Lema de Artin-Rees

Sejam A um anel Noeth, $I \trianglelefteq A$ ideal, M um A-módulo f.g e $N \leq M$ um submód.

Então $\exists\ k \in \mathbb{N}$ tq

$$I^n M \cap N = I^{n-k}(I^k M \cap N)$$

$$\forall n \geq k.$$

Topologia I-ádica

Seja M um A-mód e $I \trianglelefteq A$. Dizemos que $U \subseteq M$ é **aberto**, se para todo $x \in U$ $\exists\, n \geq 1$ tq $x + I^n M \subseteq U$

Seja $N \leq M$ um A-submód

Podemos equipar N com a top relativa τ_{rel} e também com a top I-ádica

Como $I^n N \subseteq I^n M \cap N \Rightarrow I^n M \cap N \in \tilde{\tau}^N_{adic}$
$\in \tau^N_{adic}$

$\Rightarrow \tilde{\tau}^N_{rel} \subseteq \tilde{\tau}^N_{adic}$

Vale a inclusão a inclusão recíproca?

Quando A é Noeth, M é f.g. a rpta é sim! De fato, pelo lema de Artin-Rees, $\exists\, k \geq 0$ tq

$$I^n M \cap N = I^{n-k}(\underbrace{I^k M \cap N}_{\subseteq N}) \subseteq I^{n-k} N \quad \forall\, n \geq k$$

$$\Rightarrow I^n M \cap N \subseteq I^{n-k} N \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow I^{m+k} M \cap N \subseteq I^m N \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\in \tau^N_{rel}$$

$$\Rightarrow I^m N \in \tau^N_{rel}$$

$$\Rightarrow \tau^N_{adic} \subseteq \tau^N_{rel} \Rightarrow \tau^N_{adic} = \tau^N_{rel}$$

Por outro lado, M equipado com a topologia I-ádica é Hausdorff $\iff \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = 0$. De fato,

$\Rightarrow)$ Suponha, por contradição, $\exists\ x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M$ com $x \neq 0$

Como M é Hausdorff $\exists\ x \in \underbrace{V_x \text{ e } 0 \in V_0}_{\text{viz abertas}}$ tq $V_x \cap V_0 = \emptyset$

$\Rightarrow \quad \exists\, n \geq 1 \quad \text{tq} \quad 0 + I^n M \subseteq V_0$

$\Rightarrow \quad I^n M \subseteq V_0$

Como $x \notin V_0 \Rightarrow x \notin I^n M$ ($\Leftarrow$)

$\therefore \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = 0$

($\Leftarrow$) Sejam $x, y \in M$ tq $x \neq y$

$\Rightarrow \quad x - y \neq 0$

Como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n M = 0$

$\Rightarrow \exists\ n > 1$, tq $\cancel{x - y \in I^n M}$

__Af__ $(x + I^n M) \cap (y + I^n M) = \emptyset$ ✓

Caso $\exists\ z \in (x + I^n M) \cap (y + I^n M)$

$\Rightarrow z = x + a = y + b$ com $a, b \in I^n M$ $\Rightarrow x - y = b - a \in I^n M$

$\Rightarrow \Leftarrow$

Teorema de Interseção de Krull

Sejam A Noeth, $I \trianglelefteq A$ com $I \subseteq J(A)$ e M um A-módulo f.g. Então

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n M = 0.$$

Prova

Seja

$$N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^n M \Rightarrow N \leq M$$

Pelo lema de A-R $\exists\ k \geq 0$ tq $\forall j \geq k$,

$$\underbrace{I^j M \cap N}\ = I^k \big(\underbrace{I^{j-k} M \cap N}\big)$$

$$N = I^k N \subseteq J(A) N \subseteq N$$

$$\Rightarrow \quad N = J(A) N \quad \xrightarrow{\text{Lema de Nakayama}} \quad N = 0 \quad \blacksquare$$

Como M é Noeth $\Rightarrow N$ é f.g.

Ex Se $(A, \mathfrak{m})$ é um anel local Noeth. e M é um A-mód f.g. Então M equipado com a top $\mathfrak{m}$-ádica é Hausdorff.

I - Filtrações

Seja M um A-mód e $I \trianglelefteq A$. Uma <u>I-filtração</u> de M é uma sequência $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de submódulos de M tq

i) $M = M_0 \supset M_1 \supseteq M_2 \supset \cdots$

ii) $I M_n \subseteq M_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Obs</u> Se $IM_n \subseteq M_{n+1}$ $\forall n$

$\Rightarrow I^2 M_n \subseteq I M_{n+1} \subseteq M_{n+2}$

$\vdots$

<u>Equivalent</u> $I^j M_n \subseteq M_{n+j}$ $\forall n, \forall j$

<u>Def</u> Uma I-filtração de M é <u>estável</u>, se $\exists$ $k \in \mathbb{N}$ tq $IM_n = M_{n+1}$ $\forall n \geq k$

Equivalentemente, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tq $I^j M_k = M_{k+j} \quad \forall j \geq 1$

<u>Ex</u> $M_n = I^n M$ estável

$\Rightarrow \{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma I-filtração

$\left(I^0 = A, \quad M_0 = M, \quad M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots \right)$

Anéis Graduados

A_n: polinômios de grau n

$f_m \cdot f_n = f_{m+n}$

$$f \in \mathbb{K}[x,y] = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$$

$$f = \underbrace{a_{00}}_{f_0} + \underbrace{(a_{10}x + a_{01}y)}_{f_1} + \underbrace{(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)}_{f_2}$$

$$+ \underbrace{(a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3)}_{= f_3} + \dots$$

$f_n = 0$ q.s.

