INSTITUTO DE MATEMÁTICA
E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Bacharelado em Matemática

Luiz Felipe Silva Marques

Funções Holomorfas em Várias Variáveis e o Teorema de Hartogs

São Paulo

2º Semestre de 2024

Luiz Felipe Silva Marques

Funções Holomorfas em Várias Variáveis e o Teorema de Hartogs

Monografia apresentada à disciplina
MAT–0148 — Introdução ao Trabalho Científico,
Departamento de Matemática,
Instituto de Matemática e Estatística,
Universidade de São Paulo.

Área de Concentração: ANÁLISE COMPLEXA

Orientador: Paulo Domingos Cordaro – IME USP

São Paulo

2º Semestre de 2024

Folha de Avaliação

Aluno: Luiz Felipe Silva Marques
Título: Funções Holomorfas em Várias Variáveis e o Teorema de Hartogs
Data: 2º Semestre de 2024

Banca Examinadora

Paulo Domingos Cordaro – IME USP (Orientador)
Bruno de Lessa Victor – UFSC
Igor Ambo Ferra – UFABC

Aos meus pais, Célia e Gilberto.

Agradecimentos

Antes de tudo, gostaria de agradecer ao professor Paulo Domingos Cordaro, que me guiou na construção deste trabalho e em grande parte da minha graduação. O professor Paulo é uma pessoa extremamente inspiradora, que trato como um exemplo a ser seguido. A sua orientação influenciou de maneira extremamente positiva a minha formação e a minha gratidão por isso é imensa.

Registro aqui o meu agradecimento ao professor João Fernando Naryioshi, que, em diversas ocasiões durante a redação desta monografia, se mostrou altamente atencioso com várias de minhas dúvidas. Obrigado também aos professores Bruno de Lessa Victor e Igor Ambo Ferra por terem aceitado ler e avaliar este trabalho, e também pelas valiosas correções.

Aos meus pais Célia e Gilberto: vocês sempre estiveram ao meu lado e fizeram tudo por mim; toda a minha trajetória é e será, portanto, na tentativa de retribuir, ao menos minimamente, o amor que vocês me deram. Aos meus amigos Gabriela, Laércio, Malu, Rita, Tobias e Vitória: vocês, mesmo que distantes, me fazem lembrar todos os dias quem sou e de onde vim; como sabem, é isso que me faz forte e corajoso para enfrentar tudo o que há de vir.

Por fim, devo dizer que esta monografia e toda a minha graduação foram realizadas com o auxílio do acervo espetacular da Biblioteca Carlos Benjamin de Lyra. Esta certamente merece o meu agradecimento.

"To limit oneself to the study of one complex variable
is to do complex analysis with one eye closed"
S. G. Krantz

Resumo

Marques, L. **Funções Holomorfas em Várias Variáveis e o Teorema de Hartogs**. 2024. 67 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2024.

Nesta monografia, apresentamos uma introdução à teoria de funções holomorfas em várias variáveis complexas. Iniciamos tratando da teoria de uma variável complexa com uma abordagem que difere daquela costumeiramente adotada em um primeiro curso. Para isso, lança-se mão da teoria de formas diferenciais e, em particular, do Teorema de Stokes. Em seguida, apresenta-se a teoria de funções holomorfas em várias variáveis, culminando na demonstração do Teorema de Hartogs, que é objetivo principal deste trabalho. Este resultado exibe o contraste existente entre a teoria de uma variável e a teoria de várias variáveis.

Palavras-chave: Análise Complexa. Várias Variáveis Complexas. Teorema de Hartogs.

Abstract

MARQUES, L. **Holomorphic Functions in Several Variables and The Hartogs' Theorem**. 2024. 67 p. Monografia (Bacharelado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2º Semestre de 2024.

In this monograph, we present an introduction to the theory of holomorphic functions in several complex variables. We begin by addressing the theory of a single complex variable with an approach that differs from the one usually adopted in a first course. For this purpose, we employ the theory of differential forms and, in particular, Stokes' Theorem. Next, we present the theory of holomorphic functions in several variables, culminating in the proof of Hartogs' Theorem, which is the main objective of this work. This result highlights the contrast between the theory of one variable and the theory of several variables.

Keywords: Complex Analysis. Several Complex Variables. Hartogs' Theorem.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$;
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais;
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos;
$\mathbb{R}_+$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$;
Ω	Subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ ou de $\mathbb{C}^N$;
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω;
$B_r(a)$	Bola aberta centrada em $a \in \mathbb{R}^N$ de raio $r \in \mathbb{R}_+$;
$\Delta_r(z_0)$	Disco aberto centrado em $z_0 \in \mathbb{C}$ com raio $r \in \mathbb{R}_+$;
$\Delta_r^N(z_0)$	Polidisco aberto centrado em $z_0 \in \mathbb{C}^N$ com poliraio $r \in \mathbb{R}_+^N$;
m	A medida de Lebesgue;
$\mathbf{X}(\Omega)$	Espaço dos campos vetoriais sobre Ω;
$\mathbf{F}_k(\Omega)$	Espaço das k-formas diferenciais sobre Ω;
$\mathbf{M}_k$	Conjunto dos multi-índices ordenados de tamanho k;
$C(\Omega)$	Espaço das funções contínuas em Ω com valores em $\mathbb{C}$;
$C^k(\Omega)$	Subespaço de $C(\Omega)$ das funções cujas derivadas parciais de ordem menor do que ou igual a k existem e são contínuas;
$C^\infty(\Omega)$	Intersecção de todos os espaços $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$;
$C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$	Espaço das (p,q)-formas sobre Ω com coeficientes de classe C^∞;
$(C_c^\infty)_{(p,q)}(\Omega)$	Espaço das (p,q)-formas sobre Ω com coeficientes de classe C^∞ e suporte compacto;
$\|\cdot\|_{L^p(X)}$	Norma usual do espaço de Banach $L^p(X)$, onde X é um espaço de medida e $1 \leq p \leq \infty$.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A teoria de funções holomorfas em várias variáveis complexas pode ser considerada um ponto frutífero de conexão entre diversas áreas da matemática como equações diferenciais parciais, geometria diferencial, álgebras de Banach e geometria algébrica. O objetivo deste texto é dar uma introdução a esta teoria e demonstrar um de seus primeiros resultados mais profundos: o Fênomeno de Hartogs. Para isso, no Capítulo 2, fazemos uma passagem pela teoria de funções holomorfas em uma variável e seus principais resultados. Em seguida, no Capítulo 3, introduzimos as funções holomorfas em várias variáveis e generalizamos diversos resultados demonstrados no Capítulo 2. O Capítulo 4 é destinado exclusivamente à discussão do Teorema de Hartogs, que pode ser considerado o ponto chave deste trabalho. Reservamos o presente capítulo à apresentação de alguns lemas de análise que nos serão úteis durante o texto, e à recordação da teoria de formas diferenciais, que se mostrará uma ferramenta fundamental no que segue. O texto, de maneira geral, tem grande influência da abordagem adotada em [3]. Prezamos aqui, contudo, pelo detalhamento dos argumentos, que nem sempre ocorre em [3], uma vez que este é um texto bastante avançado.

Antes de iniciar, vejamos um panorama mais concreto das pretensões deste trabalho. Todos os termos e conceitos presentes nos parágrafos abaixo serão introduzidos adequadamente no decorrer do texto.

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ aberto, uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ de classe C^1 é dita *holomorfa* se satisfaz as equações $\partial f/\partial \overline{z_j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Aqui, denotamos por $\partial/\partial \overline{z_j}$ o operador diferencial parcial linear definido por

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

onde $x_j = \mathrm{Re}(z_j)$ e $y_j = \mathrm{Im}(z_j)$. Perceba que há uma crucial diferença com relação à teoria de uma variável. Uma função holomorfa em $\mathbb{C}^N$, com $N \geq 2$, é solução de um sistema sobre-determinado de equações diferenciais parciais lineares, enquanto que no caso $N = 1$ há somente uma equação. Equivalentemente, como veremos, f é holomorfa se pode ser localmente escrita como uma série de potências absoluta e uniformemente convergente.

O conjunto das funções holomorfas em Ω é denotado por $\mathcal{O}(\Omega)$. O Teorema de Hartogs, nosso principal objetivo, afirma que se $N \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ é um aberto e $K \subseteq \Omega$ é um compacto tal que $\Omega \setminus K$ é conexo, então toda função $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ pode ser unicamente estendida a uma função em $\mathcal{O}(\Omega)$. Podemos novamente evidenciar o contraste que aqui se apresenta com relação à teoria de uma variável complexa. A aplicação $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \longmapsto z^{-1} \in \mathbb{C}$ não pode ser estendida a uma função holomorfa em $\mathbb{C}$. De fato, se este fosse o caso, pelo Teorema de Cauchy, que veremos a seguir, a integral de tal função sobre uma circunferência centrada na origem seria nula, mas uma conta simples mostra que tal integral é igual a $2\pi i$ independentemente do raio. Este exemplo mostra que não seria possível enunciar um resultado análogo ao Teorema de Hartogs com $N = 1$.

1.1 Alguns lemas preliminares

No decorrer do que segue, utilizaremos diversos fatos básicos acerca da topologia do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ e da diferenciabilidade de funções definidas em abertos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$. Optamos por apresentar, a seguir, uma seleção destes resultados que julgamos mais relevantes.

Como usual, dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto, denotamos por $C(\Omega)$ ou por $C^0(\Omega)$ o conjunto das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ que são contínuas. Além disso, fixado $k \in \mathbb{N}$, denotamos por $C^k(\Omega)$, o conjunto das funções em $C(\Omega)$ cujas derivadas parciais de ordem menor do que ou igual a k existem e são contínuas. Se $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, então $f \in C^k_c(\Omega)$ se, e somente se, $f \in C^k(\Omega)$ e o conjunto

$$\text{supp} f \doteq \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}} \cap \Omega,$$

que denominamos *suporte* de f, é compacto. Definimos também

$$C^\infty(\Omega) \doteq \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega).$$

Por fim, dados $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$, denotamos a bola aberta centrada em x_0 de raio r por

$$B_r(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < r\}.$$

Assumiremos válidos os resultados clássicos da teoria de integração de Lebesgue, em especial os Teoremas da Convergência Monótona e Dominada e os Teoremas de Fubini e Tonelli. Denotaremos sempre por m a medida de Lebesgue.

1.1.1 Exaustão por compactos

Mostramos, nesta subseção, que todo aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ pode ser escrito como uma união encaixante de compactos. Na Seção 2.5, este fato nos permitirá aplicar o argumento da diagonal de Cantor durante a prova de um importante resultado.

Lema 1.1.1. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere*

$$K_n \doteq \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq 1/n\} \cap \overline{B_n(0)}.$$

São válidas as seguintes afirmações:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, K_n é compacto e $K_n \subseteq \operatorname{int}(K_{n+1})$.

(b) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

(c) Se $K \subseteq \Omega$ é compacto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{n_0}$.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Como a aplicação $x \longmapsto d(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ é contínua, K_n é a intersecção de dois fechados de $\mathbb{R}^N$ e, portanto, é fechado. Mas K_n é também limitado uma vez que está contido em $\overline{B_n(0)}$. O conjunto

$$\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 1/(n+1)\} \cap B_{n+1}(0)$$

é aberto, contém K_n e está contido em K_{n+1}. Logo, $K_n \subseteq \operatorname{int}(K_{n+1})$. Isso finaliza a prova de (a). Em (b) não há nada a provar se $\Omega = \varnothing$. No caso não trivial, como Ω é aberto, todo elemento $x \in \Omega$ dista positivamente do complementar de Ω e, portanto, existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ para o qual $\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq 1/n_1$. Sendo $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|x| \leq n_2$, temos que $x \in K_{\max\{n_1, n_2\}}$. Por fim, a afirmação (c) segue da definição de compacidade se observarmos que (a) e (b) implicam que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \operatorname{int}(K_n)$. $\square$

Uma sequência $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo as condições (a), (b) e (c) acima é dita uma *exaustão de Ω por compactos*. Perceba que nada se altera nestas três propriedades se descartarmos uma quantidade finita dos compactos K_n. Logo, como Ω é aberto, podemos sempre assumir, sem perda de generalidade, que todos os elementos da exaustão possuem interior não vazio.

1.1.2 Regra de Leibniz da integral

Provamos, agora, a regra de Leibniz da diferenciação sob o sinal da integral. Lançaremos mão desta ferramenta na demonstração de resultados cruciais neste trabalho.

Lema 1.1.2 (Regra de Leibniz da integral). *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto e $f : [a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e tal que, para cada $t \in [a,b]$, $f(t,\cdot)$ é de classe C^1 em Ω. A função*

$$g(x) = \int_a^b f(t,x)\,dt,\ \ x \in \Omega,$$

é de classe C^1 em Ω e, dado $j \in \{1,\dots,N\}$,

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)\,dt.$$

Demonstração. Sejam $j \in \{1,\dots,N\}$, $x \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(x)} \subseteq \Omega$. Se $0 < h < \varepsilon$, temos

$$\frac{g(x+he_j)-g(x)}{h} = \int_a^b \frac{f(t,x+he_j)-f(t,x)}{h}\,dt.$$

Agora, para todo $t \in [a,b]$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $x_\star \in \overline{B_\varepsilon(x)}$ tal que

$$\frac{f(t,x+he_j)-f(t,x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x_\star)$$

e, portanto,

$$\left|\frac{f(t,x+he_j)-f(t,x)}{h}\right| \le \|\partial f/\partial x_j\|_{L^\infty(\overline{B_\varepsilon(x)})} < \infty.$$

Como a cota acima é uniforme em t e h, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{g(x+he_j)-g(x)}{h} &= \int_a^b \lim_{h\to 0^+}\frac{f(t,x+he_j)-f(t,x)}{h}\,dt\\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_j}(t,x)\,dt,\end{aligned}$$

como gostaríamos. □

1.1.3 Diferenciabilidade e convergência uniforme

O seguinte resultado nos dá condições para garantir que o limite das derivadas de uma sequência de funções é, de fato, a derivada da função limite.

Lema 1.1.3. *Sejam $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função diferenciável. Suponha que* *(a)* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente em* $[a,b]$ *e*

(b) $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente em* $[a,b]$.

Então, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente em* $[a,b]$ *para uma função diferenciável* $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$. *Além disso,* f' *é o limite da sequência* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

A condição (a) acima pode ser enfraquecida. De fato, basta pedir que exista um ponto $p\in[a,b]$ para o qual a sequência $(f_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ seja convergente. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5, Teo. 7.17].

Lema 1.1.4. *Sejam* $J \doteq [a_1,b_1]\times\cdots\times[a_N,b_N]\subseteq\mathbb{R}^N$ *e, para cada* $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in C^1(J)$. *Suponha que*

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente para uma função* $f:J\longrightarrow\mathbb{C}$ *e*
- *para todo* $j\in\{1,\dots,n\}$, $(\partial f_n/\partial x_j)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente em* J *para uma função* g_j.

Então $f\in C^1(J)$ *e, para cada* $j\in\{1,\dots,n\}$, $\partial f/\partial x_j = g_j$.

Demonstração. Basta aplicar o Lema 1.1.3 em cada uma das coordenadas. □

1.2 Formas diferenciais e o Teorema de Stokes

Grande parte dos resultados básicos da teoria de funções holomorfas em uma variável emerge como consequência da Fórmula Integral de Cauchy. Este resultado será aqui apresentado em uma versão mais geral: a Fórmula Integral de Cauchy Não Homogênea. Tal tratamento difere daquele que usualmente se utiliza em um primeiro curso de Análise Complexa, pois lança mão da teoria de formas diferenciais e, em especial, do Teorema de Stokes. A vantagem nesta escolha reside na facilidade com a qual obteremos a Fórmula Integral de Cauchy, donde seguirão todos os outros teoremas importantes que tratamos no Capítulo 2.

Nesta seção, portanto, estabelecemos a linguagem de formas diferenciais que utilizaremos daqui em diante, e enunciamos o Teorema de Stokes. O objetivo passa longe de ser fornecer um tratamento completo à teoria de formas diferenciais. Pelo contrário, nos reduzimos a estabelecer a linguagem e os resultados apenas no contexto em que serão utilizados. Também não nos dedicaremos aqui a demonstrar a versão do Teorema de Stokes que enunciamos. Uma vasta literatura acerca deste tema está amplamente disponível e, em particular, tal versão pode ser obtida como um caso particular do que está demonstrado em [2, Cap. 6].

Sejam $N \geq 2$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto. Um *campo vetorial* sobre Ω é uma aplicação $L : C^1(\Omega) \longrightarrow C^1(\Omega)$ que é linear e satisfaz a regra de Leibniz:

$$L(fg) = fL(g) + gL(f), \quad f, g \in C^1(\Omega).$$

Denotaremos por $\mathbf{X}(\Omega)$ o espaço vetorial dos campos vetoriais sobre Ω. Notemos que, se $g \in C^1(\Omega)$ e $L \in \mathbf{X}(\Omega)$, então

$$(gL)(f) := gL(f), \quad f \in C^1(\Omega), \tag{1.1}$$

define um elemento gL de $\mathbf{X}(\Omega)$. As derivadas parciais $\partial/\partial x_j$, $j = 1, \ldots, N$, também constituem elementos de $\mathbf{X}(\Omega)$. Além disso, todo campo $L \in \mathbf{X}(\Omega)$ se escreve, de maneira única, na forma

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

com $a_1, \ldots, a_N \in C^1(\Omega)$. Uma

- 0-*forma* sobre Ω é uma função em $C^1(\Omega)$.

- 1-*forma* sobre Ω é uma aplicação linear $\alpha : \mathbf{X}(\Omega) \longrightarrow C^1(\Omega)$ que satisfaz $\alpha(fL) = f\alpha(L)$ para todos $L \in \mathbf{X}(\Omega)$ e $f \in C^1(\Omega)$.

- k-*forma*, $2 \leq k \leq N$, sobre Ω é uma aplicação $C^1(\Omega)$-multilinear alternada
$$\alpha : \underbrace{\mathbf{X}(\Omega) \times \cdots \times \mathbf{X}(\Omega)}_{k \text{ termos}} \longrightarrow C^1(\Omega).$$
Mais explicitamente, dizer que α é $C^1(\Omega)$-multilinear significa que, com quaisquer $k-1$ coordenadas fixadas, α define uma 1-forma na coordenada não fixada. Dizer que α é alternada significa que, para quaisquer $L_1, \ldots, L_k \in \mathbf{X}(\Omega)$ e $i, j \in \{1, \ldots, k\}$,
$$\alpha(L_1, \ldots, L_i, \ldots, L_j, \ldots, L_k) = -\alpha(L_1, \ldots, L_j, \ldots, L_i, \ldots, L_k).$$

Denotaremos por $\mathbf{F}_k(\Omega)$, $0 \leq k \leq N$, o conjunto das k-formas sobre Ω. Se $g \in C^1(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbf{F}_k(\Omega)$, $k \geq 1$, então, como em (1.1),

$$(g\alpha)(L_1, \ldots, L_k) := g\alpha(L_1, \ldots, L_k)$$

define um elemento $g\alpha$ de $\mathbf{F}_k(\Omega)$.

