy delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,2)$.

8. Use coordenadas polares e calcule a integral dupla

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy,$$

sobre a região D do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt{2x-x^2}$ e $y = x$.

9. Em cada caso, calcule a área da região D do plano xy delimitada pelas curvas indicadas:

   (a) $x = 1$, $x = 2$, $y = -x^2$ e $y = 1/x^2$.

   (b) $x = 1$, $x = 4$, $y = -x$ e $y = \sqrt{x}$.

(c) $y = x^2$ e $y = 2/(1+x^2)$.

(d) $y^2 = -x$, $x - y = 4$, $y = -1$ e $y = 2$.

(e) $y = 0$, $x + y = 3a$ e $y^2 = 4ax$, $a > 0$.

(f) $y = e^x$, $y = \operatorname{sen} x$, $x = \pi$ e $x = -\pi$.

10. Investigue a convergência ou não das integrais impróprias.

(a) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D : x^2 + y^2 \leq 1.$

(b) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad D : x^2 + y^2 \leq 1.$

(c) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}, \quad D : x^2 + y^2 \geq 1.$

(d) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}, \quad D : [0,1] \times [0,1].$

(e) $\displaystyle\iint_D e^{x/y} dxdy, \quad D : 0 \leq x \leq y^2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1.$

11. A área de uma região D vem dada por

$$A(D) = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} r dr d\theta.$$

Identifique a região e calcule o valor da área.

12. Calcule o volume do sólido Ω comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

4.2 Integral Tripla

A definição e propriedades da integral dupla se estendem de modo inteiramente análogo à integral tripla. Para definir a integral tripla de uma função contínua $f(x, y, z)$ em uma região compacta $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, começamos particionando a região Ω em pequenos blocos retangulares Ω_{ijk}, $i, j, k = 1, 2, 3, \ldots, n$ de lados infinitesimais (que se aproximam de zero) dx, dy e dz e *volume elementar* $dV = dxdydz$. Em cada bloco Ω_{ijk} selecionamos um ponto P_{ijk} e formamos as somas de Riemann

$$S_n = \sum_{i,j,k=1}^{n} f(P_{ijk})\, dxdydz$$

cujo limite, com $n \to \infty$, é, por definição, a integral tripla de f sobre a região Ω e anota-se

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Quando a função $f(x, y, z)$ é constante e igual a um em Ω, então a integral tripla representa o volume da região Ω. De fato,

$$\iiint_\Omega dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{n} dV = \operatorname{vol}(\Omega).$$

Dada uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ contínua na região compacta (paralelepípedo)

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \ \ c \leq y \leq d \ \text{ e } \ \alpha \leq z \leq \beta\},$$

então a integral tripla de f sobre Ω é calculada como a integral iterada

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_\alpha^\beta f(x, y, z)\, dz\right] dy\right] dx, \tag{4.19}$$

semelhante ao cálculo da integral dupla sobre retângulos, e a ordem de integração pode ser permutada, com base no Teorema de Fubini. Por exemplo,

$$\int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_\alpha^\beta f(x, y, z)\, dz\right] dy\right] dx = \int_\alpha^\beta \left[\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y, z)\, dx\right] dy\right] dz.$$

Exemplo 4.36 *Calcular a integral tripla de $f(x, y, z) = xyz$ sobre a região*

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 2, \ \ 0 \leq y \leq 1 \ \text{ e } \ 1 \leq z \leq 2\}.$$

Solução A região de integração é o paralelepípedo $\Omega = [1, 2] \times [0, 1] \times [1, 2]$ e usando (4.19), temos

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega xyzdV &= \int_1^2 \int_0^1 \left[\int_{-1}^2 xyzdx\right] dydz = \tfrac{3}{2} \int_1^2 \int_0^1 yzdydz \\ &= \tfrac{3}{2} \int_1^2 \left[\int_0^1 yzdy\right] dz = \tfrac{3}{4} \int_1^2 zdz = \tfrac{9}{8}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Suponhamos que uma região Ω do $\mathbb{R}^3$ seja descrita por:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R_{xy} \ \text{ e } \ h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\},$$

onde R_{xy} é uma região compacta do $\mathbb{R}^2$, que pode ser um retângulo, uma região vertical simples ou horizontal simples, e na qual as funções $h_1(x, y)$ e $h_2(x, y)$ são contínuas. Se $f(x, y, z)$ é uma função contínua em Ω, a integral tripla de f sobre Ω é calculada por

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \iint_{R_{xy}} \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dxdy, \tag{4.20}$$

onde vemos que o cálculo de uma integral tripla se reduz ao cálculo de uma integral simples seguida de uma integral dupla. É claro que existem outras formas de descrever a região Ω e as mudanças na ordem de integração são feitas de acordo com a região. Por exemplo, se Ω é a região

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in R_{xz} \ \text{ e } \ g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\},$$

então

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \iint_{R_{xz}} \left[\int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z)\, dy\right] dxdz.$$

Dependendo da região, a integral tripla pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. Além dos paralelepípedos (blocos retangulares), também se enquadra neste caso a região Ω descrita por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \ \ p(x) \leq y \leq q(x) \ \text{ e } \ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\},$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas no intervalo $[a, b]$ e as funções $g_1(x, y)$ e $g_1(x, y)$ são contínuas na projeção de Ω sobre o plano xy. A integral tripla neste caso é calculada de forma iterada

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left[\int_{p(x)}^{q(x)} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dy\right] dx. \tag{4.21}$$

Exemplo 4.37 *Calcular a integral tripla*

$$I = \iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV,$$

sobre a região Ω *delimitada pelos planos* $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ *e* $z = 0$.

Solução A região Ω é limitada pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 2$. A projeção no plano xy é o triângulo de vértices $O\,(0,0,0)$, $A\,(2,0,0)$ e $B\,(0,2,0)$, como mostra a Figura 4.25.

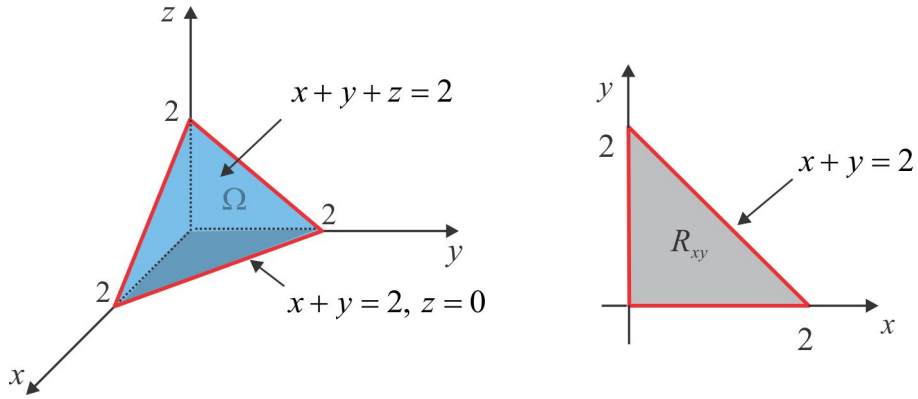


Figura 4.25: Região Ω e projeção R_{xy}.

Em coordenadas cartesianas temos

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 - x \ \text{ e } \ 0 \le z \le 2 - x - y\}$$

e usando (4.21), resulta

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV = \int_0^2 \left[\int_0^{2-x} \left[\int_0^{2-x-y} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz\right] dy\right] dx \\ &= \tfrac{1}{3} \int_0^2 \int_0^{2-x} (2 - x - y) \left[3x^2 + 3y^2 + (2 - x - y)^2\right] dydx \\ &= \tfrac{1}{3} \int_0^2 2\,(x-2)^2 \left(x^2 - x + 1\right) dx = \tfrac{8}{5}. \qquad \blacksquare. \end{aligned}$$

Exemplo 4.38 *Calcular a integral tripla de* $f\,(x,y,z) = xyz$ *sobre a região cilíndrica*

$$\Omega : x^2 + y^2 \le 1, \quad 0 \le z \le 1.$$

Solução A integral tripla neste caso é calculada por uma integral simples, seguida de uma integral dupla onde usaremos coordenadas polares. Temos

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} xyzdV &= \iint_{x^2+y^2\le 1} \left[\int_0^1 xyzdz\right] dA = \iint_{x^2+y^2\le 1} xy \left[\int_0^1 zdz\right] dA \\ &= \tfrac{1}{2} \iint_{x^2+y^2\le 1} xydA = \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta drd\theta \\ &= \tfrac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta\right] \left[\int_0^1 r^3 dr\right] = 0. \end{aligned}$$

4.2.1 Mudança de Variável em Integral Tripla

Consideremos a transformação $T : \mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida pelo sistema de equações simultâneas

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

sendo $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ e $z(u,v,w)$ funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região $\mathcal{R}$ onde o Jacobiano

$$J(T) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$$

não se anula. Se $\Omega = T(\mathcal{R})$, como na Figura 4.26, temos a seguinte fórmula de mudança de coordenadas:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint_\mathcal{R} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\,|J(T)|\,dudvdw \tag{4.22}$$

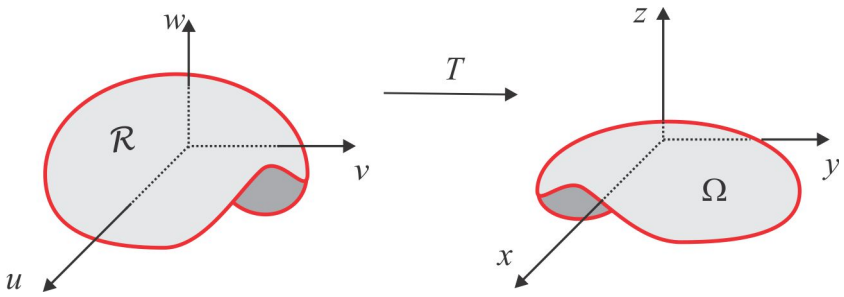


Figura 4.26: Região $\Omega = T(\mathcal{R})$.

Exemplo 4.39 *Calcular o volume do elipsoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0,\ b > 0 \ \ e \ \ c > 0.$$

Solução Se Ω representa o sólido delimitado pelo elipsoide, então

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_\Omega dV$$

e considerando a transformação $x = au$, $y = bv$ e $z = cw$, que leva a esfera $u^2 + v^2 + w^2 = 1$ sobre o elipsoide, então segue da fórmula 4.22 que

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_\Omega dV = \iiint_\mathcal{R} |J(u,v,w)|\,dudvdw,$$

onde $\mathcal{R}$ é a região delimitada pela esfera $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, isto é,

$$\mathcal{R} = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}.$$

Ora,

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

e, consequentemente,

$$\text{vol}\,(\Omega) = \iiint_{\Omega} dV = abc \iiint_{R} dudvdw = abc\,\text{vol}\,(\mathcal{R}) = \tfrac{4}{3}\pi abc.$$

O volume de uma esfera de raio R é $\frac{4}{3}\pi R^3$, como veremos no Exemplo 4.41. ■

Integral Tripla em Coordenadas Cilíndricas

Vimos no Capítulo 3 que a transformação em coordenadas cilíndricas

$$T\,(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)$$

tem Jacobiano r e, neste caso, a fórmula de mudança de variável (4.22) se reduz a

$$\iiint_{\Omega} f\,(x,y,z)\,dV = \iiint_{\mathcal{R}} f\,(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\,rdzdrd\theta. \tag{4.23}$$

Em coordenadas cilíndricas, o volume elementar dV pode ser deduzido por meio de argumentos geométricos, tal qual fizemos com a área elementar em coordenadas polares. Com base na Figura 4.27 deduzimos que $dV = rdzdrd\theta$.

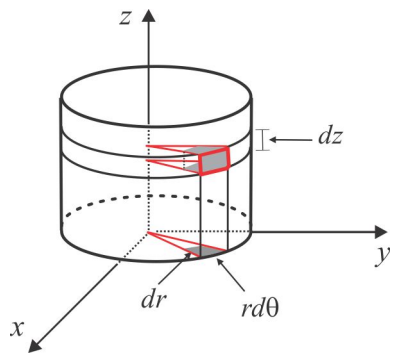


Figura 4.27: Volume elementar $dV = rdzdrd\theta$.

Exemplo 4.40 *Calcular, por integral tripla, o volume de um cilindro de raio R e altura h.*

Solução O sólido Ω delimitado pelo cilindro é descrito em coordenadas cilíndricas por

$$\Omega : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le R,\ 0 \le z \le h$$

e, portanto,

$$\text{vol}\,(\Omega) = \iiint_{\mathcal{R}} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^h rdzdrd\theta = 2\pi h\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2 h.$$

Integral Tripla em Coordenadas Esféricas

A transformação em coordenadas esféricas $T\,(\rho,\theta,\phi) = (\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\phi)$ tem Jacobiano

$$J(\rho,\theta,\phi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \text{sen}\,\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\,\text{sen}\,\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\,\text{sen}\,\phi$$

e as variáveis ρ, θ, ϕ são tais que $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. O volume elementar em coordenadas esféricas é $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta$ e pode ser deduzido observando a Figura 4.28, onde destacamos o bloco elementar de lados $d\rho$, $\rho d\phi$ e $\rho \operatorname{sen} \phi d\theta$.

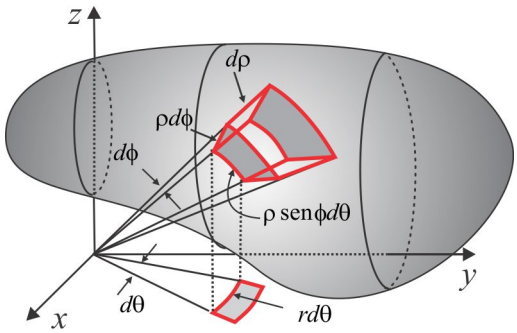


Figura 4.28: Volume elementar $dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta$.

Em coordenadas esféricas, a fórmula de mudança de variável (4.22) se reduz a:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dV = \iiint_{\mathcal{R}} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta. \tag{4.24}$$

Exemplo 4.41 *Calcular, por integral tripla, o volume de uma esfera de raio R.*

Solução Em coordenadas esféricas a esfera de centro na origem e raio R tem equação $\rho = R$ e o sólido Ω por ela delimitado é descrito por

$$\Omega : 0 \leq \rho \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi.$$

O volume de Ω é, portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(\Omega) &= \iiint_{\mathcal{R}} \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\pi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\phi d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} \left[\tfrac{1}{3}\rho^3\right]_{\rho=0}^{\rho=R} \operatorname{sen} \phi d\phi = \tfrac{2}{3}\pi R^3 \left[-\cos \phi\right]_0^{\pi} = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Exemplo 4.42 *O volume do sólido Ω interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ e ao cone $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.*

Solução O sólido Ω tem o formato de um sorvete, como sugere a Figura 4.29.
Em coordenadas esféricas, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ é descrita por $\rho = \cos \phi$ e o cone $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ tem equação $\phi = \frac{\pi}{6}$. Assim, a região Ω se transforma, via coordenadas esféricas, na região

$$\mathcal{R} = \left\{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \cos \phi,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \text{ e } \ 0 \leq \phi \leq \pi/6\right\}$$

e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\mathcal{R}} \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{sen} \phi \frac{1}{3}\rho^3\right)\Big|_0^{\cos \phi} d\phi d\theta = \tfrac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} \phi \cos^3 \phi d\phi d\theta \\ &= \tfrac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{4}\cos^4 \phi\right)\Big|_0^{\pi/6} d\theta = \tfrac{1}{12}\left(1 - \tfrac{9}{16}\right) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7\pi}{96}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

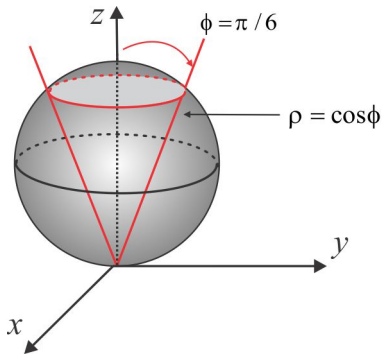


Figura 4.29: Volume interior à esfera $\rho = \cos\phi$ e ao cone $\phi = \pi/6$.

4.2.2 Considerações Físicas

Os conceitos de massa, centro de massa e momento de inércia de um corpo tridimensional Ω são semelhantes ao caso bidimensional. Se a função $f(x, y, z)$ é interpretada como *densidade volumétrica*, então a integral tripla

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV$$

representa a massa do corpo. A densidade volumétrica será indicada por $\rho(x, y, z)$ e quando a densidade ρ for constante o corpo diz-se homogêneo.

■ **Massa e Centro de Massa**

Se M representa a massa do corpo Ω, as coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$ do centro de massa são dadas por:

$$\overline{x} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho(x, y, z)\, dV, \quad \overline{y} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho(x, y, z)\, dV \quad \text{e} \quad \overline{z} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho(x, y, z)\, dV.$$

■ **Momento de Inércia**

O momento de inércia I_L do corpo Ω em relação a um eixo L é, por definição,

$$I_L = \iiint_\Omega \rho(x, y, z)\, \delta^2 dV,$$

onde $\delta = \delta(x, y, z)$ é a distância de um ponto $P(x, y, z)$ do corpo ao eixo L. No caso em que o eixo L é um eixo coordenado, temos os momentos de inércia I_x, I_y ou I_z, conforme seja L o eixo x, y ou z, e são calculados pelas fórmulas:

$$I_x = \iiint_\Omega \left(y^2 + z^2\right) \rho dV, \quad I_y = \iiint_\Omega \left(x^2 + z^2\right) \rho dV \quad \text{e} \quad I_z = \iiint_\Omega \left(x^2 + y^2\right) \rho dV.$$

Exemplo 4.43 *Calcule a massa, o centro de massa e momento de inércia I_z do sólido Ω, de densidade constante $\rho = 1$, delimitado pelo gráfico do cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ e os planos $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$ e $z = 0$.*

Solução O corpo Ω é descrito por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R_x \ \text{ e } \ 0 \le z \le 4 - x^2\}$$

e, portanto, a massa de Ω é

$$\begin{aligned} M &= \iiint_\Omega dV = \iint_{R_x} \left[\int_0^{4-x^2} dz\right] dxdy \\ &= \iint_{R_x} (4 - x^2) dxdy = \int_0^2 \int_0^6 (4 - x^2) dydx = 32. \end{aligned}$$

As coordenadas do centro de massa são:

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{32}\iiint_{\Omega} x dV = \tfrac{1}{32}\int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2} x dz dy dx = \tfrac{6}{32}\int_0^2 x\left(4-x^2\right)dx = \tfrac{3}{4}\\
\overline{y} &= \tfrac{1}{32}\iiint_{\Omega} y dx dy dz = \tfrac{1}{32}\int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2} y dz dy dx = \tfrac{18}{32}\int_0^2 \left(4-x^2\right)dx = 3\\
\overline{z} &= \tfrac{1}{32}\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \tfrac{1}{32}\int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2} z dz dy dx = \tfrac{6}{64}\int_0^2 \left(4-x^2\right)^2 dx = \tfrac{8}{5}.
\end{aligned}$$

Portanto, o centroide tem coordenadas $\left(\frac{3}{4}, 3, \frac{8}{5}\right)$. O momento de inércia I_z é dado por

$$\begin{aligned}
I_z &= \iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\rho\left(x,y,z\right)dV = \int_0^2\int_0^6\int_0^{4-x^2}\left(x^2+y^2\right)dz dy dx\\
&= \int_0^2\int_0^6\left(x^2+y^2\right)\left(4-x^2\right)dy dx = \int_0^2\left(48+6x^2-6x^4\right)dx = \tfrac{2048}{5}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 4.44 *Um corpo de massa M e densidade $f\left(x,y,z\right) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$ tem o formato da região Ω descrita por*

$$\Omega : x^2+z^2 \leq y^2 \quad e \quad x^2+y^2+z^2 \leq 4y.$$

Expressar M por uma integral tripla de três formas: em coordenadas cartesianas, em coordenadas cilíndricas e em coordenadas esféricas e, em seguida, calcular M.

Solução O primeiro passo é descrever a região Ω em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas. Temos:

1. Em Coordenadas Cartesianas

Em Coordenadas Cartesianas a região Ω é descrita pelas desigualdades:

$$-2 \leq x \leq 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2+z^2} \leq y \leq 2+\sqrt{4-x^2-z^2}$$

e sua massa é calculada por:

$$M = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-z^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}dy dz dx. \tag{4.25}$$

2. Em Coordenadas Cilíndricas

As equações do cone e da esfera nessas coordenadas são, respectivamente, $y = r$ e $y = 2+\sqrt{4-r^2}$ e o sólido é descrito pelas desigualdades

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2 \quad \text{e} \quad r \leq y \leq 2+\sqrt{4-r^2}.$$

A densidade é $f\left(r,\theta,y\right) = \left(r^2+y^2\right)^{-1/2}$ e a massa do sólido Ω é, portanto:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^{2+\sqrt{4-r^2}}\left(r^2+y^2\right)^{-1/2} r dy dr d\theta. \tag{4.26}$$

3. Em Coordenadas Esféricas

Neste caso, o cone e a esfera são descritos, respectivamente, por $\varphi = \pi/4$ e $\rho = 4\cos\varphi$ e o sólido Ω assume a caracterização

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \quad \text{e} \quad 0 \leq \rho \leq 4\cos\varphi.$$

A densidade é $f(\rho,\theta,\varphi) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = \rho^{-1}$ e a massa M do sólido Ω é, portanto:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4\cos\varphi} \rho \operatorname{sen}\varphi d\rho d\varphi d\theta. \tag{4.27}$$

A massa M pode ser calculada por (4.25), (4.26) ou (4.27) e essa última opção nos conduz ao cálculo mais simples. Temos

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4\cos\varphi} \rho \operatorname{sen}\varphi d\rho d\varphi d\theta = 2\pi\int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(4\cos\varphi)^2 \operatorname{sen}\varphi d\varphi \\ &= 16\pi\int_{\sqrt{2}/2}^{1} t^2 dt = \tfrac{16\pi}{3}[t^3]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{4\pi}{3}(4-\sqrt{2}). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercícios & Complementos.

1. Expresse a integral tripla
$$\iiint_D f(x,y,z)\, dV$$
como uma integral iterada e, em seguida, calcule o seu valor no caso em que $f(x,y,z) = xyz$ e a região D é descrita por:

   (a) $-1 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 1,\ \ 1 \le z \le 2.$

   (b) $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y},\ \ 0 \le y \le 4,\ \ 0 \le z \le 4-y.$

   (c) $0 \le x \le 1,\ \ x^2 \le y \le 1,\ \ 0 \le z \le x+y.$

   (d) $0 \le x \le z^2,\ \ x-z \le y \le x+z,\ \ 1 \le z \le 2.$

2. Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

   (a) $\int_0^1\int_1^3\int_4^5 f(x,y,z)\,dxdydz$

   (b) $\int_0^1\int_0^y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dzdxdy$

   (c) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{\sqrt{(z-1)^2-y^2}} f(x,y,z)\,dxdydz$

   (d) $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{1-z-y} f(x,y,z)\,dxdydz$

3. Descreva o sólido Ω do $\mathbb{R}^3$, cujo volume é:

   (a) $\int_0^1\int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}}\int_2^3 dxdydz$

   (b) $\int_0^1\int_{z^3}^{\sqrt{z}}\int_0^{4-x} dydxdz$

   (c) $\int_0^2\int_{x^2}^{2x}\int_0^{x+y} dzdydx$

   (d) $\int_0^1\int_0^{3x}\int_0^1 dzdydx$

   (e) $\int_1^2\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dydxdz$

   (f) $\int_1^4\int_{-z}^{z}\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dxdydz$

4. Em cada caso, identifique o sólido Ω e calcule seu volume por integração tripla.

   (a) Ω é delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y+z=4$ e $z=0$.

   (b) Ω é delimitado pelo cilindro $z = 1-y^2$ e pelos planos $x=z$, $x=0$ e $y=0$.

   (c) Ω é delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$ e $z = 4-x^2$e pelos planos $y+z=6$ e $y=0$.

   (d) Ω é a interseção dos paraboloides $z \le 1-x^2-y^2$ e $z \ge x^2+y^2-1$.

   (e) Ω é delimitado pelos cilindros $x = y^2$ e $y^2 = 2-x$ e pelos planos $z = 5+x+y$ e $z=0$.

   (f) Ω é a interseção da bola $x^2+y^2+z^2 \le 6$ com o paraboloide $z \ge x^2+y^2$.

   (g) Ω é delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2+y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

5. Em cada caso calcule o volume do sólido descrito pelas desigualdades.

   (a) $0 \leq x \leq z \leq 1 - y^2$
   (b) $x^2 + 4y^2 \leq 4$ e $x + y \leq z \leq x + y + 1$
   (c) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2$
   (d) $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$
   (e) $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$
   (f) $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

6. Use coordenadas cilíndricas e calcule as seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz dx dy$
   (b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^1 x dz dy dx$
   (c) $\displaystyle\iiint_D xy dV, \quad D : x^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1$
   (d) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \left(x^2 + y^2\right) dz dy dx$

7. Use coordenadas esféricas e calcule as seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz dy dx.$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy.$

8. Faz-se um orifício circular em uma esfera, o eixo do orifício coincidindo com o eixo da esfera. O volume do sólido Ω resultante vem dado por

$$\operatorname{vol}(\Omega) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta.$$

   Por observação da integral determine o raio do orifício e o raio da esfera. Calcule $\operatorname{vol}(\Omega)$.

9. Calcule a massa de uma bola de raio R, se a densidade de massa no ponto P da bola é proporcional à distância r do ponto P ao centro da bola.

10. Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \ z \geq 0$, se a densidade em um ponto (x, y, z) do hemisfério é $\sigma(x, y, z) = z$.

11. Determine o centroide do hemisfério $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

12. Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo de um cilindro circular reto de altura h e raio R, se a densidade em um ponto (x, y, z) do cilindro é $\sigma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Respostas & Sugestões

Seção 4.1 - integral dupla

1. (a) 1, (b) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi^2$, (c) -36, (d) 1, (e) 0, (f) $\frac{5}{2} - 6\sqrt{2}$, (g) $\frac{e}{2} - 1$, (h) $\frac{e-1}{2}$, (i) $1 - \cos 2$, (j) $-\frac{2}{3}$, (k) $\frac{1}{3}$, (l) 0, (m) $\frac{1}{48}$, (n) $\frac{3}{2} - \operatorname{sen} 1 - \cos 1$, (o) $-\frac{3}{2}$, (p) $\frac{8}{3}$, (q) $e^2 - 1$, (r) $\frac{1}{16}$, (s) $\frac{9}{2}$, (t) $-\frac{8}{3}$, (u) $\frac{1}{3}(1 - \cos 1)$, (v) $\frac{1}{2}$.

2. Veja a seção 4.1.2 sobre as regiões horizontais e verticais simples.

3. (a) $\frac{1}{4}\left(e^4-1\right)$, (b) 16, (c) $9+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4\pi}{3}$, (d) $\frac{3\pi}{8}$.

4. D é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$ e $(1,1)$. O volume do sólido é $4/3$.

5. $\pi/4-\frac{1}{3}$.

6. (a) $\frac{\pi}{4}+\frac{15}{2}+\operatorname{arctg}2$ (b) $\frac{9\pi}{2}+27$ (c) $\frac{56}{3}$

7. $a^3/3$.

8. 20.

Seção 4.1.6 - mudança de variável

1. (a) $\frac{1504}{5}$, (b) $\frac{75}{2}$, (c) $\frac{209}{30}$, (d) $\frac{\pi}{6}$, (e) -3, (f) $\frac{1}{2}$, (g) $\log 2$, (h) $8+16\log\left(\frac{5}{4}\right)$, (i) $\frac{1}{2}e^2+e-3$, (j) $\frac{7}{24}$.

2. (a) 0, (b) $\frac{\pi}{4}\log 2$, (c) $\frac{\pi}{2}[1-\exp\left(-a^2\right)]$, (d) $\frac{9}{2}(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})$, (e) $\frac{\pi}{4}$, (f) $\frac{3\pi}{8}$.

3. $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\left(\operatorname{sen}6-\operatorname{sen}2\right)$.

4. $3-3\cos 1$.

5. $15/8$.

6. 7.

7. Note que a mudança de variáveis $u=\frac{1}{2}y$ e $v=x-2y$ transforma o triângulo D de vértices $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,2)$ no plano xy no triângulo R_{uv} de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,4)$ no plano uv. Então
$$J(x,y)=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2} \text{ e } J(u,v)=-2.$$
Logo,
$$\begin{aligned}\iint_D\left(\sqrt{x-2y}+\tfrac{1}{4}y^2\right)dxdy &= 2\iint_{R_{uv}}(\sqrt{v}+u^2)dudv \\ &= 2\int_0^1\left[\int_0^{-4u+4}(\sqrt{v}+u^2)dv\right]du \\ &= 2\int_0^1\left(\tfrac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}+vu^2\Big|_0^{-4u+4}\right)du=\tfrac{74}{15}.\end{aligned}$$

8. $\frac{1}{9}(16-10\sqrt{2})$.

9. (a) $\frac{17}{6}$, (b) $\frac{73}{6}$, (c) $\pi-\frac{2}{3}$, (d) $\frac{33}{2}$, (e) $\frac{10a^2}{3}$, (f) $e^{\pi}-e^{-\pi}$.

10. (a) 2π, (b) 2π, (c) ∞, (d) 4, (e) $1/2$.

11. Região do 1º quadrante exterior ao círculo $r=1$ e interior à cardioide $r=1+\cos\theta$. A área é $1+\pi/8$.

12. $\operatorname{vol}(\Omega)=16a^3/3$.

Seção 4.2 - integral tripla

1. (a) $\frac{7}{8}$; (b) 0; (c) $\frac{671}{4320}$; (d) $\frac{1022}{27}$.

2. (c) Sendo
$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{\sqrt{(z-1)^2-y^2}} f(x,y,z)\, dxdydz$$
temos que $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq y \leq 1-z$ e $0 \leq x \leq \sqrt{(z-1)^2-y^2}$. Note que queremos primeiro integrar em relação a z, então fixado x e y, obtemos
$$x = \sqrt{(z-1)^2-y^2} \Leftrightarrow (z-1)^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow z = 1-\sqrt{x^2+y^2},$$
pois $0 \leq z \leq 1$. Como a projeção do cone $(z-1)^2 = x^2+y^2$ sobre o plano xy $(z=0)$ é o círculo $x^2+y^2=1$ temos que $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ e $0 \leq x \leq 1$. Portanto,
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\, dzdydx.$$

3. (c) Na integral
$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \int_0^{x+y} dzdydx$$
vemos que $0 \leq x \leq 2$, $x^2 \leq y \leq 2x$ e $0 \leq z \leq x+y$ e, portanto, o sólido Ω é delimitado pelos planos $x=0$, $x=2$, $y=2x$, $z=0$, $z=x+y$ e o cilindro $y=x^2$.

4. (a) Para identificar o sólido Ω esboce a parábola $y=x^2$ no plano xy $(z=0)$ e sobre ela faça deslizar uma reta paralela ao eixo z para obter o cilindro; em seguida corte o cilindro com os planos $z=0$ e $y+z=4$. O volume do sólido é
$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{4-y} dzdxdy = \frac{256}{15}.$$
(b) $\frac{4}{15}$, (c) $\frac{304}{15}$, (d) π, (e) $\frac{32}{3}$, (f) $2\pi(2\sqrt{6}-\frac{11}{3})$, (g) $\frac{32}{9}$.

5. (a) $\frac{8}{15}$, (b) $\frac{64}{9}-\frac{3\pi}{2}$, (c) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. (d). A desigualdade $x^2+y^2 \leq z \leq 2x$ significa que o sólido Ω é a porção interna ao paraboloide $z=x^2+y^2$, abaixo do plano $z=2x$, e a projeção de Ω no plano xy é o disco $D: x^2+y^2-2x \leq 0$. Assim,
$$\text{vol}(\Omega) = \iint_D \int_{x^2+y^2}^{2x} dzdydx = \iint_D (2x-x^2-y^2)dA$$
e em coordenadas polares o disco D é descrito por $0 \leq r \leq 2\cos\theta$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Portanto,
$$\begin{aligned}\text{vol}(\Omega) &= \iint_{R_{xy}} (2x-x^2-y^2)dydx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} (2r\cos\theta - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

6. (a). O sólido é a porção do 1º octante, interna ao cilindro $x^2+y^2=1$ e à esfera $mx^2+y^2+z^2=1$. Como $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$ e $z=z$, segue que $J(r,\theta,z)=r$ e, potanto,

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdzdxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{4-r^2}} zrdzdrd\theta\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r(4-r^2)drd\theta = \tfrac{7}{16}\pi.\end{aligned}$$

(b) $1/3$, (c) 0, (d) $10\pi/3$.

7. (a) A região Ω é interna ao cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e à esfera $x^2+y^2+z^2=8$. Em coordenadas esféricas a esfera e o cone são descritos por $\rho=2\sqrt{2}$ e $\phi=\frac{\pi}{4}$, respectivamente. Assim, a região é descrita por $0\le\rho\le 2\sqrt{2}$, $0\le\theta\le 2\pi$ e $0\le\phi\le\frac{\pi}{4}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}\left(x^2+y^2+z^2\right)dzdydx &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^4\operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta\\ &= \tfrac{256\pi}{5}(\sqrt{2}-1/2).\end{aligned}$$

(b) $\pi R^4/16$.

8. $r=1$; $R=2$ e $\operatorname{vol}(\Omega)=4\pi\sqrt{3}$.

9. $k\pi R^4$.

10. $C_M\left(0,0,8R/15\right)$.

11. $C_M\left(0,0,R/3\right)$.

12. $2\pi hR^5/3$.

5. Integral de Linha

Para motivar o que será apresentado neste capítulo, deixe-nos reescrever a integral simples

$$\int_a^b f(x)dx$$

de outra forma. Imaginemos o intervalo $[a, b]$ como sendo a curva γ descrita pelas equações paramétricas

$$\gamma : x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{e} \quad z = z(t), \qquad a \leq t \leq b,$$

sendo $x(t) = t$, $y(t) = 0$ e $z(t) = 0$ e consideremos a função vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\,\mathbf{i}$, definida em uma região Ω contendo a curva γ. Se $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ representa o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ da curva γ, então

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t) = f(t)$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\,dt. \tag{5.1}$$

A integral do lado direito de (5.1) recebe o nome de *Integral de Linha* ou *Integral Curvilínea* do campo vetorial $\mathbf{F}$ sobre o caminho γ.

A partir de considerações físicas, apresentaremos as formas como as integrais de linha aparecem na prática. O conceito e as propriedades básicas da integral de linha serão formalizados posteriormente.

■ O conceito de trabalho

Por *campo de forças* entendemos uma função que associa a cada ponto um vetor que representa algum tipo de atração ou repulsão. Uma partícula de massa m, sob a ação de um campo de forças $\mathbf{F}$, se move ao longo de uma curva γ. O trabalho W realizado pelo campo $\mathbf{F}$ para transportar a partícula ao longo da curva γ, do ponto A até o ponto B, é dado por

$$W = E_B - E_A,$$

onde E_A e E_B são, respectivamente, a *energia cinética* da partícula nos instantes $t = a$ e $t = b$ em que a partícula ocupa as posições A e B. Se v_A e v_B representam as velocidades nesses instantes, então

$$W = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2. \tag{5.2}$$

Para representar o trabalho (5.2) por uma integral, imaginemos a curva γ orientada de A para B, que corresponde aos valores crescentes de t, e descrita por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

de modo que $A = \mathbf{r}(a)$ e $B = \mathbf{r}(b)$ são, respectivamente, as posições inicial e final da partícula. Ora, no instante t a velocidade $v(t)$ da partícula é $v(t) = |\mathbf{r}'(t)|$ e resulta de (5.2)

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}m\left[\left|\mathbf{r}'(b)\right|^2 - \left|\mathbf{r}'(a)\right|^2\right] = \tfrac{1}{2}m\left[\left|\mathbf{r}'(t)\right|^2\right]_{t=a}^{t=b} \\ &= \tfrac{1}{2}m\int_a^b \frac{d}{dt}\left|\mathbf{r}'(t)\right|^2 dt. \end{aligned}$$

Da Regra da Cadeia, segue que $\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}'(t)^2\right] = 2\mathbf{r}'(t) \bullet \mathbf{r}''(t)$ e, consequentemente,

$$W = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt. \tag{5.3}$$

A derivada $\mathbf{r}''(t)$ representa a aceleração da partícula e, de acordo com a 2ª Lei de Newton, temos que $\mathbf{F}(\gamma(t)) = m\mathbf{r}''(t)$, resultando de (5.3) que

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt. \tag{5.4}$$

A integral do lado direito de (5.4) se representa na forma vetorial $\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$, onde

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt \quad \text{ou} \quad d\mathbf{r} = (dx)\,\mathbf{i} + (dy)\,\mathbf{j} + (dz)\,\mathbf{k}.$$

mede o *deslocamento infinitesimal* da partícula. Essa notação vetorial, além da robusteza, sugere a interpretação física de trabalho como *força* $\times$ *deslocamento.*

■ O conceito de massa

Consideremos um arame com o formato da curva $\gamma(t)$ e seja $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, $a \leq t \leq b$, o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ do arame. Se representarmos por $\delta(x, y, z)$ a *densidade linear*, isto é, massa por unidade de comprimento, e por ds uma porção infinitesimal (comprimento elementar) do arame, a massa elementar dm da porção ds será, portanto

$$dm = \delta(x, y, z)\, ds.$$

A massa total do arame é obtida *somando*, isto é, integrando, as massas elementares dm. Assim, a massa do arame é

$$m = \lim_{ds \to 0} \sum dm = \int_\gamma \delta(x, y, z)\, ds. \tag{5.5}$$

Em (5.5) o símbolo $\sum$ tem carater apenas intuitivo, já que não podemos, literalmente, somar infinitésimos. O que fazemos na verdade é integrar sobre o caminho.

Com esta motivação desejamos ressaltar que as integrais de linha se apresentam sob duas formas equivalentes:

1. $\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt$, interpretada como trabalho realizado pelo campo de forças $\mathbf{F}$.

2. $\int_\gamma f(x, y, z)\, ds$, interpretada como massa do fio de densidade linear $f(x, y, z)$.

O vetor tangente unitário à curva γ no ponto $P = \mathbf{r}(t)$ é $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$, como sugere a Figura 5.1, e se representarmos por $s(t)$ o comprimento do arco da curva γ de A até P, então

$$s(t) = \int_a^t \left|\mathbf{r}'(\tau)\right| d\tau \quad \text{e} \quad ds = \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt.$$

Assim,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt = \left|\mathbf{r}'(t)\right| \mathbf{T} dt = \mathbf{T} ds,$$

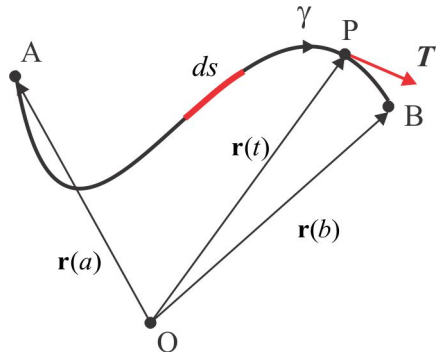


Figura 5.1: Vetor tangente $T = \mathbf{r}'(t)/\left|\mathbf{r}'(t)\right|$.

onde vemos que $|d\mathbf{r}|$ representa o comprimento ds ao longo da direção tangencial, e temos

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds.$$

Se enfatizarmos as coordenadas do campo $\mathbf{F}(x, y, z) = L(x, y, z)\,\mathbf{i} + M(x, y, z)\,\mathbf{j} + N(x, y, z)\,\mathbf{k}$, então

$$F \bullet dr = (L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}) \bullet (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = Ldx + Mdy + Ndz$$

e a integral de linha se apresenta sob a forma

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_\gamma Ldx + Mdy + Ndz.$$

A expressão $Ldx + Mdy + Ndz$ recebe o nome de *forma diferencial* de primeira ordem.

5.1 Campos Vetoriais

Um campo vetorial sobre uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma função $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que a cada ponto $P(x, y, z)$ de Ω associa um vetor $\mathbf{F}(x, y, z)$ do $\mathbb{R}^3$. A terminologia *campo vetorial* deve-se a exemplos físicos tais como campo gravitacional, campo eletrostático, campo de velocidades de um fluido em movimento, etc.

Fixado um sistema de coordenadas, por exemplo, o sistema de coordenadas cartesianas, o campo vetorial $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ é representado por suas componentes ou coordenadas L, M e N, que são funções escalares definidas em Ω e que determinam as propriedades analíticas do campo $\mathbf{F}$. Por exemplo, o campo

$$\mathbf{F} = L(x, y, z)\mathbf{i} + M(x, y, z)\mathbf{j} + N(x, y, z)\mathbf{k},$$

é contínuo (resp. diferenciável) no ponto $P(x, y, z)$ de Ω se, e somente se, as componentes L, M e N são funções contínuas (resp. diferenciáveis) em P.

De modo similar, define-se campo vetorial bidimensional como sendo uma função $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto de uma região D, do plano xy, um vetor

$$\mathbf{F}(x, y) = L(x, y)\mathbf{i} + M(x, y)\mathbf{j},$$

sendo $L, M : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções escalares que determinam (e herdam) as propriedades analíticas do campo $\mathbf{F}$. A visualização geométrica de um campo vetorial $\mathbf{F}(x, y)$ é obtida esboçando-se uma coleção de setas de comprimento $|\mathbf{F}(x, y)|$, com origem no ponto $P(x, y)$, representando os vetores $\mathbf{F}(x, y)$.

Exemplo 5.1 (Campo Radial) *O campo vetorial* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ *é tal que* $|\mathbf{F}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e, nos pontos de uma dada circunferência de centro na origem, a intensidade do campo* $\mathbf{F}$ *é a mesma e igual ao raio da circunferência, como ilustra a Figura 5.2.* ■

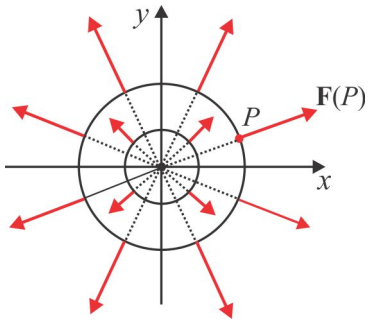


Figura 5.2: Visualização do campo radial.

Exemplo 5.2 (Campo Tangencial) *Analisar o campo vetorial* $\mathbf{F}$ *definido em* $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ *por*

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}$$

Solução Primeiro observamos que $\mathbf{F}$ é um campo de vetores unitários, isto é, em qualquer ponto $P(x, y)$, a intensidade do campo é $|\mathbf{F}(x, y)| = 1$. Além disso, se $\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ é o vetor posição do ponto $P(x, y)$, então $\mathbf{F} \bullet \mathbf{r} = 0$, e isso nos diz que o campo vetorial $\mathbf{F}$ é perpendicular ao vetor posição $\mathbf{r}$. Portanto, em cada ponto P, o campo vetorial $\mathbf{F}$ é tangente à circunferência de centro na origem e raio $r = |\mathbf{OP}|$, como mostra a Figura 5.3. ■

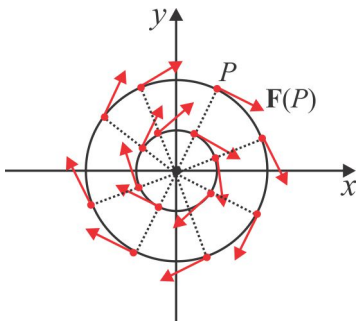


Figura 5.3: Visualização do campo tangente.