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + \dots$$

Def Um anel graduado A (sobre $\mathbb{N}$) é um anel A juntamente com uma sequência de subgrupos aditivos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de A tq

i) $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (como grupo aditivo)

($a \in A \Rightarrow a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $a_n \in A_n$, $a_n = 0$ q.s. $\rightsquigarrow$ única!)

ii) $A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$

Em particular $A_0 \cdot A_0 \subseteq A_0$

$\Rightarrow$ A_0 é um anel

Também, $A_0 \cdot A_n \subseteq A_n$

Cada A_n é um A_0-módulo.

Seja $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ um anel graduado

Def Um A-módulo graduado é um A-módulo M juntamente com uma seq de subgrupos aditivos $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M tq

i) $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ (como grupo)

ii) $A_m \cdot M_n \subseteq M_{m+n} \quad \forall\, m, n \in \mathbb{N}$

Em particular, $A_0 \cdot M_n \subseteq M_n$

$\Rightarrow M_n$ é um A_0-módulo $\forall\, n \in \mathbb{N}$

<u>Obs</u> Seja $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ um anel grad

Defina $A_+ := \bigoplus_{n \geq 1} A_n$

$\Rightarrow A_+ \trianglelefteq A$ chamado <u>ideal</u> <u>irrelevante</u>

Considere $\varphi : A \longrightarrow A_0$

$a_0 + a_1 + \cdots + \longmapsto a_0$

φ é um hom sobrej de anéis

com $\operatorname{Ker}\varphi = A_+$

$$\therefore \quad A/A_+ \cong A_0$$

Se A é Noeth $\Rightarrow A_0$ é Noeth.

Prop Seja $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ um anel graduado.
São equivalentes:

i) A é Noeth

ii) A_0 é Noeth e A é uma A_0-álgebra f.g.

Prova

i) $\Rightarrow$ ii) A_0 é Noeth ✓ $\left(A_0 \cong A/A_+ \right)$

Como $A_+ \trianglelefteq A \Rightarrow A_+ = \langle x_1, \ldots, x_\ell \rangle$

é f.g.

Cada $x_j = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^j$, $x_n^j \in A_n$

$x_n^j = 0$ q.s.

$\Rightarrow A_+ = \langle \{x_n^j\} \rangle$

finita

geradores homogêneos

Sem perda de generalidade podemos supor que cada x_j é homogêneo de grau $k_j \geq 1$ $(x_j \in A_{k_j})$

AF $A = A_0[x_1, \dots, x_l]$. De fato,

$\supseteq)$ ✓

$\subseteq)$ Basta provar que $A_n \subseteq A_0[x_1, \dots, x_l]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por indução

Se $n=0$ ✓. Seja $\underline{n \geq 1}$ e suponhamos

$A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \subseteq A_0[x_1, \ldots, x_\ell]$

Seja $a \in A_n \Rightarrow a \in A_+ = \langle x_1, \ldots, x_\ell \rangle$

$\Rightarrow \underset{A_n}{a} = b_1 x_1 + \ldots + b_\ell x_\ell$, $b_j \in A$

$$\underset{n-k_1}{b_1}\ \underset{k_1}{x_1} \quad \ldots \quad \underset{n-k_\ell}{b_\ell}\ \underset{k_\ell}{x_\ell} \rightsquigarrow \text{graus}$$

$A_m = 0$ se $m < 0$

$b_j \in A_{n-k_j} \subseteq A_0[x_1, \ldots, x_\ell]$

$$\Rightarrow a \in A_0[X_1, \dots, X_\ell]$$

$$\Rightarrow A_n \subseteq A_0[X_1, \dots, X_\ell].$$

ii) $\Rightarrow$ i) $\quad A \cong A_0[X_1, \dots, X_n] / I$

Como A_0 é Noeth $\xRightarrow{\text{Hilbert}}$ $A_0[X_1, \dots, X_n]$ é Noeth

$\Rightarrow A$ é Noeth $\blacksquare$

Ex Sejam A um anel Noeth
$I \trianglelefteq A$.