Dados $k \geq 1$ e um multi-índice ordenado $J = (j_1, \ldots, j_k)$, $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_k \leq N$, denotamos

$$\alpha_J := \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right) \in C^1(\Omega).$$

Por ser alternada e bilinear sobre $C^1(\Omega)$, uma k-forma $\alpha \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ fica determinada pelas funções α_J com J variando sobre todos os multi-índices ordenados de tamanho k. Vamos denotar por $\mathbf{M}_k$ o conjunto de tais multi-índices. Fixado $J \in \mathbf{M}_k$, definimos também a k-forma $dx_J \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ por

$$dx_J\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{j_k}}\right) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1, & \text{se } I = J \\ 0, & \text{se } I \neq J \end{cases}.$$

Com isso, observa-se que toda k-forma $\alpha \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ pode ser representada na forma

$$\alpha = \sum_{J \in \mathbf{M}_k} \alpha_J \, dx_J. \tag{1.2}$$

Diremos que (1.2) é a representação canônica de α. Se $f \in C^1(\Omega)$,

$$\alpha = \sum_{J \in \mathbf{M}_k} \alpha_J \, dx_J \quad \text{e} \quad \beta = \sum_{J \in \mathbf{M}_k} \beta_J \, dx_J,$$

então

$$\alpha + \beta = \sum_{J \in \mathbf{M}_k} (\alpha_J + \beta_J) \, dx_J \quad \text{e} \quad f\alpha = \sum_{J \in \mathbf{M}_k} (f\alpha_J) \, dx_J.$$

Introduziremos agora o produto exterior entre formas. Sejam k, $l \geq 1$, $I \in \mathbf{M}_k$ e $J \in \mathbf{M}_l$. Sendo $[I, J]$ o multi-índice ordenado de tamanho $k+l$ composto pelos índices $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$ e λ a cardinalidade de $\{(r, s) : j_r - i_s < 0\}$, definimos

$$dx_I \wedge d_J := \begin{cases} (-1)^\lambda \, dx_{[I,J]}, & \text{se } I \cap J = \varnothing \\ 0, & \text{se } I \cap J \neq \varnothing \end{cases}.$$

Com isso, dadas $\alpha \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ e $\beta \in \mathbf{F}_l(\Omega)$ com representações canônicas

$$\alpha = \sum_{I \in \mathbf{M}_k} \alpha_I \, dx_I \quad \text{e} \quad \beta = \sum_{J \in \mathbf{M}_l} \beta_J \, dx_J,$$

definimos

$$\alpha \wedge \beta := \sum_{I \in \mathbf{M}_k} \sum_{J \in \mathbf{M}_l} (\alpha_I \beta_J) \, dx_I \wedge dx_J.$$

Se $f \in C^1(\Omega) = \mathbf{F}_0(\Omega)$, então $f \wedge \alpha = f\alpha$. A operação

$$(\alpha, \beta) \in \mathbf{F}_k(\Omega) \times \mathbf{F}_l(\Omega) \longmapsto \alpha \wedge \beta \in \mathbf{F}_{k+l}(\Omega)$$

é denominada *produto exterior*. Esta é, de fato, uma operação associativa e $C^1(\Omega)$-bilinear. A seguinte proposição reúne estas e mais algumas das propriedades básicas do produto exterior.

Proposição 1.2.1. *Sejam k, l, $m \geq 0$, α_1, α_2, $\alpha \in \mathbf{F}_k(\Omega)$, $\beta \in \mathbf{F}_l(\Omega)$, $\theta \in \mathbf{F}_m(\Omega)$, $f \in C^1(\Omega)$ e $J \in \mathbf{M}_k$.*

(a) $(\alpha_1 + \alpha_2) \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \beta + \alpha_2 \wedge \beta$.

(b) $(f\alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (f\beta) = f(\alpha \wedge \beta)$.

(c) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$

(d) $(\alpha \wedge \beta) \wedge \theta = \alpha \wedge (\beta \wedge \theta)$.

(e) $dx_J = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}$.

Se $f \in C^1(\Omega) = \mathbf{F}_0(\Omega)$, a *derivada exterior* de f é a 1-forma $df \in \mathbf{F}_1(\Omega)$ definida por $df(L) = L(f)$, $L \in \mathbf{X}(\Omega)$. Como vimos em (1.2), df se escreve na forma $df = \sum_{j=1}^{N} a_j \, dx_j$, onde $a_j = df(\partial/\partial x_j) = \partial f/\partial x_j$. Ou seja,

$$df = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, dx_j.$$

Assim, se $1 \leq k \leq N-1$ e $\alpha = \sum_{J \in \mathbf{M}_k} \alpha_J \, dx_J \in \mathbf{F}_k(\Omega)$, definimos

$$d\alpha := \sum_{J \in \mathbf{M}_k} (d\alpha_J) \wedge dx_J = \sum_{J \in \mathbf{M}_k} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \alpha_J}{\partial x_j} \, dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}.$$

Temos, portanto, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ um operador

$$d : \alpha \in \mathbf{F}_k(\Omega) \longmapsto d\alpha \in \mathbf{F}_{k+1}(\Omega),$$

que denominamos de *derivada exterior* e que desfruta das seguintes propriedades.

Proposição 1.2.2.

(a) *d é $\mathbb{R}$-linear.*

(b) *Se $\alpha \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ e $\beta \in \mathbf{F}_l(\Omega)$, então $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.*

(c) *Se* $0 \leq k \leq N-2$ *e os coeficientes de* $\alpha \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ *são funções de classe* C^2 *em* Ω, *então* $d(d\alpha) = 0$.

A propriedade (a) acima segue de uma conta imediata a partir da definição de d. Já (b) se obtém utilizando a parte (c) da Proposição 1.2.1. Por fim, (c) é uma consequência do fato de que, se $f \in C^2(\Omega)$, então $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j = \partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$. Os detalhes, como comentamos, podem ser conferidos em [2]. Finalizamos este parágrafo definindo a integral em Ω de uma N-forma $\alpha = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N \in \mathbf{F}_k(\Omega)$ por

$$\int_\Omega \alpha := \int_\Omega f(x)\, dm(x),$$

onde m denota a integral de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.

Caminharemos agora na direção de enunciar o Teorema de Stokes. Para a versão que enunciaremos, é ainda necessário definir a integração de 1-formas sobre uma certa classe de subconjuntos do $\mathbb{R}^2$. Um subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ é dito uma *curva de Jordan* de classe C^1 se for igual à imagem de uma aplicação $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tal que

- a restrição de γ a $[a,b)$ é injetora,
- $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$ e
- $\gamma(a) = \gamma(b)$.

O conhecido Teorema da Curva de Jordan garante que, se Ω é um aberto cuja fronteira é uma curva de Jordan, então o complementar $\mathbb{R}^2 \setminus \partial\Omega$ possui exatamente duas componentes conexas, uma limitada (o interior da curva) e outra ilimitada (o exterior da curva), que possuem $\partial\Omega$ como fronteira. É claro que a aplicação γ da qual a curva de Jordan $\partial\Omega$ é imagem não é a única com as condições descritas acima. Assumiremos, porém, que γ é sempre uma das curvas que, além de respeitarem tais condições, estão orientadas com o aberto Ω (o interior da curva) à esquerda do seu vetor tangente.

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto cuja fronteira é uma curva de Jordan de classe C^1, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto que contem $\overline{\Omega}$ e $\gamma : [a,b] \longrightarrow \partial\Omega$ uma aplicação com as condições descritas no parágrafo anterior. Dada $\alpha = f\, dx + g\, dy \in \mathbf{F}_1(U)$, definimos a integral de α sobre $\partial\Omega$ por

$$\int_{\partial\Omega} \alpha := \int_a^b \langle (f(\gamma(t)), g(\gamma(t))), \gamma'(t) \rangle\, dt. \tag{1.3}$$

Se $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \partial\Omega$ e $\gamma_2 : [c,d] \longrightarrow \partial\Omega$ são duas das curvas que testemunham o fato de que $\partial\Omega$ é uma curva de Jordan de classe C^1, então, sendo

$$\phi \doteq \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2 : [c,d) \longrightarrow [a,b),$$

temos

$$\begin{aligned}\int_a^b \langle (f(\gamma_1(t)), g(\gamma_1(t))), \gamma_1'(t)\rangle\, dt &= \int_c^d \langle (f(\gamma_2(s)), g(\gamma_2(s))), \gamma_1'(\phi(s))\phi'(s)\rangle\, ds \\ &= \int_c^d \langle (f(\gamma_2(s)), g(\gamma_2(s))), (\gamma_1\circ\phi)'(s)\rangle\, ds \\ &= \int_c^d \langle (f(\gamma_2(s)), g(\gamma_2(s))), \gamma_2'(s)\rangle\, ds.\end{aligned}$$

A diferenciabilidade de γ_1^{-1} é garantida pelo Teorema da Função Inversa juntamente com a condição $\gamma_1'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Isso mostra que a definição que fizemos em (1.3) está livre de ambiguidades. Por fim, se Ω é um aberto cuja fronteira é uma união finita e disjunta de curvas de Jordan de classe C^1, a integral de α sobre C é definida como a soma da integral de α sobre cada uma dessas curvas utilizando, como observamos acima, parametrizações que orientam as curvas mantendo o aberto Ω à esquerda dos seus vetores tangentes. Diremos que um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ é *regular*[1] se a sua fronteira for uma união finita e disjunta de curvas de Jordan de classe C^1.

Neste momento, já temos ingredientes suficientes para enunciar a versão do Teorema de Stokes que nos será útil.

Teorema 1.2.3 (Stokes)**.** *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto regular. Para toda $\alpha \in \mathbf{F}_1(\overline{\Omega})$, temos*

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_\Omega d\alpha.$$

Observação 1.2.3.1. Acima, $\alpha \in \mathbf{F}_1(\overline{\Omega})$ significa que $\alpha \in \mathbf{F}_1(U)$ para algum aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ que contém $\overline{\Omega}$.

[1]Esta é a nomenclatura que utilizaremos nesta monografia, mas enfatizamos que, em outros textos, a mesma pode ter um significado diferente.

Capítulo 2

Funções de uma variável complexa

Neste capítulo, iniciamos o tratamento de funções holomorfas em uma variável complexa. Na Seção 2.1, relembramos propriedades básicas do corpo dos números complexos com o intuito de fixar algumas notações. Em seguida, na Seção 2.2, apresentamos a definição de funções holomorfas definidas em abertos de $\mathbb{C}$ e discutimos algumas de suas propriedades básicas. As Seções 2.3, 2.5, 2.6 e 2.7 são destinadas à obtenção dos resultados clássicos da teoria, como a Fórmula Integral de Cauchy, as Estimativas de Cauchy, o Princípio da Continuação Analítica e o Princípio do Máximo. Cabe pontuar que, lançando mão da teoria de formas diferenciais descrita na Seção 1.2, obtemos uma versão mais geral da Fórmula Integral de Cauchy, que cumpre um papel importante em diversas situações durante o texto. Na Seção 2.4, estudamos a existência de soluções para a equação de Cauchy–Riemann não homogênea. Os resultados da Seção 2.4 têm forte relação com o que faremos no Capítulo 4, onde demonstraremos o Teorema de Hartogs, que é o objetivo principal deste trabalho.

2.1 O corpo dos números complexos

Para os fins deste texto, assumimos a existência do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ com todas as suas propriedades básicas. Com o objetivo de estabelecer a notação, faremos aqui algumas recordações.

Lembremos que, com o corpo ordenado $\mathbb{R}$ dos números reais em mãos, para construir $\mathbb{C}$, definimos $\mathbb{C} \doteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e introduzimos, para (a, b), $(c, d) \in \mathbb{C}$, as operações

$$(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Com pouco esforço, mostra-se que tais operações fazem de $\mathbb{C}$ um corpo onde a equação $x^2 + 1 = 0$ possui exatamente duas soluções. Uma destas é o distinguível elemento $i \doteq (0,1) \in \mathbb{C}$ e a outra é o seu inverso aditivo $-i = (-1,0)\cdot(0,1) = (0,-1)$. A aplicação $x \in \mathbb{R} \longmapsto (x,0) \in \mathbb{C}$, que constitui um isomorfismo de grupos sobre sua imagem $\mathbb{R}\times\{0\}$, nos permite enxergar $\mathbb{R}$ como um subcorpo de $\mathbb{C}$. É simples observar que, com esta identificação, a soma e o produto de $\mathbb{C}$ estendem a soma e o produto de $\mathbb{R}$. Cada elemento de $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ fica então representado por $z = x + i\,y$, onde $x \doteq \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ é dito a *parte real* de z e $y \doteq \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ é dito a *parte imaginária* de z.

Uma fundamental diferença entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ é o fato de que $\mathbb{C}$ não pode ser ordenado de maneira a estender a ordem de $\mathbb{R}$. Em $\mathbb{R}$, com a ordem usual, há um especial subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}$ de "elementos positivos" que satisfaz:

- $a + b$, $ab \in P$ sempre que a, $b \in P$;
- Para todo $a \in \mathbb{R}$, ou $a \in P$, ou $-a \in P$ ou $a = 0$.

Isto diz, em outras palavras, que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado. Um subconjunto $\tilde{P} \subseteq \mathbb{C}$ que possua tais propriedades e contenha o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{R}$ não pode existir, uma vez que $i^2 = (-i)^2 = -1$ e -1 não é positivo em $\mathbb{R}$.

Dado $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, definimos o seu conjugado por $\overline{z} \doteq x - i\,y$. As seguintes propriedades são também de simples verificação:

- $\overline{\overline{z}} = z$;
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$;
- $\mathrm{Re}(z) = (z+\overline{z})/2$ e $\mathrm{Im}(z) = (z-\overline{z})/2i$
- $z \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $z = \overline{z}$;
- $z \in i\mathbb{R} \doteq \{i\,y : y \in \mathbb{R}\}$ se, e somente, se $z = -\overline{z}$;
- $z\overline{z} = |z|^2$, onde $|\cdot|$ denota a norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$.

A norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$ nos permite tratar, em $\mathbb{C}$, de todas as noções topológicas habituais como continuidade, abertos, fechados, compactos, limites. Assim, dado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto, as notações $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $C^k_c(\Omega)$ se repetem neste contexto com o mesmo significado introduzido no início do Capítulo 1. Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$, denotamos[1] o disco aberto de centro z_0 e raio r por

$$\Delta_r(z_0) \doteq \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

[1] Isto é simplesmente uma nova notação para $B_r(z_0)$.

2.2 Funções holomorfas

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto. Lembremos da Seção 1.2 que, a cada $f \in C^1(\Omega)$, associamos uma 1-forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \in \mathbf{F}_1(\Omega). \tag{2.1}$$

Em particular, diferenciando as funções $z \longmapsto z = x + i\,y$ e $z \longmapsto \overline{z} = x - i\,y$, temos $dz = dx + i\,dy$, $d\overline{z} = dx - i\,dy$ e, portanto,

$$dx = \frac{dz + d\overline{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i}.$$

Com isso, reescrevendo (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{dz + d\overline{z}}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dz - d\overline{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) d\overline{z}. \end{aligned}$$

Isto motiva as definições

$$\frac{\partial}{\partial z} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{2.2}$$

que nos permitem escrever

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}.$$

Convém também observar que, se $\alpha = f\,dz + g\,d\overline{z} \in \mathbf{F}_1(\Omega)$, então

$$d\alpha = df \wedge dz + dg \wedge d\overline{z} \tag{2.3}$$

O operador $\partial/\partial\overline{z}$, que denominamos *operador de Cauchy–Riemann*, terá uma importância central no que segue.

Uma função $f \in C^1(\Omega)$ é dita *holomorfa* se $\partial f/\partial\overline{z} = 0$. Vamos denotar

$$\mathcal{O}(\Omega) \doteq \{f \in C^1(\Omega) : f \text{ é holomorfa}\}$$

e $f' = \partial f/\partial z$, de modo que, se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $df = f'\,dz$. Como o operador de Cauchy-Riemann é $\mathbb{C}$-linear, $\mathcal{O}(\Omega)$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Além disso, se f,

$g \in C^1(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}\frac{\partial(fg)}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x} + i\frac{\partial(fg)}{\partial y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,g + f\,\frac{\partial g}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\,g + if\,\frac{\partial g}{\partial y}\right)\\ &= f\,\frac{\partial g}{\partial\overline{z}} + g\,\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\end{aligned} \tag{2.4}$$

e, portanto, o produto de funções holomorfas resulta em uma função holomorfa. De maneira estritamente análoga, conclui-se que o operador $\partial/\partial z$ também satisfaz a regra de Leibniz (2.4).

Exemplo 2.2.1. (a) Como observamos acima, se $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$, então $df = dz$, já que $\partial f/\partial x = 1$ e $\partial f/\partial y = i$.

(b) Se $n \in \mathbb{N}$ e $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, então $f'(z) = nz^{n-1}$ e $\partial f/\partial\overline{z} = 0$. Este fato segue de (a) por indução utilizando a regra de Leibniz para os operadores $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial\overline{z}$. O mesmo argumento mostra que, se $n \leq -1$ e $g(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, então $g'(z) = nz^{n-1}$, bastando verificar o caso em que $n = -1$ e aplicar indução.

(c) Segue de (b) e da linearidade dos operadores $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial\overline{z}$ que todo polinômio $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ define uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ com

$$p'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}.$$

(d) Se $f(z) = \exp(z) = e^x\cos(y) + i\,e^x\sin(y)$, $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, então $f' = f$ e $\partial f/\partial\overline{z} = 0$.

(e) A função $f(z) = \overline{z}$ não é holomorfa. De fato, uma conta imediata mostra que $\partial f/\partial\overline{z} = 1$ e $\partial f/\partial z = 0$.