Exemplo 5.3 (Campo Quadrado Inverso) *Se* $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *é o vetor posição do ponto* $P(x, y, z)$ *de uma região* Ω *do* $\mathbb{R}^3$*, a expressão*

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{k}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

sendo k constante, define um campo vetorial sobre Ω, denominado campo quadrado inverso, que aparece com bastante frequência nas ciências físicas. Em coordenadas, o campo quadrado inverso se expressa sob a forma

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

e, no ponto P, a intensidade do campo é $|\mathbf{F}(P)| = \dfrac{k}{|\mathbf{r}|^2}$, inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto P à origem. ■

Exemplo 5.4 (Campo Gravitacional) *Verificar que o campo gravitacional é um campo vetorial quadrado inverso.*

Solução De acordo com a Lei de Gravitação Universal de Newton, o campo gravitacional na superfície da terra é dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

onde M representa a massa da terra, G é a constante gravitacional, m é a massa de uma partícula situada no ponto $P(x,y,z)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ representa o vetor posição do ponto P. A intensidade do campo vetorial $\mathbf{F}$ é igual a

$$|\mathbf{F}(P)| = \frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2},$$

inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto P à origem. ■

Definição 5.5 *Um campo vetorial $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ denomina-se campo conservativo ou campo gradiente se existir uma função diferenciável $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z), \qquad \text{em } \Omega.$$

Uma tal função φ denomina-se potencial (escalar) ou primitiva do campo $\mathbf{F}$.

Exemplo 5.6 *O campo gravitacional apresentado no Exemplo 5.4 é conservativo.*

Solução No Exercício 13 da seção 2.4 vimos que

$$\nabla(1/|\mathbf{r}|) = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

e se considerarmos

$$\varphi(x,y,z) = \frac{GMm}{|\mathbf{r}|},$$

teremos

$$\nabla\varphi(x,y,z) = GMm\nabla(1/|\mathbf{r}|) = -\frac{GMm\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = F(x,y,z), \ \forall (x,y,z) \neq \mathbf{0}. \qquad ■$$

Imitando o que foi feito no Exemplo 5.6, demonstra-se que qualquer campo vetorial $\mathbf{F}$ quadrado inverso é conservativo. De fato, basta observar que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{k}{|\mathbf{r}|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \nabla\left(-\frac{k}{|\mathbf{r}|}\right).$$

De forma geral, um potencial φ de um campo vetorial conservativo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é determinado como solução da equação vetorial $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, que é equivalente ao sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \varphi_x = L \\ \varphi_y = M \\ \varphi_z = N. \end{cases} \tag{5.6}$$

Portanto, o campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ será conservativo quando o sistema de equações diferenciais parciais (5.6) possuir uma solução φ, que será um potencial para o campo $\mathbf{F}$. Se as derivadas parciais de primeira ordem das componentes L, M e N são contínuas, e isso acarreta a diferenciabilidade do campo $\mathbf{F}$, então

$$\begin{aligned} L &= \varphi_x \Rightarrow L_y = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = M_x \\ M &= \varphi_y \Rightarrow M_z = \varphi_{yz} = \varphi_{zy} = N_y \\ N &= \varphi_z \Rightarrow N_x = \varphi_{zx} = \varphi_{xz} = L_z \end{aligned}$$

e, portanto,

$$M_x = L_y, \quad N_y = M_z \quad \text{e} \quad L_z = N_x. \tag{5.7}$$

Como veremos adiante, sob certas condições, as relações (5.7) constituem uma condição não apenas necessária, mas, também, suficiente para que o campo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ seja conservativo.

Exemplo 5.7 *O campo vetorial* $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + \operatorname{sen}(xy)\mathbf{j}$ *não é conservativo, porque*

$$L_y = x^2 \neq y\cos(xy) = M_x. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.8 *Mostrar que o campo* $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ *é conservativo e encontrar a família de potenciais do campo.*

Solução Temos $L = x^2$, $M = y$ e $N = -3z$ e as condições (5.7) são facilmente comprovadas. O sistema (5.6), neste caso, se reduz a:

$$\begin{cases} \varphi_x = x^2 & \text{(I)} \\ \varphi_y = y & \text{(II)} \\ \varphi_z = -3z & \text{(III)} \end{cases}$$

A busca do potencial é feita por etapas, usando o processo de derivação e integração. Como efetuaremos integração parcial em relação às variáveis x, y e z, as constantes de integração são na verdade funções das variáveis não envolvidas na integração e o processo se encerra com uma constante numérica.

■ **Etapa 1: integrar (I) com respeito a x**

Integrando (I) com respeito à variável x, obtemos

$$\varphi(x, y, z) = \int_\gamma x^2 dx = \tfrac{1}{3}x^3 + f(y, z), \tag{5.8}$$

onde $f(y, z)$ é a *constante de integração.*

■ **Etapa 2: derivar com respeito a y e comparar com (II)**

Derivando (5.8) em relação a y, usando (II) e integrando o resultado em relação a y, encontramos

$$\varphi_y = f_y \Rightarrow y = f_y \Rightarrow f(y, z) = \tfrac{1}{2}y^2 + g(z),$$

onde $g(z)$ representa a constante de integração. Assim, (5.8) assume a forma

$$\varphi(x,y,z) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}y^2 + g(z) \tag{5.9}$$

■ **Etapa 3: derivar com respeito a z e comparar com (III)**

Derivando (5.9) com respeito a z e comparando com (III), obtemos

$$\varphi_z = g'(z) \Rightarrow -3z = g'(z) \Rightarrow \tag{5.10}$$

Integrando (5.10), encontramos $g(z) = -\frac{3}{2}z^2 + k$, onde k é a constante de integração, e substituindo $g(z)$ na expressão (5.9) que define φ, obtemos

$$\varphi(x,y,z) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{3}{2}z^2 + k,$$

que é a família de potenciais procurada. ■

5.1.1 Operadores Diferenciais

No cálculo integral de várias variáveis, sobretudo nos teoremas clássicos, alguns operadores diferenciais (operadores que envolvem derivação) aparecem em sua formulação. Os operadores que trataremos neste texto são: o *Gradiente*, o *Laplaciano*, o *Divergente* e o *Rotacional*. Esses operadores atuam em campos escalares ou vetoriais, produzindo campos escalares ou vetoriais. Vejamos a ação de cada um deles.

■ **Operador Gadiente: $\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi$**

Dado um campo escalar diferenciável $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, o gradiente de f no ponto P, interior ao conjunto Ω, foi definido no Capítulo 2 como sendo o vetor

$$\nabla f(P) = f_x(P)\,\mathbf{i} + f_y(P)\,\mathbf{j} + f_z(P)\,\mathbf{k}.$$

Essa expressão define o *operador gradiente* $\nabla = \partial_x\mathbf{i} + \partial_y\mathbf{j} + \partial_z\mathbf{k}$, cujo valor no campo escalar f é

$$\nabla f = (\partial_x\mathbf{i} + \partial_y\mathbf{j} + \partial_z\mathbf{k}) \cdot f = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}.$$

Dado um vetor unitário $\mathbf{u}$ com ângulos diretores α, β e γ, isto é, $\mathbf{u} = (\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\cos\beta)\,\mathbf{j} + (\cos\gamma)\,\mathbf{k}$, então

$$\nabla f \bullet u = f_x\cos\alpha + f_y\cos\beta + f_z\cos\gamma$$

e isso indica que ∇f não depende do sistema de coordenadas escolhido. Se $\mathbf{F}$ é um campo conservativo com potencial f, então em cada ponto P da superfície de nível $f(x,y,z) = k$, temos $\mathbf{OP} \bullet \nabla f(P) = 0$, isto é, $\mathbf{OP} \bullet \mathbf{F}(P) = 0$ e isso indica que o campo $\mathbf{F}$ é normal à superfície de nível de f em P.

■ **Operador Laplaciano: $\Delta\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi)$**

No Exercício 8 da seção 2.2, definimos o operador de Laplace ou Laplaciano em $\mathbb{R}^2$ por

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}.$$

No $\mathbb{R}^3$, o Laplaciano é definido de forma similar como sendo o operador diferencial de segunda ordem

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$$

cujo valor no campo escalar $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é

$$\Delta f = (\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}) \cdot f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

É comum usar a notação $\Delta = \nabla^2$, decorrente da relação

$$\Delta f = (\partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}) \bullet (\partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}) = \nabla \bullet \nabla = \nabla^2,$$

onde entendemos a operação $\partial_u \bullet \partial_v$ como a derivada de segunda ordem ∂_{uv}. Enquanto o operador Gradiente transforma campos escalares em campos vetoriais, o Laplaciano transforma um campo escalar em um campo escalar.

■ Operador Divergente: $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}$

O operador Divergente faz o papel inverso do Gradiente, transformando campos vetoriais em campos escalares. Dado um campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, o *divergente* de $\mathbf{F}$ é definido por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}.$$

É comum expressar o operador divergente na forma simbólica $\operatorname{div} = \partial_x + \partial_y + \partial_z$ e, neste contexto, temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = (\partial_x \mathbf{i} + \partial_y \mathbf{j} + \partial_z \mathbf{k}) \bullet \mathbf{F} = L_x + M_y + N_z.$$

Se olharmos a matriz Jacobiana do campo $\mathbf{F}$

$$J(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} L_x & L_y & L_z \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{bmatrix}$$

observamos que as parcelas de $\operatorname{div} \mathbf{F}$ aparecem na diagonal principal da matriz.

Exemplo 5.9 *Determinar o divergente do campo* $\mathbf{F} = xy^2z^4\mathbf{i} + \left(2x^2y + z\right)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$.

Solução As coordenadas do campo são $L = xy^2z^4$, $M = 2x^2y + z$ e $N = y^3z^2$. Assim,

$$L_x = y^2z^4, \quad M_y = 2x^2 \quad \text{e} \quad N_z = 2y^3z$$

e, portanto, $\operatorname{div} \mathbf{F} = y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z$. ■

Sejam λ e μ números reais, f um campo escalar dieferenciável e $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ campos vetoriais diferenciáveis. O operador divergente goza das seguintes propriedades:

1. **Linearidade:** $\nabla \bullet (\lambda\mathbf{F} + \mu\mathbf{G}) = \lambda\nabla \bullet \mathbf{F} + \mu\nabla \bullet \mathbf{G}$ ou $\operatorname{div}(\lambda\mathbf{F} + \mu\mathbf{G}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{F} + \mu \operatorname{div} \mathbf{G}$.
2. **Distributividade:** $\nabla \bullet (\varphi\mathbf{F}) = \varphi(\nabla \bullet \mathbf{F}) + (\nabla\varphi) \bullet \mathbf{F}$ ou $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{G}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla\varphi \bullet \mathbf{F}$.

Estas e outras propriedades do operador div são decorrentes das regras de derivação. Como ilustração, vamos mostrar a propriedade linear do divergente. Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, então

$$\varphi\mathbf{F} = (\varphi L)\,\mathbf{i} + (\varphi M)\,\mathbf{j} + (\varphi N)\,\mathbf{k}$$

e a regra do produto para derivação parcial acarreta

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi L) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi M) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi N) \\
&= \varphi L_x + \varphi_x L + \varphi M_y + \varphi_y M + \varphi N_z + \varphi_z N \\
&= \varphi(L_x + M_y + N_z) + \left(\varphi_x L + \varphi_y M + \varphi_z N\right) \\
&= \varphi(\operatorname{div}\mathbf{F}) + (\nabla\varphi) \bullet \mathbf{F} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

■ Operador Rotacional: $\operatorname{rot} F = \nabla \times F$

Dado um campo vetorial diferenciável $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, o *rotacional* de $\mathbf{F}$ é definido por

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (N_y - M_z)\,\mathbf{i} + (L_z - N_x)\,\mathbf{j} + (M_x - L_y)\,\mathbf{k}$$

e o *operador rotacional* pode ser visto como o produto vetorial do gradiente pelo campo, isto é, o determinante simbólico

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial z \\ L & M & N \end{vmatrix}.$$

Alguns "produtos" decorrentes do desenvolvimennto deste determinante em relação à primeira linha devem ser entendidos como derivação. Por exemplo, o "produto" $\partial_x N$ significa a derivada parcial N_x da função N em relação à variável x. O operador rot também goza das propriedades linear e distributiva, tal qual o div . Temos

1. **Linearidade:** $\nabla \times (\lambda\mathbf{F} + \mu\mathbf{G}) = \lambda\nabla \times \mathbf{F} + \mu\nabla \times \mathbf{G}$ ou $\operatorname{rot}(\lambda\mathbf{F} + \mu\mathbf{G}) = \lambda \operatorname{rot}\mathbf{F} + \mu \operatorname{rot}\mathbf{G}$.
2. **Distributividade:** $\nabla \times (\varphi\mathbf{F}) = \varphi(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla\varphi) \times \mathbf{F}$ ou $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{F}) = \varphi \operatorname{rot}\mathbf{F} + \nabla\varphi \times \mathbf{F}$.

As coordenadas de $\operatorname{rot} F$ aparecem naturalmente nas entradas da matriz antissimétrica

$$J(\mathbf{F}) - J(\mathbf{F})^T = \begin{bmatrix} 0 & L_y - M_x & L_z - N_x \\ -(L_y - M_x) & 0 & M_z - N_y \\ -(L_z - N_x) & -(M_z - N_y) & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 5.10 *Se $\rho = \rho(x, y, z, t)$ é a densidade e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ é o campo de velocidades de um fluido em movimento, em mecânica dos fluidos a equação*

$$\operatorname{div}\mathbf{F} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \;\; ou \;\; \operatorname{div}\mathbf{F} = -\frac{\partial\rho}{\partial t},$$

sendo $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, denomina-se equação de continuidade e quando a densidade ρ for constante, diremos que o fluido é incompressível. O divergente do campo vetorial $\mathbf{F}$ surge como uma medida da taxa de variação da densidade do fluido em um ponto. Portanto, concluímos que:

1. *Quando o divergente for positivo em um ponto do fluido, a sua densidade está diminuindo com o tempo, isto é, existe uma fonte de fluxo no ponto. Caso contrário, existe um poço (sumidouro) de fluxo no ponto.*
2. *Se $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ em todos os pontos da região, então o fluxo de entrada é exatamente equilibrado pelo fluxo de saída.*

3. *O campo rotacional pode ser interpretado como uma medida do movimento angular (circular) de um fluido. Quando* $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, *diremos que o campo de velocidade* $\mathbf{v}$ *é irrotacional. É oportuno ressaltar que* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *é equivalente a matriz* $J(\mathbf{F})$ *ser simétrica, ou seja,*

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

Exemplo 5.11 *Determinar o divergente e o rotacional do campo vetorial*

$$\mathbf{F} = xy^2z^4\mathbf{i} + \left(2x^2y + z\right)\mathbf{j} + y^3z^2\mathbf{k}$$

Solução As coordenadas do campo $\mathbf{F}$ são $L = xy^2z^4$, $M = 2x^2y + z$ e $N = y^3z^2$ e da definição de divergente resulta

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = y^2z^4 + 2x^2 + 2y^3z.$$

Da mesma forma, usando a definição de rotacional, encontramos

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy^2z^4 & 2x^2y + z & y^3z^2 \end{vmatrix} = (3y^2z^2 - 1)\mathbf{i} + 4xy^2z^3\mathbf{j} + \left(4xy - 2xyz^4\right)\mathbf{k} \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.12 (Um campo irrotacional) *Seja* $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *um campo vetorial conservativo sobre* Ω *que deriva de um potencial* $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em* Ω. *Mostre que* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$, *ou seja, o campo* F *é irrotacional.*

Solução Como φ possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em Ω, temos que $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$, $\varphi_{xz} = \varphi_{zx}$ e $\varphi_{yz} = \varphi_{zy}$ e, além disso, sendo $\mathbf{F}{=}\nabla\varphi = \varphi_x\mathbf{i} + \varphi_y\mathbf{j} + \varphi_z\mathbf{k}$, obtemos

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix} = \left(\varphi_{zy} - \varphi_{yz}\right)\mathbf{i} + \left(\varphi_{xz} - \varphi_{zx}\right)\mathbf{j} + \left(\varphi_{yx} - \varphi_{xy}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0} \qquad \blacksquare$$

Encerrando esta seção, exibimos na Figura 5.4 um esquema mostrando a atuação dos operadores diferenciais e a grandeza (vetorial ou escalar) por eles produzidas.

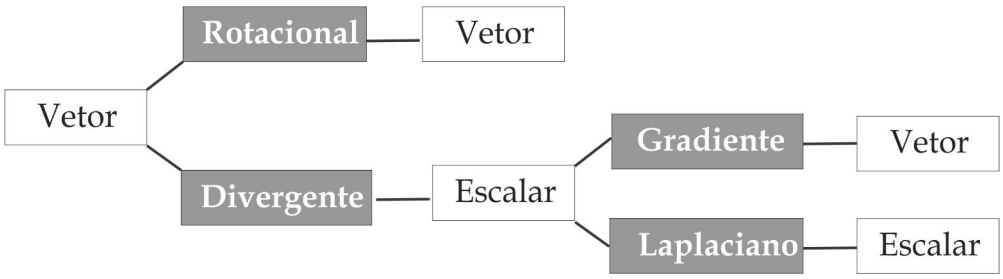


Figura 5.4: Atuação dos operadores diferenciais.

Exercícios & Complementos.

1. Se $\varphi(x,y,z) = x^2yz^3$ e $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}$. Determine (a) $\nabla\varphi$, (b) $\operatorname{div}\mathbf{F}$, (c) $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, (d) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})$, (e) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{F})$ e (f) $\operatorname{rot}(\nabla\varphi)$.

2. Verifique se o campo $\mathbf{F}$ é conservativo. Nos casos afirmativos determine um potencial do qual ele deriva.

   (a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

   (b) $\mathbf{F} = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j}$.

   (c) $\mathbf{F} = (2xe^y + y)\,\mathbf{i} + \left(x^2e^y + x - 2y\right)\mathbf{j}$.

   (d) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

   (e) $\mathbf{F} = \left(y^2 - 3x\right)\mathbf{i} + (2xy + \cos y)\,\mathbf{j}$.

   (f) $\mathbf{F} = (1/x)\,\mathbf{i} + x\exp(xy)\mathbf{j}$.

   (g) $\mathbf{F} = \operatorname{sen}(xy)\mathbf{i} + \cos(xy)\mathbf{j}$.

   (h) $\mathbf{F} = \exp(xy)\mathbf{i} + \exp(x+y)\mathbf{j}$.

   (i) $\mathbf{F} = 3x^4y^2\mathbf{i} + x^3y\mathbf{j}$.

   (j) $\mathbf{F} = 5x^4y\mathbf{i} + x\cos(xy)\mathbf{j}$.

   (k) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$.

   (l) $\mathbf{F} = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$.

   (m) $\mathbf{F} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$

   (n) $\mathbf{F} = y\operatorname{sen} z\mathbf{i} + x\operatorname{sen} z\mathbf{j} + xy\cos z\mathbf{k}$.

3. Sejam α e β constantes reais, u e v campos escalares e $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ campos vetoriais diferenciáveis. Usando regras de derivação, deduza as seguintes relações do cálculo diferencial:

   (a) $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha\nabla u + \beta\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$

   (c) $\nabla(u/v) = \left(1/v^2\right)[v\nabla u - u\nabla v]$ (d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{F})) = 0$

   (e) $\operatorname{div}(v\nabla u) = v\Delta u + \nabla u\cdot\nabla v$ (f) $\operatorname{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\operatorname{rot}(\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}(\mathbf{G})$

4. Se $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$, mostre que não existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ tal que $\operatorname{rot}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$.

5. Seja $\mathbf{F}$ um *campo solenoidal*, isto é, $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, em um domínio simplesmente conexo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e seja $\mathbf{G}_0$ um *campo potencial* de $\mathbf{F}$, isto é, $\operatorname{rot}(\mathbf{G}_0) = \mathbf{F}$. Mostre que qualquer solução $\mathbf{G}$ da equação $\operatorname{rot}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$ é da forma $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \operatorname{grad}\varphi$, sendo φ um campo escalar. Embora não seja óbvio, um tal campo $\mathbf{G}$ pode ser definido pela expressão

$$\mathbf{G}(P) = \int_0^1 [t\mathbf{F}(tx,ty,tz)\times\mathbf{OP}]\,dt.$$

6. Verifique que $\operatorname{div}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ e determine todos os campos de vetores $\mathbf{G}$, tais que $\operatorname{rot}\mathbf{G} = \mathbf{F}$.

   (a) $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$.

   (b) $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} - z\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$.

   (c) $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

   (d) $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 2z\mathbf{j}$.

(e) $\mathbf{F} = (e^x - e^y)\mathbf{k}$.

(f) $\mathbf{F} = 6y^2\mathbf{i} + 6z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}$.

(g) $\mathbf{F} = 3y^2\mathbf{i} - 3x^2\mathbf{j} - (y^2 + 2x)\mathbf{k}$.

(h) $\mathbf{F} = \dfrac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$.

5.2 Caminhos Regulares

A cada t do intervalo $I = [a,b]$ da reta $\mathbb{R}$, associamos um vetor $\mathbf{r}(t)$ do $\mathbb{R}^3$ e essa associação define uma *função vetorial* $\mathbf{r}$, cujo domínio é o intervalo I. Escolhido um sistema de coordenadas no espaço, a função vetorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ é representada por suas coordenadas

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

sendo $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ funções reais definidas no intervalo I, denominadas *componentes* ou *coordenadas* da função vetorial $\mathbf{r}(t)$. Reciprocamente, se x, y e z são funções reais definidas no intervalo $I = [a,b]$, então a expressão

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

define uma função vetorial no intervalo $I = [a,b]$.

Quando tratamos do movimento de uma partícula, o vetor $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ é interpretado como o vetor posição da partícula no instante t e as equações escalares (ou paramétricas)

$$x = x(t), \;\; y = y(t) \;\text{ e }\; z = z(t)$$

representam uma curva γ, descrita por $\mathbf{r}$ quando o parâmetro t varia no intervalo I. Para facilitar a linguagem, faremos referência a $\mathbf{r}(t)$ como a "curva γ de equação paramétrica $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$".

As noções de limite, continuidade, diferenciabilidade, etc. de uma função vetorial são introduzidas por meio das funções componentes $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Por exemplo, $\mathbf{r}$ será uma função vetorial diferenciável, se as coordenadas $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ o forem. O *gráfico* ou o *traço* de γ em $\mathbb{R}^3$ é o conjunto $\{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ das imagens $\gamma(t)$ da função γ.

De modo similar ao conceito de função vetorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ em $\mathbb{R}^3$, define-se função vetorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ em $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

sendo $x,\ y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções escalares.

Uma curva $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in I$, denomina-se *curva regular* ou *suave* ou *lisa* se as funções componentes $x, y, z : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possuem derivadas contínuas em I e o vetor velocidade

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

é não nulo, em cada instante t. O vetor velocidade $\mathbf{r}'(t)$ está localizado na origem e quando transladado para o ponto $\mathbf{r}(t)$, ele torna-se tangente à curva γ. Se no instante t_0, o vetor tangente $\mathbf{v} = \mathbf{r}'(t_0)$ é não nulo, a reta tangente à curva γ no ponto $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$ é descrita pela equação vetorial

$$\mathbf{OP} = \mathbf{r}(t_0) + s\mathbf{v}, \;\; s \in \mathbb{R},$$

sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico da reta. Na forma paramétrica, a reta tangente é descrita pelas equações

$$\left| \begin{array}{l} x = x_0 + sx'(t_0) \\ y = y_0 + sy'(t_0) \\ z = z_0 + sz'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

O plano normal à curva γ no ponto $P = \mathbf{r}(t_0)$ é governado pela equação

$$(\mathbf{PQ}) \bullet \mathbf{r}'(t_0) = 0,$$

sendo Q um ponto genérico do plano. A equação cartesiana do plano normal é, portanto,

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Exemplo 5.13 *Seja γ a curva descrita por:*

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \ \ e \ \ z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Encontrar as equações paramétricas da reta tangente à curva γ, no ponto correspondente a $t = \pi$.

Solução Temos que $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ e o ponto correspondente a $t = \pi$ é $P(-1, 0, \pi)$. O vetor tangente no ponto P é

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(\pi) = (-\operatorname{sen} \pi)\,\mathbf{i} + (\cos \pi)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

e, consequentemente, a reta tangente é descrita pelas equações paramétricas

$$\left| \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -s \\ z = \pi + s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

O plano normal à curva γ, no ponto P, é governado pela equação

$$(\mathbf{PQ}) \bullet \mathbf{v} = 0, \quad \text{isto é,} \quad -y + z = \pi. \qquad \blacksquare$$

Uma curva $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, denomina-se *regular por partes* ou *parcialmente regular*, se suas componentes $x, y, z : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e γ é regular, exceto, possivelmente, em uma quantidade finita de pontos $t_1, \ldots, t_n$ do intervalo $[a, b]$. Graficamente uma curva parcialmente regular tem o aspecto ilustrado na Figura 5.5.

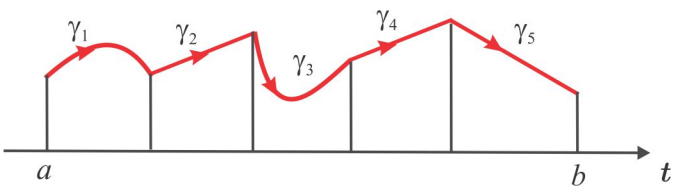


Figura 5.5: Curva parcialmente regular.

Exemplo 5.14 *A curva γ descrita pelas equações paramétricas*

$$x = t^2 \ \ e \ \ y = t^3, \ \ -1 \leq t \leq 2,$$

deixa de ser regular na origem $(0,0)$, *porque* $\mathbf{r}'(0) = \mathbf{0}$. *Ela é parcialmente regular. No ponto* $P(1,1)$, *que corresponde a* $t = 1$, *o vetor tangente é*

$$\mathbf{r}'(1) = x'(1)\,\mathbf{i} + y'(1)\,\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}. \qquad \blacksquare$$

Com o objetivo de tornar a leitura mais dinâmica, entre as várias referências citadas, usaremos a terminologia *arco*, *caminho, trajetória* ou *contorno*, com o mesmo significado de *curva*.

5.2.1 Curvas Orientadas

Uma parametrização de uma curva $\gamma = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, ordena os pontos da curva γ, de acordo com os valores crescentes de t, do *ponto inicial* (origem) $A = \gamma(a)$ ao *ponto final* (extremidade) $B = \gamma(b)$. Neste caso, a curva γ está orientada de A para B. De forma precisa, orientar uma curva γ é fixar um campos de vetores tangentes unitários $\mathbf{u}(t)$ à curva γ.

Consideremos duas curvas γ_1 e γ_2, com representações paramétricas

$$\mathbf{r}_1(t) = x_1(t)\mathbf{i} + y_1(t)\mathbf{j} + z_1(t)\mathbf{k}, \ \ t \in [a,b] \ \text{ e } \ \mathbf{r}_2(s) = x_2(s)\mathbf{i} + y_2(s)\mathbf{j} + z_2(s)\mathbf{k}, \ \ s \in [c,d],$$

respectivamente. Diremos que γ_1 é *equivalente* a γ_2 (γ_1 e γ_2 possuem o mesmo traço) quando existir uma bijeção $\varphi : [a,b] \to [c,d]$, de classe C^1, crescente (com derivada positiva) ou decrescente (com derivada negativa) no intervalo $[a,b]$ e tal que

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)), \ \ t \in [a,b].$$

Uma tal bijeção recebe o nome de *mudança de parâmetros* e, se considerarmos $s = \varphi(t)$, resulta da Regra da Cadeia que

$$\gamma_1'(t) = \gamma_2'(s)\,\varphi'(t).$$

Portanto, γ_1 e γ_2 possuem as mesmas orientações se $\varphi'(t) > 0$ (φ for crescente) e, caso contrário, γ_1 e γ_2 possuem orientações opostas. Quando invertemos a orientação de uma curva $\gamma(t) = \mathbf{r}(t)$, obtemos uma nova curva, representada por $-\gamma$, para a qual serão consideradas as seguintes parametrizações:

$$-\gamma : \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(a+b-t), \ \ t \in [a,b], \ \text{ ou } \ -\gamma : \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}(-t), \ \ t \in [-b,-a],$$

determinadas pelas mudanças de parâmetros $\varphi(t) = a+b-t$ e $\varphi(t) = -t$, respectivamente. Em ambos os casos, temos $\varphi'(t) = -1 < 0$.

Exemplo 5.15 *Verifiquemos que as curvas γ_1 e γ_2, com representações paramétricas*

$$\gamma_1 : \mathbf{r}_1(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}, \ \ t \in (-\pi,\pi), \ \ e \ \ \gamma_2 : \mathbf{r}_2(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathbf{j}, \ \ t \in \mathbb{R},$$

são equivalentes e têm mesma orientação.

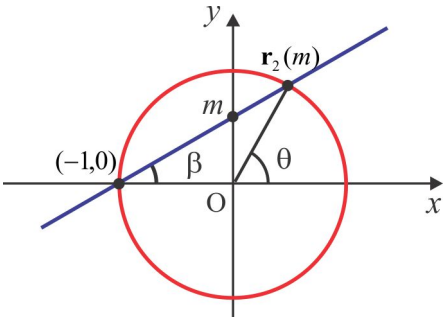


Figura 5.6: Duas parametrizações da circunferência.

Solução Elas são equivalentes, porque representam a circunferência γ de centro na origem e raio 1, excluindo o ponto $(-1,0)$. Para verificar que γ_1 e γ_2 têm a mesma orientação, consideremos a reta que passa nos pontos distintos $(-1,0)$ e (x_1,y_1) de γ, cuja equação cartesiana é

$$y = m(x+1),$$

sendo $m = \tan\beta$ (confira a Figura 5.6).

Para determinarmos o ponto (x_1,y_1) substituimos na equação $x^2+y^2=1$ a variável y por $m(x+1)$ e encontramos

$$(m^2+1)x^2 + 2m^2x + (m^2-1) = 0,$$

cujas raízes são $x_0 = -1$ e $x_1 = \left(1-m^2\right)\left(1+m^2\right)^{-1}$. Portanto,

$$y_1 = \frac{2m}{1+m^2} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2(m) = \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Considerando que $\beta = \theta/2$ e usando identidades trigonométricas, obtemos

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \frac{2m}{1+m^2},$$

e, sendo assim, a mudança de parâmetro $\varphi : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = \tan(t/2)$, tem derivada $\varphi'(t) = \sec^2(t/2)$ positiva e $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\varphi(t))$, $t \in (-\pi,\pi)$. Logo, as curvas γ_1 e γ_2 possuem as mesmas orientações. Finalmente, note que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \mathbf{r}_2(t) = (-1,0). \qquad \blacksquare$$

Diremos que $\gamma(t)$, $a \le t \le b$, é uma *curva fechada*, quando $\gamma(a) = \gamma(b)$, isto é, o ponto inicial e o ponto final coincidem; ela denomina-se *curva simples* se $\gamma(t) \neq \gamma(s)$, sejam quais forem t e s do intervalo (a,b), com $s \neq t$. Quando γ não for uma curva simples, existem s e t no intervalo (a,b), com $s \neq t$, e $\gamma(t) = \gamma(s)$. Neste caso, a curva γ denomina-se *laço* e o ponto $P = \gamma(t) = \gamma(s)$ é uma autointerseção do laço γ. Em alguns problemas práticos, consideramos curvas $\gamma(t)$, com o parâmetro t variando em intervalos do tipo:

$$(a,b), \quad (a,b], \quad (-\infty,b], \quad \text{etc.}$$

Neste caso, a curva deixa de ter origem ou extremidade ou ambos. Na Figura 5.7 ilustramos, de forma genérica, algumas curvas e suas orientações: em (a) temos um laço; em (b) temos uma curva simples e parcialmente regular; em (c) a curva γ é simples, fechada e regular.

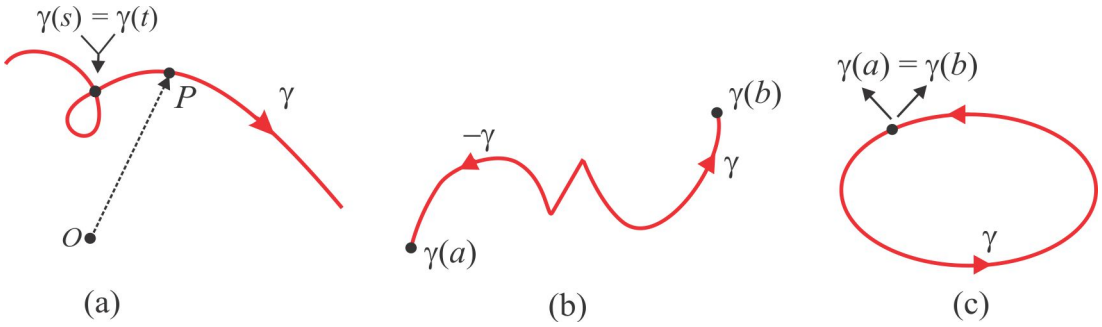


Figura 5.7: Curvas orientadas.

Exemplo 5.16 *Identificar a curva γ dada pelas equações paramétricas*

$$x = 2t \ \text{ e } \ y = t^2 - 1, \ \ -1 \leq t \leq 2,$$

esboçando o gráfico e indicando sua orientação.

Solução Eliminando o parâmetro t (nem sempre é possível este método), obtemos

$$y = \tfrac{1}{4}x^2 - 1$$

e vemos que a curva γ é um arco de parábola simétrica em relação ao eixo y, com vértice no ponto $(0, -1)$. Quando t cresce de -1 até 2, os pontos $P(x, y)$ de γ estão ordenados da esquerda para a direita, sendo $A(-2, 0)$ a origem e $B(4, 3)$ a extremidade de γ. Na Figura 5.8 ilustramos a curva γ e sua orientação. ■

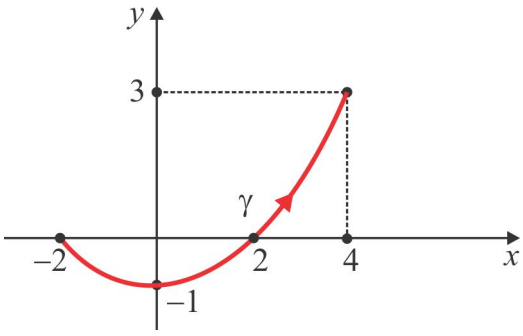


Figura 5.8: A parábola $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

Exemplo 5.17 (parametrizando o círculo) *Um ponto se move no plano xy, de tal forma que a sua posição $P(x, y)$ no instante t é dada por*

$$x = r\cos t \ \text{ e } \ y = r\,\text{sen}\,t, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi,$$

sendo $r > 0$. Descrever o movimento do ponto.

Solução Escrevendo as equações paramétricas sob a forma

$$\frac{x}{r} = \cos t \ \text{ e } \ \frac{y}{r} = \text{sen}\,t,$$

obtemos

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2,$$

de onde deduzimos que o ponto $P(x, y)$ move-se sobre uma circunferência γ, com centro na origem e raio r. Quando o centro da circunferência γ é o ponto $C(a, b)$, como ilustra a Figura 5.9, podemos parametrizá-la pelas equações

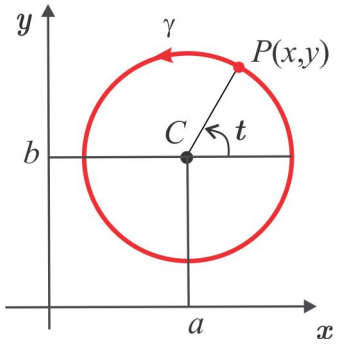


Figura 5.9: Parametrizando o círculo.

$$\gamma : \left| \begin{array}{l} x = a + r\cos t \\ y = b + r\operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{array} \right.$$

onde o parâmetro t representa o ângulo orientado entre o eixo x e o raio CP. ■

Exemplo 5.18 (parametrizando um segmento de reta) *Seja γ o segmento de reta orientado do ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ ao ponto $B(x_B, y_B, z_B)$. Dado um ponto $P(x, y, z)$ em γ, existe um escalar t, no intervalo $[0, 1]$, tal que $P = A + t(B - A)$ e daí resulta a parametrizanão natural do segmento γ*

$$\left| \begin{array}{l} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A), \qquad 0 \leq t \leq 1. \end{array} \right.$$

Por exemplo, o segmento com origem no ponto $A(1, 1, 0)$ e extremidade no ponto $B(0, 0, 1)$ exibido na Figura 5.10, é parametrizado pelas equações $x = 1 - t$, $y = 1 - t$ e $z = t$, $\quad 0 \leq t \leq 1$. ■

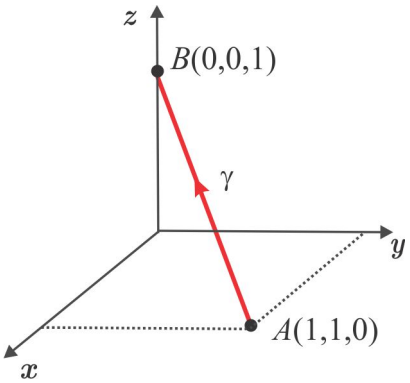


Figura 5.10: Parametrizando um segmento de reta.

Exemplo 5.19 (parametrizando a elipse) *Consideremos a elipse* $\gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, *representada na Figura 5.11. Se* $P(x, y)$ *é um ponto sobre a elipse* γ *e o parâmetro* t *representa o ângulo orientado entre o eixo* x *e o raio* OA, *obtemos a seguinte parametrização para elipse:*

$$x = OC = a\cos t \quad e \quad y = BD = b\,\mathrm{sen}\,t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

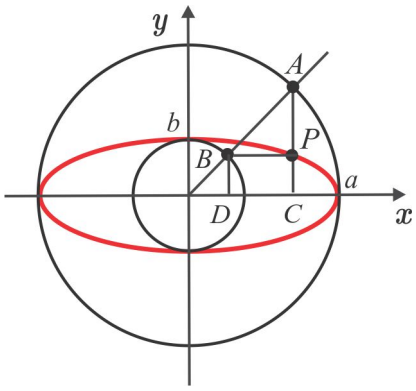


Figura 5.11: Parametrizando a elipse.

Exemplo 5.20 (parametrizando a hipocicloide) *A curva* γ *do plano* xy, *descrita pela equação cartesiana* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, *é conhecida pelo nome de hipocicloide. Seu gráfico está ilustrado na Figura 5.12, onde vemos tratar-se de uma curva simples, fechada e parcialmente regular. Uma parametrização para* γ *é motivada pela identidade trigonamétrica* $\cos^2 t + \mathrm{sen}^2\, t = 1$, *que aparece naturalmente ao considerarmos* $x = a\cos^3 t$ *e* $y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$. ■

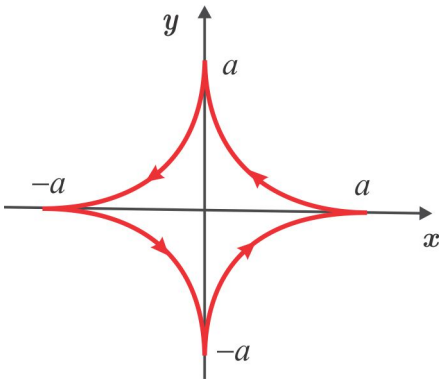


Figura 5.12: Parametrizando a hipocicloide.

Exemplo 5.21 (parametrizando a hélice) *A curva* γ *do* $\mathbb{R}^3$ *de equações paramétricas*

$$x = a\cos t,\ y = a\,\mathrm{sen}\,t,\ z = bt, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

é tal que $x^2 + y^2 = a^2$, *e isso nos diz que a curva* γ *se enrosca no cilindro circular reto* $x^2 + y^2 = a^2$, *à medida que* t *varia de 0 até* 2π. *O formato de* γ *é de uma hélice (mola), começando na origem e com extremidade no ponto* $A(a, 0, 2b\pi)$. ■

Exemplo 5.22 (usando a variável x como parâmetro) *Quando a curva γ é o gráfico de uma função contínua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, a variável x pode ser usada como parâmetro e, neste caso, teremos a seguinte parametrização para a curva γ :*

$$x = x \ \text{ e } \ y = f(x), \ \ a \leq x \leq b.$$

Outra parametrização de γ é dada pelas equações

$$x = n + mt \ \text{ e } \ y = f(n + mt), \ \ (a - n)/m \leq t \leq (b - n)/m \ \text{ e } \ m, n \in \mathbb{R}, \ \ m \neq 0.$$

Neste caso, a mudança de parâmetro é a função $\varphi(t) = n + mt$. ■

Exemplo 5.23 (usando o ângulo polar como parâmetro) *Consideremos a circunferência*

$$\gamma : x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

com centro em $C(1, 0)$ e raio $R = 1$. As coordenadas polares do ponto $P(x, y)$ de γ são $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, onde ressaltamos que a quantidade r varia com θ, de acordo com a equação $r = 2\cos\theta$, que descreve γ. Por substituição do r, obtemos a seguinte parametrização de γ :

$$\left| \begin{array}{l} x = 2\cos^2\theta \\ y = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{array} \right. \qquad ■$$

Finalizaremos esta seção apresentando uma maneira prática para ilustrar graficamente um campo vetorial, a partir dos vetores tangentes de suas curvas integrais. Consideremos um campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, de classe C^1, em uma região Ω do $\mathbb{R}^3$. Por *curva integral do campo* $\mathbf{F}$ entendemos uma curva γ, contida em Ω, cujo vetor tangente em cada ponto P coincide com $\mathbf{F}(P)$. Se

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \ \ t \in I,$$

é uma representação paramétrica para γ, a cada ponto P corresponde um escalar λ, tal que

$$d\mathbf{r} = (dx)\,\mathbf{i} + (dy)\,\mathbf{j} + (dz)\,\mathbf{k} = \lambda\mathbf{F}(P),$$

de onde resulta o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N}, \tag{5.11}$$

que define as curvas integrais. O sistema (5.11) é equivalente a

$$\frac{dx}{dt} = L, \ \ \frac{dy}{dt} = M \ \text{ e } \ \frac{dy}{dt} = N \tag{5.12}$$

e, ao resolver o sistema (5.11) ou (5.12), encontramos as curvas integrais do campo $\mathbf{F}$.

