SME 0300 – Cálculo Numérico

31 de maio de 2023

Exercício 4: Decomposição SVD
(entrega: 07/06)
(apresente somente os códigos no formato .m)

1. Partindo do código da questão 2 do exercício 3 (cálculo de autovalor utilizando a decomposição QR), acrescente os comandos necessários ao cálculo de autovalor/autovetor de uma matriz **simétrica**, por exemplo,

   ```
   ...
   V = eye(n);
   while (abs(err)>tol && k < kmax)
     ...
     V = V*Q;
   end
   ...
   ```

   onde '`...`' corresponde ao código original e `V` corresponde a uma matriz ortogonal (com vetores coluna ortonormais) cujos vetores coluna são autovetores da matriz **simétrica** de entrada.

2. Utilize o código anterior para calular a decomposição SVD de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, isto é, $A = U\Sigma V^T$ com $U, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonais e $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal.

   Dica: o código deverá calcular os autovalores e autovetores da matriz A^TA (simétrica), cujos autovalores são os elementos σ_i^2 e os autovetores formam a matriz V. A matriz U deve ser calculada como $U = AV\Sigma^{-1}$ para que saia com o sinal adequado em relação ao resultado de V já obtido, pois há uma ambiguidade no sinal dos autovetores utilizando o método QR, logo ao calcular U e V utilizando o método QR em AA^T e A^TA de forma independente, a incompatibilidade nos sinais poderá levar $U\Sigma V^T$ a um resultado diferente de A (faça o teste para compreender melhor). Note ainda que o método QR produz as matrizes Σ^2 e V já na ordem correta ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_k$, onde k é o posto da matriz A, e σ_i são os elementos da diagonal principal de Σ).

3. Compare o resultado do item anterior com a decomposição SVD do Matlab (`[U,S,V] = svd(A)`) para uma matriz A 3×3 aleatória. Note que a decomposição SVD não é única (os autovetores podem ter sinal trocado).

4. exemplo 6.9 do Quarteroni.