Se $f = \mathrm{Re}f + i\,\mathrm{Im}f \in \mathcal{O}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial f}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\mathrm{Re}f}{\partial x} + i\,\frac{\partial\mathrm{Im}f}{\partial x} + i\left(\frac{\partial\mathrm{Re}f}{\partial y} + i\,\frac{\partial\mathrm{Im}f}{\partial y}\right)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\mathrm{Re}f}{\partial x} - \frac{\partial\mathrm{Im}f}{\partial y} + i\left(\frac{\partial\mathrm{Im}f}{\partial x} + \frac{\partial\mathrm{Re}f}{\partial y}\right)\right\}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial\mathrm{Re}f}{\partial x} = \frac{\partial\mathrm{Im}f}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\mathrm{Re}f}{\partial y} = -\frac{\partial\mathrm{Im}f}{\partial x}. \tag{2.5}$$

As identidades em (2.5) são denominadas *equações de Cauchy–Riemann* e, utilizando-as, obtemos

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x} + i\,\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x} + i\left(\frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial y} - i\,\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial y}\right)\right\} \\ &= \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x} + i\,\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sejam $\Omega, \omega \subseteq \mathbb{C}$ abertos, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $g \in \mathcal{O}(\omega)$ tal que $g(\omega) \subseteq \Omega$. Utilizando o fato de que os operadores $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ satisfazem a regra da cadeia, mostra-se facilmente que os operadores $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial \overline{z}$ satisfazem também a regra da cadeia. Logo, $f \circ g \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$. Agora, fixado $z_0 \in \Omega$, segue das equações de Cauchy–Riemann (2.5) que a matriz Jacobiana de f em z_0 é

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial \mathrm{Im} f}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial \mathrm{Re} f}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix}$$

e, portanto, por (2.6), $\det Df(z_0) = |f'(z_0)|$. Consequentemente, se $f'(z_0) \neq 0$, o Terema da Função Inversa garante que f é um difeomorfismo de classe C^1 entre um aberto $U \subseteq \Omega$ que contém z_0 e o aberto $f(U) \subseteq \mathbb{C}$. Além disso, a inversa $f^{-1} : f(U) \longrightarrow U$ é de classe C^1. Aplicando os operadores $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial \overline{z}$ nas igualdades $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_U$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{f(U)}$ e utilizando a regra da cadeia, concluímos que

$$f^{-1} \in \mathcal{O}(f(U)) \quad \text{e} \quad (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}, \ w \in f(U).$$

Exemplo 2.2.2. Sejam $\xi \in \mathbb{C}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto que não contém ξ. Da regra da cadeia e do Exemplo 2.2.1(b), segue que a função $z \in \Omega \longmapsto 1/(z-\xi) \in \mathbb{C}$ é holomorfa em Ω. Um outro fato que nos será útil posteriormente é que esta mesma função é integrável em qualquer disco $\Delta_r(\xi) \subseteq \mathbb{C}$ centrado em ξ. Isto é uma consequência imediata do fato de que a integral $\int_{B_r(0)} 1/|x|^\alpha \, dx$ é finita para toda bola $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ se $\alpha < 2$. Utilizando coordenadas polares, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_r(\xi)} \frac{1}{z-\xi}\, dm(z) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{i\,\rho e^{i\theta}}{\xi + \rho e^{i\theta} - \xi}\, d\theta d\rho \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} i\, d\theta d\rho \\ &= i\, 2\pi r. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Finalizamos esta seção reescrevendo a Regra de Leibniz da integral 1.1.2 para os operadores $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial \overline{z}$. Este resultado nos permitirá diferenciar sob o sinal da integral em diversas oportunidades no que segue.

Lema 2.2.3. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um aberto e $f : [a,b] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e tal que, para cada $t \in [a,b]$, $f(t,\cdot)$ é de classe C^1 em Ω. A função*

$$g(z) = \int_a^b f(t,z)\,dt$$

é de classe C^1 em Ω e

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,dt \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(t,z)\,dt.$$

Demonstração. Basta combinar o Lema 1.1.2 com as definições de $\partial/\partial z$ e $\partial/\partial \overline{z}$ dadas em (2.2). □

2.3 A fórmula integral de Cauchy

Com a definição e as propriedades básicas de funções holomorfas em mãos, provaremos nesta seção um dos resultados fundamentais deste escrito: a Fórmula Integral de Cauchy Não Homogênea. Em tudo que segue neste capítulo, Ω denota um aberto regular de $\mathbb{C}$.

Dada uma 1-forma $\alpha = f\,dz + g\,d\overline{z} \in \mathbf{F}_1(\overline{\Omega})$, o Teorema de Stokes 1.2.3 garante que

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_{\Omega} d\alpha. \tag{2.8}$$

Como vimos em (2.3),

$$\begin{aligned} d\alpha = df \wedge dz + dg \wedge d\overline{z} &= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z} \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial z}\,dz \wedge d\overline{z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) d\overline{z} \wedge dz \end{aligned}$$

e, assim, segue de (2.8) que

$$\int_{\partial\Omega} \alpha = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) d\overline{z} \wedge dz. \tag{2.9}$$

Em particular, aplicada à 1-forma $\alpha = f\,dz$ a equação (2.9) fornece

$$\int_{\partial\Omega} f\,dz = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z} \wedge dz \tag{2.10}$$

para toda $f \in C^1(\overline{\Omega})$. No caso em que f é holomorfa em Ω, conclui-se o Teorema de Cauchy:

Teorema 2.3.1 (Cauchy)**.** *Se* $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, *então*

$$\int_{\partial\Omega} f\, dz = 0.$$

Observação 2.3.1.1. Cabe notar que, se $C \subseteq \mathbb{C}$ é uma curva de Jordan e $\gamma : [a, b] \longrightarrow C$ é uma aplicação que testemunha este fato, então, escrevendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, temos

$$\begin{aligned}\int_C f\, dz = \int_C f\, dx + i\, f\, dy &= \int_a^b \langle (f(\gamma(t)), i\, f(\gamma(t))), \gamma'(t)\rangle\, dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))x'(t) + i\, f(\gamma(t))y'(t)\, dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))(x'(t) + iy'(t))\, dt.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Daqui em diante, utilizamos também $\int_C f(z)\, dz$ para denotar $\int_C f\, dz$.

Provaremos, agora, a Fórmula Integral de Cauchy Não Homogênea e, em seguida, obteremos algumas de suas primeiras consequências.

Teorema 2.3.2 (Fórmula Integral de Cauchy Não Homogênea)**.** *Seja* $f \in C^1(\overline{\Omega})$. *Para todo* $\xi \in \Omega$,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z - \xi}\, dz - \int_\Omega \frac{1}{z - \xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz\right\}. \tag{2.12}$$

Demonstração. Sejam $\xi \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{\Delta_\varepsilon(\xi)} \subseteq \Omega$. Considere $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{\Delta_\varepsilon(\xi)}$ e, para cada $z \in \overline{\Omega_\varepsilon}$, $g(z) = f(z)/(z - \xi)$. Como $z \longmapsto 1/(z - \xi)$ é holomorfa em Ω_ε (vide Exemplo 2.2.2), temos

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{1}{z - \xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z).$$

Assim, utilizando[2] (2.10),

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(z)\, dz = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{z - \xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz. \tag{2.13}$$

Como vimos no Exemplo 2.2.2, a função $z \longmapsto 1/(z - \xi)$ é Lebesgue integrável em qualquer disco centrado em ξ. Então, já que $f \in C^1(\overline{\Omega})$, o Teorema da Convergência Dominada nos garante que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{z - \xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz = \int_\Omega \frac{1}{z - \xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\, d\overline{z} \wedge dz. \tag{2.14}$$

[2] A fronteira de Ω_ε é a união da fronteira de $\Delta_\varepsilon(\xi)$, uma circunferência, com $\partial\Omega$. Logo, é regular.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(z)\,dz &= \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz - \int_{\partial\Delta_\varepsilon(\xi)} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz \\ &\overset{\star}{=} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz - \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}}\, i\,\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz - i\int_0^{2\pi} f(\xi+\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta,\end{aligned}$$

onde utilizamos, na igualdade $(\star)$, a pametrização $\theta \longmapsto \xi + \varepsilon e^{i\theta}$ de $\partial\Delta_\varepsilon(\xi)$ e o que observamos em (2.11). Portanto, aplicando mais uma vez o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} g(z)\,dz &= \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz - i\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\theta \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz - f(\xi)2\pi i.\end{aligned} \tag{2.15}$$

As equações (2.13), (2.14) e (2.15) fornecem

$$\int_\Omega \frac{1}{z-\xi}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z)\,d\overline{z}\wedge dz = \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz - f(\xi)2\pi i, \tag{2.16}$$

donde segue (2.12). □

Como corolários, obtemos a clássica Fórmula Integral de Cauchy para funções holomorfas e o fato de que toda função é holomorfa é, na verdade, de classe C^∞.

Corolário 2.3.3 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Se $f \in C^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega)$ e $\xi \in \Omega$, então*

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz.$$

Demonstração. Basta notar que, se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, o lado esquerdo da equação (2.16) se anula. □

Corolário 2.3.4. *$\mathcal{O}(\Omega) \subseteq C^\infty(\Omega)$. Em particular, se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, então $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $z_0 \in \Omega$. Vejamos que f é de classe C^∞ numa vizinhança de z_0. Considere $r > 0$ tal que $\overline{\Delta_r(z_0)} \subseteq \Omega$. Diferenciando sob o sinal da integral (veja o Lema 2.2.3), concluímos que

$$\xi \in \Delta_r(z_0) \longmapsto \int_{\partial\Delta_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz \in \mathbb{C} \tag{2.17}$$

é de classe C^∞ em $\Delta_r(z_0)$, uma vez que, fixado $z \in \partial\Delta_r(z_0)$, a aplicação

$$\xi \in \Delta_r(z_0) \longmapsto \frac{1}{z-\xi} \in \mathbb{C}$$

é de classe C^∞ em $\Delta_r(z_0)$. Mas, pelo Corolário 2.3.3, $f|_{\Delta_r(z_0)}$ é igual à função em (2.17) multiplicada pela constante $1/2\pi i$. Logo, $f|_{\Delta_r(z_0)} \in C^\infty(\Delta_r(z_0))$. Segue então da arbitrariedade de z_0 que $f \in C^\infty(\Omega)$. Por fim, notamos que

$$\frac{\partial f'}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \overset{\star}{=} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right) = 0 \tag{2.18}$$

e, assim, $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$. Como f é de classe C^∞ as derivadas parciais $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$ comutam em f. Utilizando este fato, a igualdade $(\star)$ em (2.18) segue de uma simples conta. □

Observação 2.3.4.1. Sendo estritamente precisos, deveríamos escrever a integral em (2.17) como uma integral sobre um intervalo da reta para aplicar o Lema 2.2.3. Mas isto é de fato possível simplesmente pela definição da integral de uma 1-forma sobre uma curva de Jordan em $\mathbb{C}$ que vimos na Seção 1.2.

2.4 A equação de Cauchy–Riemann não homogênea

A seguir, estudamos a existência de soluções para a equação de Cauchy não homogênea $\partial f/\partial\overline{z} = \varphi$, onde φ é uma função de classe C^k e suporte compacto em $\mathbb{C}$. Esta equação cumprirá um papel fundamental na deonstração do Teorema de Hartogs, o principal resultado deste trabalho. O seguinte teorema garante a existência de uma solução f em $C^k(\mathbb{C})$.

Teorema 2.4.1. *Se $\varphi \in C_c^k(\mathbb{C})$, existe $f \in C^k(\mathbb{C})$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \varphi. \tag{2.19}$$

O Teorema 2.4.1 merece alguns comentários antes de apresentarmos a sua demonstração. Em geral, não é possível garantir que a solução f fornecida acima tenha suporte compacto. De fato, podemos encontrar uma infinidade de funções $\varphi \in C_c^k(\mathbb{C})$ para as quais a equação (2.19) não possui solução em $C_c^k(\mathbb{C})$ explorando o fato de que o conjunto das funções $\varphi \in C_c^k(\mathbb{C})$ para as quais (2.19) tem solução com suporte compacto é "ortogonal" a $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ no seguinte sentido.

Se φ, $f \in C_c^k(\mathbb{C})$ são tais que $\partial f/\partial\overline{z} = \varphi$ e $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, então, sendo $\Delta_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ um disco que contém suppφ, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} \varphi(z)g(z)\,dm(z) &= \int_{\Delta_R(0)} \frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z)g(z)\,dm(z)\\ &\overset{\star}{=} -\int_{\Delta_R(0)} f(z)\,\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}(z)\,dm(z) = 0.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Na igualdade $(\star)$ acima utilizamos integração por partes e o fato de que $\varphi = \partial f/\partial\overline{z}$ se anula em $\partial\Delta_R(0)$. A fórmula de integração por partes é uma consequência do Teorema do Divergente, cujos detalhes, como já comentamos, podem ser encontrados em [2, Cap. 6]. A equação (2.20) nos mostra que, para que a equação de Cauchy–Riemann não homogênea (2.19) tenha solução em $C_c^k(\mathbb{C})$, a integral de φ contra qualquer função holomorfa deve ser nula. Em particular, tomando g constante e igual a 1 em (2.20), concluímos que, se a integral de φ for não nula, já não há solução.

No Capítulo 4, vamos explorar o fato de que, se $N \geq 2$, é possível garantir a existência de soluções com suporte compacto para a equação de Cauchy-Riemann não homogênea. Isso nos permitirá provar o Teorema de Hartogs. Vejamos agora a demonstração do Teorema 2.4.1.

Demonstração do Teorema 2.4.1. Seja $\varphi \in C_c^k(\mathbb{C})$. Dados $z \in \mathbb{C}$ e $\xi \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, considere $\psi(z,\xi) \doteq \varphi(z-\xi)/\xi$. Como a função $\xi \longmapsto 1/\xi$ é integrável em qualquer disco fechado (veja Exemplo 2.2.2) e φ tem suporte compacto, $\psi(z,\cdot) \in L^1(\mathbb{C})$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Dessa forma, fica bem definida a função

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \psi(z,\xi)\,d\overline{\xi}\wedge d\xi,\ \ z \in \mathbb{C}.$$

Vamos mostrar que $\partial f/\partial\overline{z} = \varphi$. Seja $R > 0$ tal que supp$\varphi \subseteq \Delta_R(0)$. Diferenciando sob o sinal de integração, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}(z,\xi)\,d\overline{\xi}\wedge d\xi\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_R(z)} \frac{1}{\xi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(z-\xi)\,d\overline{\xi}\wedge d\xi\\ &\overset{\star}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_R(0)} \frac{1}{z-\xi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(\xi)\,d\overline{\xi}\wedge d\xi\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_R(0)} \frac{1}{\xi-z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}(\xi)\,d\overline{\xi}\wedge d\xi\\ &\overset{\star\star}{=} \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{\xi-z}\,d\xi.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Em $(\star)$, utilizamos o teorema da mudança de variável na integral de Lebesgue. Além disso, em $(\star\star)$, lançamos mão da Fórmula Integral de Cauchy Não Homogênea (2.12). Agora, para concluir, basta notar que, como supp$\varphi \subseteq \Delta_R(0)$, a integral mais à direita em (2.21) se anula e, portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = \varphi(z),$$

como queríamos. □

Como vimos acima, o fato de que $\varphi \in \mathbb{C}_c^k(\mathbb{C})$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(z) g(z)\, dm(z) = 0 \tag{2.22}$$

para toda $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ é uma condição necessária para que a equação de Cauchy–Riemann não homogênea (2.19) possua solução de suporte compacto. Ocorre que tal condição é também suficiente. Este é o conteúdo do seguinte resultado, cuja demonstração será apresentada na Seção 2.6.

Teorema 2.4.2. *Se $\varphi \in C_c^k(\mathbb{C})$ satisfaz (2.22) para toda $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, então a solução de (2.19) fornecida pelo Teorema 2.4.1 tem suporte compacto.*

2.5 Estimativas de Cauchy

Nesta seção, obtemos as estimativas de Cauchy, que fornecem, sobre cada compacto $K \subseteq \Omega$, uma cota superior para as derivadas de uma função holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ em termos das médias de f. Em seguida, demonstramos que, o conjunto $\mathcal{O}(\Omega)$ é fechado pela convergência uniforme sobre compactos e, por fim, apresentamos o Teorema de Stieltjes–Vitali.

Teorema 2.5.1 (Estimativas de Cauchy)**.** *Sejam $K \subseteq \Omega$ um compacto e $\omega \subseteq \Omega$ um aberto contendo K. Dado $j \in \mathbb{N}$, existe $C_j \in \mathbb{R}$ tal que, para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$,*

$$\|f^{(j)}\|_{L^\infty(K)} \leq C_j \|f\|_{L^1(\omega)}.$$

Demonstração. Sejam K e ω como no enunciado e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Como K é compacto e ω é aberto, existe um aberto $U \subseteq \omega$ tal que $\overline{U}$ é compacto e $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \omega$. Seja $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ uma função de corte para $\overline{U}$ com suporte contido em ω (veja o Apêndice A). Isto é,

- $\psi(z) \in [0, 1]$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- $\psi(z) = 1$ para todo $z \in \overline{U}$.

- $\operatorname{supp}\psi \subseteq \omega$.

Se $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ e $\xi \in U$, então, pela Fórmula Integral de Cauchy Não Homogênea 2.3.2,

$$\begin{aligned} f(\xi) &= (\psi f)(\xi) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\partial\omega} \frac{f(z)\psi(z)}{z-\xi}\,dz - \int_{\omega} \frac{1}{z-\xi}\frac{\partial(\psi f)}{\partial \overline{z}}(z)\,d\overline{z}\wedge dz\right\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Como ψ se anula em $\partial\omega$, temos

$$\int_{\partial\omega} \frac{f(z)\psi(z)}{z-\xi}\,dz = 0. \tag{2.24}$$

Além disso, se $z \in U$,

$$\frac{\partial(\psi f)}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$$

e, portanto,

$$\int_{\omega} \frac{1}{z-\xi}\frac{\partial(\psi f)}{\partial \overline{z}}(z)\,d\overline{z}\wedge dz = \int_{\omega\setminus U} \frac{f(z)}{z-\xi}\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(z)\,d\overline{z}\wedge dz. \tag{2.25}$$

Utilizando (2.24) e (2.25) em (2.23) e derivando j vezes sob o sinal de integração, obtemos

$$\begin{aligned} f^{(j)}(\xi) &= \frac{(-1)^j}{2\pi i}\int_{\omega\setminus U} \frac{f(z)}{(z-\xi)^{j+1}}\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(z)\,d\overline{z}\wedge dz \\ &= \frac{(-1)^j}{\pi}\int_{\omega\setminus U} \frac{f(z)}{(z-\xi)^{j+1}}\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}}(z)\,dm(z), \end{aligned} \tag{2.26}$$

onde usamos, na última igualdade, que $d\overline{z}\wedge dz = 2i\,dx\wedge dy$. Agora, como K é compacto e U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $|z-\xi| \geq \delta$ para quaisquer que sejam $z \in \omega\setminus U$ e $\xi \in K$. Assim, segue de (2.26) que

$$\begin{aligned} \|f^{(j)}\|_{L^\infty(K)} = \sup_{\xi\in K}|f^{(j)}(\xi)| &= \frac{1}{\pi}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}\right\|_{L^\infty(\overline{\omega})}\int_{\omega\setminus U}\frac{|f(z)|}{|z-\xi|^{j+1}}\,dm(z) \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{\pi\delta^{j+1}}\left\|\frac{\partial\psi}{\partial\overline{z}}\right\|_{L^\infty(\overline{\omega})}}_{\doteq C_j}\|f\|_{L^1(\omega)} \end{aligned}$$

como queríamos. □

Observação 2.5.1.1. Perceba que a constante C_j obtida acima só depende de j, K e ω.

Utilizaremos agora as estimativas de Cauchy para mostrar que se uma função é, localmente, limite uniforme de funções holomorfas, então tal função é também holomorfa.