Exemplo 5.24 *Determinar as curvas integrais do campo $\mathbf{F}$ do Exemplo 5.2.*

Solução O campo $\mathbf{F}$ é definido em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ por

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e as curvas integrais são as soluções do sistema

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad z = 0. \tag{5.13}$$

De (5.13), resulta que $xdx + ydy = 0$ e por integração, encontramos

$$x^2 + y^2 = \lambda,$$

sendo $\lambda \geq 0$ uma constante real. Portanto, as curvas integrais de $\mathbf{F}$ são circunferências no plano xy de centro na origem e raio $\sqrt{\lambda}$. ■

Exemplo 5.25 *Determinar a curva integral do campo vetorial* $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$, λ *constante, que passa no ponto* $P(1,0,0)$.

Solução O sistema (5.11) é, neste caso,

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{\lambda},$$

de onde resulta que $x^2 + y^2 = \mu^2$, ou, na forma paramétrica,

$$x = \mu\cos t \ \text{ e } \ y = \mu \operatorname{sen} t, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\frac{dy}{x} = \frac{dz}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{\mu\cos t dt}{\mu\cos t} = \frac{dz}{\lambda} \Leftrightarrow dz = \lambda dt.$$

Assim, $z = \lambda t + \kappa$, κ constante real e, portanto, as curvas integrais de $\mathbf{F}$ são descritas por

$$\mathbf{r}(t) = (\mu\cos t)\,\mathbf{i} + (\mu \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + (\lambda t + \kappa)\mathbf{k}, \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

Se considerarmos em (5.14) $t = 0$, observando que $\mathbf{r}(0) = (1,0,0)$, obteremos $\mu = 1$ e $\kappa = 0$ e, portanto, a curva integral é

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + (\lambda t)\,\mathbf{k}, \ \ t \in \mathbb{R},$$

que representa uma hélice circular. ■

Exercícios & Complementos

1. Esboce o gráfico de cada curva dada abaixo, indicando a orientação positiva.
   (a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\,\mathbf{j}, \ \ 0 \leq t \leq 1$
   (b) $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \ \ -1 \leq t \leq 0$
   (c) $\mathbf{r}(t) = (1/t)\,\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \ \ 1 \leq t < \infty$
   (d) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{1-t^2}\mathbf{j}, \ \ 0 \leq t \leq 1$
   (e) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (\log t)\,\mathbf{j}, \ \ 1 \leq t \leq e$
   (f) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \ \ 0 \leq t \leq 2\pi.$

2. Mostre que a curva γ definida por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2 \operatorname{sen}(1/t)\,\mathbf{j}$, se $0 < t \leq 1$, e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ não é regular.

3. Considere a curva γ_1 definida por $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $1 \leq t \leq 2$, e seja γ_2 a curva definida por $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(3-t)$, $1 \leq t \leq 2$. Esboce os gráficos de γ_1 e γ_2 e determine a relação entre essas duas curvas.

4. Determine a reta tangente e o plano normal a cada curva no ponto indicado.

   (a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, no ponto $P(1, 2, 1)$.

   (b) $\mathbf{r}(t) = \cos(4t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(4t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, no ponto em que $t = \pi/8$.

   (c) $\mathbf{r}(t) = \exp(3t)\mathbf{i} + \exp(-3t)\mathbf{j} + \sqrt{18}t\mathbf{k}$, no ponto em que $t = 1$.

   (d) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$, no ponto $P(1, 1, 1)$.

   (e) $\mathbf{r}(t) = (t - \cos t)\mathbf{i} + (3 + 2\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (1 + 3\cos t)\mathbf{k}$, no ponto em que $t = \pi/2$.

5. Considere a curva γ definida por

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Mostre que o ângulo entre os vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ é constante.

6. Em cada caso, determine as curvas integrais do campo $\mathbf{F}$.

   (a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

   (b) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

   (c) $\mathbf{F} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, com a, b e c constantes reais.

   (d) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, que passa no ponto $P(1/2, -1/2, 1)$.

   (e) $\mathbf{F} = (z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$.

5.3 Calculando Integral de Linha

5.3.1 Integrando um Campo Vetorial

O conceito de integral de linha, como limite de somas, segue o mesmo roteiro da integral dupla e será apresentado por etapas. Seja $L : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo em uma região Ω, contendo uma curva orientada γ, simples e regular, de equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t) \ \text{ e } \ z = z(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Inicialmente vamos definir a integral de linha do campo L ao longo da curva γ, na direção x.

■ **Etapa 1: Particionando o intervalo $[a, b]$**

Particionamos o intervalo $[a, b]$, escolhendo n segmentos de comprimentos iguais a Δt

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b, \ \text{ sendo } \ \Delta t = \frac{b-a}{n}.$$

Temos que $t_i = t_{i-1} + \Delta t$, $i = 1, \ldots, n$, e quando n torna-se arbitrariamente grande ($n \to \infty$), então $\Delta t \to 0$. Esta partição do intervalo $[a, b]$ determina, na curva γ, os pontos

$$P_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

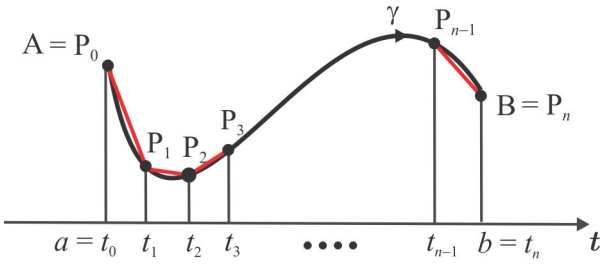


Figura 5.13: Partição da curva γ.

e a curva γ é aproximada pela poligonal constituida pelos n segmentos retilíneos $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$, como sugere a Figura 5.13.

■ **Etapa 2: Construindo as Somas de Riemann**

Em cada segmento $P_{i-1}P_i$ da poligonal que aproxima γ, escolhemos um ponto $Q_i = \gamma(t_i^*)$ e formamos a soma de Riemann de L

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} L(Q_i)\Delta x,$$

sendo $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$.

■ **Etapa 3: Definindo a Integral de Linha**

A *integral de linha* de L sobre γ, na direção x, é definida por

$$\int_\gamma L(x,y,z)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L(Q_i)\,\Delta x. \tag{5.15}$$

Como consequência do Teorema do Valor Médio, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe θ_i entre t_{i-1} e t_i, tal que

$$\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\theta_i)\Delta t$$

e de (5.15) resulta que

$$\int_\gamma L(x,y,z)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} L\left(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)\right) x'(\theta_i)\Delta t = \int_a^b L(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt.$$

De modo similar, encontramos as seguintes regras para o cálculo das integrais de linha sobre γ, nas direções y e z:

$$\int_\gamma M(x,y,z)dy = \int_a^b M(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt \qquad \text{(direção } y\text{)}$$

$$\int_\gamma N(x,y,z)dz = \int_a^b N(x(t),y(t),z(t))z'(t)dtz \qquad \text{(direção } z\text{)}$$

No caso em que γ é uma curva simples e regular do plano xy, parametrizada pelas equações $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, temos

$$\int_\gamma L(x,y)dx = \int_a^b L(x(t),y(t))x'(t)dt \quad \text{e} \quad \int_\gamma M(x,y)dy = \int_a^b M(x(t),y(t))y'(t)dt.$$

Exemplo 5.26 *Calcular as integrais de linha*

$$\int_\gamma xy^2dx \quad e \quad \int_\gamma xy^2dy,$$

sendo γ o arco da parábola $y = x^2$, da origem ao ponto $A(2,4)$.

Solução Inicialmente, vamos parametrizar a curva γ pelas equações

$$x = t \text{ e } y = t^2, \ \ 0 \leq t \leq 2,$$

e ressaltar que a variável x poderia ter sido usada como parâmetro, no lugar do t. Com as substituições $x = t$, $y = t^2$, $dx = dt$ e $dy = 2tdt$, obtemos

$$\int_\gamma xy^2 dx = \int_0^2 t^5 dt = \frac{32}{3} \quad \text{e} \quad \int_\gamma xy^2 dy = \int_0^2 2t^6 dt = \frac{256}{7}. \qquad \blacksquare$$

Em uma situação mais geral, as integrais de linha aparecem sob as formas equivalentes

$$\int_\gamma Ldx + Mdy + Ndz \quad \text{ou} \quad \int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$

sendo a forma diferencial $Ldx + Mdy + Ndz$ contínua em uma região compacta Ω do $\mathbb{R}^3$, contendo a curva γ no seu interior. Neste caso, a integral de linha é a soma

$$\int_\gamma Ldx + \int_\gamma Mdy + \int_\gamma Ndz,$$

e o cálculo se reduz a

$$\int_\gamma Ldx + Mdy + Ndz = \int_a^b \left[L\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)x'(t) + M\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)y'(t) + N\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right)z'(t)\right] dt,$$

onde $\mathbf{r}\left(t\right) = (x(t), y(t), z(t))$ representa uma parametrização da curva γ. Quando desejamos enfatizar as extremidades $A = \mathbf{r}\left(a\right)$ e $B = \mathbf{r}\left(b\right)$ da curva γ, escrevemos

$$\int_A^B Ldx + Mdy + Ndz.$$

Proposição 5.27 *Seja $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial contínuo em uma região compacta $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, e seja γ uma curva orientada e parcialmente regular, contida no interior de Ω.*

1. *Se γ^* é uma reparametrização de γ, mantendo a orientação, então*

$$\int_{\gamma^*} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

2. *Se $-\gamma$ representa a curva γ, com a orientação invertida, então*

$$\int_{-\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Demonstração Se $\mathbf{r}\left(t\right)$ e $\mathbf{r}_1\left(\tau\right)$ são representações paramétricas de γ e γ^*, respectivamente, existe uma mudança de parâmetro $g : [c, d] \to [a, b]$, com derivada $g'\left(\tau\right)$ positiva, tal que $\mathbf{r}_1\left(\tau\right) = \mathbf{r}\left(g\left(\tau\right)\right)$. Temos que $g\left(\tau\right)$ é crescente, $g\left(c\right) = a$, $g\left(d\right) = b$ e, efetuando a substituição $t = g\left(\tau\right)$, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\left(t\right)\right) \bullet \mathbf{r}'\left(t\right) dt = \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}(g\left(\tau\right))) \bullet \mathbf{r}'(g\left(\tau\right))g'\left(\tau\right) d\tau \\
&= \int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(\tau)) \bullet \mathbf{r}_1'(\tau) d\tau = \int_{\gamma^*} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Isso prova (1). Para demonstrar (2), consideramos a mudança de parâmetros $t = a+b-\tau$, que inverte a orientação, e obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}\left(\mathbf{r}_1(\tau)\right) \bullet \mathbf{r}_1'(\tau)\, d\tau = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(a+b-\tau)) \bullet \left[-\mathbf{r}'(a+b-\tau)\right] d\tau \\ &= -\int_b^a \mathbf{F}(\mathbf{r}(u)) \bullet \mathbf{r}'(u)\,(-du) = -\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},\end{aligned}$$

onde $\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}(a+b-\tau), \quad a \leq \tau \leq b.$ ■

Exemplo 5.28 *Calcular a integral de linha*

$$\int_\gamma (x+y)dx + (y-x)dy,$$

sendo γ o segmento de reta de origem $A(1,1)$ e extremidade $B(4,2)$.

Solução No Exemplo 5.18, aprendemos como parametrizar um segmento de reta e, neste caso, temos

$$x = 1+3t \ \text{ e } \ y = 1+t, \ \ 0 \leq t \leq 1,$$

e com as substituições $x = 1+3t$, $y = 1+t$, $dx = 3dt$ e $dy = dt$, obtemos

$$\int_\gamma (x+y)dx + (y-x)dy = \int_0^1 [(2+4t)3 + (-2t)]dt = \int_0^1 (6+10t)dt = 11. \qquad ■$$

Exemplo 5.29 *Calcular a integral de linha da forma diferencial $x^2ydx + zdy + xydz$, ao longo do arco da parábola $y = x^2$, $z = 1$, do ponto $A(-1,1,1)$ ao ponto $B(1,1,1)$.*

Solução Usando a variável x como parâmetro e observando que $dz = 0$, já que $z = 1$ ao longo de γ, encontramos

$$\int_A^B x^2ydx + zdy + xydz = \int_{-1}^1 \left(x^4 + 2x\right) dx = 2/5. \qquad ■$$

Exemplo 5.30 *Calcular a integral do campo $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$, ao longo do triângulo de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(1,1)$.*

Solução Adotando a orientação positiva (anti-horária), vemos que o caminho γ de integração é parcialmente regular e composto dos segmentos γ_1, γ_2 e γ_3, como na Figura 5.14.

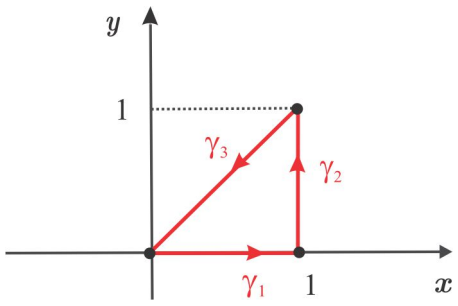


Figura 5.14: Curva γ do Exemplo 5.30

Decorre da propriedade aditiva da integral da linha que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \tag{5.16}$$

e cada segmento, que figura nas integrais do lado direito de (5.16), é parametrizado imitando o que foi feito no Exemplo 5.18. Temos:

$$\begin{array}{lll} \text{segmento } \gamma_1: & x = t,\ y = 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ \text{segmento } \gamma_2: & x = 1,\ y = t, & 0 \leq t \leq 1, \\ \text{segmento } \gamma_3: & x = t,\ y = t, & 0 \leq t \leq 1, \end{array}$$

e observando as orientações, encontramos:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} xydx - xy^2dy = \int_0^1 0dt = 0. \qquad (y = 0,\ dy = 0)$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} xydx - xy^2dy = \int_0^1 \left(-t^2\right) dt = -\tfrac{1}{3}. \qquad (x = 1,\ dx = 0)$$

$$\int_{\gamma_3} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_3} xydx - xy^2dy = \int_0^1 \left(t^2 - t^3\right) dt = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}. \qquad (x = y = t,\ dx = dy = dt)$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} = -\tfrac{5}{12}. \qquad \blacksquare$$

5.3.2 Integrando um Campo Escalar

Se representarmos por ds o comprimento do arco $\widehat{P_{i-1}P_i}$ da curva γ, a integral de linha de f sobre γ, em relação ao comprimento de arco s, é definida por

$$\int_{\gamma} f(x, y, z)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(Q_i\right) ds.$$

Como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt,$$

temos que

$$\int_{\gamma} f(x, y, z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt$$

e se $f(x, y, z) \equiv 1$, a integral de linha de f sobre γ coincide com o comprimento da curva γ, isto é,

$$L\left(\gamma\right) = \int_a^b \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

A função *comprimento de arco* $s\left(t\right)$ sobre γ é dada por

$$s(t) = \int_a^t \left|\mathbf{r}'(u)\right| du$$

e mede o comprimento do arco γ, de $A = \mathbf{r}\left(a\right)$ até $P = \mathbf{r}\left(t\right)$. Assim, $s(a) = 0$ e $s(b) = L\left(\gamma\right)$.

Quando γ for uma curva fechada, a integral de linha sobre γ será indicada por

$$\oint_\gamma f(x,y,z)ds.$$

Uma curva γ, orientada e regular, descrita pelas equações paramétricas

$$x = x(t), \;\; y = y(t) \;\text{ e }\; z = z(t), \;\; a \le t \le b,$$

pode ser parametrizada usando como parâmetro o comprimento de arco s. Para isso, consideramos $t = g(s)$, $0 \le s \le L$, a inversa da função comprimento de arco $s(t)$, $a \le t \le b$, e obtemos

$$x = x(g(s)), \;\; y = y(g(s)) \;\text{ e }\; z = z(g(s)), \;\; 0 \le s \le L,$$

que é a parametrização de γ com respeito ao comprimento de arco s. Como $|\mathbf{r}'(t)| > 0$, decorre do Teorema da Função Inversa que

$$g'(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} > 0$$

e se fizermos $\mathbf{q}(s) = \mathbf{r}(g(s))$, teremos

$$\left|\mathbf{q}'(s)\right| = \left|g'(s)\right| \left|\mathbf{r}'(t)\right| = 1,$$

isto é, $\mathbf{q}'(s)$ é um vetor unitário colinear com o vetor velocidade $\mathbf{r}'(t)$. Diremos que a curva γ está *parametrizada pelo comprimento de arco* s, quando $|\mathbf{q}'(s)| = 1$, para todo $s \in [0, L]$. Finalmente, observamos que

$$\int_\gamma f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = \int_0^L f(\mathbf{q}(s))ds.$$

Exemplo 5.31 *Seja γ a semicircunferência $x^2 + y^2 = 9$, $y \ge 0$. Parametrizar γ pelo comprimento do arco e calcular a integral de linha*

$$\int_\gamma (x + 2y)ds.$$

Solução A parametrização natural para γ é

$$x = 3\cos t \;\text{ e }\; y = 3\,\mathrm{sen}\, t, \;\; 0 \le t \le \pi,$$

e o comprimento do arco é

$$s(t) = \int_0^t \left|\mathbf{r}'(\tau)\right| d\tau = 3t.$$

Invertendo a função $s = 3t$, encontramos $t = g(s) = s/3$, $s \in [0, 3\pi]$ e a parametrização de γ pelo comprimento do arco é

$$x = x(s) = 3\cos(s/3) \;\text{ e }\; y = y(s) = 3\,\mathrm{sen}\,(s/3), \;\; 0 \le s \le 3\pi.$$

Com as substituições $x = x(s)$ e $y = y(s)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\gamma (x + 2y)ds &= \int_0^{3\pi} [3\cos(s/3) + 6\,\mathrm{sen}\,(s/3)]\, ds \\ &= [9\,\mathrm{sen}\,(s/3) - 18\cos(s/3)]\big|_0^{3\pi} = 36. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 5.32 *Calcular* $\int_\gamma \left(x^2 + y^2 + z^2\right) ds$, *sendo γ a hélice do Exemplo* 5.21, *com $a = 1$ e $b = 1$.*

Solução O cálculo da integral de linha pode ser feito diretamente, não sendo necessário reparametrizar a curva pelo comprimento do arco. De fato, para a hélice do Exemplo 5.21, temos

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}dt = \sqrt{2}dt$$

e, portanto,

$$\int_\gamma \left(x^2 + y^2 + z\right) ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left[(\cos s)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 + t^2\right] dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(1 + t^2\right) dt = \sqrt{2}\left(2\pi + \tfrac{8}{3}\pi^3\right). \quad \blacksquare$$

Proposição 5.33 *Sejam $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ campos escalares contínuos em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, contendo uma curva orientada, parcialmente regular γ no seu interior, e seja k uma constante real.*

1. $\displaystyle\int_\gamma [kf(x,y,z) + g(x,y,z)]ds = k\int_\gamma f(x,y,z)ds + \int_\gamma g(x,y,z)ds.$
2. *Se $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$, então* $\displaystyle\int_\gamma f(x,y,z)ds = \int_{\gamma_1} f(x,y,z)ds + \cdots + \int_{\gamma_n} f(x,y,z)ds.$
3. *Se $k > 0$ é tal que $|f(x,y,z)| \leq k$ sobre γ, então* $\displaystyle\left|\int_\gamma f(x,y,z)ds\right| \leq kL(\gamma).$ $\blacksquare$

Observação 5.34 *O valor da integral de linha $\displaystyle\int_\gamma f(x,y,z)\,ds$ não é alterado quando a curva γ tiver sua orientação invertida, isto é,*

$$\int_{-\gamma} f(x,y,z)\,ds = \int_\gamma f(x,y,z)\,ds.$$

De fato, considerando a mudança de parâmetros $t = a + b - \tau$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(x,y,z)\,ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = -\int_b^a f(\mathbf{r}(a+b-\tau))\left|\mathbf{r}'(a+b-\tau)\right| d\tau \\ &= \int_a^b f(\mathbf{r}_1(\tau))\left|\mathbf{r}_1'(\tau)\right| d\tau = \int_{-\gamma} f(x,y,z)\,ds,\end{aligned}$$

onde $\mathbf{r}_1(\tau) = \mathbf{r}(a+b-\tau)$, $a \leq \tau \leq b$, é uma paramentrização de $-\gamma$. Recordemos que tal procedimento faz com que a integral $\int_\gamma F \bullet dr$ mude de sinal, conforme vimos na Proposição 5.27.

Exemplo 5.35 *Integrar a função $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$, sobre o caminho $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, sendo*

$$\gamma_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1 \qquad e \qquad \gamma_2 : \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Solução A curva γ_1 é a porção da parábola $y = x^2$, $z = 0$, da origem ao ponto $A(1,1,0)$, enquanto γ_2 é o segmento de reta paralelo ao eixo z, do ponto $A(1,1,0)$ até o ponto $B(1,1,1)$, como ilustrado na Figura 5.15. Sobre o caminho γ_1 temos $ds = \sqrt{1+4t^2}dt$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(x,y,z)ds &= \int_0^1 (t+t)\sqrt{1+4t^2}dt = \tfrac{1}{4}\int_0^1 8t\sqrt{1+4t^2}dt \\ &= \tfrac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{u}du = \tfrac{1}{4}\tfrac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^5 = \tfrac{1}{6}\left(5^{3/2} - 1\right).\end{aligned}$$

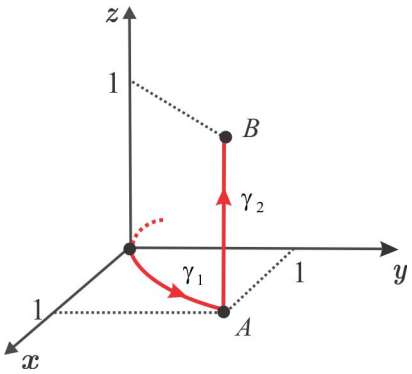


Figura 5.15: Curva γ do Exemplo 5.35

Sobre o caminho γ_2 temos $ds = dt$ e, portanto,

$$\int_{\gamma_2} f(x,y,z)ds = \int_0^1 \left(2 - t^2\right) dt = \left[2t - \tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 5/3.$$

Logo,

$$\int_{\gamma} f(x,y,z)ds = \int_{\gamma_1} f(x,y,z)ds + \int_{\gamma_2} f(x,y,z)ds = \tfrac{1}{6}\left(5^{3/2} + 9\right). \qquad \blacksquare$$

5.3.3 Considerações Físicas

Além da massa de um arame (fio físico delgado), a integral de linha, com respeito ao comprimento de arco, pode ser usada no cálculo de outros entes físicos como momento de inércia, coordenadas do centro de massa, intensidade do campo elétrico, etc. Por exemplo, se m representa a massa de um arame γ de densidade linear $\sigma(x,y,z)$, então $dm = \sigma(x,y,z)ds$ representa a massa elementar da porção ds do arame, de modo que a massa total do arame é

$$m = \int_{\gamma} dm = \int_{\gamma} \sigma(x,y,z)ds.$$

As coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$ do centro de massa do arame são calculadas pelas fórmulas

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\int_{\gamma} xdm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\int_{\gamma} ydm \ \text{ e } \ \overline{z} = \frac{1}{m}\int_{\gamma} zdm,$$

onde os integrandos xdm, ydm e zdm são interpretados como momento da massa dm em relação aos planos yz, xz e xy, respectivamente. O momento de inércia em relação a um eixo L é dado por

$$I_L = \int_{\gamma} \delta^2 dm,$$

onde $\delta = \delta\,(x,y,z)$ representa a distância de um ponto $P\,(x,y,z)$ do arame ao eixo de rotação L. Em relação aos eixos coordenados, temos os momentos de inércia:

$$I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2)dm, \quad I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2)dm \ \text{ e } \ I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2)dm.$$

Exemplo 5.36 *Determinar a massa de um fio de densidade $\sigma(x,y,z) = kz$, com formato da hélice γ dada pelas equações paramétricas*

$$\gamma : x = 3\cos t, \quad y = 3\,\mathrm{sen}\,t \ \text{ e } \ z = 4t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Solução Temos

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = 5dt$$

e, portanto, $dm = \sigma(x, y, z)ds = 20ktdt$. Logo,

$$m = \int_\gamma dm = \int_0^\pi 20ktdt = 10k\pi^2. \qquad \blacksquare$$

Seja γ uma curva regular e orientada, com representação paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

e consideremos um campo vetorial $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, contínuo em uma região compacta Ω, contendo a curva γ no seu interior. O vetor tangente unitário à curva γ no ponto $P = \mathbf{r}(t)$ é

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

e a *componente tangencial* de $\mathbf{F}$ em P, ou seja, a componente de $\mathbf{F}$ na direção do vetor unitário $\mathbf{u}(t)$, na direção crescente de t, é dada por

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{T} = |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))| \cos\theta = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{u}(t),$$

sendo θ o ângulo entre os vetores $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{F}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})ds &= \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{u}(t)] \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] \left|\mathbf{r}'(t)\right| dt \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)dt = \int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \end{aligned}$$

e daí resultam as representações equivalentes para a integral de linha:

$$\int_\gamma Ldx + Mdy + Ndz = \int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})ds.$$

Exemplo 5.37 (efetuando uma mudança de base.) *Um arame, disposto conforme a circunferência γ, interseção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ com o plano $x+y+z = 0$, possui densidade $\sigma(x, y, z) = x^2$. Calcular a massa do arame.*

Solução A massa M do arame é calculada pela integral de linha

$$M = \oint_\gamma x^2 ds$$

e a fim de parametrizar a curva γ, consideramos no plano $x + y + z = 0$ dois vetores unitários e ortogonais $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e, olhando γ como se fosse uma circunferência do plano xy, em que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são substituídos por $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, respectivamente, escrevemos

$$\gamma : \mathbf{r}(t) = (\cos t)\,\mathbf{u} + (\operatorname{sen} t)\,\mathbf{v} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k},$$

onde $z(t) = -x(t) - y(t)$, tendo em vista que a curva γ jaz no plano $x + y + z = 0$. A base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é construida considerando, por exemplo, os pontos $O(0, 0, 0)$, $A(1, -1, 0)$, $B(1, 1, -2)$ do plano e fazendo

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{OA}}{|\mathbf{OA}|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{OB}}{|\mathbf{OB}|} = \tfrac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}).$$

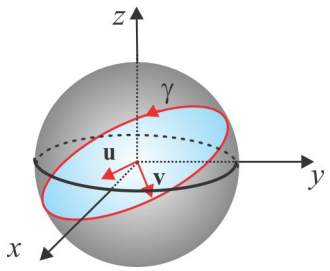


Figura 5.16: Curva γ do Exemplo 5.37

Dessa forma, uma parametrização para a curva γ é

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t, \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \quad \text{e} \quad z(t) = -\frac{2}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

de onde resulta, por um cálculo simples, que

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\; dt.$$

Logo, a massa do arame é

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \left[x(t)^2\right] dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{sen} t\right]^2 dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos t)^2\, dt + \frac{2}{\sqrt{12}}\int_0^{2\pi} (\cos t \operatorname{sen} t)\, dt + \frac{1}{6}\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t)^2\, dt \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exercícios & Complementos.

1. Calcule o comprimento da hélice $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = t, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

2. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:

   (a) $\int_\gamma 2ydx - 3xdy$, sendo γ a curva definida por $x = 1 - t$ e $y = 5 - t$, $0 \le t \le 1$.

   (b) $\int_{(-1,1)}^{(1,1)} xydx - y^2dy$, ao longo da parábola $y = x^2$.

   (c) $\int_{(3,-1)}^{(4,-2)} \frac{y}{x}dx - \frac{x}{y}dy$, ao longo da reta $y = 2 - x$.

   (d) $\oint_\gamma ydx + 2xdy$, com γ a fronteira da região

   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \ \text{ e } \ -y \le x \le y, \ \text{ com } \ y \ge 0\}.$$

   (e) $\int_\gamma xyds$, γ é a curva $x = t$ e $y = t$, $0 \le t \le 1$.

   (f) $\int_\gamma x^2ds$, γ é a curva $x = \cos 2t$ e $y = \operatorname{sen} 2t$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (g) $\oint_\gamma ydx + 2xdy$, γ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

   (h) $\oint_\gamma \left(x^2 - y^2\right) ds$, γ é o círculo $x^2 + y^2 = 4$.

   (i) $\int_{(0,-1)}^{(0,1)} y^2dx + x^2dy$, γ é o semicírculo $x = \sqrt{1 - y^2}$.

(j) $\int_{(1,0)}^{(0,1)} \dfrac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$, γ é a curva $x = \cos^3 t$ e $y = \operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

(k) $\oint_\gamma (ax+by)\,dx + (\alpha x + \beta y)\,dy$, γ é o círculo $x^2+y^2=4$.

(l) $\oint_\gamma xy\,(3ydx + 7xdy)$, γ é a elipse $9x^2+4y^2=36$.

(m) $\oint_\gamma xydx + \left(y^2-x^2\right)dy$, γ é definida pelos arcos $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$.

(n) $\int_\gamma (x+y+z)\,dx + (x-2y+3z)\,dy + (2x+y-z)\,dz$, γ é a curva que liga a origem ao ponto $A=(2,3,4)$, através de três segmentos retilíneos: o primeiro uma porção do eixo x, o segundo paralelo ao eixo y e o terceiro paralelo ao eixo z.

3. Nos seguintes casos, calcule $\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$.

(a) $\mathbf{F} = \left(x^2+y^2\right)\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j}$, γ é o círculo $x^2+y^2=9$.

(b) $\mathbf{F} = \left(3x^2-8y^2\right)\mathbf{i} + (4y-6xy)\,\mathbf{j}$, γ é a fronteira da região

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ \ y \ge 0 \ \text{ e } \ x+y \le 2\}.$$

(c) $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \mathbf{k}$, γ é o segmento de reta ligando a origem ao ponto $A=(1,1,1)$.

(d) $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$, γ é o arco da parábola $x=t$, $y=t^2$ e $z=0$, $1 \le t \le 2$.

(e) $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{k}$, γ é o segmento de $(1,0,1)$ a $(2,0,1)$, seguido do segmento de $(2,0,1)$ a $(2,0,4)$.

4. Calcule

$$\int_\gamma \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2},$$

ao londo da curva γ consistindo do arco da parábola $y = x^2-1$, $-1 \le x \le 2$, seguido do segmento de reta que une os pontos $(2,3)$ e $(-1,0)$.

5. Calcular a integral da forma $xzdx + xdy - yzdz$, ao logo do caminho γ descrito na Figura 5.17, consistindo de um quarto de circunferência e de dois segmentos retilíneos.

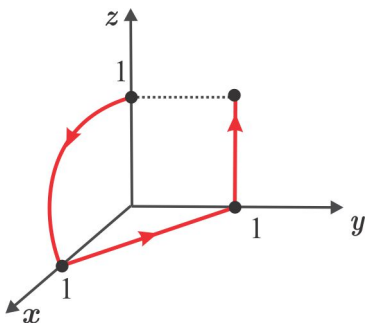


Figura 5.17: Caminho para o Exercício 5

6. Seja γ a porção da curva do primeiro octante, que corresponde à interseção do plano $x=y$ com o cilindro $2y^2+z^2=1$, percorrida do ponto $A\,(0,0,1)$ ao ponto $B\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0\right)$. Calcule

$$\int_\gamma x\left(\frac{1-y^2}{y^2+z^2}\right)^{1/2} dx$$

7. Sejam $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ e θ é o ângulo entre o campo $\mathbf{F}$ e $d\mathbf{r}$. Mostre que

$$\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_\gamma \sqrt{L^2 + M^2 + N^2} \cos\theta ds.$$

8. Se γ_1 e γ_2 são duas curvas equivalentes e $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vetorial contínuo em uma região Ω contendo às curvas γ_1 e γ_2, mostre que

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \pm \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

5.4 Independência do Caminho

Iniciaremos esta seção mostrando, através de um exemplo simples, que o valor da integral de linha pode mudar, ao longo de caminhos distintos ligando dois pontos. Sejam γ_1, γ_2 e γ os seguintes caminhos ligando os pontos $A(1,1)$ e $B(2,4)$

$$\gamma_1 : x = 1 + t, \quad y = 1 + 3t, \quad 0 \le t \le 1 \qquad \text{(segmento de reta)}$$
$$\gamma_2 : x = t, \quad y = t^2, \quad 1 \le t \le 2 \qquad \text{(parábola)}$$

e γ consiste do segmento horizontal, do ponto $A(1,1)$ ao ponto $C(2,1)$, seguido do segmento vertical do ponto $C(2,1)$ ao ponto $B(2,4)$, como mostra a Figura 5.18.

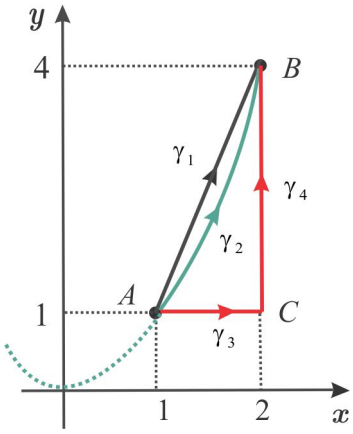


Figura 5.18: Caminhos ligando os pontos A e B.

1. Ao longo de γ_1, temos

$$\int_{\gamma_1} ydx + 2xdy = \int_0^1 [(1+3t) + 2(1+t)3]dt = \int_0^1 (7+9t)dt = \frac{23}{2}.$$

2. Sobre γ_2, fazemos as substituições $x = t$, $y = t^2$, $dx = dt$ e $dy = 2tdt$ e obtemos

$$\int_{\gamma_2} ydx + 2xdy = \int_1^2 [t^2 + (2t)2t]dt = \int_1^2 5t^2 dt = \frac{35}{3}.$$

3. A poligonal γ é composta dos segmentos γ_3 e γ_4 e observando que $y = 1$, sobre γ_3, e $x = 2$, sobre γ_4, obtemos

$$\int_\gamma ydx + 2xdy = \int_{\gamma_3} ydx + 2xdy + \int_{\gamma_4} ydx + 2xdy = \int_1^2 dx + \int_1^4 4dy = 13.$$

Nesta seção estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que a integral de linha $\int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ não dependa do caminho γ que liga os pontos A e B. Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é um campo vetorial contínuo em uma região $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, diremos que a integral de linha $\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ (ou $\int_\gamma Ldx + Mdy + Ndz$) é *independente do caminho* em Ω se, para quaisquer dois pontos A e B em Ω, o valor da integral linha $\int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$ é o mesmo, seja qual for o caminho parcialmente regular γ, contido em Ω, ligando os pontos A e B.

Teorema 5.38 (1º Teorema Fundamental) *Se $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas no domínio (aberto e conexo) Ω do $\mathbb{R}^3$, então*

$$\int_A^B \nabla\varphi \bullet d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

sejam quais forem os pontos A e B em Ω.

Demonstração Seja $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, um caminho regular em Ω ligando os pontos A e B. Da Regra da Cadeia, veja (2.22) no Capítulo 2, sabemos que

$$\frac{d}{dt}[\varphi(\mathbf{r}(t))] = \nabla\varphi(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t),$$

de onde resulta

$$\nabla\varphi \bullet d\mathbf{r} = \frac{d}{dt}[\varphi(\mathbf{r}(t))],$$

e do Teorema Fundamental do Cálculo para função de uma variável, obtemos:

$$\int_A^B \nabla\varphi \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}[\varphi(\mathbf{r}(t))]\,dt = \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)) = \varphi(B) - \varphi(A). \qquad \blacksquare$$

Corolário 5.39 *Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é um campo vetorial contínuo e conservativo, em um domínio (aberto e conexo) Ω do $\mathbb{R}^3$, então a integral de linha*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

é independente do caminho.

Demonstração Sendo $\mathbf{F}$ contínuo e conservativo, existe um campo escalar φ, o potencial de $\mathbf{F}$, de classe C^1, tal que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ e, portanto,

$$\int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla\varphi \bullet d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Isso mostra que a integral de linha do campo $\mathbf{F}$ só depende dos pontos A e B, e não do caminho γ ligando esses pontos. $\blacksquare$

Teorema 5.40 (2º Teorema Fundamental) *Se* $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ *é um campo vetorial contínuo no domínio (aberto e conexo)* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, *e a integral de linha*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

é independente do caminho, então o campo $\mathbf{F}$ *é conservativo.*

Demonstração A partir de um ponto A fixado no domínio Ω, definimos $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(X) = \int_A^X \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_A^X L dx + M dy + N dz,$$

onde a integral de linha é calculada ao longo de uma poligonal ligando o ponto A ao ponto $X(x, y, z)$. A escolha do caminho é arbitrária, tendo em vista que a integral de linha não depende do caminho. Consideremos h suficientemente pequeno, de modo que $X + H = (x + h, y, z)$ esteja em Ω, e seja γ o segmento de reta $\mathbf{r}(t) = (x + t)\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\ 0 \le t \le h$, que liga o ponto X ao ponto $X + H$. Temos que $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}$ e, usando a propriedade aditiva da integral de linha, obtemos

$$\frac{\varphi(X + H) - \varphi(X)}{h} = \frac{1}{h}\int_X^{X+H} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \frac{1}{h}\int_0^h \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\, dt = \frac{1}{h}\int_0^h L(x + t, y, z)\, dt.$$

Como a função $t \mapsto L(x + t, y, z)$ é contínua em alguma vizinhança de $t = 0$, a função

$$g(\tau) = \int_0^\tau L(x + t, y, z)\, dt$$

é diferenciável em uma vizinhança de $\tau = 0$, $g(0) = 0$ e $g'(0) = L(x, y, z)$, como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de uma variável. Logo,

$$\varphi_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(X + H) - \varphi(X)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = g'(0) = L(x, y, z).$$

De modo similar, obtém-se que $\varphi_y(x, y, z) = M(x, y, z)$ e $\varphi_z(x, y, z) = N(x, y, z)$. Assim, $\mathbf{F} = \nabla\varphi$ e com isso mostramos que $\mathbf{F}$ é conservativo. ■

Observação 5.41 *Combinando os dois Teoremas Fundamentais para a integral de linha, vemos que um campo vetorial* $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, *contínuo em um domínio (aberto e conexo)* Ω *do* $\mathbb{R}^3$, *é conservativo se, e somente se, a integral de linha*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

é independente do caminho. Neste caso, se φ *é um potencial do campo* $\mathbf{F}$, *isto é,* $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, *então*

$$\int_A^B \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla\varphi \bullet d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

para quaisquer dois pontos A *e* B *em* Ω. *Em particular, se* γ *é uma curva fechada, parcialmente regular e* $\mathbf{F}$ *é contínuo e conservativo, então*

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0. \qquad ■$$

Exemplo 5.42 *Mostrar que o campo bidimensional* $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ *não é conservativo no domínio* $\Omega : 0 < x^2 + y^2 < 1$ *do* $\mathbb{R}^2$.

Solução Consideremos em Ω a circunferência $\gamma : x^2 + y^2 = \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1$, parametrizada por $x = \varepsilon \cos t,\ y = \varepsilon \operatorname{sen} t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Então

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} &= \oint_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi} \left[(-\varepsilon \operatorname{sen} t)(-\varepsilon \operatorname{sen} t) + (\varepsilon \cos t)(\varepsilon \cos t)\right] dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi} \left[\varepsilon^2 (\operatorname{sen} t)^2 + \varepsilon^2 (\cos t)^2\right] dt = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi} \varepsilon^2 dt = 2\pi.\end{aligned}$$

Se fosse $\mathbf{F}$ um campo conservativo, a integral de linha de $\mathbf{F}$ sobre a curva fechada γ seria 0. ■

Exemplo 5.43 *Seja* γ *a curva descrita por*

$$\mathbf{r}(t) = \exp(-t)\,\mathbf{i} + (1 + 2\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (t - \cos t)\,\mathbf{k},\quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinar a derivada direcional de $\varphi(x,y,z) = x^2yz^3$, *na direção da curva* γ, *no ponto* P *correspondente a* $t = 0$.

Solução A *derivada direcional* de φ no ponto $P = \mathbf{r}(t)$, na direção da curva γ, é, por definição, a derivada direcional de φ no ponto $P = \mathbf{r}(t)$, na direção do vetor unitário

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|},$$

tangente à curva γ em P. O ponto P correspondente a $t = 0$ é $\mathbf{r}(0) = (1,1,-1)$ e o vetor tangente unitário à curva γ no ponto P é

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

Como $\nabla\varphi = (2xyz^3)\mathbf{i} + (x^2z^3)\mathbf{j} + (3x^2yz^2)\mathbf{k}$, obtemos $\nabla\varphi(\mathbf{r}(0)) = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e, portanto,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{u}}(P) = \nabla\varphi(P) \bullet \mathbf{u} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \qquad ■$$

Exemplo 5.44 *Seja* k *uma constante real e consideremos o campo vetorial* $\mathbf{F} = \dfrac{k\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, *sendo* $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ *o vetor posição do ponto* P. *Calcular a integral de linha*

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$

ao longo do segmento γ, *que vai do ponto* $A(1,1,1)$ *ao ponto* $B(1,2,-1)$.

Solução Vimos, no Exemplo 5.6, que $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, onde a função $\varphi : \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0\} \to \mathbb{R}$ é definida por $\varphi(x,y,z) = -k/|\mathbf{r}|$ Portanto, pela Observação 5.41,

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = -k\left(\frac{1}{|\mathbf{OB}|} - \frac{1}{|\mathbf{OA}|}\right) = -k\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Observamos que se os pontos A e B estão sobre uma circunferência de centro na origem e raio R, então $|\mathbf{OA}| = |\mathbf{OB}| = R$ e, sendo assim,

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = -k\,(1/R - 1/R) = 0. \qquad ■$$

Teorema 5.45 *Para que um campo vetorial contínuo* $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ *seja conservativo em um domínio* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, *é necessário e suficiente que*

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0,$$

ao longo de qualquer curva simples, fechada e parcialmente regular γ, *contida em* Ω.

Demonstração Suponhamos que $\mathbf{F}$ seja conservativo e seja γ uma curva fechada, simples e parcialmente regular contida em Ω. Fixemos dois pontos A e B sobre γ, de modo que γ fica particionada em γ_1 e γ_2, como sugere a Figura 5.19. Como $\mathbf{F}$ é conservativo, a integral de linha

$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

é independente do caminho e, consequentemente,

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0.$$

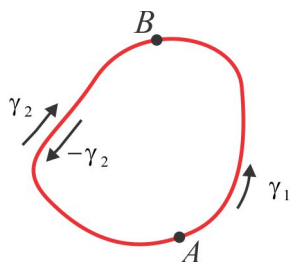


Figura 5.19: Partição do caminho γ.

Reciprocamente, suponhamos que

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = 0,$$

ao longo de qualquer curva fechada, simples e parcialmente regular γ em Ω. Dados dois pontos A e B em Ω, sejam γ_1 e γ_2 duas curvas simples, parcialmente regulares e sem ponto em comum, ligando A e B. Então $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ é uma curva simples, fechada e parcialmente regular e, portanto,

$$0 = \oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{-\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$

de onde resulta

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}.$$

Se as curvas γ_1 e γ_2 se interceptam em um ponto E, então E divide cada uma delas em duas novas curvas e aplicamos o raciocício precedente. ■

Corolário 5.46 *Seja* $\mathbf{F} = L\mathbf{i}+M\mathbf{j}+N\mathbf{k}$ *um campo vetorial de classe* C^1 *no domínio (aberto e conexo)* Ω, *isto é, as componentes* $L, M, N : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *têm derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em* Ω.

