Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Campus de Três Lagoas
Bacharelado em Sistemas de Informação
Algoritmos e Programação II

Exercícios

Algoritmos Recursivos

1. O que faz a seguinte função?

```c
int misterio(int a, int b)
{
    if (b == 1)
        return a;
    else
        return a + misterio(a, b-1);
}
```

2. Localize o(s) erro(s) na seguinte função recursiva e explique como corrigi-lo(s). Essa função deve calcular a soma dos valores de 0 a n.

```c
int soma(const int n)
{
    if (n == 0)
        return 0;
    else
        return n + soma(n);
}
```

3. Qual o resultado da execução da função abaixo para a chamada externa `ff(7)`?

```c
int ff (int n)
{
    if (n == 1)
        return 1;
    if (n % 2 == 0)
        return ff(n/2);
    return ff((n-1)/2) + ff((n+1)/2);
}
```

4. Determine o valor devolvido pela função após a chamada externa `fusc(7,0)`.

```c
int fusc (int n, int profund)
{
    int i;
    for (i = 0; i < profund; i++)
        printf("...");
    printf("fusc(%d, %d)\n", n, profund);
    if (n == 1)
        return 1;
    if (n % 2 == 0)
        return fusc(n/2, profund+1);
    return fusc((n-1)/2, profund+1) + fusc((n+1)/2, profund+1);
}
```

5. Considere a função abaixo:

```c
int X(int a)
{
    if ( a <= 0 )
       return 0;
    else
       return a + X(a-1);
}
```

   (a) O que essa função faz?

   (b) Escreva uma função não-recursiva que resolve o mesmo problema.

   (c) Qual versão da função você considera mais eficiente? Justifique.

6. Escreva uma função recursiva para calcular a fórmula:

$$\sum_{i=1}^{n}(i \times i)$$

7. Escreva uma função recursiva que solucione a fórmula h definida por:

$$h(m,n) = \begin{cases} m+1 & \text{, se } n = 1, \\ n+1 & \text{, se } m = 1, \\ h(m,n-1) + h(m-1,n) & \text{, se } m > 1 \text{ e } n > 1. \end{cases}$$

8. Escreva uma função recursiva para encontrar o n-ésimo termo da sequência definida por:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, \text{ e } a_n = a_{n-1} \times a_{n-2}, \text{ para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

9. Escreva uma função iterativa para encontrar o n-ésimo termo da sequência definida no exercício 8.

10. Escreva uma função recursiva para encontrar o n-ésimo termo da sequência definida por:

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, \text{ e } a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \text{ para } n = 3, 4, 5, \ldots$$

11. Escreva uma função iterativa para encontrar o n-ésimo termo da sequência definida no exercício 10.

12. A função de Ackermann é definida para valores inteiros e não negativos m e n da seguinte forma:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{, se } m = 0, \\ A(m-1,1) & \text{, se } m > 0 \text{ e } n = 0, \\ A(m-1, A(m,n-1)) & \text{, se } m > 0 \text{ e } n > 0. \end{cases}$$

   Escreva uma função recursiva para implementá-la. Qual o valor de A(3,2)?

13. Um problema típico em ciência da computação consiste em converter um número da sua forma decimal para a forma binária. Por exemplo, o número 12 tem a sua representação binária igual a 1100. A forma mais simples de fazer isso é dividir o número sucessivamente por 2, onde o resto da i-ésima divisão vai ser o dígito i do número binário (da direita para a esquerda).

    Por exemplo: 12 / 2 = 6, resto 0 (1^o dígito da direita para esquerda), 6 / 2 = 3, resto 0 (2^o dígito da direita para esquerda), 3 / 2 = 1 resto 1 (3^o dígito da direita para esquerda), 1 / 2 = 0 resto 1 (4^o dígito da direita para esquerda). Resultado: 12 = 1100.

    Escreva um procedimento recursivo `Dec2Bin(inteiro n)` que dado um número decimal imprima a sua representação binária corretamente.

14. Considere um sistema numérico que não tenha a operação de adição implementada e que você disponha somente dos operadores (funções) `sucessor` e `predecessor`.