Corolário 2.5.2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{O}(\Omega)$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f uniformemente em cada compacto $K \subseteq \Omega$, então $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Demonstração. Considere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e f como no enunciado. Sejam $z_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tal que $\overline{\Delta_{2r}(z_0)} \subseteq \Omega$. Pelo Teorema 2.5.1, existe $C > 0$ tal que, para todos $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n' - f_m'\|_{L^\infty(\overline{\Delta_r(z_0)})} \leq C \left\{ \|f_n - f\|_{L^1(\Delta_{2r}(z_0))} + \|f - f_m\|_{L^1(\Delta_{2r}(z_0))} \right\}. \tag{2.27}$$

Como $\Delta_{2r}(z_0)$ tem medida de Lebesgue finita e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f uniformemente em $\overline{\Delta_{2r}(z_0)}$, o lado direito de (2.27) vai a zero conforme n e m crescem. Isso mostra que $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $C(\overline{\Delta_r(z_0)})$ com a norma do supremo. Logo, a sequência

$$f_n' = \frac{\partial f_n}{\partial z} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x} - i\frac{\partial f_n}{\partial y} \right\}, \ n \in \mathbb{N},$$

converge uniformemente em $\overline{\Delta_r(z_0)}$. Como cada f_n é holomorfa, temos que $\partial f_n/\partial x = -i\,\partial f_n/\partial y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, a convergência de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ implica que ambas as sequências $(\partial f_n/\partial x)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\partial f_n/\partial y)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem uniformemente em $\overline{\Delta_r(z_0)}$. Segue então do Lema 1.1.4 que $f \in C^1(\Delta_r(z_0))$ e, em $\Delta_r(z_0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n}{\partial y}.$$

Mas então, ainda em $\Delta_r(z_0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x} + i\frac{\partial f_n}{\partial y} \right\} = 0.$$

Pela arbitrariedade de $z_0 \in \Omega$ se que $f \in C^1(\Omega)$ e satisfaz $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ em Ω, i.e., $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. □

Caminharemos agora na direção de provar que toda sequência de funções holomorfas que é uniformemente limitada em cada subconjunto compacto de Ω possui um subsequência que converge uniformemente sobre cada um desses subconjuntos compactos. Para isso, lançaremos mão do importante Teorema de Arzelá-Ascoli, cuja demonstração pode ser encontrada no Apêncice B.

O seguinte lema nos fornece algumas condições que garantem a equicontinuidade de uma sequência de funções definidas em um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^N$. Este lema nos permitirá aplicar o Teorema de Arzelá-Ascoli na demonstração do próximo resultado.

Lema 2.5.3. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto, $K \subseteq \Omega$ compacto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$ tal que*

(a) $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^\infty(K)} < \infty$;

(b) Se $F \subseteq \Omega$ é compacto, então $M_F := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in F} \|Df_n(x)\| < \infty$.

Nestas condições, existe $L > 0$ tal que, para todos $n \in \mathbb{N}$ e x, $y \in K$,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x - y|.$$

Em particular, a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua.

Demonstração. Suponha que não exista tal L. Para todo $k \in \mathbb{N}$, existem x_k, $y_k \in K$ e $n_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f_{n_k}(x_k) - f_{n_k}(y_k)| > k|x_k - y_k|. \tag{2.28}$$

Como K é compacto, podemos assumir, passando a subsequências se necessário, que existem x_0, $y_0 \in K$ tais que

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k \quad \text{e} \quad y_0 = \lim_{k\to\infty} y_k.$$

Uma vez que

$$k|x_k - y_k| < |f_{n_k}(x_k) - f_{n_k}(y_k)| \leq 2M,$$

temos $x_0 = y_0$. Seja então $r > 0$ tal que $F := \overline{B_r(x_0)} \subseteq \Omega$. Como $B_{r/2}(x_0)$ é convexo, a Desigualdade do Valor Médio nos garante que

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_k}(y)| \leq M_F|x - y|$$

para quaisquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ e x, $y \in B_{r/2}(x_0)$. Com isso, se k_0 é grande o suficiente para que tenhamos x_k, $y_k \in B_{r/2}(x_0)$ sempre que $k \geq k_0$, então

$$k|x_k - y_k| < |f_{n_k}(x_k) - f_{n_k}(y_k)| \leq M_F|x_k - y_k| \tag{2.29}$$

para todo $k \geq k_0$. Mas (2.28) garante que $0 < |x_k - y_k|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, (2.29) é um absurdo. □

Teorema 2.5.4 (Stieltjes–Vitali)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{O}(\Omega)$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em cada compacto $K \subseteq \Omega$, então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre os subconjuntos compactos de Ω para uma função $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como no enunciado e $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma exaustão de Ω por compactos. Fixe $j \in \mathbb{N}$. Como a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em K_j, esta satisfaz a condição (a) do Lema 2.5.3 com $K = K_j$. Vejamos que satisfaz também a condição (b). Seja $F \subseteq \Omega$ um compacto e considere $\varepsilon > 0$ tal que, definindo $F_\varepsilon \doteq \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, F) < \varepsilon\}$, temos

$$\overline{F_\varepsilon} = \{z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, F) \leq \varepsilon\} \subseteq \Omega.$$

Pelo Teorema 2.5.1, existe $C > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n'\|_{L^\infty(F)} \leq C\|f_n\|_{L^1(F_\varepsilon)} \leq Cm(F_\varepsilon)\|f_n\|_{L^\infty(F_\varepsilon)}, \tag{2.30}$$

onde m denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^2$. Segue então de (2.30) que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n'\|_{L^\infty(F)} \leq Cm(F_\varepsilon) \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^\infty(F_\varepsilon)}.$$

Como $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_{L^\infty(F_\varepsilon)}$ é finito por hipótese, a sequência de fato satisfaz a condição (b) do Lema 2.5.3. Logo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua em K_j.

Pelo Teorema de Arzelá–Ascoli B.2, existe uma subsequência $(f_{n_{1,m}})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em K_1. Pelo mesmo teorema, aplicado desta vez à subsequência obtida, existe uma subsequência $(f_{n_{2,m}})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(f_{n_{1,m}})_{m\in\mathbb{N}}$ (e consequentemente de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$) que converge uniformemente em K_2. É claro que a função definida em K_2 que é limite uniforme de $(f_{n_{2,m}})_{m\in\mathbb{N}}$ estende a função definida em K_1 que é limite uniforme de $(f_{n_{1,m}})_{m\in\mathbb{N}}$ Este argumento, aplicado recursivamente sobre cada K_j garante a existência de uma função $f \in C(\Omega)$ e uma família $(f_{n_{j,m}})_{m\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$, de subsequências de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem:

- $(f_{n_{j,m}}(x_k))_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em K_j para $f|_{K_j}$;
- Para todo $j \in \mathbb{N}$, $(f_{n_{j+1,m}})_{m\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(f_{n_{j,m}})_{m\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{llllll}
 & {\color{red}f_{n_{1,1}}} & f_{n_{1,2}} & f_{n_{1,3}} & f_{n_{1,4}} \;\cdots & (\text{converge uniformemente em } K_1 \text{ para } f|_{K_1}) \\
\text{subseq.} & & & & & \\
 & f_{n_{2,1}} & {\color{red}f_{n_{2,2}}} & f_{n_{2,3}} & f_{n_{2,4}} \;\cdots & (\text{converge uniformemente em } K_2 \text{ para } f|_{K_2}) \\
\text{subseq.} & & & & & \\
 & f_{n_{3,1}} & f_{n_{3,2}} & {\color{red}f_{n_{3,3}}} & f_{n_{3,4}} \;\cdots & (\text{converge uniformemente em } K_3 \text{ para } f|_{K_3}) \\
\text{subseq.} & & & & & \\
 & f_{n_{4,1}} & f_{n_{4,2}} & f_{n_{4,3}} & {\color{red}f_{n_{4,4}}} \;\cdots & (\text{converge uniformemente em } K_4 \text{ para } f|_{K_4}) \\
 & & \vdots & & &
\end{array}$$

Agora, basta notar que a sequência diagonal $(f_{n_{m,m}})_{m\in\mathbb{N}}$, grifada em vermelho acima, converge para f uniformemente em K_j para todo $j \in \mathbb{N}$ e, portanto, converge uniformemente para f sobre os subconjuntos compactos de Ω. Segue do Corolário 2.5.2 que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. $\square$

2.6 O princípio da continuação analítica

Mostraremos, nesta seção, que toda função holomorfa é, além de C^∞, analítica. Ou seja, toda função holomorfa pode ser escrita, localmente, como uma série de potências. Isto nos permitirá concluir o Princípio da Continuação Analítica: se duas funções holomorfas definidas em um aberto conexo coincidem em um determinado subconjunto aberto de seu domínio, então são, na verdade, idênticas. A versão deste resultado para funções holomorfas em $\mathbb{C}^N$, que apresentaremos no capítulo seguinte, será utilizada na demonstração do Teorema de Hartogs. Primeiramente, vejamos alguns fatos básicos sobre séries de potências.

Lema 2.6.1. *Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Existe $R \in [0,\infty]$ tal que*

(a) Se $|z - z_0| < R$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente.

(b) Se $|z - z_0| > R$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ diverge.

Com as convenções $1/0 = \infty$ e $1/\infty = 0$, R é dado explicitamente por

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}}. \tag{2.31}$$

Demonstração. Suponha primeiramente que $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 0$. Dado $z \in \mathbb{C}$, temos que $\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}|z - z_0| = 0$ e, portanto, existem $r < 1$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n|^{1/n}|z - z_0| < r$ para todo $n \geq n_0$. Isto, por sua vez, implica que $|a_n||z - z_0|^n < r^n$ para todo $n \geq n_0$. Como a série geométrica de razão r é convergente, segue que a série em questão converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Agora, se $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \infty$, existe uma subsequência $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty}|a_{n_k}|^{1/n_k} = \infty$ Nesse caso, dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, temos $\lim_{m\to\infty}|a_{n_m}|^{1/n_m}|z - z_0| = \infty$ e, portanto, $\lim_{m\to\infty}|a_{n_m}||z - z_0|^{n_m} = \infty$. Isso mostra que o termo geral da série não vai a zero e, portanto, esta não converge.

Suponha então que $L \doteq \limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \notin \{0,\infty\}$. Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < 1/L$. Como $L\,|z - z_0| < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$r := (L + \varepsilon)|z - z_0| < 1.$$

Pela definição de L, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $|a_n|^{1/n} \leq L + \varepsilon$. Daí, se $n \geq n_0$,

$$|a_n||z - z_0|^n \leq \{(L + \varepsilon)|z - z_0|\}^n = r^n$$

e, portanto,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n||z - z_0|^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n < \infty.$$

Ou seja, a série converge absolutamente. Agora, se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z - z_0| > 1/L$, temos

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

e, dessa forma, existe uma subsequência $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $1 < |a_{n_m}||z - z_0|^{n_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Isso mostra, mais uma vez, que o termo geral da série não vai a zero e, com isso, esta não pode ser convergente. □

Exemplo 2.6.2. Pela expressão fornecida em (2.31), a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ tem raio de convergência $R = 1$. De maneira estritamente análoga ao caso real, mostra-se que, para todo $z \in \Delta_1(0)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Esta série é usualmente denominada de *série geométrica.*

Teorema 2.6.3. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{C}$. A série de potências*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.32}$$

define uma função holomorfa no interior do seu disco de convergência.

Demonstração. Sejam R como em (2.31) e $L \doteq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Dado $K \subseteq \Delta_R(z_0)$ compacto, existe $R' \in (0, R)$ tal que $K \subseteq \Delta_{R'}(z_0)$. Logo, para quaisquer que sejam $z \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|a_n||z - z_0|^n \leq |a_n|(R')^n. \tag{2.33}$$

Como $LR' < 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $r := (L + \varepsilon)R' < 1$. Assim, pela definição de L, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, $|a_n|^{1/n} \leq L + \varepsilon$ e, portanto, $|a_n|(R')^n \leq r^n$, o que implica a convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(R')^n$. Logo, segue de (2.33) e do M-teste de Weierstrass que a série em (2.32) converge uniformemente em K. Pelo Corolário 2.5.2, $f \in \mathcal{O}(\Delta_R(z_0))$. □

Provemos, então, que toda função holomorfa é analítica.

Teorema 2.6.4. *Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $f \in \mathcal{O}(\Delta_r(z_0))$. Para todo $z \in \Delta_r(z_0)$, temos*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \tag{2.34}$$

com convergência uniforme sobre os subconjuntos compactos de $\Delta_r(z_0)$.

Demonstração. Sejam $r_1 < r_2 < r$ e $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| \leq r_1$. Pela Fórmula Integral de Cauchy 2.3.3,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{r_2}(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi. \tag{2.35}$$

Mas, para todo $\xi \in \partial \Delta_{r_2}(z_0)$, utilizando o Exemplo 2.6.2, temos

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - (z - z_0)(\xi - z_0)^{-1}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n. \tag{2.36}$$

Como

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| \leq \frac{r_1}{r_2} < 1,$$

a série à direita em (2.36) converge, pelo M-teste de Weierstrass, absoluta e uniformemente na variável ξ. Assim, voltando a (2.35), o Teorema da Convergência Dominada nos garante que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{r_2}(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{r_2}(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \, (z - z_0)^n \right\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Agora, derivando (2.35) n vezes em $z = z_0$ sob o sinal da integral, observamos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{r_2}(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

e, portanto, (2.37) se reescreve exatamente como (2.34).

Finalmente, o que fizemos até aqui mostra que $\Delta_r(z_0)$ está contido no disco de convergência da série à direita em (2.37). Mas vimos na demonstração do Teorema 2.6.3 que toda série de potências converge uniformemente em cada um dos subconjuntos compactos de seu disco de convergência. Logo, a série em (2.34) converge uniformemente nos subconjuntos compactos de $\Delta_r(z_0)$. □

Este é um ponto adequado para evidenciar a diferença entre a diferenciabilidade real e complexa. Dados um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, é possível definir uma infinidade de funções que são k vezes deriváveis em I com a k-ésima derivada não diferenciável. Um exemplo clássico é a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Mais ainda, é possível definir, em $\mathbb{R}$, funções que são infinitamente diferenciáveis mas que não são analíticas. Um exemplo é a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} .$$

No Apêndice A, verificamos que tal função é, de fato, infinitamente diferenciável. Se fosse analítica, pelo argumento que veremos a seguir (o Princípio da Continuação Analítica), deveria ser nula, o que definitivamente não é verdade. Em contraste, uma função $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que é diferenciável no sentido complexo, i.e., holomorfa, tem todas as suas derivadas e, mais ainda, como vimos acima, é analítica.

Vamos, então, apresentar o Princípio da Continuação Analítica.

Teorema 2.6.5 (Continuação Analítica)**.** *Seja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se Ω é conexo e existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(z_0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, então f é identicamente nula em Ω.*

Demonstração. Considere

$$N \doteq \{z \in \Omega : f^{(k)}(z) = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}_0\} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \left[f^{(k)}\right]^{-1}(0). \tag{2.38}$$

A expressão à direita em (2.38) mostra que N é um subconjunto fechado de Ω. Dado $z \in N$, existe $r > 0$ tal que $\Delta_r(z) \subseteq \Omega$. Pelo Teorema 2.6.4, para todo $\xi \in \Delta_r(z)$,

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{n!}(\xi - z)^n = 0.$$

Ou seja, $f|_{\Delta_r(z)} = 0$ e, portanto, $\Delta_r(z) \subseteq N$. Isso mostra que, além de fechado, N é subconjunto aberto de Ω. Como N é não vazio por hipótese e Ω é conexo, conclui-se que $\Omega = N$, donde segue que f é identicamente nula em Ω. □

Corolário 2.6.6. *Se Ω é conexo e $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ coincidem em um subconjunto aberto de Ω, então $f = g$.*

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 2.6.5 à função $h \doteq f - g$. □

Corolário 2.6.7. *Sejam $r > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Se $f \in \mathcal{O}(\Delta_r(z_0))$ não é identicamente nula, então existem um único $k \in \mathbb{N}$ e uma única $g \in \mathcal{O}(\Delta_r(z_0))$ com $g(z_0) \neq 0$ tais que, para todo $z \in \Delta_r(z_0)$,*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \tag{2.39}$$

Demonstração. Como f não é identicamente nula, segue do Corolário 2.6.5 que o conjunto $\{n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$ é não vazio. Seja

$$k \doteq \min\{n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(0) \neq 0\}.$$

Pelo Teorema 2.6.4, para todo $z \in \Delta_r(z_0)$,

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^k \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z - z_0)^{n-k}}_{=:\, g(z)}.$$

O fato de que $g \in \mathcal{O}(\Delta_r(z_0))$ segue mais uma vez da convergência uniforme sobre compactos. Note que $g(z_0) = f^{(k)}(z_0)/k! \neq 0$.

Suponha que existam $k, l \in \mathbb{N}$ com $k > l$ e $g, h \in \mathcal{O}(\Delta_r(z_0))$ com $g(z_0) \neq 0$ e $h(z_0) \neq 0$ tais que, para todo $z \in \Delta_r(z_0)$,

$$(z - z_0)^k g(z) = (z - z_0)^l h(z) = f(z).$$

Nesse caso, para todo $z \in \Delta_r(z_0) \setminus \{z_0\}$,

$$(z - z_0)^{k-l} g(z) = h(z).$$

Tomando o limite com $z \to z_0$ concluímos que $h(z_0) = 0$, uma contradição. Logo, k e l devem necessariamente ser iguais. Mas então

$$g|_{\Delta_r(z_0)\setminus\{z_0\}} = h|_{\Delta_r(z_0)\setminus\{z_0\}},$$

o que, por continuidade, implica que $h = g$. Isso mostra a unicidade da decomposição em (2.39). $\square$

Finalizamos esta seção com a demonstração do Teorema 2.4.2, que havíamos deixado pendente.

Demonstração do Teorema 2.4.2. Seja $\varphi \in C_c^k(\mathbb{C})$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(z) g(z)\, dm(z) = 0$$

para toda $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Considere $R > 0$ tal que $\mathrm{supp}\varphi \subseteq \Delta_R(0)$. Como vimos na demonstração do Teorema 2.4.1, a função

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z - \xi)}{\xi}\, d\bar{\xi} \wedge d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{z - \xi}\, d\bar{\xi} \wedge d\xi$$

soluciona a equação de Cauchy–Riemman não homogênea $\partial f/\partial \bar{z} = \varphi$. Vejamos que, nesse caso, f tem suporte compacto. Se $|z| \geq 2R$, então, para todo $\xi \in \Delta_R(0)$, $|\xi/z| \leq 1/2$ e, utilizando o que observamos no Exemplo 2.6.2, temos

$$\frac{1}{z-\xi} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\xi/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{z^n}$$

com a série à direita convergindo, pelo M-teste de Weierstrass, absoluta e uniformemente na variável ξ. Agora, como já fizemos, aplicamos o Teorema da Convergência Dominada para concluir que, se $z \notin \Delta_{2R}(0)$,

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{z-\xi}\, d\bar{\xi}\wedge d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{z^n}\, d\bar{\xi}\wedge d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\int_{\Delta_R(0)} \varphi(\xi)\xi^n\, d\bar{\xi}\wedge d\xi \qquad (2.40) \\ &= \frac{1}{2\pi i z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}\int_{\mathbb{C}} \varphi(\xi)\xi^n\, d\bar{\xi}\wedge d\xi. \end{aligned}$$

Por hipótese, as integrais que compõem a soma mais à direita em (2.40) se anulam, uma vez que, como vimos no Exemplo 2.2.1, a função $\xi \longmapsto \xi^n$ é holomorfa para todo $n \geq 0$. Logo, f se anula em $\mathbb{C} \setminus \Delta_{2R}(0)$ e, consequentemente, $\operatorname{supp} f \subseteq \Delta_{2R}(0)$. □

Observação 2.6.7.1. Pelo Corolário 2.6.6, a solução de (2.19) obtida no Teorema 2.4.2 é a única com suporte compacto. Com efeito, por este resultado, se uma função é holomorfa em $\mathbb{C}$ e tem suporte compacto, então a mesma é nula.