1. *Se a integral de linha*
$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \quad ou \quad \int_\gamma L dx + M dy + N dz$$
é independente do caminho, então $\mathbf{F}$ *é um campo irrotacional, isto é,* $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *e, neste caso,*
$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}.$$

2. *Se* Ω *é um domínio simplesmente conexo e* $\mathbf{F}$ *é um campo irrotacional* ($\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$)*, então a integral de linha*
$$\int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \quad ou \quad \int_\gamma L dx + M dy + N dz$$
é independente do caminho e o campo $\mathbf{F}$ *é conservativo.* ■

Exemplo 5.47 (conservação da energia) *Seja* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *a equação horária de uma partícula que se desloca, da posição inicial* $A = \mathbf{r}(t_0)$ *à posição final* $B = \mathbf{r}(t_1)$*, sob a ação de um campo de forças conservativo* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$*. Mostrar que a soma de suas energias cinética e potencial permanece constante.*

Solução Como $\mathbf{F}$ é um campo conservativo temos que $\mathbf{F} = -\nabla\varphi(t)$ (o sinal "$-$" é frequentemente usado em Física), onde $\varphi(t)$ é a *energia potencial.* O trabalho realizado é
$$W = \int_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_\gamma (-\nabla\varphi) \bullet d\mathbf{r} = \varphi(A) - \varphi(B).$$
Por outro lado, se representarmos por m a massa da partícula e por v_A e v_B as energias cinéticas, nos pontos A e B, respectivamente, temos
$$W = \tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2$$
e, portanto,
$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + \varphi(A) = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + \varphi(B). \quad ■$$

Exemplo 5.48 *No domínio* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 < 4\}$*, mostrar que o campo* $\mathbf{F}$ *do Exemplo* 5.42 *é conservativo. Mais geralmente,* $\mathbf{F}$ *é conservativo em qualquer região simplesmente conexa* Ω*, que não contém a origem.*

Solução O campo $\mathbf{F}$ é de classe C^1 no domínio simplesmente conexo Ω e será conservativo se $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ em Ω. As componentes do campo F são
$$L = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad M = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad N = 0$$
e, portanto,
$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ L & M & 0 \end{vmatrix} = (M_x - L_y)\,\mathbf{k} = \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]\mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \text{em } \Omega.$$
Ao longo de qualquer curva γ simples, fechada e parcialmente regular em Ω, temos
$$\oint_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0.$$

A família de potenciais de $\mathbf{F}$ são as soluções φ do sistema

$$\varphi_x = L = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{(I)} \quad \text{e} \quad \varphi_y = M = \frac{x}{x^2+y^2}. \quad \text{(II)}$$

Integrando (I) parcialmente em relação a x e mantendo y fixado, obtemos

$$\varphi(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}dx \Rightarrow \varphi(x,y) = \arctan(y/x) + h(y)$$

e derivando a última equação em relação a y, e comparando com (II), resulta

$$\varphi_y = \frac{x}{x^2+y^2} + h_y = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Logo, $h_y = 0$, ou seja, $h = k$, sendo k uma constante real. Assim, a família de potenciais é dada por

$$\varphi(x,y) = \arctan(y/x) + k. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.49 (um campo irrotacional e não conservativo) *No Exemplo 5.42 vimos que o campo*

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$$

não é conservativo no domínio $\Omega : 0 < x^2+y^2 < 1$, *embora nesse domínio ele seja de classe* C^1 *e irrotacional, isto é,* $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. *Isto não contradiz o resultado contido no Corolário 5.46, porque o domínio* Ω *não é simplesmente conexo.* $\blacksquare$

Para usar a linguagem de forma diferencial, recordemos que a expressão

$$\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = Ldx + Mdy + Ndz$$

recebe o nome *forma diferencial* e ela denomina-se *exata* ou *total* quando o campo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ for conservativo, isto é, quando existir campo escalar diferenciável $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$Ldx + Mdy + Ndz = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi.$$

Se as funções L, M e N têm derivadas parciais contínuas no domínio simplesmente conexo Ω, então a forma diferencial $Ldx + Mdy + Ndz$ é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

ou, equivalentemente, a matriz Jacobiana $J(\mathbf{F})$ é simétrica.

Exemplo 5.50 *Verificar que* $ydx + xdy + 5dz$ *é uma forma diferencial exata e calcular a integral de linha*

$$\int_\gamma ydx + xdy + 5dz,$$

sendo γ *o segmento de reta de origem* $A(1,1,1)$ *e extremidade* $B(2,3,-1)$.

Solução Como a matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} L_x & L_y & L_z \\ M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_y & N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica, segue que a forma diferencial é exata. Assim,

$$ydx + xdy + 5dz = \varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = d\varphi,$$

para alguma função $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e o cálculo da integral de linha se reduz a

$$\int_\gamma ydx + xdy + 5dz = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Neste caso, usando as regras de derivação e manipulações simples, encontramos

$$d\varphi = ydx + xdy + 5dz = d(xy) + d(5z) = d(xy + 5z)$$

e, portanto, $\varphi(x, y, z) = xy + 5z + k$, com k uma constante real. Assim,

$$\int_\gamma ydx + xdy + 5dz = \varphi(B) - \varphi(A) = (1 + k) - (6 + k) = -5. \qquad \blacksquare$$

5.4.1 O Potencial como Integral de Linha

Domínio Admissível

Um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ denomina-se *admissível*, quando possuir a seguinte propriedade: existe em Ω um ponto $A(a, b, c)$ tal que a poligonal de vértices $A(a, b, c)$, $B(x, b, c)$, $C(x, y, c)$ e $P(x, y, z)$ jaz em Ω, seja qual for o ponto $P(x, y, z)$ de Ω. Em dimensão $n = 2$, o domínio Ω é admissível quando existir um ponto $A(a, b)$ em Ω, tal que a poligonal de vértices $A(a, b)$, $B(a, y)$ e $P(x, y)$ jaz em Ω, para todo $P(x, y)$ de Ω. A Figura 5.20 ilustra essas poligonais.

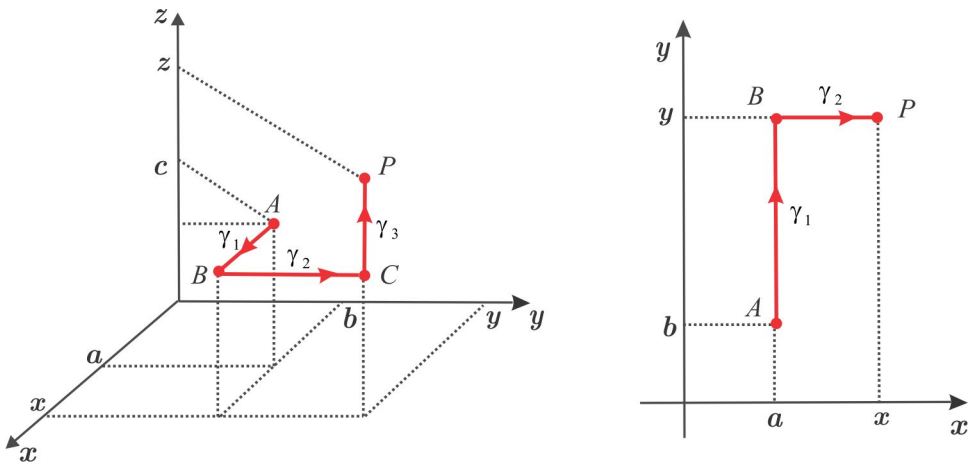


Figura 5.20: Poligonais admissíveis em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Por exemplo, as vizinhanças e o próprio $\mathbb{R}^3$ são domínios admissíveis. O domínio $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ não é admissível; de fato, dado $A(a,b)$ em Ω, a poligonal de vértices $A(a,b)$, $B(a,0)$ e $C(-1,0)$ não jaz em Ω.

Em um domíno Ω admissível, podemos usar as poligonais para determinar o potencial de um campo conservativo. Dado um campo vetorial conservativo $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em um domínio admissível Ω, então fixado um ponto $A(a,b,c)$ em Ω o potencial $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de $\mathbf{F}$ é determinado pela fórmula

$$\varphi(P) = \int_A^P \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_A^P L dx + M dy + N dz$$

e usando a poligonal $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ da Figura 5.20, obtemos

$$\varphi(P) = \int_A^P \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^x L(t,b,c)\, dt + \int_b^y M(x,t,c)\, dt + \int_c^z N(x,y,t)\, dt. \tag{5.17}$$

Teorema 5.51 *Para que um campo vetorial* $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, *de classe* C^1, *seja conservativo em um domínio admissível* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, *é necessário e suficiente que* $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ *em* Ω. *Neste caso, o potencial* $\varphi(x,y,z)$ *é dado por* (5.17). *Em dimensão* $n = 2$, *o campo* $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{L}(x,y)\,\mathbf{i} + \mathbf{M}(x,y)\,\mathbf{j}$ *é conservativo se, e somente se,* $M_x = L_y$ *em* Ω. ■

Exemplo 5.52 *Mostrar que o campo vetorial* $\mathbf{F} = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ *é conservativo e encontrar um potencial do qual ele deriva.*

Solução Um cálculo direto nos dá $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ no domínio admissível $\mathbb{R}^3$ e, portanto, $\mathbf{F}$ é um campo conservativo. Para determinar um potencial de $\mathbf{F}$, escolhemos $A(0,0,0)$ como ponto de partida e usamos (5.17) para obter:

$$\varphi(x,y,z) = \int_0^x (0+0)dx + \int_0^y (x+0)dy + \int_0^z (x+y)dz = xy + xz + yz.$$

É claro que se k é uma constante, então $\varphi(x,y,z) + k$ é, também, um potencial do campo $\mathbf{F}$. ■

Domínio Estrelado

Um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ denomina-se *estrelado*, em relação ao ponto P de Ω, se o segmento de reta PQ está inteiramente contido em Ω, seja qual for o ponto Q de Ω. Por exemplo, no plano $\mathbb{R}^2$, o interior de um paralelogramo, o disco e o próprio $\mathbb{R}^2$ são domínios estrelados, em relação a qualquer um de seus pontos. O domínio $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ não é estrelado em relação a ponto algum. Se Ω é estrelado em relação ao ponto P, e γ é uma curva fechada em Ω, então a *deformação contínua*

$$\gamma_s(t) = (1-s)\,\gamma(t) + sP, \quad 0 \le s \le 1,$$

reduz a curva γ ao ponto P, sem sair de Ω, porque $\gamma_s(t) \in \Omega$, $\forall s, t$, e, além disso, $\gamma_0 = \gamma$ e $\gamma_1 = P$. Portanto, Ω é simplesmente conexo. Se retirarmos do $\mathbb{R}^2$ o eixo x, obtemos um domínio simplesmente conexo e não estrelado.

Seja $\mathbf{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial conservativo sobre um domínio Ω, e suponhamos que Ω seja estrelado em relação ao ponto $A(a,b,c)$ de Ω. O potencial $\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de $\mathbf{F}$ é determinado pela fórmula

$$\varphi(x,y,z) = \int_A^P \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + k, \tag{5.18}$$

sendo k uma constante real e $P(x,y,z)$ um ponto genérico de Ω. A integral de linha em (5.18) não depende do caminho, e se considerarmos o segmento de reta $\mathbf{r}(t) = A + t\mathbf{AP}$, $0 \leq t \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_A^P \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + k = \int_0^1 \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\mathbf{F}(a + t(x-a), b + t(y-b), c + t(z-c)) \bullet (x-a, y-b, z-c)\right] dt.\end{aligned}$$

Exemplo 5.53 *Mostrar que o campo vetorial* $\mathbf{F} = (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ *é conservativo e determinar um potencial do qual ele deriva.*

Solução O campo $\mathbf{F}$ é de classe C^1 no domínio simplesmente conexo $\mathbb{R}^3$ e, nesse domínio, $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{F}$ é um campo conservativo. Considerando $\mathbb{R}^3$ como um domínio estrelado em relação à origem, obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_0^1 \left[\mathbf{F}(tx,ty,tz) \bullet (x,y,z)\right] dt + k \\ &= x\int_0^1 e^{tx} \operatorname{sen}(ty) dt + y\int_0^1 e^{tx}\cos(ty) dt + z\int_0^1 dt + k = e^x \operatorname{sen} y + z + k. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 5.54 *Vamos reconsiderar o campo* $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ *do Exemplo 5.8. Naquele exemplo, resolvendo o sistema de equações diferenciais*

$$\varphi_x = L = x^2, \quad \varphi_y = M = y \quad e \quad \varphi_z = N = -3z,$$

encontramos a família de potenciais

$$\varphi(x,y,z) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{3}{2}z^2 + k.$$

Agora, o potencial será encontrado via integral de linha. Considerando a origem $O(0,0,0)$ *como ponto de partida, usamos (5.17) e obtemos o potencial*

$$\begin{aligned}\psi(x,y,z) &= \int_0^x L(t,0,0)\, dt + \int_0^y M(x,t,0)\, dt + \int_0^z N(x,y,t)\, dt \\ &= \int_0^x t^2 dt + \int_0^y t dt - \int_0^z 3t dt = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{3}{2}z^2.\end{aligned}$$

Observamos que o potencial $\psi(x,y,z)$ *encontrado pela integral de linha, corresponde ao valor* $k = 0$, *que é exatamente* $\varphi(0,0,0)$. $\blacksquare$

Exercícios & Complementos.

1. Verifique se a forma é exata e, nos casos afirmativos, determine um potencial do qual ele deriva.

   (a) $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x)\, dx + (\cos x + x\cos y + y)\, dy$.

   (b) $[\operatorname{sen}(yx) + xy\cos(xy)]\, dx + \left[x^2\cos(xy)\right] dy$.

   (c) $(x+z)\, dx - (y+z)\, dy + (x-y)\, dz$.

   (d) $2xy^3 dx + x^2y^3 dy + 3x^2yz^2 dz$.

(e) $3y^4z^2dx + 4x^3y^2dy - 3x^2y^2dz$.

(f) $\left(2x^2 + 8xy^2\right)dx + \left(3x^3y - 3xy\right)dy - \left(4y^2z^2 + 2x^3z\right)dz$.

(g) $\left(y^2\cos x + z^3\right)dx - (4 - 2y\operatorname{sen} x)\,dy + \left(3xz^2 + 2\right)dz$.

(h) $\left(4xy - 3x^2z^2 + 1\right)dx + \left(2x^2 + 2\right)dy - \left(2x^3z + 3z^2\right)dz$.

(i) $(e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\,dx + (2xz + 2y)\,dy + \left(e^x\cos z + 2xy + 3z^2\right)dz$.

2. Verifique que o campo de forças $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ não é conservativo e calcule o trabalho realizado pelo campo $\mathbf{F}$, para mover uma partícula do ponto $A(1,0,1)$ ao ponto $B(-1,0,e^{\pi})$, ao longo da curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\,\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\,\mathbf{j} + \left(e^t\right)\mathbf{k}$.

3. Mostre que não existe um campo vetorial $\mathbf{F}$, cujo rotacional é $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua em $[a,b]$. Determine em que região do plano xy o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y) = yf(xy)\,\mathbf{i} + xf(xy)\,\mathbf{j}$ é conservativo.

5. Seja γ um caminho parcialmente regular que liga os pontos $A(1,2)$ e $B(2,1)$ e não intercepta o eixo x. É verdade que
$$\int_\gamma \frac{ydx - xdy}{y^2} = 3/2?$$

5.5 O Teorema de Green no Plano

Para motivar o que será desenvolvido nesta seção, deixe-nos considerar a região D do plano xy, delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$, e vamos orientar a curva ∂D, fronteira da região D, de modo que ao percorrê-la, a região D permaneça do nosso lado esquerdo. Na Figura 5.21, ilustramos a região D, onde vemos que $\partial D = \gamma_1 + \gamma_2$ é um contorno simples, fechado e parcialmente regular.

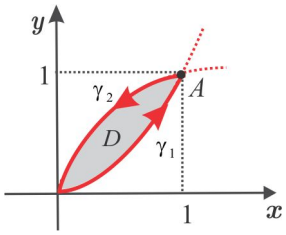


Figura 5.21: Região entre as curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Vamos comparar as integrais:

$$\oint_{\partial D} L(x,y)\,dx + M(x,y)\,dy \quad \text{(I)} \quad \text{e} \quad \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)dA, \quad \text{(II)}$$

sendo $L(x,y) = xy$ e $M(x,y) = y^2 - x^2$. Calculando a integral dupla (II), obtemos

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)dA &= \iint_D (-2x - x)\,dA = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-3x)\,dydx \\ &= -3\int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = -9/20\end{aligned}$$

e para calclular a integral de linha (I), usaremos a propriedade aditiva:

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \oint_{\gamma_1+\gamma_2} Ldx + Mdy = \oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy.$$

A curva γ_1 é descrita por $y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1$, e usando x como parâmetro, obtemos:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy &= \oint_{\gamma_1} xydx + \left(y^2 - x^2\right) dy = \int_0^1 \left[x^3 + 2x\left(x^4 - x^2\right)\right] dx \\ &= \int_0^1 \left(2x^5 - x^3\right) dx = 1/12.\end{aligned}$$

Por outro lado, a curva γ_2 é descrita por $x = y^2$ e ao longo desta curva, o percurso do ponto A até a origem é feito com y variando de 1 até 0. Usando y como parâmetro, obtemos:

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy &= \oint_{\gamma_2} xydx + \left(y^2 - x^2\right) dy = -\int_0^1 \left[2y^4 + \left(y^2 - y^4\right)\right] dy \\ &= -\int_0^1 \left(y^4 + y^2\right) dy = -8/15.\end{aligned}$$

Assim, encontramos

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy + \oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy = \frac{1}{12} - \frac{8}{12} = -9/20.$$

O resultado $-9/20$, encontrado para integrais (I) e (II), não é uma coincidência. O *Teorema de Green*,[14] que formularemos a seguir, estabelece que, sob determinadas condições, é válida a relação

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dA.$$

Estamos tratando com integrais ao longo de caminhos orientados e, é claro, a orientação da trajetória é relevante.

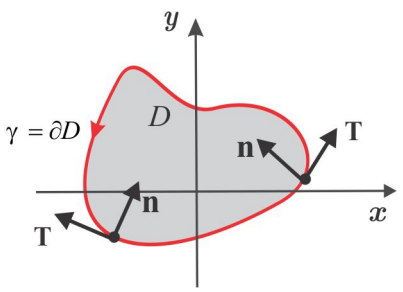


Figura 5.22: Fronteira $\gamma = \partial D$ orientada.

Na Figura 5.22 ilustramos a orientação positiva da fronteira de uma região D, delimitada por uma curva simples, fechada e parcialmente regular γ. A orientação positiva corresponde àquela em que o campo de vetores normias $\mathbf{n}$, obtido por rotação anti-horária de 90° do campo tangente

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|},$$

sempre aponta para dentro da região D. Intuitivamente, a orientação positiva de γ corresponde àquela que, ao percorrê-la, deixa a região D à nossa esquerda.

[14] George Green (1793-1841), matemático inglês.

Teorema 5.55 (Teorema de Green) *Seja γ uma curva simples, fechada e parcialmente regular, que delimita uma região D do plano xy. Se $L(x,y)$ e $M(x,y)$ são funções de classe C^1, isto é, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, na região $D \cup \partial D$, então*

$$\oint_{\gamma} Ldx + Mdy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dxdy,$$

onde a curva $\gamma = \partial D$ é orientada no sentido positivo (anti-horário).

Demonstração Por simplicidade, vamos considerar o caso particular em que D é a região da Figura 5.23, delimitada por um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados.

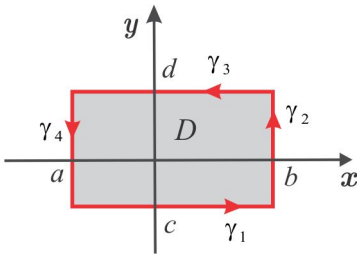


Figura 5.23: Região retangular D.

A fronteira de D é a curva simples, fechada e parcialmente regular, formada pelos segmentos de reta γ_1, γ_2, γ_3 e γ_4, isto é, $\partial D = \gamma_1 + \gamma + \gamma_3 + \gamma_4$. Temos pela propriedade aditiva que

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \sum_{i=1}^{4} \oint_{\gamma_i} Ldx + Mdy. \tag{5.19}$$

- Sobre o segmento γ_1, temos $y = c$, $dy = 0$, $a \leq x \leq b$ e, portanto,

$$\oint_{\gamma_1} Ldx + Mdy = \int_a^b L(x,c)\, dx.$$

- Sobre o segmento γ_2, temos $x = b$, $dx = 0$, $c \leq y \leq d$ e, portanto,

$$\oint_{\gamma_2} Ldx + Mdy = \int_c^d M(b,y)\, dy.$$

- Sobre o segmento γ_3, temos $y = d$, $dy = 0$, $a \leq x \leq b$ e, portanto,

$$\oint_{\gamma_3} Ldx + Mdy = -\int_a^b L(x,d)\, dx.$$

- Sobre o segmento γ_4, temos $x = a$, $dx = 0$, $c \leq y \leq d$ e, portanto,

$$\oint_{\gamma_4} Ldx + Mdy = -\int_c^d M(a,y)\, dy.$$

O sinal "$-$" que figura nas integrais sobre γ_3 e γ_4 é devido a orientação. De (5.19), resulta

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \left[-\int_a^b [L(x,d) - L(x,c)] dx \right] + \left[\int_c^d [M(b,y) - M(a,y)]\, dy \right] \tag{5.20}$$

e aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo[15] a cada integral do lado direito de (5.20), encontramos

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} Ldx + Mdy &= -\int_a^b \left[\int_c^d L_y(x,y)\,dy\right] dx + \int_c^d \left[\int_a^b M_x(x,y)\,dx\right] dy \\ &= \int_a^b \int_c^d [M_x(x,y) - L_y(x,y)]\,dydx = \iint_D (M_x - L_y)\,dA. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 5.56 *Com auxílio do Teorema de Green, calcular a integral de linha*

$$\oint_{\partial D} 3xydx + 2x^2dy,$$

onde D é a região delimitada pela reta $y = x$ e a parábola $y = x^2 - 2x$.

Solução A região D é do tipo vertical simples, e está ilustrada na Figura 5.24; ela é descrita pelas desigualdades $D : 0 \leq x \leq 3, \quad x^2 - 2x \leq y \leq x$.

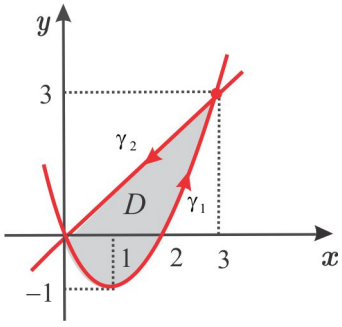


Figura 5.24: Região D entre as curvas $y = x$ e $y = x^2 - 2x$.

As componentes da forma diferencial são $L = 3xy$ e $M = 2x^2$, de modo que $M_x - L_y = 4x - 3x$, e usando o Teorema de Green, obtemos

$$\oint_{\partial D} 3xydx + 2x^2dy = \iint_D xdxdy = \int_0^3 \left[\int_{x^2-2x}^{x} xdy\right] dx = \int_0^3 x^2(3-x)\,dx = \frac{27}{4}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.57 *Os possíveis valores para a integral de linha*

$$\oint_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2},$$

onde γ é uma circunferência que não passa pela origem, são $\pm 2\pi$ e 0. De fato, se γ é uma circunferência centrada na origem de raio ε, com orientação positiva, vimos no Exemplo 5.42 que a integral tem valor 2π. Invertendo a orientação, o valor da integral passa a ser -2π. Por outro lado, se a circunferência γ não envolve a origem, podemos usar o Teorema de Green na região D, delimitada por γ, e considerando que $L_y = M_x$, em D, resulta

$$\oint_\gamma Ldx + Mdy = \iint_D (M_x - L_y)\,dxdy = 0.$$

Ressaltamos que o Teorema de Green não se aplica, se a circunferência γ envolver a origem. $\blacksquare$

[15] Teorema Fundamental do Cálculo: $\int_a^b G_x(x,\xi)\,dx = G(b,\xi) - G(a,\xi)$, $\quad G$ de class C^1.

Exemplo 5.58 *Calcular* $\oint_\gamma ydx + 3xdy$, *onde* γ *resulta da interseção do cone* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *com o plano* $z = 2$.

Solução A curva γ é a circunferência de raio $R = 2$, situada no plano $z = 2$, com centro $C(0,0,2)$. Pelo Teorema de Green, temos

$$\oint_\gamma ydx + 3xdy = \iint_D (3-1)dxdy = 2A(D) = 8\pi. \qquad \blacksquare$$

5.5.1 Regiões Multiplamente Conexas

Desejamos usar o Teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2},$$

ao longo de uma curva simples, fechada e parcialmente regular γ, que envolve a origem, como ilustrado na Figura 5.25.

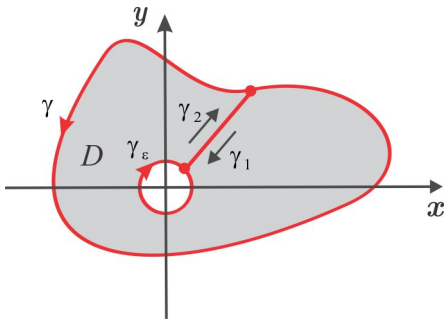


Figura 5.25: Região D multiplamente conexa.

O Teorema de Green não pode ser aplicado diretamente, tendo em vista que a forma não é de classe C^1, na região delimitada pela curva γ. Para contornar a situação, consideramos uma circunferência centrada na origem, de raio $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno, de modo que $\gamma_\varepsilon \cap \gamma = \varnothing$, e um segmento de reta servindo de *ponte de ligação*, entre as curvas γ e γ_ε. Com esses artifícios, construimos uma região simplesmente conexa D, com fronteira $\partial D = \gamma + \gamma_\varepsilon + \gamma_1 + \gamma_2$, de modo que a forma diferencial é exata e de classe C^1, em $D \cup \partial D$. Como $\gamma_2 = -\gamma_1$, temos que

$$\int_{\gamma_1} Ldx + Mdy + \int_{\gamma_2} Ldx + Mdy = 0$$

e, portanto,

$$\int_{\partial D} Ldx + Mdy = \int_\gamma Ldx + Mdy + \int_{\gamma_\varepsilon} Ldx + Mdy. \tag{5.21}$$

Do Teorema de Green, resulta

$$\oint_{\partial D} Ldx + Mdy = \iint_D (M_x - L_y)\, dxdy = 0$$

e de (5.21), obtemos

$$\oint_\gamma \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = -\oint_{\gamma_\varepsilon} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = 2\pi,$$

conforme encontramos no Exemplo 5.42.

Para encerrar esta seção, analisaremos a aplicabilidade do Teorema de Green, no caso em que a região multiplamente conexa D tem dois *buracos*, como na Figura 5.26.

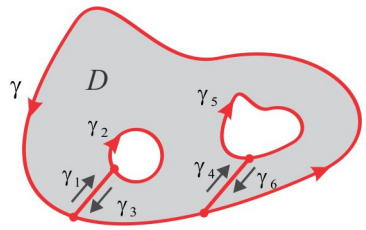


Figura 5.26: Região D com dois buracos.

Se $\mathbf{F} = L(x,y)\,\mathbf{i} + M(x,y)\,\mathbf{j}$ é um campo de classe C^1, na região $D \cup \partial D$, obtemos a partir do Teorema de Green a seguinte relação:

$$\iint_D (M_x - L_y)\, dA = \oint_\gamma L dx + M dy + \oint_{\gamma_2} L dx + M dy + \oint_{\gamma_5} L dx + M dy.$$

Se o campo $\mathbf{F}$ for conservativo, então $M_x - L_y = 0$ e teremos

$$\oint_\gamma L dx + M dy + \oint_{\gamma_2} L dx + M dy + \oint_{\gamma_5} L dx + M dy = 0.$$

Observamos que $\gamma_3 = -\gamma_1$ e $\gamma_6 = -\gamma_4$, de modo que

$$\oint_{\gamma_1} L dx + M dy + \oint_{\gamma_5} L dx + M dy = 0 \quad \text{e} \quad \oint_{\gamma_4} L dx + M dy + \oint_{\gamma_6} L dx + M dy = 0.$$

5.5.2 Aplicações do Teorema de Green

Cálculo de Áreas Planas

Seja D uma região do plano xy, delimitada por uma curva γ, simples, fechada e parcialmente regular. Se considerarmos no Teorema de Green $L(x,y) \equiv 0$ e $M(x,y) = x$, obteremos

$$\oint_\gamma x dy = \iint_D dA = A(D). \tag{5.22}$$

Da mesma forma, considerando $L(x,y) = -y$ e $M(x,y) \equiv 0$, resulta

$$-\oint_\gamma y dx = \iint_D dA = A(D). \tag{5.23}$$

Finalmente, somando (5.22) e (5.23), membro a membro, obtemos

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_\gamma x dy - y dx. \tag{5.24}$$

Exemplo 5.59 (área da elipse) *Calcular, por integral de linha, a área da região D limitada pela elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0,\ b > 0.$$

Solução Considerando a parametrização

$$x = a\cos t \ \text{ e } \ y = b\,\text{sen}\,t, \ \ 0 \le t \le 2\pi,$$

da elipse, obtida no Exemplo 5.19, segue da fórmula (5.22) que

$$A = \int_0^{2\pi} a\,(\cos t)\,b\,(\cos t)\,dt = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi ab. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.60 (área em coordenadas polares) *Calcular a área da cardioide de equação polar*

$$r = a(1-\cos\theta), \quad a > 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Solução Em coordenadas polares r e θ, temos $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e, portanto,

$$dx = \cos\theta dr - r\,\text{sen}\,\theta d\theta \ \text{ e } \ dy = \text{sen}\,\theta dr + r\cos\theta d\theta.$$

Assim, em coordenadas polares, a fórmula da área (5.24) se escreve

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_\gamma [r\cos\theta(\text{sen}\,\theta dr + r\cos\theta d\theta) - r\,\text{sen}\,\theta(\cos\theta dr - r\,\text{sen}\,\theta d\theta)] = \frac{1}{2}\oint_\gamma r^2 d\theta,$$

onde a região D é delimitada pela curva γ, simples, fechada e parcialmente regular. No caso da cardioide, obtemos

$$A(D) = \frac{a^2}{2}\oint_\gamma (1-\cos\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{2}a^2. \qquad \blacksquare$$

Fluxo e Circulação por Integral Dupla

Suponhamos que o campo bidimensional $\mathbf{F}\,(x,y) = L\,(x,y)\,\mathbf{i} + M\,(x,y)\,\mathbf{j}$ representa o campo de velocidades de um fluido, e que desejamos medir a quantidade de fluido que atravessa a curva γ, na unidade de tempo. Observando a Figura 5.27, vemos que a quantidade de fluido (*fluxo*) que atravessa a porção ds, na direção da normal, é medida pela área do retângulo de base ds e altura $\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$ é a normal unitária exterior à curva γ.

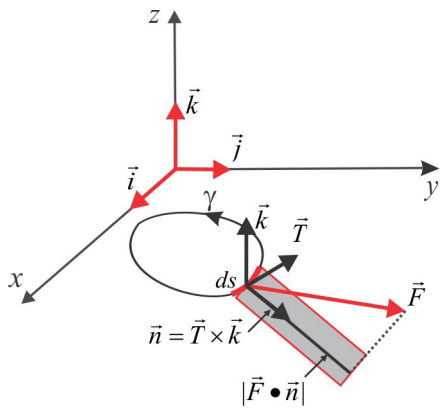


Figura 5.27: Fluxo do campo $\mathbf{F}$.

O fluxo total do campo $\mathbf{F}$ através de γ, na direção $\mathbf{n}$, é, portanto,

$$\int_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds. \tag{5.25}$$

A integral (5.25) denomina-se a *integral do fluxo* do campo $\mathbf{F}$ ao longo de γ. Considerando que $\mathbf{T}ds = (dx)\,\mathbf{i} + (dy)\,\mathbf{j} + (dz)\,\mathbf{k}$, obtemos

$$\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ dx & dy & dz \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (dy)\,\mathbf{i} - (dx)\,\mathbf{j}$$

e, dessa forma, obtemos a seguinte regra para o cálculo do fluxo do campo $\mathbf{F}$:

$$\int_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})ds = \int_\gamma (L\mathbf{i} + M\mathbf{j}) \bullet [(dy)\,\mathbf{i} - (dx)\,\mathbf{j}]\,ds = \int_\gamma Ldy - Mdx. \tag{5.26}$$

Quando a curva γ for fechada, a integral

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})ds = \oint_\gamma Ldx + Mdy \tag{5.27}$$

denominar–se-á *circulação* do campo $\mathbf{F}$ ao longo de γ. Além disso, o trabalho total realizado por um campo de forças $\mathbf{F}$, para deslocar uma partícula ao longo de γ, do ponto A até o ponto B, é dado por

$$W = \int_A^B (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})ds.$$

Exemplo 5.61 *Calcular a circulação e o fluxo do campo* $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, *através da circunferência* $\gamma : x^2 + y^2 = 1$.

Solução A circulação do campo $\mathbf{F}$ é dada pela integral (5.27) e temos

$$\begin{aligned} \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})ds &= \oint_\gamma (-ydx + xdy) = \int_0^{2\pi} [(-\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos t)(\cos t)]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2\right] dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Por outro lado, o fluxo do campo $\mathbf{F}$ é dado por (5.26) e temos

$$\int_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})ds = -\int_\gamma xdx + ydy = -\int_0^{2\pi} [(\cos t)(-\operatorname{sen} t) + (\operatorname{sen} t)(\cos t)]\,dt = 0. \qquad \blacksquare$$

Se o campo bidimensional $\mathbf{F} = L(x,y)\,\mathbf{i} + M(x,y)\,\mathbf{j}$ é de classe C^1, em uma região D, delimitada por uma curva simples, fechada e regular γ, podemos expressar, via Teorema de Green, o fluxo e a circulação de $\mathbf{F}$ por uma integral dupla. Para o fluxo temos por (5.26)

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})ds = \oint_\gamma Ldy - Mdx = (\text{usar Green}) = \iint_D (M_x + L_y)\,dxdy = \iint_D \operatorname{div}(\mathbf{F})\,dxdy.$$

A fórmula

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})ds = \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F})dxdy \tag{5.28}$$

é conhecida como *Fórmula da Divergência* ou *Fórmula de Gauss* em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, temos

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} = (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ L & M & 0 \end{vmatrix} = M_x - L_y$$

e, portanto, a circulação do campo $\mathbf{F}$ se expressa por

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds = \oint_\gamma L dx + M dy = (\text{usar Green}) = \iint_D (M_x - L_y)\, dxdy = \iint_D [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}]\, dxdy.$$

A seguinte *formulação vetorial* do Teorema de Green

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_D (\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}) dxdy \tag{5.29}$$

é conhecida por *Fórmula de Stokes* em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5.62 *Calcular, por integral dupla, o fluxo e a circulação do campo* $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, *através da circunferência* $x^2 + y^2 = 1$.

Solução Usando as formulações vetoriais do Teorema de Green, com D a região delimitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$, obtemos

$$\text{fluxo} \qquad \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_D (\text{div}\, \mathbf{F}) dxdy = \iint_D dxdy = \pi$$

$$\text{circulação} \qquad \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_D [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}]\, dxdy = \iint_D 2 dxdy = 2\pi. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.63 *Calcular o fluxo e a circulação do campo* $\mathbf{F} = (xy)\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$, *através da fronteira da região trinagular* D, *de vértices* $O\,(0,0)$, $A\,(2,2)$ *e* $B\,(0,2)$.

Solução Na Figura 5.28 ilustramos a região D que será interpretada, para efeito de integral dupla, como uma região vertical simples.

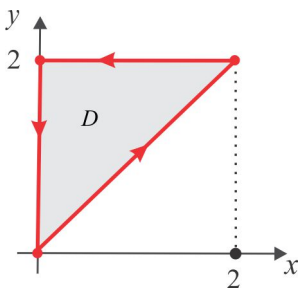


Figura 5.28: Região triangular do Exemplo 5.63.

Temos que $\text{div}\, \mathbf{F} = y + 4$ e para o fluxo encontramos

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds &= \iint_D (\text{div}\, \mathbf{F}) dA = \iint_D (y+4)\, dA = \\ &= \int_0^2 \int_x^2 (y+4)\, dydx = \int_0^2 \left[4y + \tfrac{1}{2}y^2\right]_x^2 dx \\ &= \int_0^2 \left(10 - 4x - \tfrac{1}{2}x^2\right) dx = 32/3. \end{aligned}$$

Por outro lado, $\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k} = -x$ e a circulação do campo $\mathbf{F}$ é

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds &= \iint_D [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}]\, dA = \iint_D (-x)\, dA \\ &= -\int_0^2 \int_x^2 x dydx = -\int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = -4/3. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Identidades de Green

Para obter as Identidades de Green, usaremos a fórmula da divergência com uma escolha adequada para o campo vetorial $\mathbf{F}$. Seja D uma região compacta do $\mathbb{R}^2$, delimitada por uma curva simples, fechada e parcialmente regular, onde estão definidos dois campos escalares u e v, com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas em D (esta classe de diferenciabilidade torna possível a aplicabilidade do Teorema de Green). Se na Fórmula da Divergência (5.28) fizermos $\mathbf{F} = v\nabla u$, e usarmos a propriedade $\operatorname{div}(v\nabla u) = v\Delta u + \nabla u \bullet \nabla v$, obteremos

$$\iint_D (v\Delta u)\ dxdy + \iint_D (\nabla u \bullet \nabla v)\ dxdy = \oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds, \tag{5.30}$$

conhecida como 1ª Identidade de Green.

Se na identidade (5.30) permutarmos u com v e subtrairmos os resultados, chegaremos à 2ª Identidade de Green

$$\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\ dxdy = \oint_{\partial D} (v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}})ds. \tag{5.31}$$

As identidades (5.30) e (5.31) aparecem com frequência no estudo do comportamento na fronteira ∂D, de soluções de certas equações diferenciais que modelam fenômenos físicos.

Exercícios & Complementos

1. Calcule as seguintes integrais de linha:

   (a) $\oint_\gamma (\operatorname{sen} x + 4xy)\, dx + \left(2x^2 - \cos y\right) dy$, γ é qualquer curva regular fechada simples.

   (b) $\oint_\gamma \sqrt{x^2+y^2}dx + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})dy$, γ é qualquer curva regular fechada simples, que não envolve a origem.

   (c) $\oint_\gamma 2dx + \left(x^2 - y\tan y\right) dy$, γ é o círculo $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

   (d) $\oint_\gamma L(x)\, dx + M(y)\, dy$, γ é um círculo de raio r e $L(x)$ e $M(y)$ são funções contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas na região delimitada pela curva γ.

   (e) $\oint_\gamma \exp(x)\operatorname{sen} y dx + \exp(x)\cos y dy$, γ é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$.

   (f) $\oint_\gamma x^2 dx + xydy$. γ é a cardioide $r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

2. Sejam D o anel descrito por $1 \le x^2+y^2 \le 4$ e $L(x,y)$ e $M(x,y)$ funções contínuas, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em D, tais que $L_y = M_x$ na região D. Quantos valores são possíveis para a integral de linha

$$\oint_\gamma Ldx + Mdy,$$

   sendo γ uma curva regular por partes, fechada, simples e contida em D? Este resultado pode ser ilustrado com campo vetorial Faraday[16]

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2+y^2}.$$

[16] Michael Faraday (1791-1867), físico e químico inglês.

3. Sejam γ uma curva regular fechada simples, orientada, que não passa por $(0,0)$, e $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$. Mostre que se $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário exterior à curva γ, então a integral de linha
$$\oint_\gamma (\nabla f \bullet \mathbf{n}) ds$$
assume apenas os valores 0 e 4π, caso a curva γ envolva ou não a origem.

4. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas tal que $\Delta f = 0$ em D. Mostre que
$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy = 0.$$

5. Com as hipóteses do exercício precedente, mostre que
$$\int_{\partial D} (f_x dy - f_y dx)\, g = \iint_D (g_x f_x + g_y f_y)\, dxdy,$$
para qualquer função $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em D.

6. Seja γ uma curva orientada, simples, fechada e regular que delimita uma região $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Se $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$ representa o vetor normal unitário exterior à curva γ, mostre que
$$\oint_\gamma n_1(x,y)\, ds = \oint_\gamma n_2(x,y)\, ds = 0.$$

7. Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em D, mostre que
$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} f n_1 ds,$$
com $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j}$, o vetor normal unitário exterior à fronteira ∂D.

Respostas & Sugestões

Seção 5.2 Campos Vetoriais

1. (a) $2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$, (b) $-2y+z$, (c) $2x^2\mathbf{i} + (x-4xy)\mathbf{j}$, (d) $3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2$, (e) $(4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2)\mathbf{i} + (4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3)\mathbf{j} - (2xy^3z^3 + x^3z^4)\mathbf{k}$.

2. Siga as etapas do Exemplo 5.8 para encontrar o potencial.

   (a) $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + K$.

   (b) $\varphi(x,y) = x^3y + K$.

   (c) $\varphi(x,y) = x^2\exp(y) + xy - y^2 + K$.

   (d) $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right) + K$.

   (e) $\varphi(x,y) = xy^2 - \frac{3}{2}x^2 + \operatorname{sen} y + K$.

   (f) não.

(g) não.

(h) não.

(i) não.

(j) não.

(k) $\varphi(x,y,z) = x^2 + \frac{3}{2}y^2 + 2z^2 + K$.

(l) $\varphi(x,y,z) = xy + xz + yz + K$.

(m) $\varphi\,(x,y,z) = x^2yz + K$

(n) $\varphi(x,y,z) = xy\,\mathrm{sen}\,z + K$

3. Consequência direta das regras de derivação.

4. Se existisse um tal campo $\mathbf{G}$, então $\mathrm{div}\,(\mathbf{F}) = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{G}) = 0$.

5. Calcule $\mathrm{rot}\,(\mathbf{G} - \mathbf{G}_0)$ e conclua que $\mathbf{G} - \mathbf{G}_0$ é conservativo.

6. É imediato verificar que $\mathrm{div}\,\mathbf{F} = 0$. Os campos potenciais $\mathbf{G}$ são determinados com base no Exercício 5.

   (a) Como $L = 2x$, $M = y$ e $N = -3z$ temos que

   $$\mathbf{F} \times \mathbf{OP} = 4tyz\mathbf{i} - 5txz\mathbf{j} + txy\mathbf{k}$$

   e, portanto

   $$\mathbf{G} = (4yz\mathbf{i} - 5xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}) \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}(4yz\mathbf{i} - 5xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}).$$

   Se considerarmos $\mathbf{G}_0 = yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j}$ e

   $$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{G} - \mathbf{G}_0 = \tfrac{1}{3}(yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}),$$

   teremos

   $$\varphi_x = \tfrac{1}{3}yz, \;\; \varphi_y = \tfrac{1}{3}xz \;\text{ e }\; \varphi_z = \tfrac{1}{3}xy$$

   e, portanto, $\varphi\,(x,y,z) = \frac{1}{3}xyz + k$, k constante.