Defina $A_\bullet := \bigoplus_{n \geq 0} I^n$ $\quad (I^0 = A)$

O produto em $A_\bullet$ é induzido pelas aplicações $I^m \times I^n \longrightarrow I^{m+n}$
$(a, b) \longmapsto ab$

$$\left(\begin{array}{l} A_0 = A \\ A_n = I^n \\ A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n} \end{array} \right)$$

Se $I = \langle a_1, \dots, a_\ell \rangle$ $\partial(a_j) = 1$

$$\Rightarrow A_0 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Noeth}}}{A}[a_1, \dots, a_\ell]$$

Pela prop, $\underline{A_0 \text{ é Noeth}}$

Agora sejam M um A-módulo e $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma I-filtração de M

Defina $M_\bullet := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ (grupo)

Como $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é I-filtração

$(I^m \cdot M_n \subseteq M_{m+n})$

$\Rightarrow M_\bullet$ é um $A_\bullet$-mód graduado.

Teorema Sejam A um anel Noeth, $I \trianglelefteq A$, M um A-mód f.g equipado com uma I-filtração $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. São equivalentes:

i) $M_\bullet$ é f.g. como $A_\bullet$-mód

ii) $\{M_n\}$ é estável. Prova

$i) \Rightarrow ii)$ Suponha que $M_a = \langle x_1, \ldots, x_\ell \rangle$

Podemos supor que cada x_i é homogêneo

de grau t_i $(x_i \in M_{t_i})$

Seja $k \geq \max\{t_1, \ldots, t_\ell\}$

$\Rightarrow$ $\underline{k - t_i \geq 0}$ $\forall$ $i = 1, \ldots, \ell$

$\underline{\underline{Af}}$ $\quad I M_K = M_{K+1} \quad - \quad \{ a \in I^2$

$I = \langle \alpha, \beta \rangle \Downarrow I^2 = \langle \alpha^2, \alpha\beta, \beta^2 \rangle$

$\subseteq)$ ✓ (I-filtração)

$a = b_1\alpha^2 + b_2\alpha\beta + b_3\beta^2 = \alpha(b_1\alpha) + \alpha(b_2\beta) + \beta(b_3\beta)$ $\}$

$\supseteq)$ Seja $x \in \underline{M_{K+1}}$

Como $M_{K+1} \subseteq M_0$

$\Rightarrow \partial(a_i) = K+1-t_i \geq 1$

$K+1-t_i$

$$\Rightarrow \quad x = \underset{\substack{\downarrow \\ K+1-t_1}}{a_1} \underset{\substack{\downarrow \\ t_1}}{x_1} + \dots + \underset{\substack{\downarrow \\ K+1-t_2}}{a_\ell} \underset{\substack{\downarrow \\ t_\ell}}{x_\ell}, \quad a_i \in I$$

$\Rightarrow x = c_1 y_1 + \cdots + c_s y_s$, onde $c_j \in I$

$\partial(y_j) = k$

$\Rightarrow x \in I M_k$

$y_j \in M_k$

ii) $\Rightarrow$ i) Suponha que $\{M_n\}$ é estável $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ tq

$$I^n \cdot M_k = M_{k+n} \quad \forall n$$

Então M_0 é gerado como A_0-módulo pelo subgrupo $\bigoplus_{n \leq k} M_n$

Como A é Noeth e M é f.g.

$\Rightarrow M$ é Noeth

$\Rightarrow M_n$ " " $\Rightarrow \bigoplus_{n \leq k} M_n$ é Noeth

$$\Rightarrow \bigoplus_{n \leq k} M_n = A z_1 + \cdots + A z_r$$

é f.g.

$$\Rightarrow M_0 = A_0 z_1 + \cdots + A_0 z_r$$

$\Rightarrow M_0$ é um A_0-mod f.g. $\blacksquare$

Cor (Lema de Artin-Rees)

Considere a I-filtração estável $M_n = I^n M$

Pelo Teorema anterior, $M_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n M$

é um $A_\bullet$-mód f.g. $\left(A_\bullet = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n\right)$

Como A_0 é Noeth

$\Rightarrow$ M_0 é Noeth

Agora seja $N_n := I^n M \cap N \leq N$

$\Rightarrow$ $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma I-filtração de N.

Defina $N_\otimes := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \left(I^n M \cap N \right)$

$\Rightarrow N_\otimes$ é um $A_\otimes$ - subm de $M_\otimes$

Noeth

$\Rightarrow N_\otimes$ é f.g.

Logo, pelo Teo anterior,

$\{\underbrace{I^n M \cap N}_{N_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é estável $\Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}$ tq

$\Rightarrow \quad I N_n = N_{n+1} \quad \forall n \geq k$

$\Rightarrow \quad I(I^n M \cap N) = I^{n+1} M \cap N \quad \forall n \geq k$

Iterando,

$$I^{j}(I^{n}M \cap N) = I^{n+j}M \cap N$$

$$\forall j \geq 1$$
$$\forall n \geq k$$

Equivalentemente,

$$I^{m-n}(I^{n}M \cap N) = I^{m}M \cap N \quad \forall m \geq n$$

$$\cancel{m = n+j}$$

$$\blacksquare$$