2.7 O princípio do máximo

Concluímos este capítulo demonstrando o conhecido Princípio do Máximo.

Teorema 2.7.1. *Sejam $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{O}(\Delta_r(z_0))$. Se $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in \Delta_r(z_0)$, então f é constante.*

Demonstração. Podemos assumir, é claro, que $f(z_0) \neq 0$. Se $0 < \rho < r$, pela Fórmula Integral de Cauchy 2.3.3,

$$\begin{aligned} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{i\theta})}{z_0+\rho e^{i\theta}-z_0}\cdot i\,\rho e^{i\theta}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\theta})\, d\theta. \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0) - f(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta = \frac{f(z_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 - \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\, d\theta$$

e, portanto,

$$0 = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{1 - \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right\} d\theta = \int_0^{2\pi} 1 - \mathrm{Re}\left\{\frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right\} d\theta. \quad (2.41)$$

Mas, por hipótese, para todo $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right\} \leq \left|\frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right| \leq 1,$$

donde concluímos que o integrando em (2.41) é não negativo e, consequentemente, nulo para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Agora, como

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{Im}\left\{\frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right\}^2 &= \mathrm{Re}\left\{\frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right\}^2 + \mathrm{Im}\left\{\frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right\}^2 \\ &= \left|\frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right|^2 \leq 1, \end{aligned}$$

concluímos que $\mathrm{Im}\left\{f(z_0 + \rho e^{i\theta})/f(z_0)\right\} = 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Isso mostra que $f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = f(z_0)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ e a arbitrariedade de ρ garante a conclusão que desejamos. □

Corolário 2.7.2 (Princípio do Máximo)**.** *Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ é um aberto limitado e $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, então*

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|$$

Demonstração. A compacidade de $\overline{\Omega}$ nos garante que o máximo é de fato atingido. Se o máximo de $|f|$ em $\overline{\Omega}$ for atingido no interior de uma certa componente conexa de Ω, então, pelo Teorema 2.7.1, existe um disco aberto contido nesta componente onde f é constante. Portanto, pelo Corolário 2.6.6, f é constante nesta componente conexa e, consequentemente, em seu fecho. Logo, o máximo é atingido na fronteira de tal componente conexa e, consequentemente, na fronteira de Ω. □

Cabe pontuar que o Corolário 2.7.2 exibe uma propriedade compartilhada não só por funções holomorfas, mas por todas as funções harmônicas[3]. Uma

[3] Isto não significa, é claro, que esta é a classe mais geral de funções com tal propriedade.

função $f \in C^2(\Omega)$ é dita *harmônica* se satisfaz a equação diferencial parcial

$$\Delta f \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y} = 0.$$

Fazendo uso das equações de Cauchy–Riemann (2.5), mostra-se facilmente que, de fato, toda função holomorfa é harmônica.

Capítulo 3

Funções de várias variáveis complexas

Fixe $N \in \mathbb{N}$. Começaremos a tratar de funções definidas no $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^N = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$. É claro que $\mathbb{C}^N$ se identifica naturalmente com $\mathbb{R}^{2N}$ por meio da aplicação

$$(x_1, y_1, \cdots, x_N, y_N) \in \mathbb{R}^{2N} \longmapsto (x_1 + i\, y_1, \ldots, x_N + i\, y_N) \in \mathbb{C}^N.$$

Esta identificação transfere, de $\mathbb{R}^{2N}$ para $\mathbb{C}^N$ todas as noções topológicas provenientes da usual norma euclidiana de $\mathbb{R}^{2N}$. Isto nos permite, assim como fizemos no Capítulo 2, tratar de conjuntos abertos, fechados, compactos em $\mathbb{C}^N$, das noções de limites e continuidade da maneira como já estamos habituados. Percebamos também que cada elemento $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ fica representado na forma $z = x + i\, y$, onde $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ e $z_j = x_j + i\, y_j$, $j = 1, \ldots, N$. Novamente, o conjugado de $z = x + i\, y \in \mathbb{C}^N$ é definido por $\overline{z} \doteq x - i\, y$.

Dado $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ um aberto, os conjuntos $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C^k_c(\Omega)$ e $C^\infty_c(\Omega)$ são definidos de maneira estritamente análoga àquela do Capítulo 1. Dados $r = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}^N_+$ e $z_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0N}) \in \mathbb{C}^N$, o *polidisco aberto* de poliraio r centrado em z_0 é o aberto

$$\Delta^N_r(z_0) \doteq \Delta_{r_1}(z_{01}) \times \cdots \times \Delta_{r_N}(z_{0N}) \subseteq \mathbb{C}^N.$$

É claro que, se $N = 1$, $\Delta^1_r(z_0)$ coincide com $\Delta_r(z_0)$. A *fronteira distinguida* de $\Delta^N_r(z_0)$ é o produto cartesiano

$$\partial_0 \Delta^N_r(z_0) \doteq \partial \Delta_{r_1}(z_{01}) \times \cdots \times \partial \Delta_{r_N}(z_{0N}).$$

Enfatizamos que, se $N \geq 2$, $\partial_0 \Delta^N_r(z_0)$ difere da fronteira topológica $\partial \Delta^N_r(z_0)$ do conjunto $\Delta^N_r(z_0)$. Mais explicitamente, temos

$$\Delta^N_r(z_0) = \{(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_j - z_{0j}| < r_j \text{ para todo } j = 1, \ldots, N\} \text{ e}$$
$$\partial_0 \Delta^N_r(z_0) = \{(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_j - z_{0j}| = r_j \text{ para todo } j = 1, \ldots, N\}.$$

Neste capítulo, apresentamos a teoria de funções holomorfas definidas em subconjuntos abertos de $\mathbb{C}^N$. Como no Capítulo 2, a teoria de formas diferenciais se mostrará uma ferramenta útil. Nos dedicaremos primeiramente a obter os resultados que estendem aqueles da teoria de uma variável, como a Fórmula Integral de Cauchy em polidiscos, as Estimativas de Cauchy, o Princípio da Continuação Analítica e o Princípio do Máximo. No Capítulo 4 apresentaremos um resultado que exemplifica o contraste existente entre a teoria no caso $N = 1$ e no caso $N \geq 2$. Pela necessidade de lidar com somas infinitas indexadas em $\mathbb{N}_0^N$, a Seção 3.4 está destinada à definição e às propriedades de séries sobre conjuntos arbitrários. Ao final, discutimos brevemente um outro teorema de Hartogs, sobre funções separadamente holomorfas, que corrobora com a coesão da teoria.

3.1 Funções holomorfas

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ um aberto e $f \in C^1(\Omega)$. Como vimos, está associada a f a 1-forma

$$df = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}\, dy_j \in \mathbf{F}_1(\Omega). \tag{3.1}$$

Em particular, diferenciando as funções

$$z = (z_1, \ldots, z_N) \longmapsto z_j \quad \text{e} \quad z = (z_1, \ldots, z_N) \longmapsto \overline{z_j},$$

obtemos

$$dz_j = dx_j + i\, dy_j \quad \text{e} \quad d\overline{z_j} = dx_j - i\, dy_j, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Assim, de maneira análoga ao que fizemos no caso unidimensional, o conjunto $\{dz_1, \ldots, dz_n, d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_N}\} \subseteq \mathbf{F}_1(\Omega)$ constitui uma base para $\mathbf{F}_1(\Omega)$ e (3.1) se reescrevem como

$$df = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\, d\overline{z_j}, \tag{3.2}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

Introduzindo as notações

$$\partial f \doteq \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j \quad \text{e} \quad \overline{\partial} f \doteq \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\, d\overline{z_j},$$

a equação (3.2) ganha a forma mais sucinta $df = \partial f + \overline{\partial} f$.

As 1-formas em $\mathbf{F}_1(\Omega)$ que são combinações lineares de $dz_1, \ldots, dz_N$ são ditas formas de tipo $(1,0)$. Já as 1-formas que são combinações lineares de $d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_N}$ são ditas de tipo $(0,1)$. Com esta nomenclatura, ∂f e $\overline{\partial} f$ são, respectivamente, as componentes de tipo $(1,0)$ e $(0,1)$ de df.

Uma função $f \in C^1(\Omega)$ é dita *holomorfa* se é de tipo $(1,0)$. Ou seja, se satisfaz $\overline{\partial} f = 0$. Esta equação, por sua vez, equivale ao sistema sobredeterminado de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \partial f / \partial \overline{z_1} = 0 \\ \quad \vdots \\ \partial f / \partial \overline{z_N} = 0 \end{cases}, \tag{3.3}$$

as denominadas *equações de Cauchy–Riemann*.

Os operadores ∂ e $\overline{\partial}$ são claramente lineares. Logo, combinações lineares com coeficientes complexos de funções holomorfas resultam em funções holomorfas. Além disso, se $f,\ g \in C^1(\Omega)$, então

$$\partial(fg) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial(fg)}{\partial z_j}\, dz_j = \sum_{j=1}^{N} f\, \frac{\partial g}{\partial z_j}\, dz_j + g\, \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j = f\, \partial g + g\, \partial f.$$

Analogamente, $\overline{\partial}(fg) = f\, \overline{\partial} g + g\, \overline{\partial} f$. Disto segue que o produto de funções holomorfas resulta em uma função holomorfa.

Agora, sejam $M \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ um aberto e

$$f = (f_1, \ldots, f_M) : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^M$$

uma função tal que cada f_j, $j = 1, \ldots, M$ é holomorfa em Ω. Considere também $\omega \subseteq \mathbb{C}^M$ um aberto tal que $f(\Omega) \subseteq \omega$. Dada $g \in C^1(\omega)$, temos $g \circ f \in C^1(\omega)$ e

$$d(g \circ f) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z_j}\, dz_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z_j}}\, d\overline{z_j}. \tag{3.4}$$

Utilizando a regra da cadeia e o fato de que cada f_j, $j = 1, \ldots, N$ satisfaz as equações de Cauchy–Riemann, mostra-se que, para todo $j = 1, \ldots, N$,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z_j}} = \sum_{k=1}^{M} \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{z_k}} \circ f \right) \frac{\partial \mathrm{Im} f_k}{\partial y_j} - i \left(\frac{\partial g}{\partial \overline{z_k}} \circ f \right) \frac{\partial \mathrm{Im} f_k}{\partial x_j} \right\}. \tag{3.5}$$

Unindo (3.4) e (3.5), concluímos que a composição $g \circ f$ é uma função holomorfa em Ω se $g \in \mathcal{O}(\omega)$.

Vamos agora estender os operadores ∂ e $\overline{\partial}$ a formas diferenciais arbitrárias. Sejam $p,\ q \in \mathbb{N}$ com $1 \leq p, q \leq 2N$. Dados[1] $I = (i_1, \ldots, i_p) \in \mathbf{M}_p$ e $J = (j_1, \ldots, j_q) \in \mathbf{M}_q$, denotaremos

$$dz_I \doteq dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \quad \text{e} \quad d\overline{z_J} \doteq d\overline{z_{j_1}} \wedge \cdots \wedge d\overline{z_{j_q}}.$$

Fixado um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$, uma forma diferencial em Ω do tipo

$$\alpha = \sum_{I \in \mathbf{M}_p} \sum_{J \in \mathbf{M}_q} \alpha_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z_J},$$

onde cada $\alpha_{I,J}$ é uma função de Ω em $\mathbb{C}$ será dita uma (p,q)-forma ou de tipo (p,q). Note que esta nomenclatura generaliza o que chamamos de formas de tipo $(1,0)$ e $(0,1)$. Dada uma certa classe $\mathbf{H}$ de funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{C}$, denotaremos por $\mathbf{H}_{(p,q)}(\Omega)$ as (p,q)-formas em Ω cujos coeficientes pertencem à classe $\mathbf{H}$. Por exemplo, $C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ denota o conjunto das das (p,q)-formas em Ω cujos coeficientes são funções de classe C^∞. Dada $\alpha \in C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{I \in \mathbf{M}_p} \sum_{J \in \mathbf{M}_q} d\alpha_{I,j} \wedge dz_I \wedge dz_J \\ &= \sum_{I \in \mathbf{M}_p} \sum_{J \in \mathbf{M}_q} \underbrace{\partial\alpha_{I,J} \wedge dz_I \wedge dz_J}_{\text{de tipo } (p+1,q)} + \sum_{I \in \mathbf{M}_p} \sum_{J \in \mathbf{M}_q} \underbrace{\overline{\partial}\alpha_{I,j} \wedge dz_I \wedge dz_J}_{\text{de tipo } (p,q+1)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Definindo

$$\partial\alpha \doteq \sum_{I \in \mathbf{M}_p} \sum_{J \in \mathbf{M}_q} \partial\alpha_{I,J} \wedge dz_I \wedge dz_J \quad \text{e} \quad \overline{\partial}\alpha \doteq \sum_{I \in \mathbf{M}_p} \sum_{J \in \mathbf{M}_q} \overline{\partial}\alpha_{I,j} \wedge dz_I \wedge dz_J,$$

(3.6) se reescreve como $d\alpha = \partial\alpha + \overline{\partial}\alpha$. Como observamos na Proposição 1.2.2, a derivada exterior satisfaz $d^2 = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} 0 = d(d\alpha) = d(\partial\alpha + \overline{\partial}\alpha) &= \partial^2\alpha + \overline{\partial}\partial\alpha + \partial\overline{\partial}\alpha + \overline{\partial}^2\alpha \\ &= \partial^2\alpha + (\overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial})\alpha + \overline{\partial}^2\alpha. \end{aligned}$$

Como $\partial^2\alpha$, $(\overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial})\alpha$ e $\overline{\partial}^2\alpha$ são, respectivamente, formas dos tipos $(p+2,q)$, $(p+1,q+1)$ e $(p,q+2)$, isto nos permite concluir as seguintes relações para os operadores ∂ e $\overline{\partial}$:

$$\partial^2 = 0, \quad \overline{\partial}\partial + \partial\overline{\partial} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\partial}^2 = 0.$$

[1] Utilizamos aqui a notação introduzida no Capítulo 1

Notemos que uma forma diferencial em $C^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ pertence ao núcleo do operador

$$\overline{\partial} : C^\infty_{(p,q)}(\Omega) \longrightarrow C^\infty_{(p,q+1)}(\Omega)$$

se, e somente se, os seus coeficientes satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (3.3). Ou seja,

$$\ker \overline{\partial} = \left\{ \sum_{I \in \mathbf{M}_p} f_I \, dz_I : f_I \in \mathcal{O}(\Omega) \right\}.$$

Cabe também observar que, se α é de tipo $(p, q+1)$, então uma condição necessária para que a equação $\overline{\partial} f = \alpha$ possua soluções é $\overline{\partial}\alpha = 0$.

3.2 A fórmula integral de Cauchy em polidiscos

Nesta seção, demonstraremos a Fórmula Integral de Cauchy para polidiscos, que generaliza aquela que obtivemos no Capítulo 2. Em seguida, como consequência, mostramos que toda função holomorfa é de classe C^∞.

Teorema 3.2.1. *Sejam $z_0 \in \mathbb{C}^N$ e $r \in \mathbb{R}^N_+$. Suponha que $f \in C(\overline{\Delta^N_r(z_0)})$ é tal que, dados $j \in \{1, \dots, N\}$ e $z_k \in \Delta_{r_k}(z_{0k})$, $k \neq j$, a função*

$$f_j : z \in \Delta_{r_j}(z_{0j}) \longmapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_N) \in \mathbb{C} \tag{3.7}$$

é holomorfa em $\Delta_{r_j}(z_{0j})$. Então, para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Delta^N_r(z_0)$, temos

$$f(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{\partial_0 \Delta^N_r(z_0)} \frac{f(z_1, \dots, z_N)}{(z_1 - \xi_1) \cdots (z_N - \xi_N)} \, dz_1 \cdots dz_N. \tag{3.8}$$

Consequentemente, $f \in C^\infty(\Delta^N_r(z_0))$ e, de fato, $f \in \mathcal{O}(\Delta^N_r(z_0))$

Observação 3.2.1.1. O lado direito em (3.8) contém uma notação mais sucinta para a integral iterada

$$\int_{\Delta_{r_N}(z_{0N})} \cdots \int_{\Delta_{r_1}(z_{01})} \frac{f(z_1, \cdots, z_N)}{(z_1 - \xi_1) \cdots (z_N - \xi_N)} \, dz_1 \cdots dz_N.$$

Como f é contínua em $\overline{\Delta^N_r(z_0)}$, o Teorema de Fubini garante que a ordem da iteração pode ser escolhida livremente.

Observação 3.2.1.2. A função f_j em (3.7) depende, é claro, também dos complexos fixados $z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \cdots, z_N$. Evitamos indexar f_j também por tais elementos para não carregar ainda mais a notação.

Demonstração. Vamos mostrar, primeiramente, que, fixados $j \in \{1, \ldots, N\}$ e $z_k \in \overline{\Delta_{r_k}(z_{0k})}$, $k \neq j$, a função

$$f_j : z \in \Delta_{r_j}(z_{0j}) \longmapsto f(z_1, \ldots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \cdots z_N) \in \mathbb{C}$$

é holomorfa em $\Delta_{r_j}(z_{0j})$. Para cada $k \neq j$, considere $(z_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\Delta_{r_k}(z_{0k})$ convergindo para z_k. Pela continuidade de f, f_j é limite pontual da sequência de funções

$$f_{jn} : z \in \Delta_{r_j}(z_{0j}) \longmapsto f(z_{1n}, \ldots, z_{(j-1)n}, z, z_{(j+1)n}, \ldots, z_{Nn}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_{jn}\|_{L^\infty(\Delta_{r_j}(z_{0j}))} \leq \|f\|_{L^\infty(\overline{\Delta_r^N(z_0)})} < \infty,$$

o Teorema de Stieltjes–Vitali 2.5.4 garante a existência de uma subsequência de $(f_{jn})_{n \in \mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre os subconjuntos compactos de $\Delta_{r_j}(z_{0j})$. O limite de tal subsequência só pode ser f_j e, com isso, pelo Corolário 2.5.2, $f_j \in \mathcal{O}(\Delta_{r_j}(z_{0j}))$.