   (b) $\mathbf{G} = x^2\mathbf{j} + (xz + y^2)\mathbf{k} + \mathrm{grad}\,\varphi$. Neste caso, $\mathbf{G}_0 \bullet \mathbf{i} = 0$.

   (c) $\mathbf{G} = x\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k} + \mathrm{grad}\,\varphi$.

   (d) $\mathbf{G} = (y^2 - 2xz)\mathbf{k} + \mathrm{grad}\,\varphi$.

   (e) $\mathbf{G} = (\exp(x) - x\exp(y))\mathbf{j} + \mathrm{grad}\,\varphi$.

   (f) $\mathbf{G} = 3x^2\mathbf{j} + (2y^3 - 6xz)\mathbf{k} + \mathrm{grad}\,\varphi$.

   (g) $\mathbf{G} = -x(x + y^2)\mathbf{j} + (x^3 + y^3)\mathbf{k} + \mathrm{grad}\,\varphi$.

   (h) Temos $L = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $M = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ e $N = 0$ e, portanto,

   $$\mathbf{F} \times \mathbf{OP} = \frac{txz}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{tyz}{x^2 + y^2}\mathbf{j} - t\mathbf{k},$$

   obtemos

   $$\mathbf{G} = \left(\frac{xz}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{yz}{x^2 + y^2}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right) \int_0^1 t^2 dt = \tfrac{1}{3}\left(\frac{xz}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{yz}{x^2 + y^2}\mathbf{j} - \mathbf{k}\right).$$

Seção 5.3 Caminhos Regulares

1. No item (f) se considerarmos $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ e $z = t$, obteremos $x^2 + y^2 = 1$, $z = t$ e, portanto, o gráfico da curva γ é uma hélice circular.

2. A coordenada $y(t)$ da curva γ é dada por: $y(0) = 0$ e para $0 < t \leq 1$ temos $y(t) = t^2 \operatorname{sen}(1/t)$, com derivada $y'(t)$ dada por: $y'(0) = 0$ e

$$y'(t) = 2t \operatorname{sen}(1/t) + t^2 \cos(1/t) \cdot \left(-1/t^2\right) = 2t \operatorname{sen}(1/t) - \cos(1/t), \quad t \in (0, 1],$$

Se considerarmos $t_n = 1/n\pi$, com $n \in \mathbb{N}$, teremos $t_n \to 0$ e, contudo, $y'(t_n) = (-1)^n$ não tem limite, com $n \to \infty$. Assim, $y'(t)$ é descontínua em $t = 0$. Portanto, a curva $\mathbf{r}(t)$ não é regular.

3. Pondo $x = t$ e $y = t^2$, obtemos $y = x^2$. Logo, o gráfico da curva γ_1 é um arco de parábola. As curvas γ_1 e γ_2 possuem o mesmo traço, com orientações opostas, pois a mudança de parâmetro $\phi(t) = 3 - t$ tem derivada negativa $\phi'(t) = -1$.

4. Vamos provar apenas o item (a).

   (a) Como $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ e $P = \mathbf{r}(1) = (1, 2, 1)$, o vetor velocidade nesse ponto é $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, e a reta tangente à curva γ no ponto P é dada por

$$x = 1 + s, \; y = 2 + 2s, \; z = 1 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

   O plano normal à curva γ no ponto P é dado por

$$\mathbf{PX} \bullet \mathbf{r}'(1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z = 8.$$

   (b) reta tangente: $x = -4s, \; y = 1, \; z = \pi/8 + s, \quad s \in \mathbb{R}$,
   plano normal: $-4x + z = \pi/8$.

   (c) reta tangente: $x = e^3(1 + 3s), \; y = e^{-3}(1 - 3s), \; z = 3\sqrt{2}(1 + s), \quad s \in \mathbb{R}$,
   plano normal: $xe^3 - ye^{-3} + \sqrt{2}z = e^6 - e^{-6} + 6$.

   (d) reta tangente: $x = 1 + s, \; y = 1 + 3s, \; z = 1 + 4s, \quad s \in \mathbb{R}$,
   plano normal: $x + 3y + 4z = 8$.

   (e) reta tangente: $x = \pi/2 + 2s, \; y = 5, \; z = 1 - 3s, \quad s \in \mathbb{R}$,
   plano normal: $2x - 3z = \pi - 3$.

5. Como

$$\mathbf{r}(t) = \frac{2t\mathbf{i}}{1 + t^2} + \frac{(1 - t^2)\mathbf{j}}{1 + t^2} + \mathbf{k} \;\text{ e }\; \mathbf{r}'(t) = \frac{2(1 - t^2)\mathbf{i}}{(1 + t^2)^2} + \frac{-4t\mathbf{j}}{(1 + t^2)^2},$$

temos que

$$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{2}, \quad \left|\mathbf{r}'(t)\right| = \frac{2}{1 + t^2} \;\text{ e }\; \mathbf{r}(t) \bullet \mathbf{r}'(t) = 0$$

e, portanto,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}(t) \bullet \mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}(t)|\,|\mathbf{r}'(t)|} = 0,$$

mostrando que o ângulo entre os vetores $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}'(t)$ é constante, isto é, não depende de t.

6. Em cada caso, k, k_1 e k_2 representam constantes e exibiremos alguns detalhes para o item (e).

(a) $y = kx$.

(b) $y = k_1 x$ e $z = k_2 x$.

(c) $y = bx/a + k_1$ e $z = cx/a + k_2$.

(d) $z - x = xz$ e $x + 2y^2 = 8xy^2$.

(e) De acordo com (5.11), as curvas integrais do campo $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ são as soluções do sistema

$$\frac{dx}{L} = \frac{dy}{M} = \frac{dz}{N}$$

e manipulações com essas equações nos levam à relação

$$dx + dy + dz = \tfrac{1}{3}(L + M + N)\left(\frac{dx}{L} + \frac{dy}{M} + \frac{dz}{N}\right).$$

Como $L + M + N = 0$, resulta

$$dx + dy + dz = 0 \Leftrightarrow x + y + z = k_1.$$

Ainda de (5.11), obtemos

$$\frac{xdx}{xL} = \frac{ydy}{yM} = \frac{zdz}{zN} \Leftrightarrow xdx + ydy + zdz = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = k_2,$$

com $k_2 > 0$. Portanto, as curvas integrais de $\mathbf{F}$ são as circunferências

$$\begin{cases} x + y + z = k_1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = k_2, \quad k_2 > 0, \end{cases}.$$

resultante do corte das esferas $x^2 + y^2 + z^2 = k_2$ pelos planos $x + y + z = k_1$.

Seção 5.4 Calculando Integral de Linha

1. Como

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \ \text{ e } \ z = t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

temos que

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

2. (a) $-\frac{15}{2}$, (b) 0, (c) $\log\left(\frac{4}{9}\right) - 2$, (d) $\frac{\pi}{4}$, (e) $\frac{\sqrt{2}}{3}$, (f) 2π, (g) $\frac{1}{2}$, (h) 0, (i) $\frac{4}{3}$, (j) $-\frac{\pi}{2}$, (k) $4\pi(\alpha - b)$, (l) 0, (m) $-\frac{9}{20}$, (n) 19.

3. (a) $\frac{243\pi}{4}$, (b) $\frac{40}{3}$, (c) $\frac{5}{6}$, (d) $\frac{137}{10}$, (e) 13.

4. 0.

5. 1/4

6. 1/3

7. Segue diretamente da relação $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds = |\mathbf{F}| \cos\theta ds$.

8. Sejam $\mathbf{r}_1(t)$, $t \in [a,b]$ e $\mathbf{r}_2(u)$, $u \in [\gamma, d]$ as representações paramétricas de γ_1 e γ_2, respectivamente. Existe uma bijeção $\varphi : [a,b] \to [\gamma, d]$, $u = \varphi(t)$, com derivada contínua e de mesmo sinal em $[a,b]$, tal que
$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\varphi(t)), \quad t \in [a,b].$$
Se $\mathbf{F}$ é um campo vetorial contínuo na região Ω contendo as curvas γ_1 e γ_2, então
$$\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r}_1 = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \bullet \mathbf{r}_1'(t)dt$$
e como $u = \varphi(t)$ e $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(u)$, temos que $du = \varphi'(t)dt$ e
$$\mathbf{r}_1'(t) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{du}\varphi'(t) = \mathbf{r}_2'(u)\varphi'(t).$$
Logo,
$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \bullet \mathbf{r}_1'(t)dt = \pm \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(u)) \bullet (\mathbf{r}_2'(u))\varphi'(t)dt = \pm \int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r}_2(u)) \bullet \mathbf{r}_2'(u)du.$$
pois $\varphi'(t) > 0$ ou $\varphi'(t) < 0$.

Seção 5.5 Independência do Caminho

1. Como ilustração, vamos exibir as soluções para os itens (a) e (i).

   (a) Temos $L = \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x$ e $M = \cos x + x \cos y + y$, de modo que
   $$M_x = -\operatorname{sen} x + \cos y = L_y$$
   e a forma diferencial é exata. O potencial é solução do sistema
   $$\varphi_x = \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x \quad \text{(I)} \quad \text{e} \quad \varphi_y = \cos x + x \cos y + y. \quad \text{(II)}$$
   Integrando (I) parcialmente em relação a x, obtemos
   $$\varphi(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \cos x + \tfrac{1}{2}x^2 + h(y).$$
   Derivando a última equação em relação a y e comparando com (II), vem
   $$\varphi_y = x \cos y + \cos x + h_y = \cos x + x \cos y + y.$$
   Logo, $h_y = y$, ou seja, $h = \frac{1}{2}y^2$. Assim,
   $$\varphi(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \cos x + \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) + k.$$

   (b) $\varphi(x,y) = x \operatorname{sen} xy + k$.

   (c) $\varphi(x,y,z) = (x-y)z + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) + k$.

   (d) não.

   (e) não.

   (f) não.

(g) $\varphi(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z + k$.

(h) $\varphi(x,y,z) = x + 2x^2y - x^3z^2 + 2y - z^3 + k$.

(i) O campo $\mathbf{F} = (e^x \operatorname{sen} z + 2yz)\,\mathbf{i} + (2xz + 2y)\,\mathbf{j} + \left(e^x \cos z + 2xy + 3z^2\right)\mathbf{k}$ é de classe C^1 no domínio estrelado $\mathbb{R}^3$ e um cálculo direto nos dá

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = (2x - 2x)\,\mathbf{i} + (e^x \cos z + 2y - (e^x \cos z + 2y))\,\mathbf{j} + (2z - 2z)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

e, portanto, $\mathbf{F}$ é um campo conservativo. Como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(tx,ty,tz) &= \left(e^{tx}\operatorname{sen}(tz) + 2t^2yz\right)\mathbf{i} + \left(2t^2xz + 2ty\right)\mathbf{j}\\ &\quad + \left(e^{tx}\cos(tz) + 2t^2xy + 3t^2z^2\right)\mathbf{k},\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(tx,ty,tz)\bullet\mathbf{r}(x,y,z) &= x\left[e^{tx}\operatorname{sen}(tz) + 2t^2yz\right] + y\left(2t^2xz + 2ty\right)\\ &\quad + z\left[e^{tx}\cos(tz) + 2t^2xy + 3t^2z^2\right]\end{aligned}$$

e o potencial $\varphi(x,y,z)$ é

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_0^1 x\left(e^{tx}\operatorname{sen}(tz) + 2t^2yz\right) + y\left(2t^2xz + 2ty\right)\\ &\quad + z\left(e^{tx}\cos(tz) + 2t^2xy + 3t^2z^2\right)dt + k\\ &= e^x \operatorname{sen} z + 2xyz + y^2 + z^3 + k,\end{aligned}$$

sendo k constante.

2. $2e^{2\pi} - 5e^{\pi} - 5\pi - \frac{3}{10}$.

3. Calcule $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$.

4. Em qualquer região contida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le xy \le b\}$.

Seção 5.6 Teorema de Green

1. (a) 0, (b) 0, (c) 2π, (d) 0, (e) 0, (f) 0.

2. Veja o Exemplo 5.57.

3. Inteiramente análogo ao Exercício 2.

4. Como $L = f_y$ e $M = -f_x$ temos, pelo Teorema de Green, que

$$\oint_{\partial D} f_y dx - f_x dy = \iint_D \left(-f_{xx} - f_{yy}\right) dxdy = -\iint_D \Delta f dxdy = 0.$$

5. Aplicando o Teorema de Green, com $L = -gf_y$ e $M = gf_x$, resulta

$$\oint_{\partial D} \left(f_x dy - f_y dx\right) g = \iint_D \left[\partial_x\left(gf_x\right) + \partial_y\left(gf_y\right)\right] dxdy.$$

Observando que

$$\partial_x (g f_x) = g_x f_x + g f_{xx} \text{ e } \partial_y (g f_y) = g_y f_y + g f_{yy},$$

obtemos

$$\partial_x (g f_x) + \partial_y (g f_y) = g_x f_x + g_y f_y + g (f_{xx} + f_{yy}) = g_x f_x + g_y f_y$$

e, portanto,

$$\oint_{\partial D} (f_x dy - f_y dx)\, g = \iint_D (g_x f_x + g_y f_y)\, dxdy.$$

6. O campo vetorial $\mathbf{F} = \mathbf{i}$ tem componentes $L = 1$, $M = 0$ e $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. Da fórmula da divergência (5.28), obtemos

$$\oint_\gamma n_1(x,y) ds = \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F}) dxdy = 0,$$

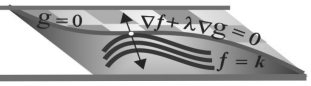
onde a região D é delimitada por γ. Procedendo de forma similar com o campo $\mathbf{F} = \mathbf{j}$, obtemos

$$\oint_\gamma n_2(x,y) ds = \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_R (\operatorname{div} \mathbf{F}) dxdy = 0.$$

7. Considerando o campo vetorial $\mathbf{F} = f(x,y)\,\mathbf{i}$, obtemos $L = f(x,y)$, $M = 0$ e $\operatorname{div} \mathbf{F} = f_x$. Assim, pela fórmula vetorial do Teorema de Green, obtemos

$$\oint_{\partial D} n_1 f(x,y) ds = \oint_{\partial D} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds = \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F}) dxdy = \iint_D f_x dxdy.$$

6. Integral de Superfície



Não sendo possível utilizar um instrumento adequado de medição, para conhecermos a área de uma superfície qualquer seria necessário nos deslocar sobre todos os pontos da superfície e, então, aferir a extensão percorrida. Em muitos casos, deslocar-se de um ponto a outro pode constituir tarefa praticamente impossível de ser realizada, em razão da inexistência de meios de locomoção ou em virtude de um consumo excessivo de tempo e recursos, como seria o caso de avaliarmos a área de uma região montanhosa.

A integral de superfície é uma excelente ferramenta para resolver problemas relacionados ao cálculo de áreas, quando métodos comuns de medição não puderem ser aplicados. Nesta direção, determinaremos a área de uma superfície dada pelo gráfico de uma função de duas variáveis $z = f(x, y)$, contínua em uma região compacta.

Os fundamentos teóricos que iremos desenvolver neste capítulo, mesmo que em nível elementar, formarão o alicerce para as aplicações à Física e às Engenharias, tais como *escoamento de fluidos*, projetos de *cabos de transmissão subaquáticos* e cálculo do trabalho necessário para colocar um satélite em órbita.

6.1 Superfícies Regulares

Antes de abordarmos área e integral de superfície propriamente ditas, discutiremos as várias formas como as superfícies do $\mathbb{R}^3$ são descritas por meio de equações matemáticas. Recordemos que nos capítulos precedentes vimos duas maneiras de descrever uma superfície, usando coordenadas cartesianas.

■ Forma Cartesiana Explícita

Neste caso a superfície é descrita como o conjunto dos pontos (x, y, z) do $\mathbb{R}^3$ satisfazendo a uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0. \tag{6.1}$$

■ Forma Cartesiana Implícita

A superfície se identifica com o gráfico de uma função de duas variáveis e, neste caso, ela é descrita por uma equação da forma

$$z = f(x, y) \quad \text{ou} \quad y = g(x, z) \quad \text{ou} \quad x = h(y, z). \tag{6.2}$$

Isto ocorre quando, por exemplo, a equação $F(x, y, z) = 0$ puder ser resolvida para explicitar uma variável como função das outras duas. Vejamos o caso da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, de centro na origem e raio 1. Quando esta equação é resolvida para z em função de x e y, obtemos duas respostas:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{(forma explícita do hemisfério superior)}$$

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad \text{(forma explícita do hemisfério inferior)}$$

■ Forma Paramétrica

A terceira forma de descrever uma superfície, mais precisa e útil no estudo de integrais de superfícies, é a forma parametrizada em que as coordenadas x, y e z dos pontos da superfície são expressas como funções de dois parâmetros, digamos u e v :

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v). \tag{6.3}$$

Observação 6.1 *Se a superfície S se apresenta sob a forma explícita, por exemplo, $z = f(x,y)$, com (x,y) variando em uma região D do plano xy, para descrevê-la na forma implícita basta considerarmos $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ e, neste caso, ela é a superfície de nível $F(x,y,z) = 0$. Na forma paramétrica, ela é descrita pelas equações*

$$x(u,v) = u, \quad y(u,v) = v \quad e \quad z(u,v) = f(u,v), \quad (u,v) \in D.$$

Definição 6.2 *Dada uma função $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida em um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, o conjunto $\mathbf{r}(D)$, imagem do conjunto D pela função $\mathbf{r}$, é denominado superfície parametrizada, com representação paramétrica*

$$\mathbf{r}(u,v) = (x,y,z) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}, \qquad (u,v) \in D. \tag{6.4}$$

As noções de limite, continuidade, diferenciabilidade, etc. da função vetorial $\mathbf{r}(u,v)$ são introduzidas a partir das coordenadas (funções escalares) $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$. Por exemplo, $\mathbf{r}(u,v)$ é contínua (resp. diferenciável) se, e somente se, $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ são contínuas (resp. diferenciáveis). Observamos que, embora uma superfície S seja um *objeto* (conjunto de pontos) do espaço $\mathbb{R}^3$, apenas dois parâmetros u e v são necessários para descrevê-la completamente. Por exemplo, se

$$\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{1-u^2-v^2}\,\mathbf{k},$$

então $\mathbf{r}$ transforma o disco unitário $D : u^2 + v^2 \leq 1$, do plano uv, no hemisfério superior da esfera unitária

$$S = \mathbf{r}(D) = \{(u,v,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1-u^2-v^2}\}.$$

Esta parametrização é bijetora, mas não é diferenciável em D, porque as derivadas parciais $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ não existem na fronteira de D. Na Figura 6.1 ilustramos a parametrização de uma superfície S.

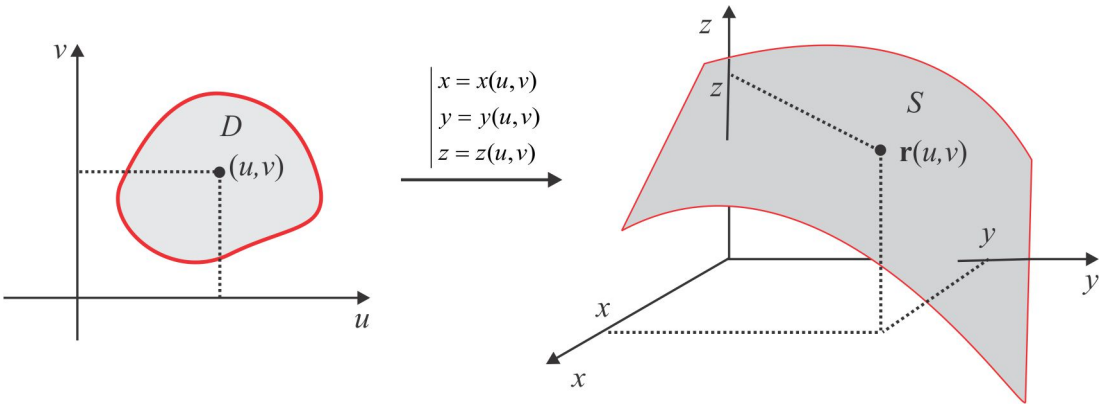


Figura 6.1: Superfície parametrizada.

Consideremos uma superfície S, com representação paramétrica (6.4), e suponhamos que S seja diferenciável no ponto $(u_0, v_0) \in D$. A porção da reta $u = u_0$, do plano uv, que jaz na região D, é transformada em uma curva γ_{u_0}, contida em S, definida em um intervalo I de centro u_0 e descrita por

$$\gamma_{u_0}(v) = \mathbf{r}(u_0, v), \quad v \in I.$$

Se o vetor $\mathbf{r}_v(u_0, v_0) = x_v(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + y_v(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + z_v(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$ é não nulo, então ele é tangente à curva γ_{u_0} no ponto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$, como ilustrado na Figura 6.2. De modo similar, fixado $v = v_0$, a curva $\gamma_{v_0} : u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0)$, $u \in J$, jaz na superfície S e, caso o vetor $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = x_u(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + y_u(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + z_u(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$ seja não nulo, ele será tangente à curva γ_{v_0}, no ponto $\mathbf{r}(u_0, v_0)$.

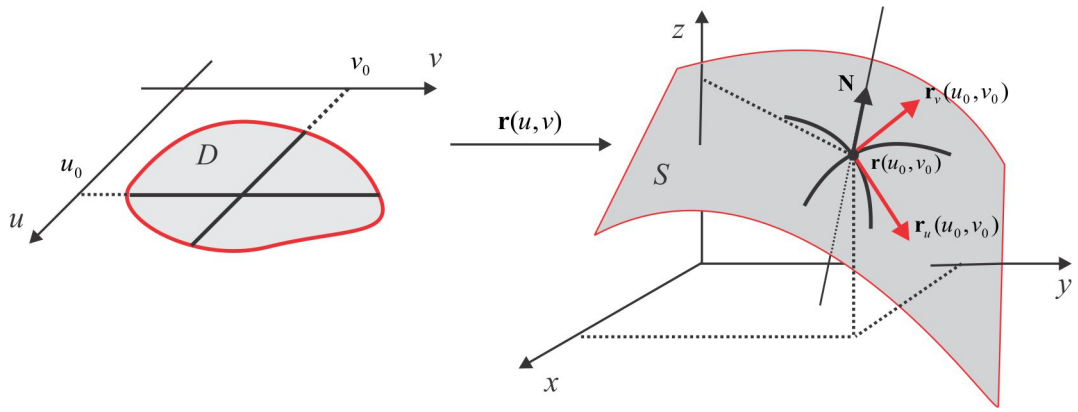


Figura 6.2: Vetor Normal à superfície S.

Se os vetores $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ não são colineares, isto é, se o vetor $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ é não nulo, então $\mathbf{N}$ é normal (perpendicular) ao plano gerado pelos vetores $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ e $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$. Esse plano é denominado *plano tangente* à superfície S no ponto $A = \mathbf{r}(u_0, v_0)$. Neste caso, demonstra-se, como consequência do Teorema da Função Implícita que, em uma vizinhança do ponto A, a superfície S é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis. O plano tangente no ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ é governado pela equação

$$\mathbf{N} \bullet \mathbf{AP} = 0, \tag{6.5}$$

onde $P(x, y, z)$ é um ponto genérico do plano. Temos

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (y_u z_v - y_v z_u)\,\mathbf{i} + (x_v z_u - x_u z_v)\,\mathbf{j} + (x_u y_v - x_v y_u)\,\mathbf{k}$$

e, em coordenadas, a equação (6.5) se reduz a

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

sendo $A = y_u z_v - y_v z_u$, $B = x_v z_u - x_u z_v$ e $C = x_u y_v - x_v y_u$ as coordenadas do vetor normal $\mathbf{N}$.

Definição 6.3 *Uma superfície S parametrizada por $\mathbf{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é denominada regular ou suave se as derivadas parciais $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$ são contínuas em D e, além disso, o vetor normal $\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é não nulo em cada ponto de D. Em cada ponto $A = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ da superfície S o plano tangente está definido e é governado pela equação (6.5). É comum se referir ao produto vetorial $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ como produto vetorial fundamental.*

Exemplo 6.4 *Seja S a superfície descrita na forma explícita por $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, com $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, isto é, com derivadas parciais contínuas em D. A superfície S pode ser parametrizada por*

$$\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u,v)\,\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D,$$

de onde resulta

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = -f_u\mathbf{i} - f_v\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

e, portanto, S é regular. O plano tangente a S no ponto $\mathbf{r}(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$ tem equação cartesiana

$$f_u(u_0,v_0)(x-x_0) + f_v(u_0,v_0)(y-y_0) - z + z_0 = 0. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.5 (parametrizando o plano) *Seja S o plano de equação $ax+by+cz = d$ e suponhamos que o coeficiente c seja não nulo. O plano S é descrito na forma explícita pela equação*

$$z = f(x,y) = \tfrac{1}{c}(d - ax - by)$$

e, de acordo com o Exemplo 6.4, pode ser parametrizado por

$$\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \tfrac{1}{c}(d - au - bv)\,\mathbf{k}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Neste caso, temos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (a/c)\,\mathbf{i} + (b/c)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

e o plano é uma superfície regular. $\blacksquare$

Exemplo 6.6 (parametrizando o cilindro) *Seja S o cilindro circular reto $x^2 + y^2 = a^2$, de raio a e altura h, ilustrado na Figura 6.3.*

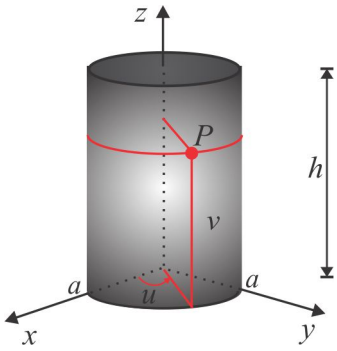


Figura 6.3: Parametrização do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

Se u representa o ângulo polar e v é a coordenada z do ponto $P(x,y,z)$ do cilindro S, temos a seguinte parametrização para S :

$$\mathbf{r}(u,v) = (a\cos u)\,\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} u)\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le h.$$

Um cálculo direto nos dá

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (a\cos u)\,\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} u)\,\mathbf{j} \neq \mathbf{0},$$

e o cilindro é uma superfície regular. É comum usar as variáveis θ e z no lugar de u e v, respectivamente, e, neste contexto, a parametrização se expressa sob a forma

$$x = a\cos\theta,\ y = a\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = z,\quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le h. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.7 *Seja S o cilindro de equação $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, $0 \le z \le h$, ilustrado na Figura 6.4, e representemos por $u = \theta$, o ângulo polar, e $v = z$ a coordenada z de um ponto $P(x, y, z)$ do cilindro S. As coordenadas cilíndricas r, θ, z do ponto $P(x, y, z)$ são $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $z = z$ e nos pontos do cilindro S temos que $r = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$. Assim, obtemos a seguinte parametrização para S :*

$$x = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta,\ y = 2a\,\mathrm{sen}^2\,\theta,\ z = z,\quad 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le z \le h. \qquad \blacksquare$$

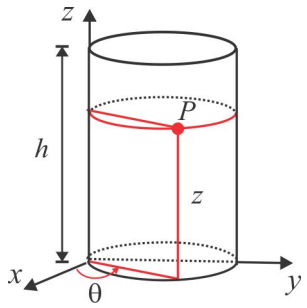


Figura 6.4: Parametrização do cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$.

Exemplo 6.8 (parametrizando a esfera) *Com relação à esfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, ilustrada na Figura 6.5, consideremos como parâmetros os ângulos esféricos $u = \theta$ e $v = \phi$. Dessa forma, obtemos*

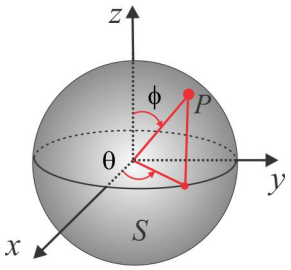


Figura 6.5: Parametrização da esfera.

a seguinte parametrização para a esfera S :

$$x = a\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ y = a\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ z = a\cos\phi,\quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.9 (parametrizando o cone) *Seja S o cone $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, ilustrado na Figura 6.6. Esta superfície pode ser representada na forma paramétrica por*

$$\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{u^2 + v^2}\ \mathbf{k},\quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

como obtido no Exemplo 6.4. Se u é o ângulo polar e $v = z$, o cone S pode ser parametrizado, também, por

$$\mathbf{r}(u, v) = (v\cos u)\,\mathbf{i} + (v\,\mathrm{sen}\,u)\,\mathbf{j} + v\mathbf{k},\quad v \ge 0,\ 0 \le u \le 2\pi,$$

e, neste caso, temos que

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -v \operatorname{sen} u & v \cos u & 0 \\ \cos u & \operatorname{sen} u & 1 \end{vmatrix} = (v \cos u)\,\mathbf{i} + (v \operatorname{sen} u)\,\mathbf{j} - v\mathbf{k}.$$

Como o vetor $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ *é nulo no ponto* $(0,0)$*, concluímos que o cone não é regular em* $(0,0,0)$*, embora as coordenadas* $x(u,v)$, $y(u,v)$ *e* $z(u,v)$ *sejam de classe* C^1 *em todo* $\mathbb{R}^2$. ■

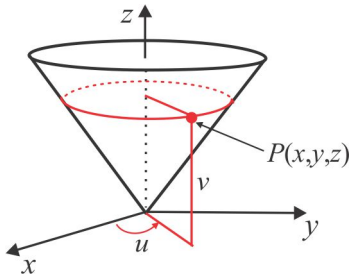


Figura 6.6: Parametrização do cone.

Observação 6.10 *Uma superfície* $S : r = \mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$*, é parcialmente regular, ou regular por partes, se suas coordenadas* $x(u,v)$, $y(u,v)$ *e* $z(u,v)$ *são contínuas em* D *e a superfície* S *é regular, nas sub-regiões* $D_1, D_2, \ldots, D_n$*, com* $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$*. Por exemplo, são parcialmente regulares a superfície do cone do Exemplo 6.9 e a superfície do cubo delimitado pelos planos* $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ *e* $z = 1$.

Exemplo 6.11 (parametrizando uma superfície de revolução) *Suponhamos que a superfície* S *seja gerada pela rotação, em torno do eixo* z*, da curva* γ *do plano* xz*, parametrizada por*

$$\gamma : x = f(v), \quad y = 0 \quad e \quad z = g(v), \quad v \in [a,b].$$

Cada ponto $P(x,y,z)$ *da superfície* S *está a uma altura* $g(v)$ *do plano* xy *e jaz em alguma circunferência de centro no eixo* z *e raio* $f(v)$*, como ilustra a Figura 6.7. Se* u *representa o ângulo polar,*

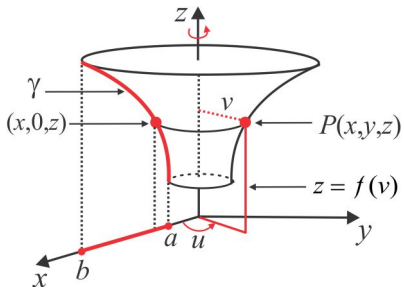


Figura 6.7: Superfície de revolução.

temos a seguinte parametrização para a superfície S :

$$\mathbf{r}(u,v) = (f(v)\cos u)\mathbf{i} + (f(v)\operatorname{sen} u)\mathbf{j} + g(v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [a,b],$$

e, neste caso, temos

$$\mathbf{r}_u = (-f(v)\operatorname{sen} u)\,\mathbf{i} + (f(v)\cos u)\,\mathbf{j} \quad e \quad \mathbf{r}_v = \big(f'(v)\cos u\big)\,\mathbf{i} + \big(f'(v)\operatorname{sen} u\big)\,\mathbf{j} + g'(v)\mathbf{k}.$$

Assim, o produto vetorial fundamental $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ *é dado por*

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left[f(v)g'(v)\cos u\right]\mathbf{i} + \left[f(v)g'(v)\operatorname{sen} u\right]\mathbf{j} - \left[f(v)f'(v)\right]\mathbf{k}$$

e, além disso, os vetores $\mathbf{r}_u$ *e* $\mathbf{r}_v$ *são ortogonais, isto é,* $\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v = 0$. *Isso indica que as curvas* $u = c_1$ *e* $v = c_2$ *são ortogonais. As curvas* $u = c_1$ *são cópias de* γ, *denominadas meridianos, e estão contidas em planos que passam pelo eixo* z; *já as curvas* $v = c_2$ *são círculos, denominados paralelos, com centros no eixo* z *e contidas em planos paralelos ao plano* xy. ■

Exemplo 6.12 *Suponhamos que a curva* γ, *do plano* xz, *seja dada em coordenadas cartesianas por*

$$z = f(x), \quad y = 0, \quad a \le x \le b,$$

e seja S *a superfície gerada pela rotação de* γ *em torno do eixo* z. *Parametrizando a curva* γ *por*

$$x = v, \ y = 0 \ \text{ e } \ z = f(v), \quad a \le v \le b,$$

segue, do Exemplo 6.11, que a superfície S *é parametrizada por*

$$\mathbf{r}(u,v) = (v\cos u)\,\mathbf{i} + (v\operatorname{sen} u)\,\mathbf{j} + f(v)\,\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le 2\pi, \ a \le v \le b,$$

e o produto vetorial fundamental $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ *é dado por*

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -v\operatorname{sen} u & v\cos u & 0 \\ \cos u & \operatorname{sen} u & f'(v) \end{vmatrix} = \left[vf'(v)\cos u\right]\mathbf{i} + \left[vf'(v)\operatorname{sen} u\right]\mathbf{j} - v\mathbf{k}. \qquad ■$$

É claro que o cilindro, a esfera e o cone, dos exemplos precedentes, podem ser parametrizados como superfícies de revolução. Como ilustração, vamos parametrizar um cone e um paraboloide como superfícies de revolução.

Exemplo 6.13 *Parametrizar a superfície do cone* S *gerado pela rotação, em torno do eixo* z, *da reta*

$$\gamma : z = 2x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le b,$$

Solução Se considerarmos no Exemplo 6.12, $f(x) = 2x$, obteremos para o cone S a seguinte parametrização:

$$\mathbf{r}(u,v) = (v\cos u)\mathbf{i} + (v\operatorname{sen} u)\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le b,$$

e o produto vetorial fundamental $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ é, neste caso,

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = 2(v\cos u)\mathbf{i} + 2(v\operatorname{sen} u)\mathbf{j} - v\mathbf{k}.$$

Como $x = v\cos u$, $y = v\operatorname{sen} u$ e $z = 2v$, temos que a equação cartesiana de S é

$$4x^2 + 4y^2 = z^2. \qquad ■$$

Exemplo 6.14 *Parametrizar o paraboloide* S *gerado pela rotação, em torno do eixo* x, *da parábola*

$$\gamma : z = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad 0 \le z \le b,$$

Solução Inicialmente, vamos colocar a curva γ na forma padrão do Exemplo 6.12, já que o eixo de rotação é o eixo x. Temos

$$\gamma : x = f(z) = z^2, \ y = 0, \qquad 0 \leq z \leq b,$$

e a parametrização do paraboloide S é, portanto,

$$\mathbf{r}(u, v) = v^2\mathbf{i} + (v \operatorname{sen} u)\,\mathbf{j} + (v \cos u)\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \ 0 \leq v \leq b.$$

Como $x = v^2$, $y = v \operatorname{sen} u$ e $z = v \cos u$, deduzimos que a equação cartesiana de S é

$$y^2 + z^2 = x. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.15 *Determinar o plano tangente e a reta normal à esfera*

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 25,$$

no ponto $A(3, 4, 0)$.

Solução Consideremos, como no Exemplo 6.8, a seguinte parametrização para S :

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (5 \cos\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (5 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{j} + (5 \cos\phi)\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \ 0 \leq \phi \leq \pi,$$

com produto vetorial fundamental dado por

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -25\left[(\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi)\mathbf{j} + \cos\phi \operatorname{sen}\phi\mathbf{k}\right].$$

As coordenadas esféricas do ponto $A\,(3, 4, 0)$ são $\rho = 5$, $\theta = \arccos(3/5)$ e $\phi = \pi/2$, de modo que

$$\mathbf{AP} = (x - 3)\mathbf{i} + (y - 4)\mathbf{j} + z\mathbf{k} \ \text{ e } \ \mathbf{N} = \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} = -5(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}),$$

sendo $P\,(x, y, z)$ um ponto de S. O plano tangente é governado pela equação $\mathbf{AP} \bullet \mathbf{N} = 0$ e em coordenadas temos

$$3x + 4y - 25 = 0.$$

Já a reta normal à superfície S passa no ponto A, é paralela ao vetor $\mathbf{N}$ e, portanto, é descrita por $\mathbf{AP} = t\mathbf{N}$, isto é,

$$\left|\begin{array}{l} x = 3 - 15t, \\ y = 4 - 20t \\ z = 0, \end{array}\right.$$

com o parâmetro t variando em $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

6.1.1 Superfícies Orientadas

Consideremos uma superfície regular S, parametrizada por $\mathbf{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Orientar a superfície S significa fixar, sobre S, um campo n de vetores normais unitários, que varia continuamente sobre a superfície S, sempre apontando para fora ou para dentro de S. Ao par $(S, \mathbf{n})$ damos o nome de *superfície orientada*. Quando a superfície S for fechada, isto é, quando S for a fronteira de uma região sólida Ω, adotaremos, como orientação positiva, aquela em que o campo de vetores normais aponta

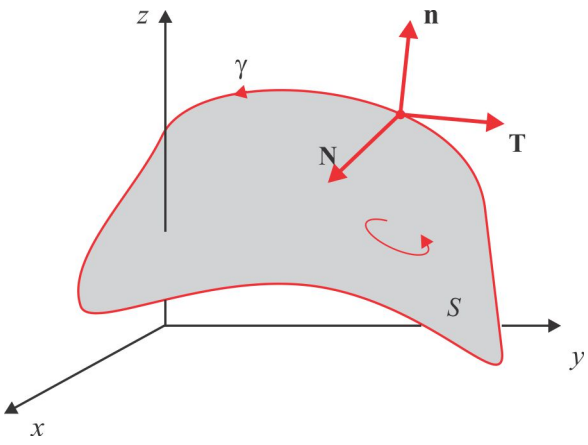


Figura 6.8: Superfície orientada.

para fora de S. Se representarmos por γ a fronteira fechada da superfície orientada S, uma orientação na superfície S induz, na curva γ, uma orientação de modo que é possível escolher, em cada ponto de γ, um terno positivo $\{\mathbf{T}, \mathbf{n}, \mathbf{N}\}$ de vetores, em conformidade com a regra da mão direita, sendo $\mathbf{T}$ tangente e $\mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{n}$ normal à curva γ, como ilustramos na Figura 6.8.

No caso em que a superfície S é parcialmente regular, como ocorre com o cubo do Exemplo 6.16, ilustrado na Figura 6.9, podemos orientá-la de modo que cada curva γ, fronteira comum de duas porções regulares S_1 e S_2, tem orientações opostas em relação a cada uma dessas partes.

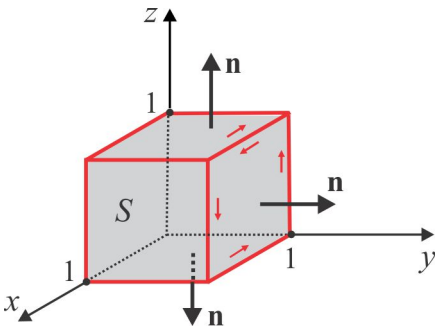


Figura 6.9: Orientação do cubo.

Exemplo 6.16 (uma superfície não orientável) *Um exemplo clássico de uma superfície não orientável é dado pela Faixa de Möbius*[17]. *Para construir uma tal superfície, recortamos de uma folha de papel um retângulo (Figura 6.10(a)) de base e altura medindo, por exemplo,* $20cm$ *e* $1cm$, *respectivamente, e damos uma meia-volta, colando os lados de* $1cm$, *como na Figura 6.10(b) e obtemos a Faixa de Möbius da Figura 6.10(c). Um vetor deslizando sobre a faixa, a partir de determinado ponto* P, *terá seu sentido invertido, no outro lado da faixa, ao retornar ao ponto de partida. Prosseguindo com o percurso, o vetor retornaria ao ponto inicial, sem, contudo, cruzar a borda da faixa. Isso sugere que a Faixa de Möbius tem um só lado. Fogem ao objetivo deste texto detalhes sobre essa superfície, e em um texto de Geometria Diferencial encontra-se, entre outras coisas, que ela é parametrizada por*

$$\mathbf{r}(t,\theta) = (4 + t\cos(\theta/2))\cos\theta\mathbf{i} + (4 + t\cos(\theta/2))\operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + t\operatorname{sen}(\theta/2)\,\mathbf{k}, \quad -1 \le t \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

[17] August Ferdinand Möbius (1790-1868), matemático alemão.

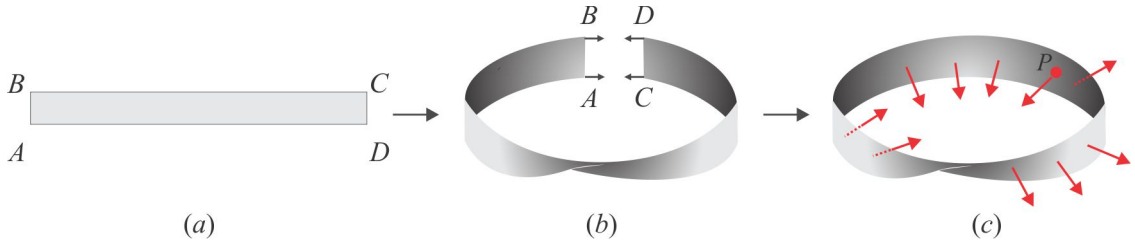


Figura 6.10: Construção de uma Faixa de Möbius.

Diremos que a superfície parametrizada

$$S_1 : \mathbf{r}_1(s,t) = x_1(s,t)\mathbf{i} + y_1(s,t)\mathbf{j} + z_1(s,t)\mathbf{k}, \quad (s,t) \in D_1$$

é equivalente à superfície parametrizada

$$S_2 : \mathbf{r}_2(u,v) = x_2(u,v)\mathbf{i} + y_2(u,v)\mathbf{j} + z_2(u,v)\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D_2,$$

quando existir uma função bijetora $\varphi : D_1 \to D_2$, $\varphi(s,t) = u(s,t)\mathbf{i} + v(s,t)\mathbf{j}$, de D_1 sobre D_2, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tal que

$$\mathbf{r}_1(s,t) = \mathbf{r}_2(\varphi(s,t)), \quad s,t \in D_1.$$

A função φ recebe o nome de *mudança de coordenadas* ou *mudança de parâmetros*. Se este for o caso, diremos que as superfícies S_1 e S_2 jazem na mesma *classe de equivalência* e teremos a seguinte relação entre os produtos vetoriais fundamentais:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} = J(\varphi)\left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right),$$

onde $J(\varphi)$ é o Jacobiano $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$. De fato, como $\mathbf{r}_1(s,t) = \mathbf{r}_2(u,v)$, $u = u(s,t)$ e $v = v(s,t)$ temos, pela Regra da Cadeia, que

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s}\right) \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right)\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}.
\end{aligned}$$

Portanto, S_1 e S_2 possuem a mesma orientação, se $J(\varphi) > 0$, e orientações opostas, caso contrário.