Vamos, então, mostrar (3.8). Se $N = 1$, o resultado é simplesmente a Fórmula Integral de Cauchy 2.3.3. Suponha válido o resultado para $N - 1 \geq 1$. Seja $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \Delta_r^N(z_0)$. Por hipótese, a função $f(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}, \cdot)$ é holomorfa em $\Delta_{r_N}(z_{0N})$. Logo, pela Fórmula Integral de Cauchy 2.3.3,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_{r_N}(z_{0N})} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}, z_N)}{z_N - \xi_N} \, dz_N. \tag{3.9}$$

Pelo que vimos no parágrafo anterior, fixado $z_N \in \partial \Delta_{r_N}(z_{0N}) \subseteq \overline{\Delta_{r_N}(z_{0N})}$, a função

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}) \in \Delta_{r_1}(z_{01}) \times \cdots \times \Delta_{r_{N-1}}(z_{0(N-1)}) \longmapsto f(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}, z_N) \in \mathbb{C}$$

satisfaz as hipóteses do teorema, i.e., é contínua em

$$\overline{\Delta_{r_1}(z_{01}) \times \cdots \times \Delta_{r_{N-1}}(z_{0(N-1)})}$$

e holomorfa em cada uma das variáveis quando as outras estão fixadas. Logo, utilizando a hipótese de indução em (3.9), obtemos (3.8), como gostaríamos.

Finalmente, para concluir que f é de classe C^∞ e holomorfa em $\Delta_r^N(z_0)$, basta observar que, para cada $(z_1, \ldots, z_n) \in \partial_0 \Delta_r^N(z_0)$, o integrando em (3.8) é uma função de classe C^∞ e holomorfa em $\Delta_r^N(z_0)$ na variável ξ. Assim, derivando sob o sinal da integral, concluímos que f é de classe C^∞ e satisfaz $\overline{\partial} f = 0$. $\square$

É importante observar que se $f \in \mathcal{O}(\Delta_r^N(z_0)) \cap C(\overline{\Delta_r^N(z_0)})$, então f satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.1. Com efeito, f satisfazer as equações de Cauchy–Riemann (3.3) nos garante exatamente que, quando fixamos $j \in \{1, \dots, N\}$ e $z_k \in \Delta_{r_k}(z_{0k})$, $k \neq j$, a função

$$f_j : z \in \Delta_{r_j}(z_{0j}) \longmapsto f(z_1, \dots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \dots, z_N) \in \mathbb{C} \tag{3.10}$$

é holomorfa em $\Delta_{r_j}(z_{0j})$. Aqui, uma pergunta natural a se fazer é: se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em cada coordenada z_j quando as outras estão fixadas, então $f \in \mathcal{O}(\Omega)$? A resposta é sim. Este é um resultado não trivial, também de Hartogs. Voltaremos brevemente a esta discussão na Seção 3.7. Perceba que o Teorema 3.2.1 exibe uma prova deste resultado no caso em que se sabe, de antemão, que a função f é contínua.

Corolário 3.2.2. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ é um aberto e $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, então $f \in C^\infty(\Omega)$ e todas as derivadas de f são holomorfas em Ω.*

Demonstração. Assim como fizemos na demonstração do Corolário 2.3.4, basta aplicar (3.8) em cada polidisco contido em Ω e diferenciar sob o sinal da integral. □

Nas condições do Teorema 3.2.1, dado um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$, a derivação sob o sinal da integral fornece

$$D^\alpha f(\xi) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^N} \int_{\partial_0 \Delta_r^N(z_0)} \frac{f(z_1, \dots, z_N)}{(z_1 - \xi_1)^{\alpha_1+1} \cdots (z_N - \xi_N)^{\alpha_N+1}} \, dz_1 \cdots dz_N, \tag{3.11}$$

onde $\alpha! \doteq \alpha_1! \cdots \alpha_N!$ e

$$D^\alpha \doteq \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial z_N}.$$

3.3 Estimativas de Cauchy

Nesta seção, obtemos a generalização das Estimativas de Cauchy 2.5.1 para o caso multidimensional. Este resultado possui como consequência, novamente em analogia ao caso $N = 1$, as generalizações do Corolário 2.5.2 e do Teorema de Stieltjes–Vitali 2.5.4.

Teorema 3.3.1 (Estimativas de Cauchy)**.** *Sejam $K \subseteq \Omega$ um compacto e $\omega \subseteq \Omega$ um aberto contendo K. Para todo multi-índice $\mathbb{N}_0^N$, existe $C_\alpha \in \mathbb{R}_+$ tal que, para toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$,*

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \leq C_\alpha \|f\|_{L^1(\omega)}$$

Demonstração. Vamos assumir, primeiramente, que $\omega = \Delta_{r_1}(z_{01}) \times \cdots \times \Delta_{r_N}(z_{0N})$ é um polidisco aberto e que $K = K_1 \times \cdots \times K_N \subseteq \omega$ é produto de compactos. Se $N = 1$, o resultado é simplesmente as estimativas de Cauchy 2.5.1 que provamos no Capítulo 2. Suponha válido o resultado para $N-1 \geq 1$. Então, dado $z = (z_1, \ldots, z_N) \in K$, temos

$$
\begin{aligned}
|D^\alpha f(z)| &\leq \left\| \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial z_N} f(\cdot, z_2, \ldots, z_N) \right\|_{L^\infty(K_1)} \\
&\overset{\star}{\leq} C \left\| \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial z_N} f(\cdot, z_2, \cdots, z_N) \right\|_{L^1(\Delta_{r_1}(z_{01}))} \\
&= C \int_{\Delta_{r_1}(z_{01})} \left| \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial z_N} f(\xi_1, z_2, \ldots, z_N) \right| d\xi_1 \\
&\overset{\star\star}{\leq} C\tilde{C} \int_{\Delta_{r_1}(z_{01})} \|f(\xi_1, \cdot)\|_{L^1(\Delta_{r_2}(z_{02}) \times \cdots \times \Delta_{r_N}(z_{0N}))}\, d\xi_1 \\
&\overset{\star\star\star}{=} C\tilde{C}\, \|f\|_{L^1(\omega)},
\end{aligned}
$$

como queríamos. Na desigualdade $(\star)$ acima, utilizamos as estimativas de Cauchy 2.5.1 e o fato de que, por ser holomorfa, f é holomorfa na primeira coordenada quando as outras estão fixadas. Em $(\star\star)$, utilizamos nossa hipótese de indução. Por fim, a igualdade $(\star\star\star)$ é uma simples consequência do Teorema de Tonelli para integrais iteradas.

Vamos agora verificar o caso geral. Para cada $\zeta \in K$, sejam K_ζ e Δ_ζ polidiscos fechados[2] e abertos respectivamente tais que

$$\zeta \in K_\zeta \subseteq \Delta_\zeta \subseteq \overline{\Delta_\zeta} \subseteq \omega.$$

Pela compacidade de K, existe $\zeta_1, \ldots, \zeta_l \in K$ tais que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} K_{\zeta_j}$. Seja $z \in K$. Existe $j \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $z \in K_{\zeta_j}$. Então, pelo que provamos no parágrafo anterior,

$$|D^\alpha f(z)| \leq C_j \|f\|_{L^1(\Delta_{\zeta_j})} \leq C_j \|f\|_{L^1(\omega)},$$

onde C_j é a constante do caso que tratamos no parágrafo anterior referente a K_{ζ_j} e Δ_{ζ_j}. Tomando $C_\alpha \doteq \max_{j=1,\ldots,l} C_j$, concluímos

$$\|D^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \leq C_\alpha \|f\|_{L^1(\omega)},$$

como queríamos. $\square$

[2] Aqui, polidisco fechado refere-se simplesmente ao produto cartesiano de N discos fechados.

Agora, com as estimativas de Cauchy ao nosso dispor, as demonstrações das seguintes duas consequências consistem de uma mera repetição das demonstrações do Corolário 2.5.2 e do Teorema 2.5.4 respectivamente. Cabe observar que, da maneira como foi enunciado, o Lema 2.5.3 pode ser aplicado também no contexto deste capítulo.

Corolário 3.3.2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{O}(\Omega)$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f uniformemente em cada compacto $K \subseteq \Omega$, então $f \in \mathcal{O}(\Omega)$*

Teorema 3.3.3 (Stieltjes–Vitali)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{O}(\Omega)$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em cada compacto $K \subseteq \Omega$, então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre os subconjuntos compactos de Ω para uma função $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

3.4 Séries

Na próxima seção, vamos mostrar que toda função holomorfa, localmente, se escreve como uma série de potências. Tais séries, contudo, consistem de somas infinitas sobre o produto cartesiano $\mathbb{N}_0^N$ e não mais sobre $\mathbb{N}$. Isto nos exige um esforço para estabelecer o que são precisamente tais somas. É isto que faremos nesta seção.

Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, I um conjunto infinito e enumerável e $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ uma família de elementos de E indexada por I. Dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é *somável* com soma $x \in E$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito e tal que

$$\left\| x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \right\| < \varepsilon \tag{3.12}$$

sempre que $F \subseteq I$ for finito e contiver F_ε. Nesse caso, dizemos que x é a *soma* de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ e denotamos

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha \doteq x. \tag{3.13}$$

É simples verificar que um tal x satisfazendo (3.12), se existir, deve ser único. Isto evita qualquer possível ambiguidade em (3.13). Cabe observar que, sendo

$$I_\star \doteq \{\alpha \in I : \|x_\alpha\| \neq 0\}, \tag{3.14}$$

nada se altera na definição acima se exigirmos que, para todo $\varepsilon > 0$, exista $F_\varepsilon \subseteq I_\star$ para o qual (3.12) ocorre sempre que $F \subseteq I_\star$ for finito e contiver F_ε.

Se a família $(\|x_\alpha\|)_{\alpha\in I}$ for somável, diremos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é *absolutamente somável.* Além disso, dizemos que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ satisfaz o *critério de Cauchy para* *somabilidade* se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $G_\varepsilon \subseteq I$ finito e tal que

$$\left\| \sum_{\alpha \in G} x_\alpha \right\| < \varepsilon$$

sempre que $G \subseteq I$ for finito e disjunto de G_ε.

A completude de E garante que satisfazer o critério de Cauchy para somabilidade e ser somável são, na verdade, propriedades equivalentes. Este é o conteúdo da proposição a seguir.

Proposição 3.4.1. *Uma família $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ é somável se, e somente se, satisfaz o critério de Cauchy para somabilidade.*

Demonstração. Suponha que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ é somável. Sejam $x \in E$ a soma de $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ e $\varepsilon > 0$. Existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \right\| < \varepsilon/2$$

sempre que $F \subseteq I$ for finito e contiver F_ε. Se $G \subseteq I$ é finito e disjunto de F_ε, então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\alpha \in G} x_\alpha \right\| &= \left\| \sum_{\alpha \in G \cup F_\varepsilon} x_\alpha - \sum_{\alpha \in F_\varepsilon} x_\alpha \right\| \\ &\leq \left\| x - \sum_{\alpha \in G \cup F_\varepsilon} x_\alpha \right\| + \left\| x - \sum_{\alpha \in F_\varepsilon} x_\alpha \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ satisfaz o critério de Cauchy para somabilidade.

Suponha agora que $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ satisfaz o critério de Cauchy. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$I_n \doteq \{\alpha \in I : \|x_\alpha\| \geq 1/n\}.$$

Perceba que, com a notação introduzida em (3.14), temos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I_\star.$$

Como $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ satisfaz o critério de Cauchy, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $G_n \subseteq I$ finito tal que, se $\alpha \notin G_n$, então $\|x_\alpha\| < 1/n$. Isso mostra que $I_n \subseteq G_n$ e, portanto, cada I_n é finito, o que nos permite considerar

$$y_n := \sum_{\alpha \in I_n} x_\alpha \in E.$$

Vejamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em E e que seu limite é a soma de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subseteq I_\star$ tal que

$$\left\| \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \right\| < \varepsilon$$

sempre que $F \subseteq I_\star$ é finito e disjunto de F_ε. Como F_ε é finito e $I_n \subseteq I_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\varepsilon \subseteq I_{n_0}$. Assim, se $n_0 \le n < m$, temos

$$F_\varepsilon \subseteq I_{n_0} \subseteq I_n \subseteq I_m$$

e, portanto, $(I_m \setminus I_n) \cap F_\varepsilon = \varnothing$. Logo,

$$\|y_m - y_n\| = \left\| \sum_{\alpha\in I_m\setminus I_n} x_\alpha \right\| < \varepsilon.$$

Isso mostra que a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em E. Seja $x \in E$ o seu limite. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \ge m_0$, $\|y_n - x\| < \varepsilon/2$. Além disso, existe $G_\varepsilon \subseteq I_\star$ finito tal que

$$\left\| \sum_{\alpha\in G} x_\alpha \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sempre que $G \subseteq I_\star$ é finito e disjunto de G_ε. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $G_\varepsilon \subseteq I_{n_0}$ e $m_0 \le n_0$. Se $F \subseteq I_\star$ é finito e contém I_{n_0}, então

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \right\| &= \left\| x - \sum_{\alpha\in I_{n_0}} x_\alpha - \sum_{\alpha\in F\setminus I_{n_0}} x_\alpha \right\| \\
&\le \|x - y_{n_0}\| + \left\| \sum_{\alpha\in F\setminus I_{n_0}} x_\alpha \right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $x = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$, como queríamos. □

Como vimos na demonstração da Proposição 3.4.1, se $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ satisfaz o critério de Cauchy (o que inclui o caso em que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é somável), então o conjunto $I_\star = \{\alpha \in I : x_\alpha \neq 0\}$ é uma união enumerável de conjuntos finitos e, portanto, é enumerável. Isso mostra que nada se ganharia se decidíssemos permitir que I fosse não enumerável.

Corolário 3.4.2. *Se* $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ *é absolutamente somável, então é somável.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $G_\varepsilon \subseteq I$ tal que

$$\sum_{\alpha\in G} \|x_\alpha\| < \varepsilon$$

sempre que $G \subseteq I$ é finito e disjunto de G_ε. Como

$$\left\| \sum_{\alpha\in G} x_\alpha \right\| \leq \sum_{\alpha\in G} \|x_\alpha\|$$

para todo $G \subseteq I$ finito, segue que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ satisfaz o critério de Cauchy para somabilidade, o que, pelo Teorema 3.4.1, garante que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é somável. □

A definição de somabilidade que aqui tratamos é escolhida de tal maneira que a mesma soma é a obtida se somarmos sobre enumerações diferentes de I. Mais precisamente, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.4.3. *Se* $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ *é somável com soma* $x \in E$, *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\varphi(n)} = x$$

para toda bijeção $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$.

Demonstração. Sejam $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ uma bijeção e $\varepsilon > 0$. Existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que

$$\left\| x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha \right\| < \varepsilon$$

sempre que $F \subseteq I$ é finito e contém F_ε. Dado $N \in \mathbb{N}$, considere

$$J_N := \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\}.$$

É claro que $J_N \subseteq J_{N+1}$ para todo $N \in \mathbb{N}$ e, como φ é sobrejetora, $I = \bigcup_{N=1}^{\infty} J_N$. Assim, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_\varepsilon \subseteq J_{N_0}$. Daí, se $N \geq N_0$, $F_\varepsilon \subseteq J_N$ e, portanto,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} x_{\varphi(n)} \right\| = \left\| x - \sum_{\alpha\in J_N} x_\alpha \right\| < \varepsilon.$$

Isso mostra que $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_{\varphi(n)} = x$, como queríamos. □

Proposição 3.4.4. *Uma família $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é absolutamente somável se, e somente se, existe $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\| \leq C \tag{3.15}$$

sempre que $F \subseteq I$ for finito.

Demonstração. Suponha que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ é absolutamente somável. Sejam

$$C := \sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\| \in \mathbb{R}$$

e $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ uma bijeção fixada. Dado $F \subseteq I$ finito, existe, como vimos na demonstração da Proposição 3.4.3, $N \in \mathbb{N}$ tal que $F \subseteq J_N = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\}$. Assim,

$$\sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\| \leq \sum_{n=1}^{N} \|x_{\varphi(n)}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\varphi(n)}\| = C,$$

onde utilizamos, na última igualdade, a Proposição 3.4.3.

Reciprocamente, suponha que, para algum $C \in \mathbb{R}$, (3.15) ocorra sempre que $F \subseteq I$ for finito. Nesse caso,

$$\sup \left\{ \sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\| : F \subseteq I \text{ é finito} \right\} \doteq c \leq C < \infty$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $F_\varepsilon \subseteq I$ finito tal que

$$c - \varepsilon < \sum_{\alpha\in F_\varepsilon} \|x_\alpha\| \leq \sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\| \leq c$$

sempre que $F \subseteq I$ for finito e contiver F_ε. Em outras palavras,

$$\left| c - \sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\| \right| < \varepsilon$$

sempre que $F \subseteq I$ for finito e contiver F_ε. Isso mostra que $(\|x_\alpha\|)_{\alpha\in I}$ é somável com soma c. □

Findamos esta seção com a seguinte observação, que nos será útil no próximo capítulo. No caso em que $E = \mathbb{R}$, é simples verificar que a soma de uma família $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ coincide com a integral $\int_I x_\alpha \, d\nu(\alpha)$, onde ν denota a medida de contagem em I. Com isso, no caso em que $E = \mathbb{C}$, conclui-se, separando x_α em suas partes real e imaginária e as mesmas em partes positiva e negativa, que a soma de uma família $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ coincide também com a integral $\int_I x_\alpha \, d\nu(\alpha)$, onde novamente ν denota a medida de contagem em I.

3.5 O princípio da continuação analítica

A partir de agora, passamos a considerar a expansão em série de potências de funções que são holomorfas em polidiscos. Sendo I um conjunto infinito e enumerável e $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ um aberto, diremos que a série de uma família de funções $f_\alpha \in C(\Omega)$, $\alpha \in I$, *converge normalmente* se, para todo compacto $K \subseteq \Omega$, a família $(\|f_\alpha\|_{L^\infty(K)})_{\alpha\in I}$ for somável. Como $C(K)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{L^\infty(K)}$, pelo que vimos na Seção 3.4, se a série de $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge normalmente, então é somável em $C(K)$ e, portanto, existe $f \in C(K)$ que é a soma de $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$. Nesse caso, se $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow I$ é uma bijeção qualquer, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_{\varphi(n)}$ converge uniformemente em K para f. Logo, pelo Corolário 3.3.2, se cada f_α é holomorfa, então f é, na verdade, uma função em $\mathcal{O}(\Omega)$.

Abaixo, dados $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ e um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$, denotamos $z^\alpha \doteq z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}$ e $\alpha + 1 \doteq (\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_N + 1)$.

Lema 3.5.1. *Sejam $z_0 \in \mathbb{C}^N$ e $r \in \mathbb{R}_+^N$. Para todo $\xi \in \partial_0\Delta_r^N(z_0)$, temos*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{(z - z_0)^\alpha}{(\xi - z_0)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(\xi_1 - z_1)\cdots(\xi_N - z_N)}, \quad z \in \Delta_r^N(z_0), \tag{3.16}$$

com convergência normal na variável z.

Demonstração. Sejam $z_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0N}) \in \mathbb{C}^N$, $r = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}_+^N$ e $\xi \in \partial_0\Delta_r^N(z_0)$. Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, considere a função $f_\alpha : \Delta_r^N(z_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f_\alpha(z) = \frac{(z - z_0)^\alpha}{(\xi - z_0)^{\alpha+1}}.$$

Vamos mostrar que $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} f_\alpha$ converge normalmente em $\Delta_r^N(z_0)$. Seja $K \subseteq \Delta_r^N(z_0)$ um compacto. Pela compacidade de K, existe $s = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathbb{N}_0^N$ tal que $s_j < r_j$ para todo $j = 1, \ldots, N$, e $K \subseteq \Delta_s^N(z_0)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, temos

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha\|_{L^\infty(K)} &= \sup_{(z_1,\ldots,z_N)\in K} \frac{|z_1 - z_{01}|^{\alpha_1} \cdots |z_N - z_{0N}|^{\alpha_N}}{|\xi_1 - z_{01}|^{\alpha_1+1} \cdots |\xi_N - z_{0N}|^{\alpha_N+1}} \\
&= \sup_{(z_1,\ldots,z_N)\in K} \frac{|z_1 - z_{01}|^{\alpha_1} \cdots |z_N - z_{0N}|^{\alpha_N}}{r_1^{\alpha_1+1} \cdots r_N^{\alpha_N+1}} \\
&\le \left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{s_N}{r_N}\right)^{\alpha_N} \frac{1}{r_1 \ldots r_N}.
\end{aligned}$$

Sejam $F \subseteq \mathbb{N}_0^N$ finito e $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$F \subseteq J_M \doteq \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N : \alpha_j \le M \text{ para todo } j = 1, \ldots, N\}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in F}\|f_\alpha\|_{L^\infty(K)} &\leq \sup_{\alpha\in J_M}\|f_\alpha\|_{L^\infty(K)} \\
&\leq \sum_{\alpha\in J_M}\left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{s_N}{r_N}\right)^{\alpha_N}\frac{1}{r_1\ldots r_N} \\
&= \frac{1}{r_1\ldots r_N}\left\{\sum_{\alpha_1=0}^{M}\left(\frac{s_1}{r_1}\right)^{\alpha_1}\right\}\cdots\left\{\sum_{\alpha_N=0}^{M}\left(\frac{s_N}{r_N}\right)^{\alpha_N}\right\} \\
&\leq \frac{1}{r_1\cdots r_N}\cdot\frac{1}{1-s_1/r_1}\cdots\frac{1}{1-s_N/r_N}.
\end{aligned}$$

Então, pela Proposição 3.4.4, a família $(\|f_\alpha\|_{L^\infty(K)})_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ é somável e, portanto, pela arbitrariedade de K, a série de $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}$ converge normalmente.

Com a convergência normal garantida, resta verificar a igualdade em (3.16). Como observamos no final Seção 3.4, fixado $z\in\Delta_r(\omega)$, a soma à esquerda em (3.16) coincide com a integral $\int_{\mathbb{N}_0^N} f_\alpha(z)\,d\nu(\alpha)$, onde ν denota a medida de contagem em $\mathbb{N}_0^N$. Mas a medida de contagem em $\mathbb{N}_0^N$ é exatamente a medida produto de N medidas de contagem em $\mathbb{N}_0$. Assim, o Teorema de Fubini nos garante que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}\frac{(z-z_0)^\alpha}{(\xi-z_0)^{\alpha+1}} &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{\alpha_N=0}^{\infty}\frac{(z_1-z_{01})^{\alpha_1}}{(\xi_1-z_{01})^{\alpha_1+1}}\cdots\frac{(z_N-z_{0N})^{\alpha_N}}{(\xi_N-z_{0N})^{\alpha_N+1}} \\
&= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\frac{(z_1-z_{01})^{\alpha_1}}{(\xi_1-z_{01})^{\alpha_1+1}}\cdots\sum_{\alpha_N=0}^{\infty}\frac{(z_N-z_{0N})^{\alpha_N}}{(\xi_N-z_{0N})^{\alpha_N+1}} \\
&= \prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\xi_j-z_{0j}}\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-(z_j-z_{0j})/(\xi_j-z_{0j})} \\
&= \prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\xi_j-z_{0j}-z_j+z_{0j}} \\
&= \frac{1}{(\xi_1-z_1)\cdots(\xi_N-z_N)},
\end{aligned}$$

como gostaríamos. □

Utilizamos, agora, o Lema 3.5.1 para mostrar que toda função holomorfa se escreve localmente como série de potências.

Teorema 3.5.2. *Sejam $z_0 \in \mathbb{C}^N$, $r \in \mathbb{R}_+^N$ e $f \in \mathcal{O}(\Delta_r^N(z_0))$. Para todo $z \in \Delta_r^N(z_0)$,*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{D^\alpha f(z_0)}{\alpha!}(z - z_0)^\alpha, \tag{3.17}$$

com convergência normal na variável z.

Demonstração. Seja $\Delta_s^N(z_0)$ um polidisco aberto estritamente contido em $\Delta_r^N(z_0)$. Ou seja, $s = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathbb{R}_+^N$ é tal que $s_j < r_j$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Como vimos no Lema 3.5.1, para todos $\xi \in \partial_0 \Delta_s^N(z_0)$ e $z \in \Delta_s^N(z_0)$, temos

$$\frac{1}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_N - z_N)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{(z - z_0)^\alpha}{(\xi - z_0)^{\alpha + 1}} \tag{3.18}$$

com convergência normal na variável z. Multiplicando ambos os lados de (3.18) por $f(\xi)$ (note que $\partial_0 \Delta_s^N(z_0) \subseteq \Delta_r^N(z_0)$), integrando sobre $\partial_0 \Delta_s^N(z_0)$ e utilizando a Fórmula Integral de Cauchy (3.8), obtemos

$$(2\pi i)^N f(z) = \int_{\partial_0 \Delta_s^N(z_0)} f(\xi) \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{(z - z_0)^\alpha}{(\xi - z_0)^{\alpha + 1}} \, d\xi_1 \cdots d\xi_N. \tag{3.19}$$

Agora, fixando uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0^N$ e aplicando o Teorema da Convergência Dominada (o que é possível uma vez que a série no integrando em (3.19) converge normalmente), concluímos que, com convergência normal na variável $z \in \Delta_s^N(z_0)$,

$$(2\pi i)^N f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} (z - z_0)^\alpha \int_{\partial_0 \Delta_s^N(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\alpha + 1}} \, d\xi_1 \cdots d\xi_N. \tag{3.20}$$

Mas, como vimos em (3.11),

$$\int_{\partial_0 \Delta_s^N(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{\alpha + 1}} \, d\xi_1 \cdots d\xi_N = \frac{(2\pi i)^N}{\alpha!} D^\alpha f(z_0).$$

Logo, multiplicando ambos os lados de (3.20) por $(2\pi i)^{-N}$, segue que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{D^\alpha f(z_0)}{\alpha!}(z - z_0)^\alpha.$$

A arbitrariedade do polidisco $\Delta_s^N(z_0)$ nos garante, finalmente, a convergência normal em $z \in \Delta_r^N(z_0)$. $\square$

De maneira análoga ao caso unidimensional, o Teorema 3.5.2 possui como consequência o Princípio da Continuação Analítica. Como comentamos na Seção 2.6, aplicaremos o Princípio da Continuação Analítica para obter a conclusão do Teorema de Hartogs no Capítulo 4.

Teorema 3.5.3 (Continuação Analítica)**.** *Seja $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Se Ω é conexo e existe $z_0 \in \Omega$ tal que $D^\alpha f(z_0) = 0$ para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, então f é identicamente nula em Ω.*

Demonstração. Assim como na demonstração do Corolário 2.6.5, consideramos

$$N \doteq \{z \in \Omega : D^\alpha f(z_0) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^N\} = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} D^\alpha f^{-1}(0)$$

e notamos, com o mesmo argumento, que N é não vazio, fechado em Ω e, pelo Teorema 3.5.2, aberto em Ω. Como Ω é conexo, conclui-se que $N = \Omega$ e, portanto, f é identicamente nula. □

Corolário 3.5.4. *Se Ω é conexo e $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ coincidem em um subconjunto aberto de Ω, então $f = g$.*

Demonstração. Basta aplicar o Princípio da Continuação Analítica 3.5.3 à função $h \doteq f - g$. □

3.6 O princípio do máximo

O princípio do máximo também se estende ao caso multidimensional.

Teorema 3.6.1. *Sejam $r \in \mathbb{R}_+^N$, $z_0 \in \mathbb{C}^N$ e $f \in \mathcal{O}(\Delta_r^N(z_0))$. Se $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in \Delta_r^N(z_0)$, então f é constante.*

Demonstração. Se $N = 1$, a conclusão é a mesma do Teorema 2.7.1. Suponha válido o resultado para $N - 1 \geq 1$. Sejam $r = (r_1, \ldots, r_N) \in \mathbb{R}_+^N$, $z_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0N}) \in \mathbb{C}^N$ e f como no enunciado. A função $f(\cdot, z_{0N})$, que associa a cada $(z_1, \ldots, z_{N-1}) \in \Delta_{r_1}(z_{01}) \times \cdots \times \Delta_{r_{N-1}}(z_{0(N-1)})$ o complexo $f(z_1, \ldots, z_{N-1}, z_{0N})$ é holomorfa no polidisco aberto

$$\Delta_{r_1}(z_{01}) \times \cdots \times \Delta_{r_{N-1}}(z_{0(N-1)}) \subseteq \mathbb{C}^{N-1}.$$

Então, pela hipótese de indução,

$$f(z_1, \ldots, z_{N-1}, z_{0N}) = f(z_0)$$

para todo

$$(z_1, \ldots, z_{N-1}) \in \Delta_{r_1}(z_{01}) \times \cdots \times \Delta_{r_{N-1}}(z_{0(N-1)}).$$

Ora, mas a função $f(z_{01}, \ldots, z_{0(N-1)}, \cdot)$, que associa a cada $z_N \in \Delta_{r_N}(z_{0N})$ o complexo $f(z_{01}, \ldots, z_{0(N-1)}, z_N)$, é também holomorfa em $\Delta_{r_N}(z_{0N})$ e, portanto, pelo Teorema 2.7.1, constante. Dessa forma, dado $(z_1, \ldots, z_N) \in \Delta_r^N(z_0)$, temos

$$f(z_1, \ldots, z_N) = f(z_1, \ldots, z_{N-1}, z_{0N}) = f(z_0),$$

o que mostra que f é constante em $\Delta_r^N(z_0)$, como queríamos. □

A mesma demonstração que apresentamos no Capítulo 2 nos garante a seguinte consequência.

Corolário 3.6.2 (Princípio do Máximo). *Se $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ é um aberto limitado e $f \in \mathcal{O}(\Omega \cap C(\overline{\Omega})$, então*

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

3.7 Funções separadamente holomorfas

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ um aberto. Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita *separadamente holomorfa* se, fixados $j \in \{1, \ldots, N\}$ e $z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ para os quais existe ao menos um $z_j \in \mathbb{C}$ com $(z_1, \ldots, z_N) \in \Omega$, a função

$$z \longmapsto f(z_1, \ldots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \ldots, z_n)$$

é holomorfa no aberto $\{z \in \mathbb{C} : (z_1, \ldots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \ldots, z_N) \in \Omega\}$. Como observamos na Seção 3.2, toda função $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ é separadamente holomorfa. O seguinte teorema, também devido a Hartogs, garante que a recíproca deste resultado também é verdadeira.

Teorema 3.7.1 (Hartogs). *Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é separadamente holomorfa em Ω, então $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Ainda na Seção 3.2, nós obtivemos a conclusão do Teorema 3.7.1 no caso em que sabemos, de antemão, que a função f é contínua. Uma prova do Teorema 3.2 em sua formulação mais geral pode ser encontrada em [3, Sec. 2.2]. A grande maioria das funções holomorfas que surgem em contextos práticos são, de antemão, contínuas, de maneira que o Teorema 3.7.1 tem sua contribuição mais voltada à coesão da teoria.

Utilizando alguns conceitos que não foram introduzidos neste texto[3], vamos apresentar um argumento para a demonstração do Teorema 3.7.1 em um outro caso particular, que engloba o caso em que f é contínua. Suponha que f define uma distribuição em Ω. Isto ocorre, por exemplo, se f é integrável sobre todos

[3] Este parágrafo pode ser encarado como uma digressão.

os subconjuntos compactos $K \subseteq \Omega$. Neste caso, no sentido de distribuições, como $\partial f/\partial \overline{z_j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, N$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} - i\frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial x_j} + i\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial y_j} - i^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2} = \frac{1}{4}\Delta f. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Um operador diferencial parcial $P(D)$ definido em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^N$ é dito *hipoelíptico* se, para toda distribuição u definida em um aberto $W \subseteq U$, o fato de $P(D)u$ ser de classe C^∞ implica que u é de classe C^∞. É sabido, da teoria de distribuições, que o laplaciano Δ é um operador hipoelíptico. Conclui-se então de (3.21) que f é, na verdade, uma função de classe C^∞ em Ω e consequentemente holomorfa, já que satisfaz as equações de Cauchy–Riemann.

Capítulo 4

O Teorema de Hartogs

Neste capítulo, N denota um número natural maior do que ou igual a 2.

Grande parte dos resultados que apresentamos no Capítulo 3 são generalizações dos resultados da teoria de uma variável complexa que obtivemos no Capítulo 2. Neste capítulo, apresentamos um resultado que exemplifica o contraste existente entre a teoria de funções holomorfas em uma variável complexa e a teoria em várias variáveis: o Teorema de Hartogs, também conhecido como Fênomeno de Hartogs. De maneira informal, o resultado fornece condições sob as quais sempre é possível estender uma função holomorfa a um aberto essencialmente maior que o seu domínio. Como comentaremos em detalhes a seguir, é de se ressaltar o fato de que não se pode obter uma conclusão análoga na teoria de uma variável complexa.

4.1 A equação de Cauchy–Riemann não homogênea

Iniciaremos considerando a equação de Cauchy–Riemann não homogênea

$$\overline{\partial} f = \varphi, \tag{4.1}$$

onde φ é uma forma de tipo $(0,1)$ em $\mathbb{C}^N$ com coeficientes de classe C^k e suporte compacto. Ou seja, $\varphi \in (C_c^k)_{(0,1)}(\mathbb{C}^N)$. Como vimos na Seção 2.4, no caso em que $N = 1$, esta equação possui soluções em $C^k(\mathbb{C})$, que, em geral, não têm suporte compacto. O grande diferencial do caso em que $N \geq 2$ é o fato de que (4.1) tem uma única solução f em $C^k(\mathbb{C}^N)$ que, garantidamente, possui suporte compacto. Este fato desempenha um papel crucial na demonstração que faremos do Teorema de Hartogs.

Lembremos que, como $\overline{\partial}^2 = 0$, a existência de uma solução f para (4.1) tem $\overline{\partial}\varphi = 0$ como condição necessária. Explicitamente, isto significa que desejamos solucionar o sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} \partial f/\partial \overline{z_1} = \varphi_1 \\ \quad\vdots \\ \partial f/\partial \overline{z_N} = \varphi_N \end{cases}, \tag{4.2}$$

onde $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in C_c^k(\mathbb{C}^N)$ satisfazem as condições de compatibilidade

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial \overline{z_k}} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z_j}} = 0 \quad \text{para todos} \quad j, k = 1, \ldots, N. \tag{4.3}$$

Para obter (4.3), basta aplicar o operador $\overline{\partial}$ na $(0,1)$-forma $\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi_j \, d\overline{z_j}$ e igualar a 0. O seguinte resultado é o que nos garante uma existência de uma solução com suporte compacto.

Teorema 4.1.1. *Se*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j \, d\overline{z_j} \in \left(C_c^k\right)_{(0,1)} (\mathbb{C}^N)$$

satisfaz as equações (4.3), *então existe uma única solução* $f \in C^k(\mathbb{C}^N)$ *de* (4.1) *que possui suporte compacto.*

Demonstração. Analogamente à Observação 2.6.7.1, a unicidade é uma consequência imediata do Corolário 3.5.4. Este garante que uma função holomorfa em $\mathbb{C}^N$ com suporte compacto deve ser nula. Mas se f e g são soluções de (4.1) com suporte compacto, a diferença $f - g$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}^N$ com suporte compacto.

Vejamos agora a existência. Dado $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, considere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_1(\xi, z_2, \ldots, z_N)}{z_1 - \xi} \, d\overline{\xi} \wedge d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_1(z_1 - \xi, z_2, \ldots, z_N)}{\xi} \, d\overline{\xi} \wedge d\xi. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pelo que vimos na demonstração do Teorema 2.4.1, a função f satisfaz $\partial f/\partial \overline{z_1} = \varphi_1$. Se $j \geq 2$, então, derivando a primeira expressão em (4.4) sob o sinal da integral, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z_1 - \xi} \cdot \frac{\partial \varphi_1(\xi, z_2, \ldots, z_N)}{\partial \overline{z_j}} \, d\overline{\xi} \wedge d\xi \\ &\overset{\star}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z_1 - \xi} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\xi, z_2, \ldots, z_N)}{\partial \overline{z_1}} \, d\overline{\xi} \wedge d\xi, \end{aligned}$$

onde usamos, em ($\star$), a equação de compatibilidade (4.3) referente aos índices 1 e j. Como φ_j tem suporte compacto, existe $R > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{z_1 - \xi} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\xi, z_2, \dots, z_N)}{\partial \overline{z_1}}\, d\bar{\xi} \wedge d\xi \\ &= \iint_{\Delta_R(0)} \frac{1}{z_1 - \xi} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\xi, z_2, \dots, z_N)}{\partial \overline{z_1}}\, d\bar{\xi} \wedge d\xi. \\ &= -\iint_{\Delta_R(0)} \frac{1}{\xi - z_1} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\xi, z_2, \dots, z_N)}{\partial \overline{z_1}}\, d\bar{\xi} \wedge d\xi.\end{aligned}$$

Assim, pela Fórmula Integral de Cauchy Não Homogênea (2.3.2),

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z) = \varphi_j(z) - \int_{\partial \Delta_R(0)} \frac{\varphi_j(\xi, z_2, \dots, z_N)}{\xi - z_1}\, d\xi = \varphi_j(z).$$

Resta verificar que f tem suporte compacto. Como φ_1 tem suporte compacto, existe $M > 0$ tal que $f(z_1, \dots, z_n) = 0$ sempre que $|z_2| + \cdots |z_N| > M$. Ou seja, f se anula no complementar do cone

$$\mathscr{C} \doteq \{(z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_2| + \cdots |z_N| \leq M\}.$$

Além disso, existe $M' > 0$ tal que supp$\varphi_j \subseteq \Delta_{M'}(0)$ para todo $j = 1, \dots, N$ e, portanto, $\overline{\partial} f = 0$ em $\mathbb{C}^N \setminus \overline{\Delta_{M'}(0)}$. Isso mostra que

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N \setminus \Delta_{M'}(0)).$$

Como $(\mathbb{C}^N \setminus \mathscr{C}) \cap (\mathbb{C}^N \setminus \overline{B_R(0)})$ é aberto e não vazio, o Corolário 3.5.4 nos diz que $f = 0$ em $\mathbb{C}^N \setminus \overline{\Delta_{M'}(0)}$. Ou seja, f tem suporte compacto, como gostaríamos de concluir. $\square$

Com o Teorema 4.1.1 em mãos, já temos o suficiente para demonstrar o Teorema de Hartogs, que é o objetivo deste trabalho.