Exemplo 6.17 *O gráfico de uma função diferenciável $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, é uma superfície S, em que é sempre possível definir um campo de vetores normais e unitários $\mathbf{n}$ a S. Neste caso, uma*

orientação para S é dada por $(S, \mathbf{n})$ ou $(S, -\mathbf{n})$. Quando S é definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$, sendo F diferenciável em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e $\nabla F \neq \mathbf{0}$, consideramos

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}. \qquad \blacksquare$$

Serão consideradas apenas superfícies regulares, exceto, possivelmente, em um número finito de pontos, que são imagens de funções $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tais que:

- D é uma região compacta (limitada e fechada) do plano $\mathbb{R}^2$.
- S é uma *superfície simples*, isto é, f é injetora, exceto, possivelmente, na fronteira da região D. Na forma parametrizada, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ significa que $\mathbf{r}(u_1, v_1) \neq \mathbf{r}(u_2, v_2)$, para todos $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$, com $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$. Por exemplo, a superfície S de uma esfera é uma superfície regular, simples e fechada, cuja parametrização é dada no Exemplo 6.8.

Exercícios & Complementos.

1. Determine uma representação paramétrica para as seguintes superfícies:
   (a) O plano xy.
   (b) O plano $z = x$.
   (c) O plano $x + y + z = 1$.
   (d) O cilindro de revolução $x^2 + z^2 = a^2$, com $a > 0$.
   (e) O paraboloide $z = x^2$.
   (f) O cilindro elítico $y^2 + 9z^2 = 9$.

2. Determine uma representação cartesiana para as seguintes superfícies:
   (a) O elipsoide $\mathbf{r} = (a \cos u \cos v)\mathbf{i} + (b \operatorname{sen} u \cos v)\mathbf{j} + \gamma \operatorname{sen} v\mathbf{k}$.
   (b) O paraboloide elítico $\mathbf{r} = (au \cos v)\mathbf{i} + (bu \operatorname{sen} v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.
   (c) O paraboloide hiperbólico $\mathbf{r} = (au \cosh v)\mathbf{i} + (bu \operatorname{senh} v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.
   (d) O hiperboloide $\mathbf{r} = (a \operatorname{senh} u \cos v)\mathbf{i} + (b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v)\mathbf{j} + \gamma \cosh u\mathbf{k}$.

3. Seja S o toro de revolução, gerado pela rotação do círculo $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, $y = 0$, com $0 < b < a$, em torno do eixo z. Expresse a superfície S na forma paramétrica.

4. Em cada caso, determine o plano tangente e a reta normal à superfície, no ponto indicado.
   (a) $z = xy$, em $P(1, 1, 1)$ (b) $z = x^2$, em $P(2, 1, 4)$. (c) $x^2 + y^2 = 8$, em $P(2, 2, 3)$.

5. Seja S a esfera de raio 2, centrada na origem. Determinar o plano tangente a S, no ponto $A(1, 1, \sqrt{2})$, considerando a esfera como:
   (a) Uma superfície parametrizada por

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (2 \cos\theta \operatorname{sen}\phi)\,\mathbf{i} + (2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)\,\mathbf{j} + (2 \cos\phi)\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi.$$

(b) Uma superfície de nível da função $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) O gráfico de $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

6. Seja S a superfície parametrizada por

$$\mathbf{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\,\mathbf{i} + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathbf{j} + \theta\mathbf{k}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1.$$

(a) Esboce a superfície S.

(b) Encontre uma expressão para o vetor normal à superfície S.

(c) É a superfície S regular?

7. Seja S o hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(a) Encontre uma parametrização para S.

(b) Encontre um vetor normal à superfície S.

(c) Encontre o plano tangente à superfície S, no ponto $A(a, b, 0)$.

6.2 Área de uma Superfície

Usando a noção de integral dupla calculamos áreas de regiões planas, que são tipos particulares de superfícies. O que temos em mente, agora, é estabelecer uma fórmula que nos permita calcular a área de uma superfície do $\mathbb{R}^3$, não necessariamente plana, usando como ferramenta a integral dupla.

Seja S uma superfície do $\mathbb{R}^3$, descrita na forma cartesiana implícita pela equação $F(x, y, z) = 0$, e representemos por D a projeção ortogonal de S sobre um plano π que, em geral, é um dos planos coordenados: xy, xz ou yz. Se representarmos por dS a porção elementar (infinitesimal) da superfície S e por dA a área elementar (projeção de dS no plano π), para obtermos uma relação entre dS e dA, o primeiro passo é aproximar dS pela porção do plano tangente a S, como ilustra a Figura 6.11.

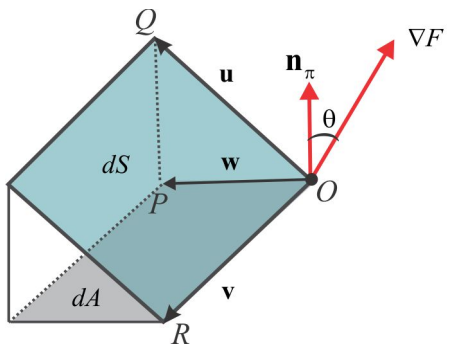


Figura 6.11: Área elementar $dS \approx |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.

Se $\mathbf{n}_\pi$ é um vetor unitário, normal ao plano π, então os vetores $\mathbf{PQ}$ e $\mathbf{n}_\pi$ são paralelos, de modo que $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{PQ} = \mathbf{w} + \lambda\mathbf{n}_\pi$ e, portanto,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (\mathbf{w} + \lambda\mathbf{n}_\pi) \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} + \lambda(\mathbf{n}_\pi \times \mathbf{v}). \tag{6.6}$$

Como $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{n}_\pi$ são paralelos e $\mathbf{n}_\pi \times \mathbf{v}$ é ortogonal a $\mathbf{n}_\pi$, segue de (6.6) que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{n}_\pi = (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{n}_\pi + \lambda (\mathbf{n}_\pi \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{n}_\pi = |\mathbf{w} \times \mathbf{v}| = dA. \tag{6.7}$$

e, por conseguinte,

$$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{n}_\pi| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| \, |\cos\theta| = dS \, |\cos\theta| \, . \tag{6.8}$$

Comparando (6.7) e (6.6), obtemos a seguinte expressão para o dS:

$$dS = \frac{dA}{|\cos\theta|} = \frac{|\nabla F| \, dA}{|\nabla F \bullet \mathbf{n}_\pi|}. \tag{6.9}$$

A área da superfície S é obtida pela soma (integração) das áreas elementares dS, isto é,

$$\mathrm{A}\,(S) = \iint_S dS = \iint_D \frac{|\nabla F| \, dA}{|\nabla F \bullet \mathbf{n}_\pi|}.$$

Se, por exemplo, o plano π, onde projetamos a superfície S, é o plano xy, então $\mathbf{n}_\pi = \mathbf{k}$ e $|\nabla F \bullet \mathbf{n}_\pi| = |F_z|$ e, neste caso, teremos

$$\mathrm{A}\,(S) = \iint_S dS = \iint_D \frac{|\nabla F| \, dxdy}{|F_z|}.$$

Um caso particular interessante ocorre quando a superfície S é descrita, na forma explícita, pela equação $z = f\,(x, y)\,,\ (x, y) \in D$, e o plano π é o plano xy. Se esse for o caso, temos $\mathbf{n}_\pi = \mathbf{k}$ e consideramos $F\,(x, y, z) = f\,(x, y) - z$ para obtermos:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \, dxdy$$

e a área da superfície S é calculada pela fórmula

$$\mathrm{A}\,(S) = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy. \tag{6.10}$$

Exemplo 6.18 *Determinar a área da superfície S, delimitada pela elipse obtida por interseção do plano $z = 2x + 2y + 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.*

Solução A projeção de S sobre o plano xy é o disco $D : x^2 + y^2 \leq 1$ e, como $z = f(x, y) = 2x + 2y + 1$, resulta de (6.10) que

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(S) &= \iint_D \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} \, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} dxdy \\ &= 3 \iint_D dxdy = 3\,\mathrm{A}\,(D) = 3\pi. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 6.19 (área de uma esfera) *Como segunda ilustração, vamos calcular a área de uma esfera de raio R. A superfície da esfera de raio R, com centro na origem, é descrita pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e a projeção de S no plano xy é o disco $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq 1$. A função $F\,(x, y, z)$ que figura na fórmula (6.9) é dada por $F\,(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, de modo que $\nabla F = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$ e, portanto,*

$$dS = \frac{|\nabla F|}{|F_z|} dxdy = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dxdy}{2\,|z|} = \frac{R dxdy}{|z|}.$$

Em coordenadas polares (r,θ), temos $z^2 = R^2 - r^2$ e, considerando o hemisfério superior, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(S) &= \iint_{D_{xy}} \frac{Rdxdy}{|z|} = 2R\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2R\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{R^2-r^2}} \\ &= 4\pi R\int_0^{R} \frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi R\int_0^{R^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = (2\pi R)\left[2\sqrt{t}\right]_{t=0}^{t=R^2} = 4\pi R^2. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 6.20 (área de um cilindro) *Área de um cilindro circular reto de raio a e altura h.*

Solução Consideremos o cilindro circular reto, de raio a e altura h, da Figura 6.12, cuja equação cartesiana é

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad 0 \le z \le h.$$

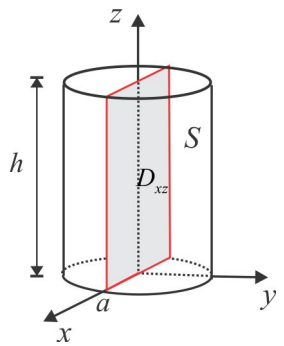


Figura 6.12: Área do cilindro circular reto.

A projeção de S no plano xz é a região retangular $D_{xz} : -a \le x \le a, \quad 0 \le z \le h$, e, portanto,

$$dS = \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \bullet \mathbf{j}|}dxdz = \frac{adxdz}{|y|}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(S) &= 2\int_{-a}^{a}\int_0^{h} \frac{adxdz}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2ah\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad (\text{fazer } x = a\cos\theta) \\ &= 2ah\int_0^{\pi} \frac{a\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta}{\sqrt{a^2(1-\cos^2\theta)}} = 2\pi ah. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 6.21 (área de um cone) *Área de um cone circular reto de raio a e altura h.*

Solução Na Figura 6.13 ilustramos um cone circular reto, de altura h e raio a, onde destacamos o disco $D_{xy} : x^2 + y^2 \le a^2$, projeção do cone no plano xy. Se α representa o ângulo entre a geratriz g e o eixo z, então

$$\tan\alpha = \frac{a}{h} = \frac{r}{z} \Rightarrow \frac{a}{h} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

e daí resulta que o cone é descrito, na forma cartesiana, pela equação

$$z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Assim,

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dxdy = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+h^2}\; dxdy$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(S) &= \iint_{D_{xy}} \frac{1}{a}\sqrt{a^2+h^2}\, dxdy = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+h^2}\,\mathrm{A}(D_{xy}) \\ &= \pi a\sqrt{a^2+h^2} = \pi a g. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

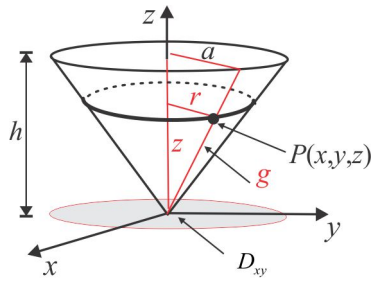


Figura 6.13: Área do cone circular reto.

Exemplo 6.22 *Calcular a área da porção do plano $x+y+z=a$, $a>0$, interna ao cilindro $y^2+z^2=a^2$.*

Solução A superfície S é descrita por $F(x,y,z)=x+y+z-a=0$ e o cilindro $y^2+z^2=a^2$ delimita a porção a ser considerada. Estamos diante de uma situação em que é adequado projetar a superfície no plano yz. A projeção no plano yz é o disco $D_{yz}: y^2+z^2\leq a^2,\ x=0$, de modo que

$$\mathrm{A}(S) = \iint_{D_{yz}} \frac{|\nabla F|\, dydz}{|\nabla F \bullet \mathbf{i}|} = \iint_{D_{yz}} \frac{\sqrt{3}dydz}{|F_x|} = \sqrt{3}\iint_{D_{yz}} dydz = \sqrt{3}A(D_{yz}) = \pi a^2\sqrt{3}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.23 *Calcular a área da porção do paraboloide $z=1-x^2-y^2$, delimitada pelo cilindro vazado $1\leq x^2+y^2\leq 9,\quad x\geq 0,\ y\geq 0$.*

Solução Inicialmente faça um esboço do gráfico para se familiarizar com a situação geométrica. Temos que $dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$ e, usando coordenadas polares, encontramos:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(S) &= \iint_S dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_1^3 \sqrt{1+4r^2}rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\int_5^{37}\sqrt{t}\left(\tfrac{1}{8}dt\right) \\ &= \frac{\pi}{24}\left(37\sqrt{37}-5\sqrt{5}\right) \simeq 30.71. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 6.24 *Calcular a área da porção do cilindro $y^2+z^2=16$, acima da região triangular*

$$D_{xy}: 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 2-x.$$

Solução Na Figura 6.14 destacamos a superfície S e sua projeção D_{xy} no plano xy. A superfície S é descrita por $z=\sqrt{16-y^2}$, de modo que

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy = \frac{4dxdy}{\sqrt{16-y^2}}.$$

Assim, a área de S é dada por

$$\mathrm{A}\,(S) = 4\iint_S dS = \iint_{D_{xy}} \frac{4dxdy}{\sqrt{16-y^2}} = 4\int_0^2 \int_0^{2-y} \frac{dxdy}{\sqrt{16-y^2}} = 4\int_0^2 \frac{(2-y)\,dy}{\sqrt{16-y^2}}. \tag{6.11}$$

Para calcular a integral do lado direito de (6.11), observamos que

$$\begin{aligned} 4\int_0^2 \frac{(2-y)\,dy}{\sqrt{16-y^2}} &= 4\left[\int_0^2 \frac{2dy}{\sqrt{16-y^2}} - \int_0^2 \frac{ydy}{\sqrt{16-y^2}}\right] = 4\left[2\int_0^{1/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \int_{12}^{16} \frac{du}{2\sqrt{u}}\right] \\ &= 8\left[\operatorname{arcsen}(1/2) - \operatorname{arcsen}(0)\right] - 4\left[\sqrt{16}-\sqrt{12}\right] \\ &= 4\pi/3 + 8\sqrt{3} - 16. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

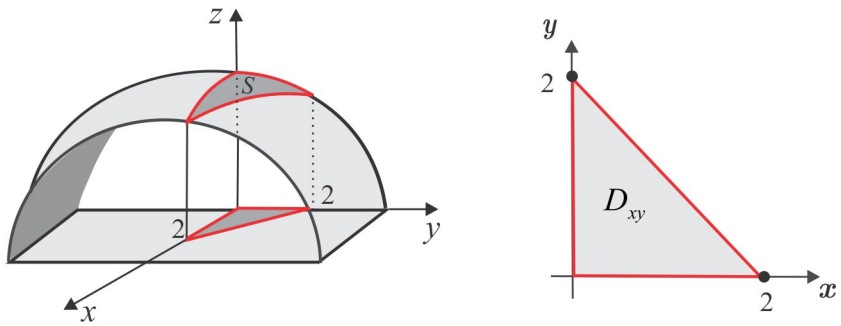


Figura 6.14: Porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$.

Exemplo 6.25 *Calcular a área da porção S do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, interna ao cilindro $x^2+y^2 = 2x$ e externa ao cilindro $x^2+y^2 = 1$.*

Solução Na Figura 6.15 ilustramos a superfície S e sua projeção no plano xy.

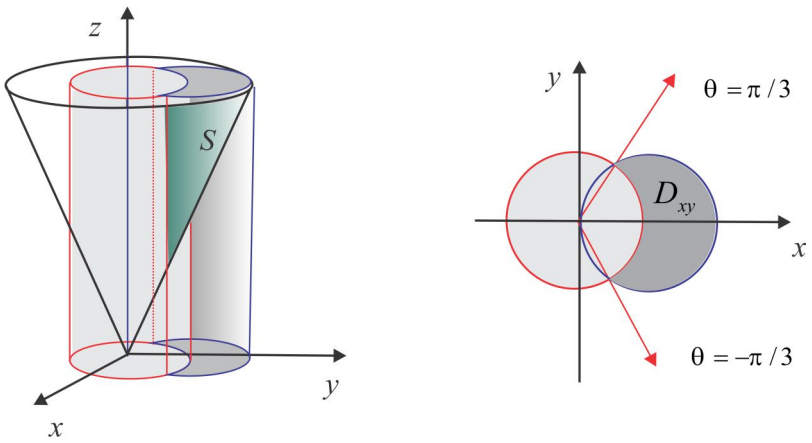


Figura 6.15: Parte do cone entre dois cilindros.

A superfície S é descrita pela equação $z = \sqrt{x^2+y^2}$, de modo que

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\; dxdy = \sqrt{2}\; dxdy.$$

A projeção de S no plano xy é região D entre as circunferências $x^2+y^2=2x$ e $x^2+y^2=1$. Usando coordenadas polares no cálculo da integral dupla, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}(S) &= \sqrt{2}\iint_{D_{xy}} dxdy = \sqrt{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_{1}^{2\cos\theta} rdrd\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(4\cos^2\theta-1\right)d\theta = 2\sqrt{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2\theta d\theta - \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \\
&= \sqrt{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}(1+\cos 2\theta)\,d\theta - \frac{\pi\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(2\pi/3)+\frac{\pi\sqrt{2}}{3} \\
&= \sqrt{2}\left(\pi/3+\sqrt{3}/2\right). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

6.2.1 Forma Parametrizada

Quando a superfície S é dada na forma parametrizada

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad (u,v)\in D,$$

as retas $u=\lambda$ e $v=\mu$ particionam a região D, do plano uv, em retângulos elementares de áreas $dA = dudv$, as curvas $u\mapsto \mathbf{r}(u,\mu)$ e $v\mapsto \mathbf{r}(\lambda,v)$, com u e v variando na região D, são usadas para particionar a superfície S em áreas elementares dS, e cada dS é aproximada pela porção correspondente do plano tangente de área $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, sendo $\mathbf{a}=\mathbf{r}_u du$ e $\mathbf{b}=\mathbf{r}_v dv$ vetores tangentes, como ilustrado na Figura 6.16.

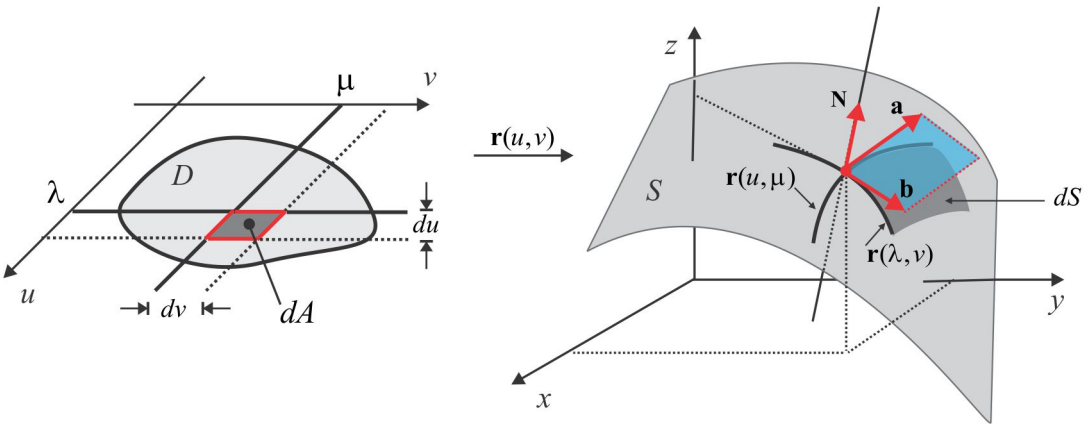


Figura 6.16: Área elementar $dS \approx |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|dudv$.

Assim, a área elementar, na forma parametrizada, é

$$dS = |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,dudv$$

e, portanto, a área da superfície S é calculada pela fórmula

$$A(S) = \iint_{D_{uv}} |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,dudv. \tag{6.12}$$

Se representarmos por θ o ângulo entre os vetores $\mathbf{r}_u$ e $\mathbf{r}_v$, teremos

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 &= |\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 |\operatorname{sen}\theta|^2 \\ &= |\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right) \\ &= |\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 - (|\mathbf{r}_u| |\mathbf{r}_v| \cos\theta)^2 \\ &= |\mathbf{r}_u|^2 |\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v)^2 \end{aligned}$$

e a fórmula (6.12) para o cálculo da área de S se escreve sob a forma

$$A(S) = \iint_{D_{uv}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv,$$

onde $E = |\mathbf{r}_u|^2$, $F = \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v$ e $G = |\mathbf{r}_v|^2$.

Exemplo 6.26 (o dS em coordenadas cilíndricas) *Usando as coordenadas cilíndricas θ e z, obtivemos, no Exemplo 6.6, a seguinte parametrização para o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$:*

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (a\cos\theta)\,\mathbf{i} + (a\operatorname{sen}\theta)\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le h.$$

Neste caso, temos $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = a$ e obtemos a expressão para o dS em coordenadas cilíndricas

$$dS = |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z|\, dzd\theta = adzd\theta.$$

Para o cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$, do Exemplo 6.7, a parametrização é

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (a\operatorname{sen}2\theta)\,\mathbf{i} + 2a\left(\operatorname{sen}^2\theta\right)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le z \le h$$

e obtemos $|\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z| = 2a$. Neste caso, $dS = 2adzd\theta$. ■

Exemplo 6.27 *Calcular a área da porção do cilindro $S : x^2 + z^2 = a^2$, delimitada pelo cilindro $y^2 = a(x + a)$, $a > 0$.*

Solução O cálculo da área será apresentado de duas maneiras: a primeira usando o dS em coordenadas cartesianas e depois em coordenadas cilíndricas. Observemos a Figura 6.17, onde ilustramos a porção superior da superfície S e sua projeção D no plano xy.

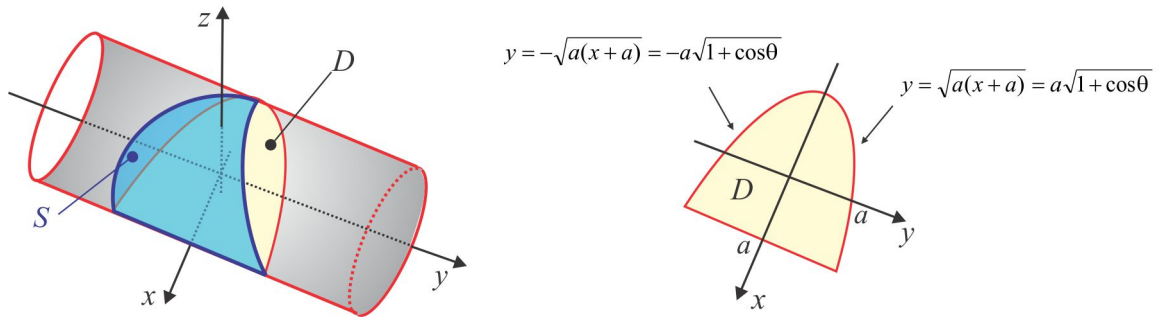


Figura 6.17: Área entre os cilindros do Exemplo 6.27

■ **Em coordenadas cartesianas**

Neste caso,

$$S : x^2 + z^2 = a^2 \quad \text{e} \quad dS = \frac{a\ dxdy}{|z|}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}\,(S) &= 2\iint_D \frac{a\ dxdy}{z} = 2a\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= 2a\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2+ax}}^{\sqrt{a^2+ax}} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2}} = 4a\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2+ax}\ dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= 4a^{3/2}\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 8a^2\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

■ **Em coordenadas cilíndricas**

Usando as coordenadas cilíndricas θ e y, temos que $dS = ad\theta dy$ e a região D é descrita por

$$D : 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ -a\sqrt{1+\cos\theta} \le y \le a\sqrt{1+\cos\theta}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}\,(S) &= \int_0^{2\pi}\int_{-a\sqrt{1+\cos\theta}}^{a\sqrt{1+\cos\theta}} ady d\theta = 2a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\ d\theta \\
&= 2a^2\int_0^{2\pi}\frac{|\operatorname{sen}\theta|}{\sqrt{1-\cos\theta}}\ d\theta = 2a^2\left[\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}\ d\theta - \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}\ d\theta\right] \\
&= 4a^2\left[\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t}}\right] = 4a^2\left[2\sqrt{t}\right]_{t=0}^{t=2} = 8a^2\sqrt{2}. \qquad ■
\end{aligned}$$

Exemplo 6.28 (o dS em coordenadas esféricas) *Usando os ângulos esféricos θ e ϕ, encontramos, no Exemplo 6.8, a seguinte parametrização para a esfera de centro na origem e raio a :*

$$\mathbf{r}\,(\theta,\phi) = (a\cos\theta\operatorname{sen}\phi)\,\mathbf{i} + (a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\,\mathbf{j} + (a\cos\phi)\,\mathbf{k}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi.$$

O dS em coordenadas esféricas é, portanto,

$$dS = |\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi|\ d\phi d\theta = a^2\operatorname{sen}\phi d\phi d\theta. \qquad ■$$

Exemplo 6.29 *Vamos calcular a área da superfície do cone de revolução S gerado pela rotação, em torno do eixo z, da reta $z = x$, $y = 0$, entre $x = 0$ e $x = 1$.*

Solução Vimos, no Exemplo 6.9, que uma representação paramétrica para S é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(u,v) = (v\cos u)\mathbf{i} + (v\operatorname{sen}u)\mathbf{j} + v\mathbf{k},\ \ 0 \le u \le 2\pi \ \text{ e } \ 0 \le v \le 1,$$

e, portanto,

$$\mathbf{r}_u = -(v\operatorname{sen}u)\mathbf{i} + (v\cos u)\mathbf{j} \ \text{ e } \ \mathbf{r}_v = \cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen}u\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

de onde resulta que

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (v\cos u)\mathbf{i} + (v\operatorname{sen}u)\mathbf{j} - v\mathbf{k}.$$

Assim,

$$\mathrm{A}(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2v^2}dvdu = \pi\sqrt{2}. \qquad ■$$

Exemplo 6.30 (área de uma superfície de revolução) *A superfície S, gerada pela rotação, em torno do eixo z, da curva γ do plano xz, dada por*

$$\gamma : z = f(x), \quad x \in [a, b],$$

é descrita, na forma cartesiana, pela equação $z = f(\pm\sqrt{x^2+y^2})$ e, para parametrizá-la, designemos por v a distância de um ponto P de S ao eixo de rotação z e por u o ângulo polar. Dessa forma, a superfície S é descrita por

$$\mathbf{r}(u, v) = (v\cos u)\mathbf{i} + (v \operatorname{sen} u)\mathbf{j} + f(v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [a, b],$$

e um cálculo simples nos dá

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left[vf'(v)\cos u\right]\mathbf{i} + \left[vf'(v)\operatorname{sen} u\right]\mathbf{j} - v\mathbf{k}.$$

Assim,

$$dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dudv = v\sqrt{1 + f'(v)^2}dudv$$

e a área de S é calculada pela fórmula

$$\mathrm{A}(S) = \int_0^{2\pi}\int_a^b v\sqrt{1+f'(v)^2}dudv = 2\pi\int_a^b v\sqrt{1+f'(v)^2}dv. \tag{6.13}$$

Se γ é o gráfico da função $z = f(x)$, $a \le x \le b$, então a integral do lado direito de (6.13) nada mais é do que a integral de linha, ao longo da curva γ, do campo escalar $\varphi(x, y, z) = x$, e, portanto,

$$\mathrm{A}(S) = 2\pi\int_\gamma x ds. \qquad \blacksquare \tag{6.14}$$

Exemplo 6.31 (a fórmula de Pappus) *Suponhamos que a curva γ, do exemplo precedente, representa um fio delgado uniforme, de massa M e comprimento L, com densidade linear constante σ. Observando que $\sigma = M/L$, obtemos a partir de (6.14), que*

$$\mathrm{A}(S) = \tfrac{2\pi}{\sigma}\int_\gamma \sigma x ds = 2\pi\tfrac{L}{M}\int_\gamma \sigma x ds = 2\pi L\overline{x},$$

sendo $\overline{x}$ a abscissa do centroide e L o comprimento de γ. Representando por h a distância do centroide de γ ao eixo de rotação, então $h = \overline{x}$ e obtemos a Fórmula de Pappus

$$\mathrm{A}(S) = 2\pi Lh. \qquad \blacksquare$$

Exercícios & Complementos.

1. Em cada caso, calcule a área da superfície S.

   (a) S é uma esfera de raio ρ.

   (b) S é a porção do plano $x + y + z = a$, com $a > 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

   (c) S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = ay$.

   (d) S é a porção do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $z \ge 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.

(e) S é a porção do paraboloide $x^2 + z^2 = 2ay$, com $a > 0$, abaixo do plano $y = a$.

(f) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 16$, compreendida acima da região triangular $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 2 - x$.

(g) S é a porção do plano $3x + 2y + z = 7$ no primeiro octante.

(h) S é a porção do cilindro parabólico $z^2 = 8x$, compreendida acima da região $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

(i) S é a porção do cilindro $y^2 + z^2 = 4$, interna ao cilindro parabólico $x^2 = 2y + 4$ e acima do plano $z = 0$.

(j) S é o triângulo com vértices nos pontos $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ e $C(0, 0, 2)$.

2. Seja S a superfície de um paralelogramo em $\mathbb{R}^3$ e represente por S_1, S_2 e S_3 as projeções de S nos planos coordenados. Mostre que

$$A(S) = \sqrt{A(S_1)^2 + A(S_2)^2 + A(S_3)^2}.$$

3. Calcule a área total da região ilustrada na Figura 6.18. Use as aproximações: $\ln 2 \simeq 0.7$ e $\int_{0.5}^{2} \sqrt{1 + x^{-4}}\, dx \simeq 2.26$.

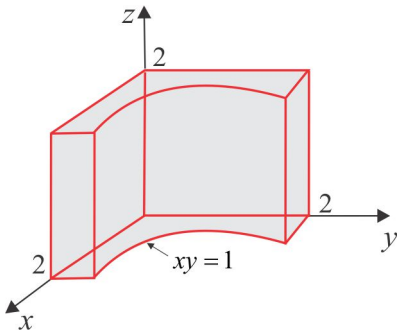


Figura 6.18: Figura do Exercício 3

6.3 Integral de Superfície

Como motivação ao conceito de integral sobre uma superfície, deixe-nos considerar uma distribuição de carga elétrica sobre uma superfície S, definida na forma cartesiana implícita pela equação

$$F(x, y, z) = 0,$$

e representemos por $\rho(x, y, z)$ a densidade superficial de carga, isto é, a carga elétrica por unidade de área. A carga total distribuída na porção elementar dS é aproximada por $dQ = \rho(x, y, z)\, dS$ e o lógico é que, sendo a porção dS de dimensão (área) infinitesimal, a densidade ρ sobre dS está próxima de um valor constante. A carga total Q sobre S é o *somatório* das cargas elementares dQ e esse somatório, denominado *integral de superfície*, é representado por

$$\iint_S \rho(x, y, z)\, dS.$$

Admitindo que a distribuição $\rho(x,y,z)$ e as derivadas parciais de primeira ordem da função $F(x,y,z)$ que representa S sejam contínuas, usamos a expressão (6.9) e obtemos

$$\iint_S \rho(x,y,z)\,dS = \iint_D \rho(x,y,z)\,\frac{|\nabla F|\,dA}{|\nabla F \bullet \mathbf{n}_\pi|},$$

sendo D a projeção da superfície S no plano π. Se o plano π é o plano xy e $F_z \neq 0$, então $\mathbf{n}_\pi = \mathbf{k}$ e teremos

$$\iint_S \rho(x,y,z)\,dS = \iint_D \frac{\rho(x,y,z)\sqrt{F_x^2+F_z^2+F_z^2}\,dxdy}{|F_z|}.$$

Há dois casos interessantes que devemos ressaltar.

■ Forma Cartesiana Explícita

No caso em que a superfície S é o gráfico de uma função $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, de classe C^1, então a integral de superfície da função contínua $\rho(x,y,z)$ sobre S é calculada pela fórmula

$$\iint_S \rho(x,y,z)\,dS = \iint_D \rho(x,y,z)\sqrt{1+(f_x)^2+(f_y)^2}\,dxdy.$$

■ Forma Parametrizada

Quando a superfície S for parametrizada por

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D,$$

e as componentes $x(u,v)$, $y(u,v)$ e $z(u,v)$ possuirem derivadas parciais de primeira ordem, contínuas em D, então $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dudv$ e teremos

$$\iint_S \rho(x,y,z)\,dS = \iint_D \rho(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dudv.$$

Exemplo 6.32 *Calcular a integral da função $\rho(x,y,z) = xy$ sobre a superfície cilíndrica S, dada por $x^2+y^2 = 4$ e $-1 \leq z \leq 1$.*

Solução De acordo com o Exemplo 6.6, uma representação paramétrica para S é dada por

$$\mathbf{r}(u,v) = (2\cos u)\mathbf{i} + (2\,\mathrm{sen}\,u)\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi \ \text{ e } \ -1 \leq v \leq 1,$$

de modo que

$$\mathbf{r}_u = (-2\,\mathrm{sen}\,u)\mathbf{i} + (2\cos u)\,\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{k} \ \text{ e } \ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (2\cos u)\mathbf{i} + (2\,\mathrm{sen}\,u)\mathbf{j}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_S xydS &= \iint_D 4\cos u\,\mathrm{sen}\,u\,|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dudv \\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \mathrm{sen}(2u)dvdu = 0. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Exemplo 6.33 (usando a propriedade aditiva) *Calcular a integral da função $\rho(x,y,z) = xyz$ sobre o cubo, no primeiro octante, delimitado pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$.*

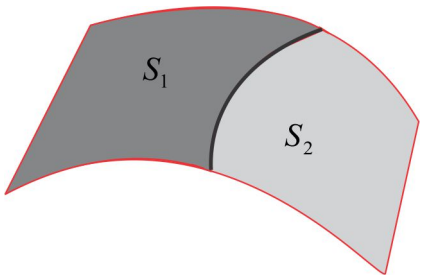


Figura 6.19: Superfície $S = S_1 + S_2$.

Solução Iniciamos mencionando a propriedade aditiva para a integral de superfície. Quando a superfície S for composta por duas ou mais superfícies regulares, digamos $S = S_1 + S_2$, como ilustra a Figura 6.19, teremos

$$\iint_S \rho dS = \iint_{S_1} \rho dS + \iint_{S_2} \rho dS.$$

A função $\rho(x, y, z) = xyz$ se anula nas faces do cubo S que jazem nos planos coordenados e nessas faces a integral de $\rho(x, y, z)$ é zero. Na face S_1, sobre o plano $x = 1$, temos $\rho(x, y, z) = yz$ e $dS = dydz$, de modo que

$$\iint_{S_1} \rho dS = \int_0^1 \int_0^1 yzdydz = 1/4.$$

De modo similar, nas faces S_2 e S_3 sobre os planos $y = 1$ e $z = 1$, respectivamente, encontramos

$$\iint_{S_2} \rho dS = \int_0^1 \int_0^1 xzdxdz = 1/4 \quad \text{e} \quad \iint_{S_3} \rho dS = \int_0^1 \int_0^1 xydxdy = 1/4$$

e, sendo assim,

$$\iint_S xyzdS = \iint_{S_1} yzdS + \iint_{S_2} xzdS + \iint_{S_3} xydS = 3/4. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.34 *Calcular* $\iint_S xzdS$, *sobre a esfera* $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solução No Exemplo 6.8, com os ângulos esféricos θ e ϕ, parametrizamos a esfera S por

$$x = a\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \;\; y = a\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \;\; z = a\cos\phi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \;\; 0 \le \phi \le \pi,$$

e, no Exemplo 6.28, encontramos $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta$. Logo,

$$\begin{aligned} \iint_S xzdS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{a\cos\theta\operatorname{sen}\phi}_{x} \underbrace{a\cos\phi}_{z} \underbrace{a^2\operatorname{sen}\phi d\phi d\theta}_{dS} \\ &= a^4 \left[\int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta\right] \left[\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\phi\cos\phi d\phi\right] = 0. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 6.35 *Seja* S *é a porção do cilindro* $x = y^2$, *situada no primeiro octante, entre os planos* $z = 5$, $y = 1$ *e* $y = 4$. *Calcular* $\iint_S \frac{xz}{y} dS$.

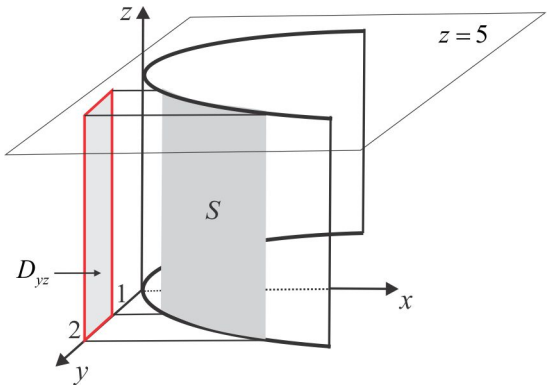


Figura 6.20: Projetando S no plano yz.

Solução Ilustramos, na Figura 6.20, a superfície S e sua projeção no plano yz.
Temos que

$$dS = \sqrt{1 + (x_y)^2 + (x_z)^2}\; dydz = \sqrt{1 + 4y^2}\; dydz,$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{xz}{y} dS &= \int_1^4 \int_0^5 yz\sqrt{1+4y^2}\; dydz = \frac{25}{2}\int_1^4 y\sqrt{1+4y^2}\; dy \\ &= \frac{25}{16}\int_5^{65} \sqrt{t}\; dt = \frac{25}{24}\left[65\sqrt{65} - 5\sqrt{5}\right]. \end{aligned}$$

Exemplo 6.36 *Seja S a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, entre os planos $z = 1$ e $z = 2$. Calcular a integral de superfície* $\iint_S z\sqrt{x^2+y^2}dS$.

Solução Na Figura 6.21 ilustramos a superfície S e sua projeção no plano xy. O cálculo da integral será apresentado de duas maneiras.

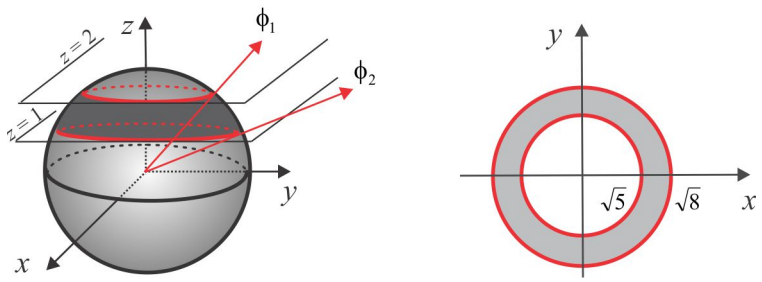


Figura 6.21: Corte da esfera por 2 planos.

■ **Usando coordenadas cartesianas** Neste caso, temos

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad dS = \frac{3dxdy}{z}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\iint_S z\sqrt{x^2+y^2}dS &= 3\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\ dxdy \\ &= 3\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} r^2 dr d\theta \\ &= 2\pi\left(8\sqrt{8}-5\sqrt{5}\right).\end{aligned}$$

■ **Usando coordenadas esféricas** Neste caso, temos

$$x = 3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ y = 3\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ z = 3\cos\phi,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\ \phi_1\le\phi\le\phi_2,$$

e observando a Figura 6.21, vemos que $\mathrm{sen}\,\phi_1 = \sqrt{5}/3$ e $\mathrm{sen}\,\phi_2 = \sqrt{8}/3$. Logo,

$$\begin{aligned}\iint_S z\sqrt{x^2+y^2}dS &= \int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_0^{2\pi} \underbrace{3\cos\phi}_{z}\ \underbrace{3\,\mathrm{sen}\,\phi}_{\sqrt{x^2+y^2}}\ \underbrace{9\,\mathrm{sen}\,\phi d\theta d\phi}_{dS} \\ &= 162\pi\int_{\mathrm{sen}\,\phi_1}^{\mathrm{sen}\,\phi_2} u^2 du = \frac{54\pi}{3}\left[(\mathrm{sen}\,\phi_2)^3-(\mathrm{sen}\,\phi_2)^3\right] \\ &= 2\pi\left(8\sqrt{8}-5\sqrt{5}\right). \qquad ■\end{aligned}$$

Exemplo 6.37 *Seja S a porção do paraboloide $2z = x^2+y^2$, acima do quadrado*

$$D_{xy}: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1.$$

Calcular a integral de supaerfície $\iint_S xydS$.