Teorema 4.1.2 (Hartogs)**.** *Sejam $N \geq 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ um aberto e $K \subseteq \Omega$ um compacto tal que $\Omega \setminus K$ é conexo. Se $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$, existe $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $F|_{\Omega \setminus K} = f$.*

Antes de demonstrar o Teorema 4.1.2, façamos algumas observações. Apesar de termos fixado $N \geq 2$ no início do capítulo, reforçamos esta hipótese no enunciado do teorema a fim de enfatizar que tal conclusão é falsa no caso em que $N = 1$. Um simples contraexemplo é a função

$$f : z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \longmapsto 1/z \in \mathbb{C}.$$

Se existisse $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ tal que $F|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} = f$, então, pelo Teorema de Cauchy 2.3.1, a integral $\int_{\partial\Delta_R(0)} z^{-1}\, dz$ seria nula para todo $R > 0$. Mas com uma conta simples concluímos o contrário:

$$\int_{\partial\Delta_r(0)} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}}\, i\, Re^{i\theta}\, d\theta = 2\pi i \neq 0.$$

O Teorema 4.1.2 nos mostra que, quando $N \geq 2$, existem subconjuntos abertos $\omega \subseteq \mathbb{C}^N$ para os quais toda função holomorfa em $\mathcal{O}(\omega)$ admite uma extensão a um aberto Ω tal que $\omega \subseteq \Omega$ e a intersecção $\partial\omega \cap \Omega$ é não vazia[1]. Se $N = 1$, a situação é contrária. De fato, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1.3. *Seja $\omega \subseteq \mathbb{C}$ é um aberto. Existe $f \in \mathcal{O}(\omega)$ para a qual não existem*

- $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *aberto contendo* ω *e algum ponto de* $\partial\omega$ *e*
- $F \in \mathcal{O}(\Omega)$

satisfazendo $F|_\omega = f$.

Não vamos demonstrar o Teorema 4.1.3, mas cabe ilustrar o caso em que $\omega = \Delta_1(0)$. Considere a função $f : \Delta_1(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada pela série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}, \quad z \in \Delta_1(0).$$

Como vimos no Capítulo 2 (mais especificamente por meio da expressão (2.31)), esta série define uma função holomorfa em $\Delta_1(0)$. Seja $r = p/q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ um racional. Para todo $\rho \in [0,1)$, temos

$$\begin{aligned} |f(\rho e^{2\pi r i})| &= \left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \rho^{n!} e^{2\pi r i n!} + \sum_{n=0}^{q} \rho^{n!} e^{2\pi r i n!} \right| \\ &\geq \left| \sum_{n=q+1}^{\infty} \rho^{n!} e^{2\pi r i n!} \right| - \left| \sum_{n=0}^{q} \rho^{n!} e^{2\pi r i n!} \right| \\ &= \sum_{n=q+1}^{\infty} \rho^{n!} - \left| \sum_{n=0}^{q} \rho^{n!} e^{2\pi r i n!} \right|. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Mas, pelo Teorema da Convergência Monótona aplicado à integral em $\mathbb{N}$ sobre a medida de contagem,

$$\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{n=q+1}^{\infty} \rho^{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \lim_{\rho \to 1^-} \rho^{n!} = \infty.$$

[1] Esta condição evita o caso em que simplesmente se une abertos disjuntos.

Logo, segue de (4.5) que $\lim_{\rho\to 1^-}|f(\rho e^{2\pi ri})| = \infty$. Isso mostra que f é ilimitada nas proximidades de qualquer ponto $z \in \partial\Delta_1(0)$ da forma $e^{2\pi ri}$, $r \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$. Como o conjunto de tais pontos é denso em $\partial\Delta_1(0)$, não existe extensão para f como descrita no Teorema 4.1.3.

Uma consequência do Teorema 4.1.2 é o fato de que um polinômio p definido em $\mathbb{C}^N$, com $N \geq 2$, não possui zeros isolados. Com efeito, se este fosse o caso, denotando por $z_0 \in \mathbb{C}^N$ o zero isolado de p, existiria $r > 0$ tal que p não se anula em $\Delta_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. A função $f \doteq 1/p$ seria portanto holomorfa em $\Delta_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Mas, como $\lim_{z\to z_0} p(z) = 0$, não haveria em $\mathcal{O}(B_r(z_0))$ uma extensão para f, contradizendo o teorema de Hartogs.

4.2 Prova do teorema de Hartogs

Finalmente, vejamos a prova do Teorema de Hartogs 4.1.2.

Demonstração do Teorema 4.1.2. Sejam Ω e K e f como no enunciado. Considere $\omega \subseteq \Omega$ um aberto tal que $\overline{\omega}$ é compacto

$$K \subseteq \omega \subseteq \overline{\omega} \subseteq \Omega.$$

Considere também $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi|_\omega$ é constante e igual a 1. A função ψ é simplesmente uma função de corte para o compacto $\overline{\omega}$ e o aberto Ω, cuja existência está garantida pelo Teorema A.2. Queremos mostrar que existe $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $F|_{\Omega\setminus K} = f$. Seja

$$f_0 \doteq (1-\psi)f \in C^\infty(\Omega).$$

Vamos determinar $g \in C^\infty(\Omega)$ tal que $F \doteq f_0 - g$ satisfaz o que desejamos. Percebamos, inicialmente, que, para que uma tal F seja holomorfa, é necessário

$$0 = \overline{\partial} f_0 - \overline{\partial} g = -f\,\overline{\partial}\psi - \overline{\partial} g$$

e, portanto, $\overline{\partial} g = -f\,\overline{\partial}\psi$. Como f é holomorfa e $\overline{\partial}^2 = 0$, temos $\overline{\partial}(-f\,\overline{\partial}\psi) = 0$ e, assim, a $(0,1)$-forma $-f\,\overline{\partial}\psi$ satisfaz as equações de compatibilidade (4.3). O Teorema 4.1.1 garante então a existência de uma função $g \in C_c^\infty(\mathbb{C}^N)$ tal que $\overline{\partial} g = -f\,\overline{\partial}\psi$.

Como vimos acima, a função $F \doteq f_0 - g$ é holomorfa em Ω. Resta verificar que $F|_{\Omega\setminus K} = f$. Vamos denotar por $\operatorname{supp}(-f\,\overline{\partial}\psi)$ a intersecção dos suportes dos coeficientes de $f\,\overline{\partial}\psi$. Pelo que vimos na demonstração do Teorema 4.1.1, a função g fornecida por este resultado se anula na componente conexa ilimitada de $\mathbb{C}^N \setminus \operatorname{supp}(-f\overline{\partial}\psi)$ (há de fato apenas uma componente conexa ilimitada, uma vez que $\operatorname{supp}(-f\overline{\partial}\psi)$ é limitado). Vamos denotar essa componente conexa por W. Notemos que

$$\partial W \subseteq \partial(\mathbb{C}^N \setminus \operatorname{supp}(-f\overline{\partial}\psi)) = \partial \operatorname{supp}(-f\overline{\partial}\psi) \subseteq \Omega \setminus K.$$

Assim, se $z_0 \in \partial W$, então existe $r > 0$ tal que $\Delta_r(z_0) \subseteq \Omega \setminus K$ e

$$\varnothing \neq W \cap \Delta_r(z_0) \subseteq W \cap \Omega \setminus K.$$

Tendo em vista que g e ψ se anula em W, concluímos que

$$F = f_0 - g = f - f\psi - g = f$$

em algum disco contido em $\Omega \setminus K$. Isso, pela conexidade de $\Omega \setminus K$ e pelo Corolário 3.5.4, implica que $F = f$ em $\Omega \setminus K$, como gostaríamos. $\square$

Apêndice A

Funções de corte

O objetivo deste apêndice é concluir que, dados $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aberto e $K \subseteq \Omega$ compato, existe uma função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi(x) \in [0,1]$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi|_K \equiv 1$ e supp$\varphi \subseteq \Omega$. Com estas propriedades, φ é dita uma *função de corte* para K.

Primeiramente, observamos que a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t), \ \text{se } t > 0 \\ 0, \ \text{se } t \leq 0 \end{cases} \tag{A.1}$$

é infinitamente diferenciável. Com efeito, fora da origem, este é um fato claro. Além disso, ainda fora da origem, as derivadas de f são da forma

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} p_k(1/t) \exp(-1/t), \ \text{se } t > 0 \\ 0, \ \text{se } t < 0 \end{cases},$$

onde p_k é um polinômio. Mas sabemos, pela regra de L'Hospital, que todo polinômio p satisfaz

$$\lim_{t \to 0} p(1/t) \exp(-1/t) = 0.$$

Logo, f e todas as suas derivadas são diferenciáveis também na origem.

Lema A.1. *Sejam $r, R \in \mathbb{R}_+^\star$ com $r < R$. Existe uma função $\psi_{r,R} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

a. Se $|x| \leq r$, então $\psi_{r,R}(x) = 1$.

b. Se $r \leq |x| \leq R$, então $0 \leq \psi_{r,R}(x) \leq 1$.

c. Se $R \leq |x|$, $\psi_{r,R}(x) = 0$.

Demonstração. Sejam r, $R \in \mathbb{R}_+^\star$ com $r < R$. Utilizando a função f introduzida em (A.1), definimos, para $t \in \mathbb{R}$,

$$f_1(t) := f(t-r)f(R-t) \quad \text{e} \quad f_2(t) = \int_t^\infty f_1(s)\, ds.$$

Como f se anula em $(-\infty, 0]$, $f_1(t)$ se anula se $t \leq r$ ou $t \geq R$. Em outras palavras, $\operatorname{supp} f_1 \subseteq [r, R]$. Com isso, f_2 é não negativa e satisfaz

$$f_2(t) = \begin{cases} C \doteq \int_r^R f_1(s)\, ds, & \text{se } t \leq r \\ 0, & \text{se } t \geq R \end{cases}. \tag{A.2}$$

Basta agora definir $\psi_{r,R}(x) = C^{-1} f_2(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Como f é de classe C^∞, o mesmo vale para $\psi_{r,R}$. Os fatos (a) e (c) acerca de $\psi_{r,R}$ decorrem imediatamente de (A.2). Já (b) se conclui observando que f_2 é uma função decrescente. □

Utilizando ainda a notação introduzida no Lema A.1, considere

$$\psi(x) \doteq \frac{\psi_{1/2,1}(x)}{\int_{\mathbb{R}^N} \psi_{1/2,1}(y)\, dy}, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi_n(x) = n^N \psi(nx), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Dizemos que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *família de mollifiers.* Vamos utilizar esta coleção de funções para construir a função φ que descrevemos no início deste apêndice. Antes, porém, observemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, são válidas as seguintes propriedades:

- Se $|x| < 1/n$, $\psi_n(x) > 0$;
- Se $|x| \geq 1/n$, $\psi_n(x) = 0$;
- $\int_{|x|\leq 1/n} \psi_n(x)\, dx = 1$.

Teorema A.2. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto e $K \subseteq \Omega$. Existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que*

a. $\varphi(x) \in [0,1]$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

b. $\varphi(x) = 1$ se $x \in K$.

c. $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \Omega$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)/4$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$K_n \doteq \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, K) \leq 1/n\}.$$

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$ e[1]

$$\varphi(x) = \int_{K_{n_0/2}} \psi_{n_0}(x-y)\,dy = \int_{x-K_{n_0/2}} \psi_{n_0}(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Como $\psi_{n_0} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, conclui-se do Lema 1.1.2 que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. É claro também que $\varphi(x) \in [0,1]$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, uma vez que ψ_{n_0} é não negativa e sua integral é igual a 1. Agora, note que, se $x \in K_{n_0}$ e $|y| \leq 1/n_0$, então $x - y \in K_{n_0/2}$. Ou seja, $\{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leq 1/n_0\} \subseteq x - K_{n_0/2}$. Isso mostra que, se $x \in K_{n_0}$,

$$\varphi(x) = \int_{x-K_{n_0/2}} \psi_{n_0}(y)\,dy \int_{|y|\leq 1/n_0} \psi_{n_0}(y)\,dy = 1.$$

Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}^N \setminus K_{n_0/3}$ e $y \in K_{n_0/2}$, então $|x-y| \geq 1/n_0$ e, portanto,

$$\varphi(x) = \int_{K_{n_0/2}} \psi_{n_0}(x-y)\,dy = 0.$$

Como $K \subseteq K_{n_0}$, temos $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in K$. Além disso, $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K_{n_0/3} \subseteq \Omega$, como queríamos. $\square$

[1] A função φ nada mais é que a convolução de ψ_{n_0} com a função indicadora de $K_{n_0/2}$.

Apêndice B

Teorema de Arzelá-Ascoli

Neste apêndice apresentamos uma demonstração do conhecido Teorema de Arzelá–Ascoli. Este resultado cumpre um papel importante na demonstração que fazemos do Teorema de Stieltjes–Vitali no Capítulo 2 e em sua generalização no Capítulo 3. Como é sabido, o Teorema de Arzelá–Ascoli possui diversas versões em generalizações nos mais variados contextos. Nos concentramos estritamente numa versão que atende as nossas necessidades.

Lema B.1. *Sejam X um espaço métrico separável, $K \subseteq X$ um compacto, $A \subseteq K$ um subconjunto denso de K, i.e., $\overline{A} = K$, e $\mathscr{F} \subseteq C(K)$ uma família equicontínua. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $\mathscr{F}$ que converge pontualmente em A, então $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em K.*

Demonstração. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência como no enunciado. Como $C(K)$, com a norma do supremo, é um espaço de Banach, basta mostrar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente de Cauchy em K para concluir que tal sequência converge uniformemente em K. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\mathscr{F}$ é equicontínua, existe $\delta > 0$ tal que $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3$ para quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e x, $y \in K$ com $d(x, y) < \delta$. Como A é denso em K, temos

$$K \subseteq \bigcup_{x\in A} B_\delta(x)$$

e, portanto, a compacidade de K fornece $x_1, \ldots, x_k \in A$ tais que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_\delta(x_j).$$

Agora, da convergência pontual de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x_j) - f_m(x_j)| < \varepsilon/3$ para quaisquer que sejam n, $m \geq n_0$ e $j \in \{1, \ldots, k\}$. Se $x \in K$

e $j \in \{1, \ldots, k\}$ é tal que $x \in B_\delta(x_j)$, então, para todos n, $m \geq n_0$,

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, se n, $m \geq n_0$, então

$$\|f_n - f_m\|_{L^\infty(K)} = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

como queríamos. □

Teorema B.2 (Arzelá–Ascoli)**.** *Sejam X um espaço métrico separável, $K \subseteq X$ um compacto e $\mathscr{F} \subseteq C(K)$ uma família equicontínua. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada em $\mathscr{F}$, então existe uma subsequência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente em K.*

Demonstração. Escrevamos, primeiramente, $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência como no enunciado. Por hipótese, para todo $k \in \mathbb{N}$, a sequência $(f_n(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{C}$. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstass, existe uma subsequência $(f_{n_{1,j}}(x_1))_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ que é convergente. Agora, como $(f_{n_{1,j}}(x_2))_{j\in\mathbb{N}}$ é limitada em $\mathbb{C}$, existe uma subsequência $(f_{n_{2,j}}(x_2))_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_{n_{1,j}}(x_2))_{j\in\mathbb{N}}$ que é convergente. Perceba que a sequência de funções $(f_{n_{2,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente tanto em x_1 quanto em x_2. A aplicação recursiva deste argumento fornece uma família $(f_{n_{m,j}})_{j\in\mathbb{N}}$, $m \in \mathbb{N}$, de subsequências de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem:

- $(f_{n_{m,j}}(x_k))_{j\in\mathbb{N}}$ converge para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$;
- Para todo $m \in \mathbb{N}$, $(f_{n_{m+1,j}})_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(f_{n_{m,j}})_{j\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{llllll}
 & \textcolor{red}{f_{n_{1,1}}} & f_{n_{1,2}} & f_{n_{1,3}} & f_{n_{1,4}} & \cdots \quad (\text{converge em } x_1) \\
\text{subseq.} \downarrow & & & & & \\
 & f_{n_{2,1}} & \textcolor{red}{f_{n_{2,2}}} & f_{n_{2,3}} & f_{n_{2,4}} & \cdots \quad (\text{converge em } x_1 \text{ e } x_2) \\
\text{subseq.} \downarrow & & & & & \\
 & f_{n_{3,1}} & f_{n_{3,2}} & \textcolor{red}{f_{n_{3,3}}} & f_{n_{3,4}} & \cdots \quad (\text{converge em } x_1,\ x_2 \text{ e } x_3) \\
\text{subseq.} \downarrow & & & & & \\
 & f_{n_{4,1}} & f_{n_{4,2}} & f_{n_{4,3}} & \textcolor{red}{f_{n_{4,4}}} & \cdots \quad (\text{converge em } x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ e } x_4) \\
 & & & \vdots & &
\end{array}$$

Agora, basta notar que a sequência diagonal $(f_{n_{j,j}})_{j\in\mathbb{N}}$, grifada em vermelho acima, converge pontualmente em A e, portanto, pelo Lema B.1, converge uniformemente em K. □

Referências Bibliográficas

Livros

[1] Busam, Rolf & Freitag, Eberhard. *Complex Analysis*, Springer Berlin Heidelberg, 2nd edition, 2009

[2] Cordaro, Paulo. *Cálculo Integral e o Teorema de Stokes*, Livraria da Física, 1ª edição, 2024.

[3] Hörmander, Lars. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland Mathematical Library, 3rd edition, 1990.

[4] Krantz, Steven. *Function Theory of Several Complex Variables*, American Mathematical Society, 2nd edition, 2001.

[5] Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 3rd edition, 1976.

[6] Sharkarchi, Rami & Stein, Elias. *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*, Princeton University Press, 1st edition, 2011.

[7] Scheidemann, Volker. *Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Springer Nature Switzerland, 2nd edition, 2023.

Artigos e periódicos

[8] Krantz, Steven. *What is Several Complex Variables?*, The American Mathematical Monthly, **Vol. 94** (1987), 236–256. DOI: https://doi.org/10.2307/2323391