Solução Temos que

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2}\ dxdy$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned}\iint_S xydS &= \int_0^1\int_0^1 xy\sqrt{1+x^2+y^2}\ dxdy \qquad (\text{ fazer } u = 1+x^2+y^2) \\ &= \int_0^1 y\left[\int_{1+y^2}^{2+y^2}\tfrac{1}{2}\sqrt{u}du\right]dy \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}\int_0^1 y\left[(2+y^2)^{3/2}-(1+y^2)^{3/2}\right]dy \qquad (\text{ fazer } s = 1+y^2 \text{ e } t = 2+y^2) \\ &= \tfrac{1}{3}\int_2^3 \tfrac{1}{2}t^{3/2}dt - \tfrac{1}{3}\int_1^2 \tfrac{1}{2}s^{3/2}ds = \tfrac{1}{15}(9\sqrt{3}-8\sqrt{2}+1). \qquad ■\end{aligned}$$

6.3.1 Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia

Suponhamos que a superfície S representa uma placa de densidade (massa por unidade de área) superficial $\sigma = \sigma(x,y,z)$ e que M representa a massa da placa S. Se representarmos por dM a massa elementar da porção dS, teremos

$$dM = \sigma(x,y,z)\,dS$$

e a massa da superfície S será, portanto,

$$M = \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS.$$

As coordenadas do centro de massa $C(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ da superfície S são calculadas pelas fórmulas:

$$\overline{x} = \tfrac{1}{M}\iint_S x\sigma(x, y, z)\, dS, \quad \overline{y} = \tfrac{1}{M}\iint_S y\sigma(x, y, z)\, dS \quad \text{e} \quad \overline{z} = \tfrac{1}{M}\iint_S z\sigma(x, y, z)\, dS$$

e o momento de inércia I_L de S, em relação a um eixo L, é calculado pela fórmula

$$I_L = \iint_S \delta^2\sigma(x, y, z)\, dS,$$

onde $\delta = \delta(x, y, z)$ representa a distância de um ponto $P(x, y, z)$ da superfície S ao eixo de rotação L. Em relação aos eixos coordenados, os momentos de inércia I_x, I_y e I_z são dados por:

$$I_x = \iint_S \left(y^2 + z^2\right)\sigma dS, \quad I_y = \iint_S \left(x^2 + z^2\right)\sigma dS \quad \text{e} \quad I_z = \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\sigma dS.$$

Exemplo 6.38 *Suponha que o hemisfério $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, seja uniforme, isto é, tenha densidade σ constante. Calcular o centro de massa e o momento de inércia I_z do hemisfério S.*

Solução Como a densidade é constante, a massa de S é

$$M = \iint_S \sigma dS = \sigma \iint_S dS = \sigma\, \mathrm{A}(S) = 2\pi a^2\sigma.$$

A projeção de S no plano xy é o disco $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq a^2$ e um cálculo direto nos dá:

$$dS = \frac{\|\nabla F\|}{|\nabla F \bullet \mathbf{k}|} = \frac{adxdy}{z} = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \tfrac{1}{M}\iint_S x\sigma dS = \tfrac{\sigma}{M}\iint_{D_{xy}} \frac{axdxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\
&= \tfrac{a\sigma}{M}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r^2\cos\theta dr d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \tfrac{a\sigma}{M}\left[\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\right]\int_0^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Num cálculo similar, ou considerando a simetria de S em relação ao eixo z, encontramos $\overline{y} = 0$. A coordenada $\overline{z}$ é dada por

$$\overline{z} = \tfrac{\sigma}{M}\iint_S z dS = \tfrac{\sigma}{M}\iint_{D_{xy}} adxdy = \frac{a\sigma A(D_{xy})}{M} = a/2$$

e o centro de massa de S é o ponto $C(0, 0, a/2)$ do eixo z. Finalmente,

$$\begin{aligned}
I_z &= \iint_S \left(x^2 + y^2\right)\sigma dS = \sigma\iint_{D_{xy}} \frac{\left(x^2 + y^2\right)adxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\
&= a\sigma\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r^3 dr d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2\pi a\sigma\int_0^a \frac{r^3 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \qquad (\text{fazer } t = a^2 - r^2) \\
&= \pi a\sigma\int_0^{a^2} \frac{\left(a^2 - t\right)dt}{\sqrt{t}} = \frac{4\pi a^4\sigma}{3}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

6.3.2 Integrando Formas Diferenciais

No Capítulo 5, vimos que a integral de linha $\int_\gamma f(x,y)\,ds$ se expressa na forma diferencial, como $\int_\gamma Ldx+Mdy$, e a expressão $Ldx+Mdy$ denomina-se, também, 1-forma diferencial. Com o objetivo de expressar a integral de superfície $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ como a integral de uma forma diferencial, deixe-nos considerar a expressão

$$Ldydz + Mdzdx + Ndxdy, \tag{6.15}$$

denominada de 2-forma diferencial ou *forma diferencial de segunda ordem*, onde as funções L, M e N são supostas contínuas, em uma região compacta Ω do espaço $\mathbb{R}^3$, contendo uma superfície S parametrizada por:

$$S : \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}, \quad (u,v) \in D.$$

Se $\mathbf{n}$ é a normal unitária à superfície S e se representarmos por α, β e ϕ os ângulos diretores do vetor $\mathbf{n}$, isto é,

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\cos\beta)\,\mathbf{j} + (\cos\phi)\,\mathbf{k},$$

teremos

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}\right]$$

e, portanto,

$$\cos\alpha = \frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad \cos\beta = \frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \quad \text{e} \quad \cos\phi = \frac{1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Se $\phi \neq \pi/2$, como indica a Figura 6.22, a projeção ortogonal (com sinal) da área elementar dS, sobre o plano xy, é igual a

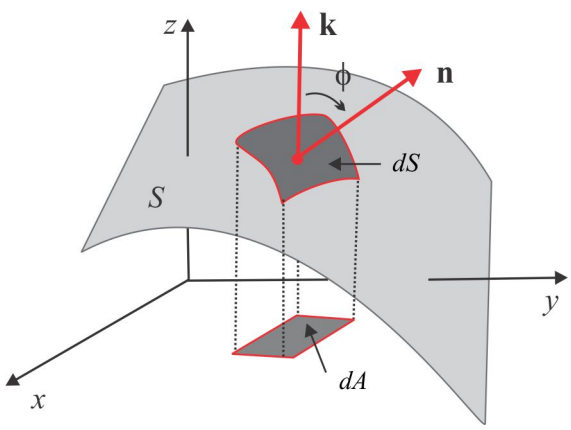


Figura 6.22: Projeção sobre o plano xy.

$$dS = \sec\phi\, dA \;\text{ ou }\; dA = dS\cos\phi. \tag{6.16}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\pm dA &= [\Pr(\mathbf{r}_u) \times \Pr(\mathbf{r}_v)] \bullet \mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} \\
&= (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \bullet \mathbf{k} = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, |\mathbf{k}| \cos\phi = dS \cos\phi.
\end{aligned}$$

Motivados pela relação (6.16), definimos

$$\iint_S f(x,y,z)dxdy = \iint_S f(x,y,z)\cos\phi dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv,$$

e a integral da forma diferencial (6.15) sobre S será, portanto,

$$\iint_S Ldydz + Mdzdx + Ndxdy = \pm \iint_D \left[L\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + M\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + N\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] dudv,$$

onde o sinal depende da orientação da superfície S. Se Ω é uma região compacta do $\mathbb{R}^3$, contendo a superfície S, e $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ é um campo vetorial de classe C^1 em Ω, então

$$\begin{aligned}
\iint_S Ldydz + Mdzdx + Ndxdy &= \iint_D (L\cos\alpha + M\cos\beta + N\cos\phi) \, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dudv \\
&= \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) \, dS.
\end{aligned}$$

Exemplo 6.39 *Se S é o gráfico de uma função $z = f(x,y)$, com derivadas parciais f_x e f_y contínuas na região compacta D, usando a parametrização canônica*

$$x = u, \quad y = v \quad e \quad z = f(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

obtemos, após um cálculo simples,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = -f_y \quad e \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = -f_x$$

e, portanto,

$$\iint_S Ldydz + Mdzdx + Ndxdy = \iint_D (-Lf_u(u,v) - Mf_v(u,v) + N) \, dudv. \qquad \blacksquare \tag{6.17}$$

Encerrando esta seção, determinaremos o *comprimento elementar* (ou *elemento linear*) ds, de uma curva γ que jaz sobre a superfície S, dada pelas equações paramétricas

$$S : x = x(u,v), \quad y = y(u,v) \quad e \quad z = z(u,v), \quad (u,v) \in D,$$

sendo D uma região compacta do plano uv. Expressando a diferencial $d\mathbf{r} = (dx)\,\mathbf{i} + (dy)\,\mathbf{j} + (dz)\,\mathbf{k}$ sob a forma

$$\begin{aligned}
d\mathbf{r} &= (x_u du + x_v dv)\,\mathbf{i} + (y_u du + y_v dv)\,\mathbf{j} + (z_u du + z_v dv)\,\mathbf{k} \\
&= \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv
\end{aligned}$$

vemos que o elemento linear ds da curva γ é dado por

$$\begin{aligned}
ds^2 &= |d\mathbf{r}|^2 = (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \bullet (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \\
&= |\mathbf{r}_u|^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v dudv + |\mathbf{r}_v|^2 dv^2 \\
&= E(du)^2 + 2F(du)(dv) + G(dv)^2,
\end{aligned}$$

onde $E = |\mathbf{r}_u|^2$, $F = \mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v$ e $G = |\mathbf{r}_v|^2$. A forma diferencial quadrática

$$E\,(du)^2 + 2F\,(du)\,(dv) + G\,(dv)^2$$

denomina–se *primeira forma fundamental* de S.

Exemplo 6.40 *Considerando o plano xy, parametrizado em coordenadas polares*

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{j},\ \ r \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

temos que

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos\theta)\,\mathbf{i} + (\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathbf{j}\ \ e\ \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathbf{i} + (r\cos\theta)\,\mathbf{j}$$

e daí resulta

$$E = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|^2 = 1,\ \ F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = 0\ \ e\ \ G = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|^2 = r^2.$$

Assim, para o plano xy, encontramos $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. ■

Exercícios & Complementos.

1. Calcule as seguintes integrais de superfícies:

   (a) $\iint_S x dS$; S é o cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $-1 \leq z \leq 1$.

   (b) $\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS$; S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, com $x \geq 0$ e $\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

   (c) $\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS$; S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq a$ e $\mathbf{F} = \mathrm{sen}\,z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - \cos z\mathbf{k}$.

   (d) $\iint_S xy dS$; S é a porção do paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$, $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

   (e) $\iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dS$; S é a esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$.

   (f) $\iint_S z^2 dS$; S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = x + 3$.

   (g) $\iint_S x dS$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante.

   (h) $\iint_S x dS$; S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$.

   (i) $\iint_S x^2 dS$; S é a porção do plano $z = x$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   (j) $\iint_S x^2 dS$; S é porção do cone $x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 2$.

   (k) $\iint_S (x + y)\, dS$; S é a porção do plano $2x + 3y + z = 6$ no primeiro octante.

2. Determine a primeira forma fundamental das seguintes superfícies:

   (a) $\mathbf{r}\,(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$.

   (b) $\mathbf{r}\,(u,v) = 2u\mathbf{i} + 3v\mathbf{j}$.

   (c) $\mathbf{r}\,(u,v) = (u+v)\mathbf{i} + (u-v)\mathbf{j}$.

   (d) $\mathbf{r}\,(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.

(e) $\mathbf{r}(u,v) = \cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$.

(f) $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$.

(g) $\mathbf{r}(u,v) = 2\cos u\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$.

(h) $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$.

3. Se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ é uma parametrização da superfície S, mostre que a família de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$, sobre S, são ortogonais se, e somente se, $\mathbf{r}_u \bullet \mathbf{r}_v = 0$. Teste a ortogonalidade da família de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$, no caso da superfície S dada por

$$\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}.$$

4. Se S_1 e S_2 são duas superfícies equivalentes, mostre que existe uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, contínua em uma região Ω contendo as superfícies S_1 e S_2, tal que

$$\iint_{S_1} f(x,y,z)dS_1 = \pm \iint_{S_2} f(x,y,z)dS_2.$$

6.4 Fluxo e o Teorema de Gauss

Suponhamos que o campo vetorial $\mathbf{F}$ seja dado por $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, onde $\rho = \rho(x,y,z)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z)$ são, respectivamente, a densidade de massa e a velocidade de um fluido em movimento, confinado em um recipiente S, como ilustrado na Figura 6.23.

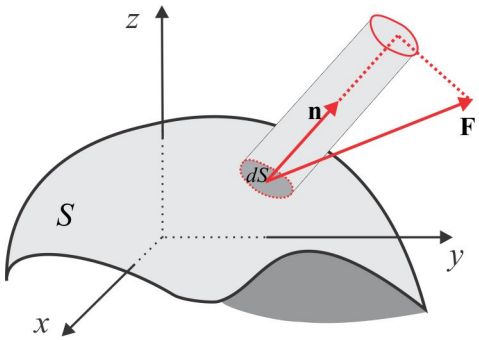


Figura 6.23: Fluxo do campo $\mathbf{F}$.

O *fluxo,* ou a quantidade de fluido, que atravessa a área elementar dS, na unidade de tempo, na direção da normal $\mathbf{n}$, é medida pelo volume do cilindro de base dS e altura $\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}$, isto é, $\rho(\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})dS$ é a massa de fluido que atravessa dS, na direção da normal $\mathbf{n}$. A massa de fluido que atravessa a superfície S, na direção da normal, é, portanto,

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})dS = \iint_S \rho(\mathbf{v} \bullet \mathbf{n})dS. \tag{6.18}$$

Motivados por esta situação física, denominamos a integral de superfície, do lado esquerdo de (6.18), de fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}$, através da superfície S, na direção da normal $\mathbf{n}$.

Exemplo 6.41 *Determinar o fluxo do campo* $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$, *através da superfície lateral do cilindro* $x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leq z \leq h$.

Solução Se considerarmos $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - a^2$, a normal unitária exterior à superfície cilíndrica $S : x^2 + y^2 - a^2 = 0$ é dada por

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = (x/a)\,\mathbf{i} + (y/a)\,\mathbf{j},$$

e o fluxo do campo $\mathbf{F}$ é, portanto,

$$\mathcal{F} = \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \iint_S \left[(x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \bullet ((x/a)\,\mathbf{i} + (y/a)\,\mathbf{j})\right] dS = \tfrac{1}{a} \iint_S x^2 dS.$$

Em coordenadas cilíndricas (confira o Exemplo 6.26), temos $dS = a dz d\theta$ e, assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \tfrac{1}{a} \iint_S x^2 dS = \tfrac{1}{a} \int_0^{2\pi} \int_0^h \left(a^2 \cos^2\theta\right) a dz d\theta \\ &= a^2 h \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right) d\theta = \pi a^2 h. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemplo 6.42 *Seja* S *o corte do cilindro* $y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$, *pelos planos* $x = 0$ *e* $x = 1$. *Determinar o fluxo do campo* $\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ *através de* S.

Solução A equação da superfície S é $f(x, y, z) = 0$, com $f(x, y, z) = y^2 + z^2 - 1$, de modo

$$dS = \frac{|\nabla f|\, dxdy}{|\nabla f \bullet \mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}\ dxdy}{z} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Sobre a superfície S temos $y^2 + z^2 = 1$ e, consequentemente,

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{n} = y^2 z + z^3 = z\left(y^2 + z^2\right) = z \quad \text{e} \quad dS = \frac{dxdy}{z}.$$

Assim, o fluxo do campo $\mathbf{F}$ é

$$\mathcal{F} = \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \iint_S z dS = \iint_{D_{xy}} dxdy = \int_0^1 \int_{-1}^1 dydx = 2. \qquad \blacksquare$$

Na Figura 6.24, ilustramos a superfície S e sua projeção D_{xy}, no plano xy.

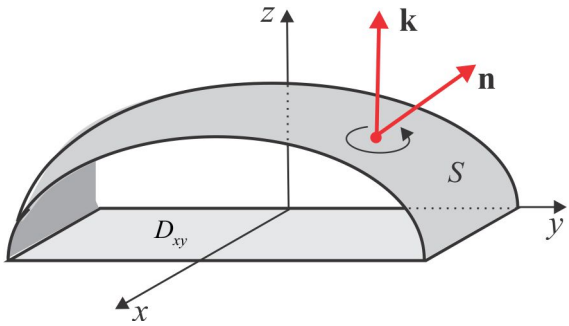


Figura 6.24: Superfície S do Exemplo 6.42

Exemplo 6.43 *Seja S a fronteira da esfera sólida $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, e consideremos o campo vetorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, definido sobre Ω. Calcular as integrais*

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS \quad e \quad \iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV.$$

Solução Primeiro, observamos que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = L_x + M_y + N_z = 3$ e, portanto,

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = 3 \iiint_\Omega dV = 3 \operatorname{vol}(\Omega) = 4\pi a^3.$$

Por outro lado, a superfície S é descrita por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$, de modo que

$$\mathbf{n} = (x/a)\,\mathbf{i} + (y/a)\,\mathbf{i} + (z/a)\,\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} = \tfrac{1}{a}\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

de onde resulta que,

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS &= \frac{1}{a} \iint_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dS \\ &= \frac{1}{a} \iint_S a^2 dS = a\,\mathrm{A}(S) = a\left(4\pi a^2\right) = 4\pi a^3. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

A igualdade, entre a integral de superfície $\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS$ e a integral tripla $\iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV$, verificada no Exemplo 6.43, não é um fato isolado, como veremos a seguir, mas uma consequência do *Teorema da Divergência*, também conhecido por *Teorema da Divergência de Gauss*[18], um dos mais importantes teoremas do cálculo integral de funções vetoriais, o qual relaciona a integral de superfície com a integral tripla.

Teorema 6.44 (Teorema da Divergência) *Seja $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$ um campo vetorial de classe C^1, sobre uma região compacta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, cuja fronteira S é uma superfície parcialmente regular, fechada e orientada pela normal exterior $\mathbf{n}$. Então*

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz. \tag{6.19}$$

A Fórmula de Gauss (6.19) estabelece que o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S coincide com a integral tripla de $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ sobre Ω e, na forma diferencial, ela se escreve como

$$\iint_S L dydz + M dzdx + N dxdy = \iiint_\Omega (L_x + M_y + N_z)\, dV. \qquad \blacksquare$$

Observação 6.45 (fluxo bidimensional) *No Capítulo 5, consideramos um campo bidimensional*

$$\mathbf{F}(x, y) = L(x, y)\,\mathbf{i} + M(x, y)\,\mathbf{j}, \quad (x, y) \in D,$$

com componentes L e M de classe C^1 (com derivadas parciais de primeira ordem contínuas), em uma região compacta $D \subseteq \mathbb{R}^2$, delimitada por uma curva γ simples, fechada e parcialmente regular. Naquela ocasião, obtivemos (confira (5.26)), como consequência da Fórmula de Green, a seguinte expressão para o fluxo bidimesional:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds &= \oint_\gamma L dy - M dx = \iint_D (L_x + M_y) dxdy \\ &= \iint_D (\operatorname{div} \mathbf{F}) dxdy \end{aligned}$$

que, se comparada com (6.19), nada mais é do que a Fórmula de Gauss em $\mathbb{R}^2$.

[18] Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático alemão.

Exemplo 6.46 *Seja Ω a região delimitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$. Calcular, via Fórmula de Gauss, o fluxo do campo $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$, através da superfície S, fronteira de Ω.*

Solução Temos que

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 2 + 0 - 2xz = 2(1 - xz)$$

e o fluxo de $\mathbf{F}$ é, por definição, a integral de superfície

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})dS.$$

Da Fórmula de Gauss (6.19), encontramos

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})dS = 2\iiint_\Omega (1 - xz)dxdydz = 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (1 - xz)dxdydz = 3/2. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.47 *Calcular o fluxo do campo $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, através da fronteira do tetraedro determinado pelos planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.*

Solução Temos que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = x$ e, se Ω representa a região sólida delimitada pelo tetraedro, usamos a Fórmula de Gauss (6.19) e obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})dS &= \iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \iiint_\Omega x dxdydz \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x dzdydx = \int_0^1\int_0^{1-x} x\,(1 - x - y)\, dydx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 x\,(1 - x)^2\, dx = \tfrac{1}{24}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 6.48 *Seja Ω a região sólida delimitada pelo cilindro circular reto $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 3$, e represente por S sua fronteira. Calcular o fluxo de $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ através de S.*

Solução Usando a Fórmula de Gauss (6.19), obtemos

$$\mathcal{F} = \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = 3\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz.$$

Usando as coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ e $z = z$, cujo Jacobiano é $J(r, \theta, z) = r$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= 3\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz \\
&= 3\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2 + z^2)rdrd\theta dz = 180\pi. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 6.49 *Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$ e sobre a região sólida $\Omega : a^2 \le x^2 + y^2 + z^2 \le b^2$, considere o campo radial*

$$\mathbf{F}(P) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Calcular o fluxo do campo $\mathbf{F}$, através da fronteira da região Ω. Qual o fluxo do campo $\mathbf{F}$ através de uma esfera de centro na origem e raio R?

Solução Considerando que o campo $\mathbf{F}$ é de classe C^1 e que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 0$ em Ω , segue do Teorema de Gauss que o fluxo de $\mathbf{F}$, através da fronteira de Ω, é igual a zero. Aliás, o fluxo do campo $\mathbf{F}$, através de qualquer superfície S, simples, fechada, regular, que não contenha a origem no seu interior, é igual a zero. Se representarmos por S_a e S_b as esferas de centro na origem e raios a e b, respectivamente, veremos que os fluxos do campo $\mathbf{F}$, através de S_a e S_b, são simétricos, já que o fluxo total é zero (note que as normais exteriores têm sentidos opostos); ressaltamos, contudo, que os fluxos através de S_a e S_b, nas direções radiais, partindo da origem, são iguais.

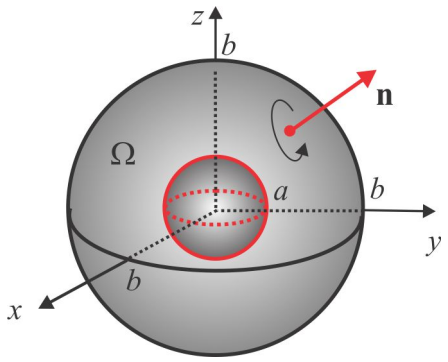


Figura 6.25: Fluxo na direção radial.

O fluxo através de uma esfera S_R, de centro na origem e raio R, não pode ser calculado pela fórmula de Gauss, porque o campo $\mathbf{F}$ não está definido na origem (ele torna-se ilimitado quando $\mathbf{r} \to \mathbf{0}$) e, neste caso, o fluxo deve ser calculado diretamente. Temos:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_R} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS &= \iint_{S_R} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R^3} \bullet \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R} dS \\
&= \frac{1}{R^4} \iint_{S_R} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dS = \frac{1}{R^4} \iint_{S_R} R^2 dS \\
&= \frac{1}{R^2} \iint_{S_R} dS = \frac{1}{R^2} \mathrm{A}\left(S_R\right) = \frac{1}{R^2} \left(4\pi R^2\right) = 4\pi.
\end{aligned}$$

O resultado seria o mesmo, caso a esfera S_R fosse substituída por qualquer superfície S, simples, fechada, regular, contendo a origem no seu interior. ■

Exemplo 6.50 *Seja S a fronteira do sólido Ω, delimitado pelo cilindro $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y = 5$, $y = 0$ e $z = 0$. Calcular o fluxo do campo $\mathbf{F} = (x^3 + \operatorname{sen} z)\mathbf{i} + (x^2 y + \cos z)\mathbf{j} + \exp(x^2 + y^2)\mathbf{k}$, através de S.*

Solução Primeiro faça um esboço da superfície e de sua orientação. O cálculo direto da integral de superfície é bastante trabalhoso, e ele torna-se mais simples quando usamos Teorema de Gauss. Como

$$L = x^3 + \operatorname{sen} z, \quad M = x^2 y + \cos z \ \text{ e } \ N = \exp(x^2 + y^2),$$

temos que

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = L_x + M_y + N_z = 3x^2 + x^2 + 0 = 4x^2$$

e do Teorema de Gauss, resulta

$$\begin{aligned}
\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS &= 4 \iiint_\Omega x^2 dxdydz \\
&= 4 \int_{-2}^{2} \int_0^{4-x^2} \int_0^5 x^2 dydzdx = \frac{512}{3}.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 6.51 *Calcular o volume do elipsoide sólido* $\Omega : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad a,\ b,\ c > 0.$

Solução Se considerarmos $L = M = 0$ e $N = z$, obteremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\Omega) &= \iiint_\Omega dxdydz = \iiint_\Omega (L_x + M_y + N_z)\, dxdydz \\
&= \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \iint_S Ldydz + Mdzdx + Ndxdy \\
&= \iint_S zdxdy,
\end{aligned}$$

sendo S a superfície do elipsoide. Parametrizando o elipsoide S por

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (a\cos\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (b \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{j} + (c\cos\phi)\mathbf{k}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \text{ e } \ 0 \leq \phi \leq \pi,$$

obtemos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = -ab \operatorname{sen}\phi \cos\phi$$

e de (6.17) resulta,

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\Omega) &= \iint_S zdxdy = c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\phi \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)}\right| d\theta d\phi \\
&= abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi abc. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 6.52 (volume da esfera n-dimensional) *Segue do Exemplo 6.51, com* $a = b = c = \rho$, *que o volume da esfera sólida* $S^3_\rho : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho^2$, *de centro na origem e raio* $\rho > 0$, *é*

$$\mathrm{vol}(S^3_\rho) = \tfrac{4}{3}\pi\rho^3 = \rho^3\, \mathrm{vol}(S^3_1)$$

e, se representarmos por S^2_1 *o disco* $x^2 + y^2 \leq 1$, *e por* S^1_δ *o segmento vertical de* $z = -\delta$ *até* $z = \delta$, *com* $\delta = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, *teremos*

$$\mathrm{vol}(S^1_\delta) = \int_{S^1_\delta} dz = \delta\, \mathrm{vol}(S^1_1),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(S^3_1) &= \iiint_{S^3_1} dxdydz = \iint_{S^2_1} \left[\int_{S^1_\delta} dz\right] dxdy \\
&= \iint_{S^2_1} \left[\delta\, \mathrm{vol}(S^1_1)\right] dxdy \\
&= \mathrm{vol}(S^1_1) \iint_{S^2_1} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy.
\end{aligned}$$

Agora, usando coordenadas polares $x = r\cos\theta$ *e* $y = r \operatorname{sen}\theta$, *chegamos a*

$$\mathrm{vol}(S^3_1) = \mathrm{vol}(S^1_1)\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1 - r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{3}\, \mathrm{vol}(S^1_1).$$

Ressaltamos que S^2_1 *é o disco unitário, cujo volume (área) é* $\mathrm{vol}\left(S^2_1\right) = \pi$, *e que* S^1_1 *é o segmento vertical de extremidades* $A\,(0,0,-1)$ *e* $B\,(0,0,1)$, *cujo volume (comprimento) é* $\mathrm{vol}\left(S^1_1\right) = 2$. *Em dimensão* $n \geq 3$, *temos a seguinte fórmula de recorrência:*

$$\mathrm{vol}(S^1_1) = 2, \quad \mathrm{vol}(S^2_1) = \pi \quad e \quad \mathrm{vol}(S^n_1) = \frac{2\pi}{n}\, \mathrm{vol}(S^{n-2}_1), \quad n \geq 3. \qquad \blacksquare$$

6.4.1 Considerações Físicas

Interpretação do Divergente

Para interpretar fisicamente o divergente, representemos por Ω_δ a esfera sólida compacta, com centro no ponto P_0 e raio $\delta > 0$, com fronteira S_δ. Dado um campo vetorial $\mathbf{F}$, de classe C^1 sobre Ω_δ, segue, do Teorema da Média para integrais triplas, que existe um ponto P na bola Ω_δ, tal que

$$\iiint_{\Omega_\delta} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV = \operatorname{div}(\mathbf{F})(P) \operatorname{vol}(\Omega_\delta),$$

e, usando a Fórmula da Divergência, resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F})(P) &= \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega_\delta)} \iiint_{\Omega_\delta} \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dV \\ &= \frac{3}{4\pi\delta^3} \iint_{S_\delta} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Como a função $P \mapsto \operatorname{div}(\mathbf{F})(P)$ é contínua em P_0, temos que $\operatorname{div}(\mathbf{F})(P_0) = \lim_{P \to P_0} [\operatorname{div}(\mathbf{F})(P)]$ e, sendo assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F})(P_0) &= \lim_{P \to P_0} [\operatorname{div}(\mathbf{F})(P)] \\ &= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{3}{4\pi\delta^3} \iint_{S_\delta} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Poderíamos ter usado essa última expressão para definir o divergente do campo $\mathbf{F}$, no ponto P_0, como sendo o fluxo limite de $\mathbf{F}$ em P_0. Destacamos as seguintes situações:

1. As linhas de campo são paralelas

As *linhas de campo* de $\mathbf{F}$ são as curvas γ, cujo vetor tangente no ponto P é $\mathbf{F}(P)$. Quando as linhas do campo forem paralelas e $|\mathbf{F}(P)|$ for constante em γ, teremos $\operatorname{div}(\mathbf{F})(P_0) = 0$ e, neste caso, o fluxo positivo em uma parte da fronteira, é compensado pelo fluxo negativo na outra parte, como indica a Figura 6.26(a).

2. As linhas de campo são divergentes ou convergentes

Quando as linhas de campo forem divergentes (Figura 6.26(b)) ou convergentes (Figura 6.26(c)), então $\operatorname{div}(\mathbf{F})(P_0) \neq 0$.

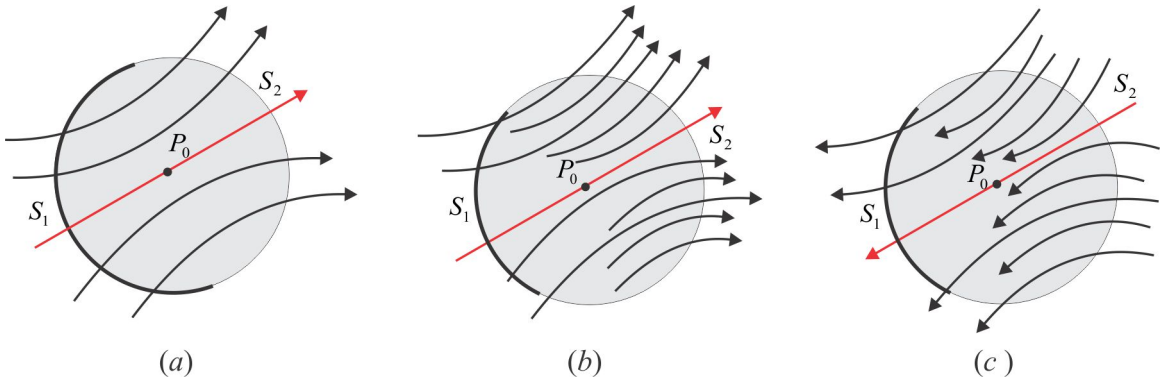


Figura 6.26: Linhas de campo: paralelas (a), divergentes (b) e convergentes (c).

Equação de Conservação da Massa

Seja Ω uma região compacta do $\mathbb{R}^3$, inserida em um meio contendo um fluido em movimento. A Fórmula da Divergência de Gauss estabelece que

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\, dV = \iint_S (\rho\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}) dS,$$

onde S é a fronteira da região Ω, v é a velocidade e ρ é a densidade de massa do fluido. A integral tripla

$$\iiint_\Omega \rho dV$$

representa a quantidade de *massa fluida* presente em Ω, em um dado instante, e a variação de massa contida em Ω por unidade de tempo é, portanto,

$$\frac{d}{dt}\iiint_\Omega \rho dV = \iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Admitindo que a redução de massa contida em Ω ocorra apenas pelo seu fluxo através de S, resulta da conservação da massa que

$$-\iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \iint_S (\rho\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}) dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\, dV$$

e, consequentemente,

$$\iiint_\Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right] dV = 0. \tag{6.20}$$

Considerando em (6.20) $\Omega = \Omega_\delta = \{P \in \mathbb{R}^3;\ |P - P_0| \leq \delta\}$, a bola de centro P_0 e raio δ, e usando o Teorema da Média para integral tripla, encontramos

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right]_{(P_0)} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(\Omega_\delta)} \iiint_{\Omega_\delta} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right] dV = 0 \tag{6.21}$$

e de (6.21) resulta a *equação de continuidade* ou *equação de conservação da massa*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

Equação de Conservação da Carga Elétrica

Consideremos uma distribuição de carga elétrica sobre uma superfície S e representemos por ρ a densidade de carga elétrica, $\mathbf{v}$ a velocidade das cargas e $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ o vetor *densidade de corrente elétrica*. De forma similar ao que foi feito para a conservação da massa, chegamos à *equação de conservação da carga elétrica*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{J}) = 0.$$

O fluxo de $\mathbf{J}$ através de S é a *intensidade de corrente elétrca* I, e esta é dada por

$$I = \iint_S (\mathbf{J} \bullet \mathbf{n}) dS$$

Equação Fundamental da Eletrostática

Consideremos uma superfície fechada S (uma esfera, por exemplo) contendo uma carga pontual q no seu interior, situada no ponto P_0, e representemos por $\mathbf{E}(P)$ o campo elétrico no ponto P de S, produzido pela carga q, como ilustra a Figura 6.27.

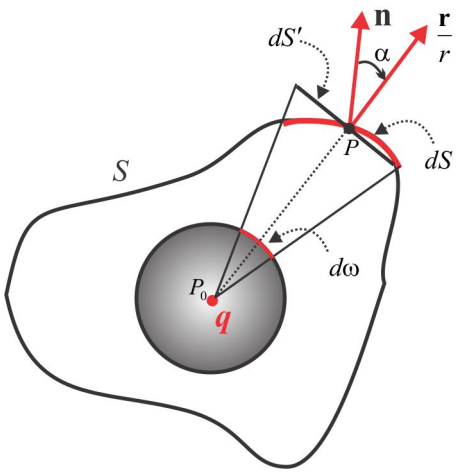


Figura 6.27: Fluxo do campo elétrico.

Se $\mathbf{r} = \mathbf{P}_0\mathbf{P}$ e $r = |\mathbf{r}|$, como consequência da *Lei de Coulomb*, temos que

$$\mathbf{E}(P) = kq\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla\varphi,$$

onde $\varphi = kq/r$ é o potencial eletrostático, e o fluxo do campo $\mathbf{E}$ através de S é, portanto,

$$\iint_S (\mathbf{E} \bullet \mathbf{n})dS = kq\iint_S \frac{1}{r^2}(\frac{\mathbf{r}}{r} \bullet \mathbf{n})dS = kq\iint_S \frac{\cos\alpha dS}{r^2}. \tag{6.22}$$

Se representarmos por $d\omega$ a área elementar sobre a esfera unitária, teremos $d\omega = \dfrac{\cos\alpha dS}{r^2}$ e a partir de (6.22) obteremos a seguinte relação:

$$\iint_S (\mathbf{E} \bullet \mathbf{n})dS = kq\iint_S \frac{\cos\alpha}{r^2}dS = kq\iint_S d\omega = 4k\pi q.$$

No caso de uma distribuição de carga Q, com densidade $\rho(x, y, z)$, a carga total na região Ω, delimitada por S, é

$$Q = \iiint_\Omega \rho(x, y, z)\, dV$$

e o fluxo do campo elétrico será

$$\iint_S (\mathbf{E} \bullet \mathbf{n})dS = 4k\pi Q = 4k\pi\iiint_\Omega \rho(x, y, z)\, dV. \tag{6.23}$$

Comparando (6.23) com a Fórmula de Gauss, obtemos

$$\iiint_\Omega [4k\pi\rho - \operatorname{div}(\mathbf{E})]\, dV = 0,$$

de onde resulta a *Equação Fundamental da Eletrostática*

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 4k\pi\rho. \tag{6.24}$$

Se $\varphi(P_0)$ representa o potencial eletrostático no ponto P_0, isto é,

$$\varphi(P_0) = k\iint_S \frac{\rho}{r}dS \tag{6.25}$$

então $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ e obtemos de (6.24)

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}(\nabla\varphi) = -\operatorname{div}(\mathbf{E}) = -4k\pi\rho,$$

de onde resulta a equação de Poisson para o potencial:

$$\Delta\varphi = -4k\pi\rho.$$

Exemplo 6.53 *Calcular o potencial eletrostático e o campo elétrico, em um ponto $P(0,0,\xi)$ do eixo z, devido a uma distribuição uniforme de carga elétrica no disco $S : x^2 + y^2 \leq a^2,\ z = 0$.*

Solução Segue de (6.25) que o potencial eletrostático no ponto $P(\theta,\eta,\xi)$, devido a distribuição de carga de densidade $\rho(x,y,z)$ sobre o disco S é

$$\varphi(\delta,\eta,\xi) = \iint_S \frac{\rho(x,y,z)}{r} dS, \quad r = \sqrt{(\delta - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\xi - z)^2}.$$

e, admitindo que a densidade ρ seja constante, o potencial no ponto $(0,0,\xi)$ do eixo z será:

$$\begin{aligned}\varphi(0,0,\xi) &= \iint_S \frac{\rho dS}{\sqrt{x^2+y^2+\xi^2}} = \rho \iint_{x^2+y^2\leq a^2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+\xi^2}} = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{rdrd\theta}{\sqrt{r^2+\xi^2}} \\ &= 2\pi\rho \int_{\xi^2}^{a^2+\xi^2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2\pi\rho\left[\sqrt{a^2+\xi^2} - |\xi|\right]. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

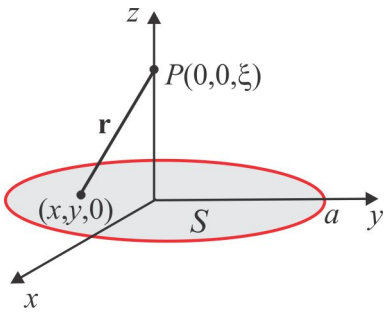


Figura 6.28: Distribuição de carga sobre o disco.

O campo elétrico no ponto P pode ser calculado diretamente, usando a Lei de Coulomb:

$$\mathbf{E} = \iint_S k\rho \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS$$

ou usando o potencial, como faremos neste caso:

$$\mathbf{E}(0,0,\xi) = -\nabla\varphi(0,0,\xi) = -2\pi\rho\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\sqrt{a^2+\xi^2} - |\xi|\right]\mathbf{k} = -2\pi\rho\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+\xi^2}} - \frac{1}{|\xi|}\right]\mathbf{k}.$$

Exercícios & Complementos.

1. Calcule as integrais

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS \quad \text{e} \quad \iiint_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{F}) dxdydz,$$

sendo $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ e Ω a esfera sólida delimitada por $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2. Em cada caso, calcule a integral
$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) ds,$$
onde γ representa a curva que delimita a superfície S.

   (a) $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$; S é a região delimitada pelo hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

   (b) $F = \mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$; S é a região delimitada pela elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$.

3. Em cada caso, calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{F}$, através da superfície S.

   (a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é a superfície do sólido limitado pelo semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.

   (b) $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e S é a porção do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   (c) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e S é a fronteira do sólido no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $3x + 2y + z = 12$.

4. Seja S uma superfície regular por partes, fechada, simples e orientável, que delimita a região Ω no espaço. Mostre que o volume da região Ω é dada por
$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iint_S x dydz = \iint_S y dzdx = \iint_S z dxdy \\ &= \frac{1}{3}\iint_S (x dydz + y dzdx + z dxdy). \end{aligned}$$

5. Se f e g são funções com derivadas parciais de segunda ordem, contínuas, em uma região compacta $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, mostre que
$$\nabla \bullet (g\nabla f) = g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g, \qquad \text{em } \Omega.$$
Use esse fato e a Fórmula de Gauss para mostrar que
$$\iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g) dxdydz = \iint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS.$$
onde a fronteira $\partial\Omega$ é suposta regular, fechada, orientada pela normal exterior $\mathbf{n}$.

6. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ uma região delimitada por uma superfície S regular, fechada e orientada pela normal exterior $\mathbf{n}$. Se f é um campo escalar com derivadas parciais de segunda ordem, contínuas, em uma região aberta contendo Ω, mostre que
$$\iiint_\Omega (f\Delta f + |\nabla f|^2) dxdydz = \iint_S f\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

7. Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com derivadas parciais de segunda ordem, contínuas, em uma região compacta Ω, mostre que
$$\iiint_\Omega \Delta f dxdydz = \iint_S \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS,$$
sendo S a superfície regular, fechada, orientada pela normal exterior $\mathbf{n}$, que delimita Ω.

8. Se $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções nas condições do Exercício 7, mostre que

$$\iiint_\Omega (g\Delta f - g\Delta f)dxdydz = \iint_S \left(g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

9. Sejam $f = y^2 + z^2$, $g = x^2 + y^2$ e S a superfície da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcule a integral

$$\iint_S g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS,$$

10. Considere os campos escalares $f = x^2 + y^2 + x + 2z$ e $g = x^2 + y^2 + x + z$ e seja S a superfície lateral do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e $0 \leq z \leq h$. Calcule a integral

$$\iint_S \left(g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f\frac{\partial g}{\partial \mathbf{n}} \right) dS.$$

11. Sejam S a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante e $f = e^x \operatorname{sen} y$. Calcule a integral

$$\iint_S f\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

6.5 Circulação e o Teorema de Stokes

Para motivar o que será apresentado nesta seção, inicialmente recordemos que no Capítulo 5 estabelecemos uma relação entre a integral de linha e a integral dupla, dada pela Fórmula de Green (5.29). Mais precisamente, encontramos

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})ds = \oint_\gamma Ldx + Mdy = \iint_D [\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}]\, dxdy, \tag{6.26}$$

onde $\mathbf{F}(x, y) = L(x, y)\,\mathbf{i} + M(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial de classe C^1, em uma região compacta D do plano xy, simplesmente conexa, com fronteira $\gamma = \partial D$, orientada no sentido anti-horário. Nosso propósito, agora, é generalizar a fórmula (6.26) para campos tridimensionais $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, de classe C^1, sobre uma região aberta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, contendo uma superfície orientada S, delimitada por uma curva $\gamma = \partial S$, denominada *bordo* de S, simples, fechada e parcialmente regular. O resultado que será estabelecido é devido a *Stokes*[19] e ele relaciona a integral de linha, ao longo de γ, com a integral de superfície sobre S.

Como ilustração, supohamos que $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = z\mathbf{i}$ e representemos por γ o corte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ pelo plano $z = 1$, com orientação positiva, e sejam S_1 a superfície do paraboloide $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$, e S_2 o disco

$$S_2 = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

como exibido na Figura 6.29.

[19] George Gabriel Stokes (1819-1903), matemático e físico irlandês.

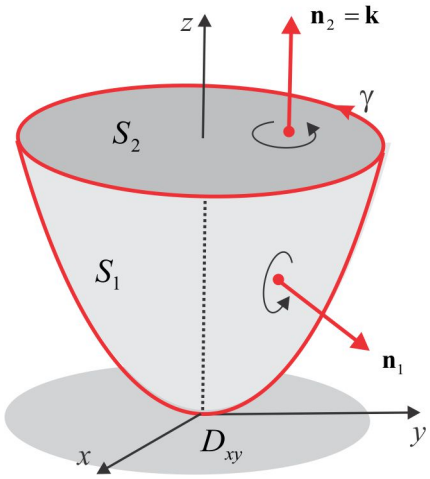


Figura 6.29: Superfícies com bordo comum.

Podemos olhar a curva γ como o bordo comum das superfícies S_1 e S_2 e, por meio de cálculos diretos, comprovaremos as seguintes relações:

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_{S_1} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_1]\, dS = \iint_{S_2} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_2]\, dS,$$

onde $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$ são, respectivamente, as normais unitárias exteriores às superfícies S_1 e S_2.

1. Cálculo da integral de linha

Parametrizando o bordo γ pelas equações $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t$ e $z = 1,\ 0 \le t \le 2\pi$, obtemos

$$\begin{aligned} \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds &= \oint_\gamma x dx + y dy + yz dz \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos t\,(-\operatorname{sen} t) + \operatorname{sen} t\,(\cos t)]\, dt = 0. \end{aligned}$$

2. Cálculo das integrais de superfícies

A partir das descrições das superfícies S_1 e S_2, obtemos

$$\begin{aligned} dS_1 &= \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\; dxdy; & \mathbf{n}_1 &= \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \\ dS_2 &= dxdy; & \mathbf{n}_2 &= \mathbf{k} \end{aligned}$$

e um cálculo direto nos dá $\text{rot}\,(\mathbf{F}) = z\mathbf{i}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_1]\, dS &= \iint_{D_{xy}} 2xz dxdy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4 \cos\theta dr d\theta = 0 \quad \text{e} \\ \iint_{S_2} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_2]\, dS &= \iint_{S_2} 0 dS = 0, \end{aligned}$$

como queríamos.

A integral de linha $\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds$ recebe o nome de *circulação* do campo $\mathbf{F}$ ao redor da curva γ, enquanto a integral de superfície $\iint_S [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS$ é o fluxo de $\text{rot}\,(\mathbf{F})$ através da superfície S, na direção da normal $\mathbf{n}$. A Fórmula de Stokes estabelece que: "a circulação do campo $\mathbf{F}$ ao redor de γ é igual ao fluxo do rotacional de $\mathbf{F}$ através da superfície S, da qual γ é o bordo". Em símbolos, temos

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_S [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS, \tag{6.27}$$

que coincide com a Fórmula de Green (6.26), no caso em que $N = 0$ e $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ e $S = D$.

Teorema 6.54 (Teorema de Stokes) *Seja S uma superfície regular, orientada pela normal exterior $\mathbf{n}$, e representemos por $\gamma = \partial S$ o bordo orientado de S, suposto simples, fechado e parciamente regular. Se $\mathbf{F} = L\mathbf{i} + M\mathbf{j} + N\mathbf{k}$, é um campo vetorial de classe C^1, em uma região aberta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, contendo S, então*

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_S [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS. \tag{6.28}$$

Com a notação diferencial, temos a forma equivalente:

$$\oint_\gamma L dx + M dy + N dz = \iint_S (N_y - M_z)\, dydz + (L_z - N_x)\, dzdx + (M_x - L_y)\, dxdy. \tag{6.29}$$

Demonstração Suponhamos que a superfície regular S seja o gráfico de uma função $z = f(x, y)$, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, em uma região compacta D do plano xy, e tenha bordo γ caracterizado por $(x, y, 0) \in \partial D \Leftrightarrow (x, y, f(x, y)) \in \gamma$, como sugere a Figura 6.30.

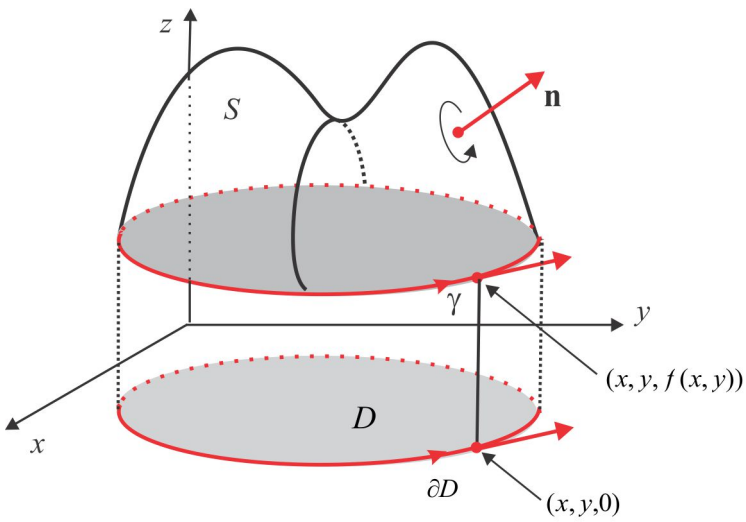


Figura 6.30: Superfície S com bordo γ.

Como consequência do Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned} \oint_\gamma L(x, y, z)\, dx &= \oint_\gamma L(x, y, f(x, y))\, dx = -\iint_D \partial_y [L(x, y, f(x, y))]\, dxdy \\ &= -\iint_D (L_y + L_z z_y)\, dxdy \end{aligned}$$

e, de modo similar, encontramos

$$\oint_\gamma M(x, y, z)\, dy = \iint_D (M_x + M_z z_x)\, dxdy.$$

Por outro lado, considerando que $dz = z_x dx + z_y dy$, obtemos, ainda do Teorema de Green,

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma N(x,y,z)\,dz &= \oint_\gamma N z_x dx + N z_y dy \\
&= \iint_D \left[\partial_x (N z_y) - \partial_y (N z_x)\right] dxdy \\
&= \iint_D (N_x z_y + N z_{xy} - N_y z_x - N z_{yx})\, dxdy \\
&= \iint_D (N_x z_y - N_y z_x)\, dxdy.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds &= \oint_\gamma L dx + M dy + N dz \\
&= \iint_S \left[(N_y - M_z)(-z_x) + (L_z - N_x)(-z_y) + (M_x - L_y)\right] dxdy \\
&= \iint_S \left[\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{N}\right] dxdy,
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{N} = -z_x \mathbf{i} - \mathbf{z}_y \mathbf{j} + \mathbf{k}$ é normal à superfície S. Como $\mathbf{n} = \mathbf{N}/|\mathbf{N}|$, temos que

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_S \left[\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\right] \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = \iint_S \left[\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\right] dS. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.55 *Calcular, com auxílio da Fórmula de Stokes (6.29), a integral de linha*

$$\oint_\gamma y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

sendo γ o bordo da porção S do plano $x + y + z = a$, $a > 0$, no primeiro octante.

Solução A projeção de S no plano xy é o triângulo D_{xy}, de vértices $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$ e $B(0,a,0)$ e, usando a fórmula (6.29), com $L = y^2$, $M = z^2$ e $N = x^2$, obtemos, via (6.17),

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \iint_S (-2z) dydz + (-2x) dzdx + (-2y) dxdy \\
&= -2 \iint_S z dydz + x dzdx + y dxdy = -2 \iint_{D_{xy}} (x + y + z)\, dxdy \\
&= -2 \iint_{D_{xy}} a dxdy = -2a\, \mathrm{A}(D_{xy}) = -a^3.
\end{aligned}$$

Exemplo 6.56 *Calcular, via Fórmula de Stokes (6.28), a integral de linha*

$$\oint_\gamma (3x^2 + y^2) dx + 2xy dy + 3z^2 dz,$$

sendo γ a fronteira (o bordo) de uma dada superfície S, regular, fechada e orientável.

Solução Quando o campo $\mathbf{F}$ for irrotacional, isto é, $\mathrm{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$, como é o caso do campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k},$$

segue diretamente de (6.28) que

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma (3x^2 + y^2) dx + 2xy dy + 3z^2 dz &= \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_S \left[\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\right] dS \\
&= \iint_S (\mathbf{0} \bullet \mathbf{n})\, dS = 0. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observação 6.57 *(a) Na orientação do bordo da superfície S, os sentidos dos vetores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{n}$ obedecem à regra da mão direita;*

(b) Se o campo vetorial $\mathbf{F}$ for conservativo, digamos $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, então $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \operatorname{rot}(\nabla\varphi) = \mathbf{0}$. Reciprocamente, se $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$ em uma região simplesmente conexa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, então o campo $\mathbf{F}$ será conservativo. De fato, se γ é uma curva em Ω, simples, fechada, regular, vista como o bordo de uma superfície regular $S \subset \Omega$, então

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_S [\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS = 0$$

e, portanto, $\mathbf{F}$ é conservativo.

Exemplo 6.58 *Se γ é uma curva simples, fechada, regular, contida no plano $\pi : 2x + 2y + z = 2$ mostrar que a circulação do campo $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + 3z\mathbf{j} - x\mathbf{k}$ depende apenas do valor da área da região plana S, delimitada por γ.*

Solução Temos que $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ e considerando o vetor unitário $\mathbf{n} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$, normal ao plano π, então

$$\begin{aligned} \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds &= \iint_S [\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS \\ &= -\iint_S 2 dS = -2\,\mathrm{A}(S). \end{aligned}$$

Assim, a circulação do campo $\mathbf{F}$, ao redor da curva γ, é $-2\,\mathrm{A}(S)$. Na Figura 6.31 ilustramos a situação geométrica. ■

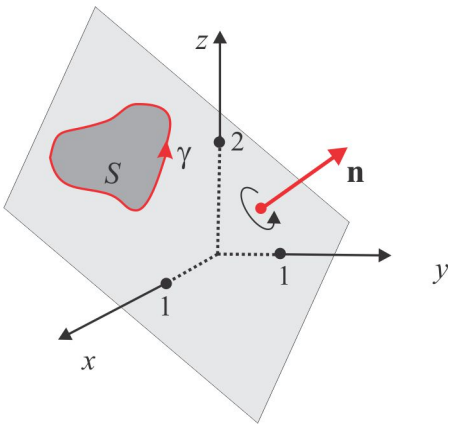


Figura 6.31: Circulação × Área.

Exemplo 6.59 (bordo comum) *Se duas superfícies S_1 e S_2, orientadas pelos respectivos vetores normais exteriores $\mathbf{n}_1$ e $\mathbf{n}_2$, têm o mesmo bordo γ, então*

$$\iint_{S_1} [\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_1]\, dS = \iint_{S_2} [\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_2]\, dS.$$

A situação geométrica está ilustrada na Figura 6.32.
Da Fórmula de Stokes, temos

$$\iint_{S_1} [\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_1]\, dS = \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds$$

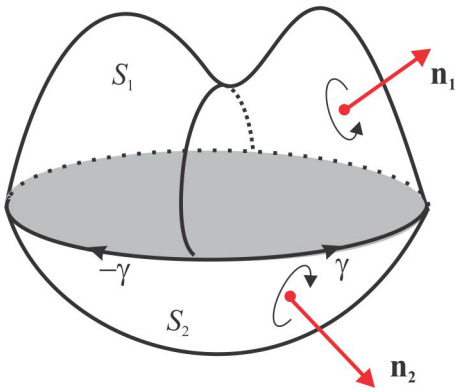


Figura 6.32: Superfícies com bordo comum.

e, por outro lado,

$$\iint_{S_2} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet (-\mathbf{n}_2)]\, dS = \oint_{-\gamma} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.60 *Seja γ a interseção da fronteira do cubo sólido $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ com o plano $2x + 2y + 2z = 3a$. Calcular, com auxílio da Fórmula de Stokes, a integral de linha*

$$\oint_{\gamma} \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz.$$

Solução A Figura 6.33 ilustra a superfície S, delimitada pela curva γ, e sua projeção no plano xy.

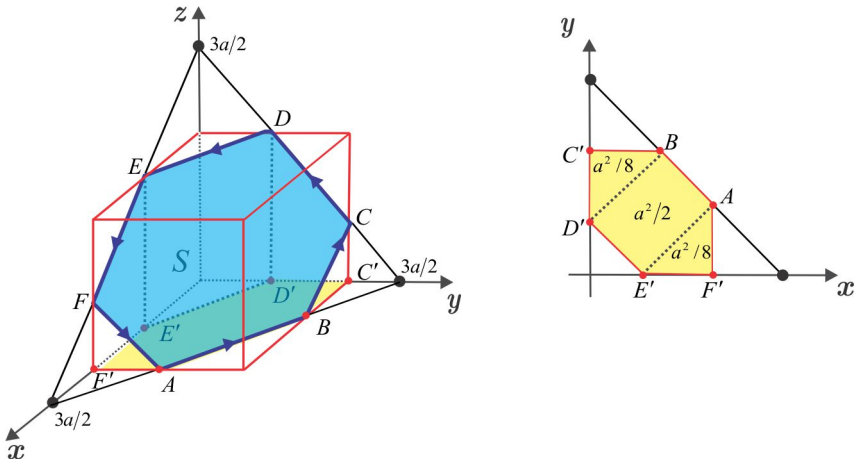


Figura 6.33: Corte do cubo sólido pelo plano $x + y + z = 3a/2$.

A superfície S é a porção do plano $2x + 2y + 2z = 3a$, delimitada pelo polígono de vértices A, B, C, D, E e F e com normal unitária $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. A projeção de S no plano xy é a região D delimitada pelo hexágono com vértices nos pontos A, B, C', D', E' e F', com lado de comprimento $a/2$. O campo

$$\mathbf{F} = \left(y^2 - z^2\right)\mathbf{i} + \left(z^2 - x^2\right)\mathbf{j} + \left(x^2 - y^2\right)\mathbf{k}$$

tem rotacional dado por

$$\text{rot}\,(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -2\,(y + z)\,\mathbf{i} - 2\,(x + z)\,\mathbf{j} - 2\,(x + y)\,\mathbf{k}$$

e, sobre a superfície S, temos

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n} = -\frac{4}{\sqrt{3}}(x+y+z) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\frac{3a}{2}\right) = -2a\sqrt{3}.$$

Sobre o plano $2x+2y+2z=3a$, a área elementar é $dS = \sqrt{3}\,dxdy$ e da Fórmula de Stokes, resulta

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma (\mathbf{F}\bullet\mathbf{T})ds &= \oint_\gamma \left(y^2-z^2\right)dx + \left(z^2-x^2\right)dy + \left(x^2-y^2\right)dz \\
&= \iint_S [\operatorname{rot}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}]\,dS = \iint_D (-2a\sqrt{3})\sqrt{3}dxdy \\
&= -6a\iint_D dxdy = -6a\,\mathrm{A}\,(D) = -6a\left(a^2/2 + a^2/8 + a^2/8\right) = -9a^3/2. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 6.61 *Calcular a integral* $\iint_S [\operatorname{rot}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}]\,dS$, *sendo* $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{k}$ *e* S *a superfície parametrizada por*

$$\mathbf{r}\,(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \left(2-u^2-v^2\right)\mathbf{k}, \quad u^2+v^2 \le 1.$$

Solução A integral $\iint_S [\operatorname{rot}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}]\,dS$ representa o fluxo do campo $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$, através da superfície S, e pode ser calculado de várias maneiras. A superfície S é o paraboloide de equação $z = 2-x^2-y^2$, cujo bordo é a circunferência γ de equações paramétricas

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t \quad z = 1, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

situada no plano $z = 1$.

■ Com a fórmula de Stokes

Usando a fórmula de Stokes, temos

$$\begin{aligned}
\iint_S [\operatorname{rot}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}]\,dS &= \oint_\gamma (\mathbf{F}\bullet\mathbf{T})ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t)\,(-\operatorname{sen} t)\,dt \\
&= -\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2t)\,dt = -\pi.
\end{aligned}$$

■ Por meio de um cálculo direto

Temos

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (2u)\,\mathbf{i} + (2v)\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \text{e} \qquad dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,dudv$$

e, considerando que $\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\iint_S [\operatorname{rot}(\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}]\,dS &= \iint_S (\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k})\bullet\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}dS \\
&= \iint_{u^2+v^2\le 1} (2u-2v-1)\,dudv \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r\cos\theta - 2r\operatorname{sen}\theta - 1)\,rdrd\theta \\
&= \tfrac{2}{3}\int_0^{2\pi} (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta - \tfrac{3}{4})d\theta = -\pi
\end{aligned}$$

■ Com a fórmula de Gauss

A superfície S, embora regular, não delimita um sólido compacto do $\mathbb{R}^3$, de modo que a fórmula de Gauss não pode ser aplicada diretamente. Para aplicar a fórmula de Gauss, *fechamos* a superfície

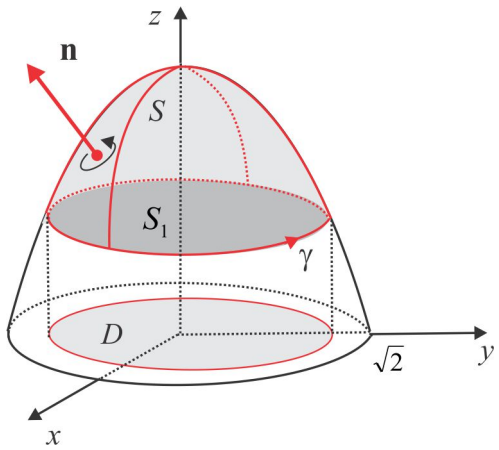


Figura 6.34: Superfície do Exemplo 6.61.

e subtraimos o fluxo excedente. Seja, então, S_1 o disco delimitado pelo bordo γ e representemos por S^* a superfície parcialmente regular $S + S_1$, como sugere a Figura 6.34.
Pelo Teorema e Gauss, temos

$$\iint_{S^*} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS = \iiint_{\Omega} \text{div}\,[\text{rot}(\mathbf{F})]\, dV = 0$$

e, por conseguinte,

$$\iint_{S} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS = -\iint_{S_1} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS. \tag{6.30}$$

Ora, a normal exterior à superfície S_1 é $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ e, assim,

$$\iint_{S_1} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS = \iint_{u^2+v^2\leq 1} dudv = \text{A}\,(D) = \pi$$

e de (6.30) concluímos que

$$\iint_{S} [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS = -\pi. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 6.62 *Sejam* $\mathbf{F}\,(x, y, z) = y\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ *e* S *a superfície parametrizada por*

$$\mathbf{r}\,(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \left(1 - u^2\right)\mathbf{k}, \quad u \geq 0,\ v \geq 0 \quad e \quad u + v \leq 1.$$

Calcular $\iint_S [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_S]\, dS$ *de duas maneiras: por um cálculo direto e, depois, usando a Fórmula de Stokes.*

Solução Na Figura 6.35 ilustramos a superfície S e sua projeção D no plano xy.

■ **Por um cálculo direto**

Sobre a superfície S, temos

$$\text{rot}\,(\mathbf{F}) = (-2x - 1)\,\mathbf{k} = (-2u - 1)\,\mathbf{k},$$

e a normal unitária a S é

$$\mathbf{n}_S = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{(2u)\,\mathbf{i} + \mathbf{k}}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|},$$

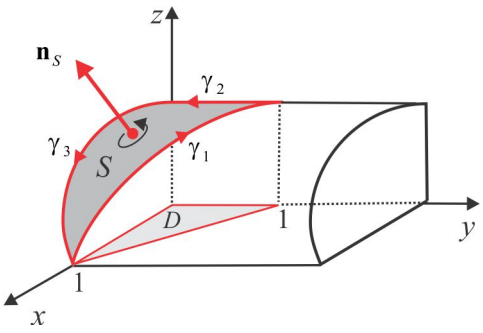


Figura 6.35: Superfície do Exemplo 6.62.

de modo que

$$[\text{rot}\,(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_S]\, dS = \frac{-2u-1}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dudv = (-2u-1)\, dudv.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\iint_S [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_S]\, dS &= \iint_D (-2u-1)\, dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-2u-1)\, dvdu = -5/6.\end{aligned}$$

■ **Com a fórmula de Stokes**

O bordo da superfície S é a curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, parcialmente regular, e da fórmula de Stokes, resulta

$$\begin{aligned}\iint_S [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}_S]\, dS &= \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds \\ &= \oint_{\gamma_1} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds + \oint_{\gamma_2} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds + \oint_{\gamma_3} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds = -5/6.\end{aligned}$$

De fato, calculando as integrais parciais, encontramos:

(i) Sobre γ_1: $y = 1-x,\ z = 1-x^2,\quad 0 \le x \le 1 \Rightarrow \oint_{\gamma_1} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds = -\int_0^1 \left(x^2 - 11x + 1\right) dx = 25/6.$

(ii) Sobre γ_2: $x = 0,\ z = 1,\quad 0 \le y \le 1 \Rightarrow \oint_{\gamma_2} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds = 0.$

(iii) Sobre γ_3: $y = 0,\ z = 1-x^2,\quad 0 \le x \le 1 \Rightarrow \oint_{\gamma_3} (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T})\, ds = \int_0^1 (-10x)\, dx = -5.$

6.5.1 Interpretação do Rotacional

Representemos por $\mathbf{v}\,(x, y, z)$ a velocidade de um fluido em movimento e por $\rho\,(x, y, z)$ a densidade do fluido. A integral de linha

$$\oint_\gamma (\rho\mathbf{v}) \bullet d\mathbf{r} = \oint_\gamma (\rho\mathbf{v} \bullet \mathbf{T}) ds$$

é a circulação do campo $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$, suposto de classe C^1, ao redor da curva fechada γ e, se representarmos por S a superfície delimitada por γ, segue da Fórmula de Stokes que

$$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{T}) ds = \iint_S [\text{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}]\, dS.$$

Consideremos uma direção unitária $\mathbf{u}$, com origem em um ponto Q, fixado no domínio do campo $\mathbf{F}$, e seja γ um pequeno círculo de raio δ, centrado no ponto Q, contido em um plano perpendicular ao vetor $\mathbf{u}$. Então, da continuidade do campo $P \mapsto \operatorname{rot}(\mathbf{F})(P)$, resulta

$$[\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{u}]_Q = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_S [\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{u}]\, dS = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} \oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}. \tag{6.31}$$

O lado esquerdo de (6.31) atinge seu valor máximo quando $\mathbf{u}$ apontar na direção do vetor $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ e, para pequenos valores do raio δ, é razoável considerar

$$[\operatorname{rot}(\mathbf{F}) \bullet \mathbf{u}]_Q = \frac{1}{\pi\delta^2} \oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

que é a *densidade de circulação*, isto é, a circulação de $\mathbf{F}$ ao redor de γ, dividida pela área do disco. A direção que produz maior densidade de circulação é a direção de $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$. Vemos, dessa forma, que $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ fornece informações sobre *aspectos rotacionais* do campo $\mathbf{F}$ e quando este representar o campo de velocidades de um fluido em movimento circulatório, então $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$ será paralelo ao eixo de rotação, como indica a Figura 6.36.

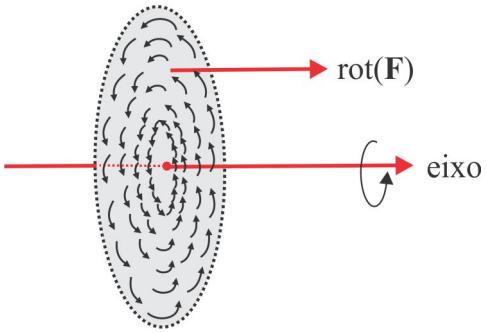


Figura 6.36: Interpretação do rotacional.

Exercícios & Complementos.

1. Em cada caso, calcule a integral
$$\oint_\gamma \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r},$$
onde a curva γ representa o bordo da superfície S.

   (a) $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ e S é a porção do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante.

   (b) $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ e S é a superfície do paraboloide $2z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 2$.

   (c) $\mathbf{F} = 2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e S é a parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

   (d) $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ e S é o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

   (e) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ e S é a superfície do cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$.

2. Calcule as seguintes integrais de linha:

   (a) $\int_\gamma y dx + z dy + x dz$, com γ a fronteira de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$.

(b) $\int_\gamma (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$, com γ a fronteira de $x^2+y^2=2y \quad y=z$.

(c) $\int_\gamma x^3 dz$, com γ a fronteira da superfície $z=y+4, \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4$.

(d) $\int_\gamma y dx - x^2 dy + 5dz$, com γ a fronteira da superfície $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \left(1-u^2\right)\mathbf{k}$, $u \ge 0$, $v \ge 0$ e $u+v \le 1$.

3. Calcule a circulação do campo vetorial $\mathbf{F}$ ao redor da curva γ, de duas maneiras: (i) por um cálculo direto e (ii) usando o Teorema de Stokes.

(a) $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, com γ a curva $x^2+y^2=4$ e $z=0$.

(b) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com γ a curva $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$ e $z \ge 0$.

(c) $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com γ a curva obtida pela interseção do plano $x+y+2z=2$ com os planos coordenados.

(d) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$, com γ a curva $x^2+y^2=z$ e $z=1$.

(e) $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i}$, com γ a curva $x^2+y^2+z^2=16, \quad x=0, y=0 \quad$ e $\quad z=0$.

(f) $\mathbf{F} = zy^2\mathbf{i} - xz^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$, com γ a curva $x=y^2+z^2, \quad x=9 \quad$ e $\quad \mathbf{n}=\mathbf{i}$.

(g) $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}$, com γ a curva $x^2+y^2=9$, $3y+4z=5 \quad$ e $\quad \mathbf{n} = \frac{1}{5}(3\mathbf{j}+4\mathbf{k})$.

(h) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, com γ a curva $x^2+y^2+z^2=1, \quad x=z \quad$ e $\quad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}+\mathbf{k})$.

4. Seja S a superfície dada na forma paramétrica por

$$\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \left(2-u^2+v^2\right)\mathbf{k}, \quad u^2+v^2 \le 1,$$

e considere o campo vetorial $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + (x+y)\,\mathbf{k}$. Calcule o fluxo de $\operatorname{rot}(\mathbf{F})$, através de S, de duas maneiras: (i) por um cálculo direto e (ii) pelo Teorema de Stokes.

Respostas & Sugestões

Seção 6.1 superfícies regulares

1. Como ilustração, resolveremos o item (a).

(a) O plano xy pode ser parametrizado pelas equações

$$\left|\begin{array}{l} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{array}\right.$$

com $u, v \in \mathbb{R}$, ou na forma vetorrial $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$. Outra parametrização para o plano xy é dada pelas equações

$$\left|\begin{array}{l} x = a_0 + a_1u + a_2v \\ y = b_0 + b_1u + b_2v \\ z = 0 \end{array}\right.$$

com $u, v \in \mathbb{R}$, em que a mudança de parâmetros é

$$(x,y) = \varphi(u,v) = (a_0 + a_1u + a_2v, b_0 + b_1u + b_2v),$$

com Jacobiano $J(\varphi) = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

(b) $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$.

(c) $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1-u-v)\mathbf{k}$.

(d) $\mathbf{r}(u,v) = a\cos u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + a\operatorname{sen} u\mathbf{k}$, com $a > 0$.

(e) $\mathbf{r}(u,v) = (v\cos u)\mathbf{i} + (v\operatorname{sen} u)\mathbf{j} + v^2\mathbf{k}$.

(f) $\mathbf{r}(u,v) = v\mathbf{i} + 3\cos u\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\mathbf{k}$.

2. Apresentaremos os detalhes para o item (d).

(a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

(b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2$.

(c) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = z^2$.

(d) Como $x = a\operatorname{senh} u\cos v$, $y = b\operatorname{senh} u\operatorname{sen} v$ e $z = c\cosh u$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= -\operatorname{senh}^2 u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) + \cosh^2 u \\ &= -\operatorname{senh}^2 u + \cosh^2 u = 1. \end{aligned}$$

3. Uma pararametrização para o círculo $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ é dada pelas equações

$$x = a + b\cos v, \quad y = 0 \ \text{ e } \ z = b\operatorname{sen} v, \quad v \in [0, 2\pi],$$

de modo que, após um giro de um ângulo u no sentido de x para y, obtemos uma cópia do círculo, cuja parametrização em coordenadas cilíndricas é dada pelas equações

$$r = a + b\cos v, \quad \theta = u \ \text{ e } \ z = b\operatorname{sen} v, \quad v \in [0, 2\pi] \ \text{ e } \ u \in [0, 2\pi].$$

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, temos que

$$\mathbf{r}(u,v) = (a + b\cos v)\cos u\mathbf{i} + (a + b\cos v)\operatorname{sen} u\mathbf{j} + b\operatorname{sen} v\mathbf{k}, \quad u, v \in [0, 2\pi],$$

é a parametrização do toro de revolução.

4. Representemos por π o plano tangente e por r a reta normal.

(a) $\pi : x + y - z = 1 \qquad r : x = 1 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 1 - t, \ t \in \mathbb{R}$.

(b) $\pi : 4x - z = 4 \qquad r : x = 2 + 4t, \quad y = 1, \quad z = 4 - t, \ t \in \mathbb{R}$.

(c) $\pi : x + y = 4 \qquad r : x = 2 + 4t, \quad y = 2 + 4t, \quad z = 3, \ t \in \mathbb{R}$.

Seção 6.2 área de uma superfície

1. (a) $4\pi\rho^2$ (b) $\pi a^2\sqrt{3}$ (c) $(2\pi - 4)\,a^2$ (d) $\pi a^2\sqrt{2}$ (e) $\frac{(3\sqrt{3}-1)2\pi a^2}{3}$ (f) $8\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} - 16$ (g) $\frac{49\sqrt{14}}{12}$ (h) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$ (i) $16\sqrt{2}$ (j) $\sqrt{22}$.

2. Sejam $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ os vetores que geram o paralelogramo S e representemos por α, β e γ os ângulos diretores do vetor $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. Então a área $A(S_1)$, da projeção de S sobre o plano xy, é dada por

$$\begin{aligned} A(S_1) &= [\mathrm{Pr}(\mathbf{a})\times \mathrm{Pr}(\mathbf{b})]\bullet\mathbf{k} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{k} \\ &= |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\,|\mathbf{k}|\cos\gamma = A(S)\cos\gamma, \end{aligned}$$

De modo similar, obtemos $A(S_2) = A(S)\cos\beta$ (no plano xz) e $A(S_3) = A(S)\cos\alpha$ (no plano yz). Assim,

$$A(S_1)^2 + A(S_2)^2 + A(S_3)^2 = A(S)^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A(S)^2.$$

3. A área total externa da edificação é $\mathrm{A}(S) = 19.32$.

Seção 6.3 integral de superfície

1. (a) 0 (b) $\frac{4}{3}\pi\rho^3$ (c) $(1-\cos a)\,r + \frac{1}{3}ar^3$ (d) $\frac{1}{15}(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)$ (e) $4\pi\rho^4$ (f) 60π (g) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (h) π (i) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$ (j) $\frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$ (k) $5\sqrt{14}$.

2. Os detalhes serão apresentados para os itens (c) e (e).

   (a) $ds^2 = du^2 + dv^2$.

   (b) $ds^2 = 4du^2 + 9dv^2$.

   (c) Como $\mathbf{r}_u = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}_v = \mathbf{i}-\mathbf{j}$, temos que

   $$E = |\mathbf{r}_u|^2 = 2,\ \ F = \mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_v = 0 \ \text{ e }\ G = |\mathbf{r}_v|^2 = 2$$

   e, portanto, $ds^2 = 2du^2 + 2dv^2$.

   (d) $ds^2 = (1+4u^2)du^2 + dv^2$.

   (e) Neste caso, temos $\mathbf{r}_u = (-\operatorname{sen} u)\,\mathbf{i} + (\cos u)\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{r}_u = \mathbf{k}$. Logo,

   $$E = |\mathbf{r}_u|^2 = 1,\ \ F = \mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_v = 0 \ \text{ e }\ G = |\mathbf{r}_v|^2 = 1$$

   e, portanto, $ds^2 = du^2 + dv^2$.

   (f) $ds^2 = (1+v^2)du^2 + 2uvdudv + (1+u^2)dv^2$.

   (g) $ds^2 = 4du^2 + dv^2$.

   (h) $ds^2 = (1+4u^2)du^2 + u^2dv^2$.

3. Como

   $$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k},$$

   os vetores tangentes às curvas $\mathbf{r}(u,c_2)$ e $\mathbf{r}(c_1,v)$, no ponto onde elas se interceptam, são

   $$\mathbf{r}_u = x_u\mathbf{i} + y_u\mathbf{j} + z_u\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_v = x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k},$$

   respectivamente. Portanto, a família de curvas $u = c_1$ e $v = c_2$ sobre S se interceptam em um ângulo reto se, e somente se, $\mathbf{r}_u\bullet\mathbf{r}_v = 0$.

4. Como S_1 e S_2 são equivalentes, existe uma bijeção $\varphi(s,t) = u(s,t)\mathbf{i} + v(s,t)\mathbf{j}$, de D_1 sobre D_2, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, tal que

$$\mathbf{r}_1(s,t) = \mathbf{r}_2(\varphi(s,t)), \quad s,t \in D_1,$$

onde $\mathbf{r}_1(s,t)$, $(s,t) \in D_1$ e $\mathbf{r}_2(u,v)$, $(u,v) \in D_2$ parametrizam S_1 e S_2, respectivamente. Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é uma função contínua em uma região Ω, contendo as superfícies S_1 e S_2, então

$$\iint_{S_2} f(x,y,z)dS_2 = \iint_{D_2} f\left(\mathbf{r}_2(u,v)\right)\left|\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right| dudv$$

e do Teorema de Mudança de Variáveis 4.23, resulta

$$\iint_{D_2} f\left(\mathbf{r}_2(u,v)\right)\left|\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right| dudv = \iint_{D_1} f\left(\mathbf{r}_1(s,t)\right)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right| dsdt.$$

Ora,

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right)\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right) J(\varphi),$$

e, como $J(\varphi) > 0$ ou $J(\varphi) < 0$, segue que

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} f(x,y,z)dS_2 &= \iint_{D_1} f\left(\mathbf{r}_1(s,t)\right)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial v}\right| dsdt \\
&= \pm \iint_{D_1} f\left(\mathbf{r}_1(s,t)\right)\left|\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial t}\right| dsdt \\
&= \pm \iint_{S_1} f(x,y,z)dS_1
\end{aligned}$$

Seção 6.4 fluxo e o Teorema de Gauss

1. 0.

2. Como ilustração, resolveremos o item (b).

   (a) 0.

   (b) Como $L = x^2$, $M = y^2$ e $N = z$, temos que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2(x+y)$ e do Teorema de Gauss resulta

   $$\oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})ds = 2\iint_S (x+y)dxdy.$$

   Usando a mudança de variável $x = 5u$ e $y = 2v$, que transforma a região delimitada pela elipse em um disco unitário, encontramos

   $$\begin{aligned}
   \oint_\gamma (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n})ds &= 2\iint_S (x+y)dxdy \\
   &= 20\iint_{u^2+v^2\leq 1} (5u+2v)dudv \\
   &= 20\int_0^{2\pi}\int_0^1 (5r\cos\theta + 2r\operatorname{sen}\theta)\, rdrd\theta = 0.
   \end{aligned}$$

3. Veja a resolução do item (a).

(a) Como $L = x$, $M = x$ e $N = z$, temos que $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 3$ e do Teorema de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = 3 \iiint_\Omega dxdydz \\ &= 3\operatorname{vol}(\Omega) = 2\pi a^3.\end{aligned}$$

(b) -3π (c) 0 (d) 51.

4. Como $L = x$, $M = 0$ e $N = 0$, segue do Teorema de Gauss que

$$\iint_S xdydz = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz = \iiint_\Omega dxdydz = \operatorname{vol}(\Omega).$$

5. Usando regras de derivação, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(g\nabla f) &= \operatorname{div}[(gf_x)\mathbf{i} + (gf_y)\mathbf{j} + (gf_z)\mathbf{k}] \\ &= \partial_x(gf_x) + \partial_y(gf_y) + \partial_z(gf_z) \\ &= g_x f_x + g f_{xx} + g_y f_y + g f_{yy} + g_z f_z + g f_{zz} \\ &= g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g.\end{aligned}$$

Considerando no Teorema de Gauss $\mathbf{F} = g\nabla f$, obtemos

$$\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{n}) dS = \iiint_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{F}) dxdydz = \iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g) dxdydz$$

e observando que

$$\mathbf{F} \bullet \mathbf{n} = (g\nabla f) \bullet \mathbf{n} = g(\nabla f \bullet \mathbf{n}) = g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$$

chegamos a

$$\iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \bullet \nabla g) dxdydz = \iint_S g\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} dS.$$

6. Considere $f = g$ no Exercício 5.

7. Considere $g = 1$ no Exercício 5.

8. Basta permutar f e g no Exercício 5 e em seguida subtrair.

9. $16\pi/5$.

10. $-2\pi a^2 h^2$.

11. $\frac{1}{8}(e^2 - 5)$.

Seção 6.5 circulação e o Teorema de Stokes

1. (a) -1 (b) 20π (c) -2π (d) π (e) 0.

2. (a) $-\sqrt{3}\pi a^2$ (b) 0 (c) $\frac{45\pi}{4}$ (d) $-\frac{5}{6}$.

3. (a) 4π (b) -4π (c) $\frac{4}{3}$ (d) -2π (e) $\frac{128}{3}$ (f) 729π (g) 0 (h) $-\sqrt{2\pi}$.

4. $-\pi$.

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, G., *Cálculo*, Vol. 3, Editora LTC, 7ª Edição, 2006.

[2] Boulos, P. & Abud, Z., *Cálculo Diferencial e Integral*, Vol. 2, Editora Makron Books, 2000.

[3] Courant, R. & John, F. Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II, Springer-Verlag, 1989.

[4] Guidorizzi, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol. 3, Editora LTC, 5ª Edição, 2002.

[5] Munem M. A. & Foulis D. J., *Cálculo*, Vol. 2, Editora Guanabara Dois, 1983.

[6] Protter, M. H. & Morrey, C. B., *Modern Mathematical Analysis*, Editora Addison-Wesley, 1964.

[7] Spiegel, M. R., *Cálculo Avançado*, Editora MacGraw-Hill, 1976.

[8] Swokowski, E., *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 2, Editora Makron Books, 2ª Edição, 1983.

[9] Thomas, G. B., *Cálculo*, Vol. 2, Editora Addison-Wesley, 10ª Edição, 2003.

[10] Williamson, R. E., Crowell, R. H. & Trotter, H. F., *Calculus of Vector Functions*, Editora Prentice-Hall, 3ª Edição, 1972.

Índice Remissivo

A

Ângulos diretores, 176
Área
  de uma superfície, 238
  elementar, 130, 238
    em coordenadas cilíndricas, 244
    em coordenadas esféricas, 244
  infinitesimal, 130
Aproximação linear, 40

C

Campo
  conservativo, 174
  de forças, 170
  escalar, 9
  gradiente, 174
  gravitacional, 174
  quadradoinverso, 174
  radial, 173
  tangencial, 173
Centro de massa
  de uma placa, 142
  de uma superfície 252
Circulação, 218, 266
Classe de equivalência, 236
Compenente tangencial, 198
Componentes
  de um campo vetorial, 172
Conjunto de nível, 10
Conjunto
  aberto, 3
  compacto, 5
  conexo, 6
  de pontos, 1
  fechado, 4
  fronteira de um, 4
  limitado, 5
Coordenadas
  polares, 21, 114
  cilíndricas, 114
  esféricas, 115
Curva
  de nível, 10
  integral, 188

D

Densidade
  de circulação, 275
  de corrente elétrica, 263
  linear, 171
  superficial, 141
  volumétrica, 163
Derivada
  de Newton-Leibniz, 32
  direcional, 57
  parcial, 33
  parcial de ordem superior, 35
  parcial mista, 36
Descontinuidade
  essencial, 22
  removível, 22
Distribuição de carga elétrica, 264, 265
Divergente, 177
Domínio 6
  admissível, 207
  estrelado, 209

E

Elemento linear, 254
Energia
  cinética, 142, 170
  potencial, 206
Equação

de conservação da carga elétrica, 263
de conservação da massa, 263
de continudade, 178
de Laplace, 40
de Poisson para o potencial, 265
de transmissão de calor, 39
fundamental da eletrostática, 264
Equações de Cauchy-Riemann, 40
Extremos
condicionados, 92
vinculados, 92

F

Fluxo, 255, 258
Forma Diferencial, 172, 207
de segunda ordem, 253
exata, 207
total, 207
Fórmula de Gauss
bidimensional, 217
tridimensional, 258
Fórmula de Green, 212
Fórmula de Stokes
bidimensional, 219
tridimensional, 268
Fórmula da Divergência, *ver* Fórmula de Gauss
Função, 8
valor de uma, 9
antissimétrica, 35
contínua, 21
derivável, 32
diferenciável, 41
diferencial de uma, 46
elementar, 23
gráfico de uma, 9
homogênea, 56
imagem de uma, 9
incremento da, 46
simétrica, 35
valor máximo de uma, 78
valor mínimo de uma, 79

G

Gauss, *ver* Fórmula de Gauss
Green, *ver* Fórmula de Green

I

Identidade de Green, 220
Infinitésimos, 46
Integral de linha
independente do caminho, 201
Integral dupla, 129, 130
imprópria,144
convergente, 144
divergente, 144
Integral
de Riemann, 129
de superfície, 247
iterada, 131
repetida, 131
simples, 128
Intensidade de corrente elétrica, 263

J

Jacobiano, 107

L

Laplaciano, 177
Lei de Coulomb, 264
Lema Fundamental, 45
Limite, 14
iterados, 18
propriedades básicas
confronto, 15
linearidade, 15
produto, 15
quociente, 15
Linhas de um campo, 262

M

Massa
elementar, 142
de uma superfície, 252
Matriz
autovalores de uma, 85
Jacobiana, 49, 177
Hessiana, 84, 87
polinômio característico de uma, 85
simétrica, 85

Máximo
absoluto, 78
global, 78
local, 78
relativo, 78
Método
de Indução Finita, 131
dos Multiplicadores de Lagrange, 93
Mínimo
absoluto, 79
global, 79
local, 79
relativo, 79
Momento, 142
Momento de inércia
de uma placa, 142
de uma superfície, 252
polar, 142
Mudança de coordenadas, 111
Mudança de Variável
em integral dupla, 147
em integral tripla, 160
Multiplicador de Lagrange, 93

O

Operador
divergente, 177
gradiente, 176
rotacional, 178
Ordem de integração,
na integral dupla, 131
invertendo a ordem, 138
na integral tripla, 158

P

Paralelepípedo, 157
Parametrização
da esfera, 231
do cilindro, 230, 231
do cone, 231
de uma superfície de revolução, 232
Plano tangente, 41, 61, 229
Ponto
crítico, 81
de acumulação, 6
de fronteira, 2, 4
de sela, 82
estacionário, 81
exterior, 2
extremo, 79
interior, 2
isolado, 6
Potencial eletrostático 264
Primeira Forma Fundamental, 255
Produto Vetorial Fundamental, 229

R

Região, 6
simplesmente conexa, 6
horizontal simples, 134
vertical simples, 134
Regra da Cadeia
1º caso, 52
2º caso, 53
3º caso, 53
diagrama em árvore, 54
Regra de Cramer, 108
Regras de derivação, 65
Reta normal
equação vetorial, 62
Reta tangente
no espaço, 63
no plano, 32

S

Somas de Riemann, 129
Superfície
de revolução, 232
meridianos de uma, 233
paralelos de uma, 233
de nível, 10
fechada, 237
forma cartesiana explicita, 227
forma cartesiana implícita, 227
forma paramétrica, 228
orientada, 234
parametrizada, 228
parcialmente regular, 232

regular por partes, 232
regular, 229
simples, 237
Stokes, *ver* Fórmula de Stokes
Superfícies equivalentes, 236

T

Taxa instantânea de variação, 56
Teorema da Divergência, 258
Teorema da Média
para integral dupla, 130
para integral tripla, 262
Teorema de Gauss, 258
Teorema de Green, 213
Formulação Vetorial, 219
Teorema de Stokes, 269
Teorema
da Função Implícita 1, 104
da Função Implícita 2, 106
da Função Implícita 3, 107
da Função Inversa, 105, 113
de Fubini, 131, 134
de Weierstrass, 88
do valor médio - TVM, 45
Fundamental do Cálculo, 54
Teste
da Segunda Derivada, 83, 86
do Hessiano, 83, 84
Toro de revolução, 237
Trabalho, 170
Trajetórias ortogonais, 112
Transformações, 110

V

Vetor gradiente, 61
Vizinhança
circular, 2
retangular, 2
Volume elementar, 134, 157
em coordenadas cilíndricas, 161
em coordenadas esféricas, 162