    Então, escreva uma função recursiva que calcule a soma de dois números x e y através desses dois operadores: `sucessor` e `predecessor`.

15. Escreva uma função recursiva que permita inverter um número inteiro.
    Exemplo: 123 - 321

16. O máximo divisor comum (MDC) de dois números inteiros x e y pode ser calculado usando-se uma definição recursiva: $MDC(x, y) = MDC(x - y, y)$, se $x > y$.

    Além disso, sabe-se que: $MDC(x, y) = MDC(y, x)$ e $MDC(x, x) = x$.

    Exemplo: $MDC(10, 6) = MDC(4, 6) = MDC(6, 4) = MDC(2, 4) = MDC(4, 2) = MDC(2, 2) = 2$.

    Escreva uma função recursiva que implemente tal definição.

17. Pode-se calcular o resto da divisão (MOD) de x por y, dois números inteiros, usando-se a seguinte definição:

$$MOD(x, y) = \begin{cases} MOD(|x| - |y|, |y|) & , \text{ se } |x| > |y| \\ |x| & , \text{ se } |x| < |y| \\ 0 & , \text{ se } |x| = |y| \end{cases}$$

    Escreva uma função recursiva que implemente tal definição. A função deve devolver -1 caso não seja possível realizar o cálculo.

18. Pode-se calcular o quociente da divisão (DIV) de x por y, dois números inteiros, usando-se a seguinte definição:

$$DIV(x, y) = \begin{cases} 1 + DIV(|x| - |y|, |y|) & , \text{ se } |x| > |y| \\ 0 & , \text{ se } |x| < |y| \\ 1 & , \text{ se } |x| = |y| \end{cases}$$

    Escreva uma função recursiva que implemente tal definição. A função deve devolver -1 caso não seja possível realizar o cálculo.

19. Escreva uma função recursiva que determine quantas vezes um dígito k ocorre em um número natural n. Por exemplo, o dígito 2 ocorre 3 vezes em 762021192.

20. A função fatorial duplo é definida como o produto de todos os números naturais ímpares de 1 até algum número natural ímpar n. Assim, o fatorial duplo de 5 é $5!! = 1 * 3 * 5 = 15$.

    Escreva uma função recursiva que receba um número inteiro positivo ímpar n e retorne o fatorial duplo desse número.

21. O fatorial quádruplo de um número n é dado por $\frac{(2n)!}{n!}$. Escreva uma função recursiva que receba um número inteiro positivo n e retorne o fatorial quádruplo desse número.

22. O superfatorial de um número n é definida pelo produto dos n primeiros fatoriais de n. Assim, o superfatorial de 4 é $sf(4) = 1! * 2! * 3! * 4! = 288$.

    Escreva uma função recursiva que receba um número inteiro positivo n e retorne o superfatorial desse número.

23. O hiperfatorial de um número n, escrito $H(n)$, é definido por:

$$H(n) = \prod_{k=1}^{n} k^k = 1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times \ldots (n-1)^{n-1} \times n^n$$

    Escreva uma função recursiva que receba um número inteiro positivo n e retorne o hiperfatorial desse número.

24. Um fatorial exponencial é um inteiro positivo n elevado à potência de $n-1$, que por sua vez é elevado à potência de $n-2$ e assim em diante. Ou seja:

$$n^{(n-1)^{(n-2)^{\cdots}}}$$

    Escreva uma função recursiva que receba um número inteiro positivo n e retorne o fatorial exponencial desse número.

25. Os números tribonacci são definidos pela seguinte recursão:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } n = 0 \\ 0 & , \text{ se } n = 1 \\ 1 & , \text{ se } n = 2 \\ f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) & , \text{ se } n > 2 \end{cases}$$

    Escreva uma função recursiva que receba um número n e retorne o n-ésimo termo da sequência de tribonacci.

26. Os números tetranacci iniciam com quatro termos pré-determinados e a partir daí todos os demais números são obtidos pela soma dos quatro números anteriores. Os primeiros números tetranacci são: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208...

    Escreva uma função recursiva que receba um número n e retorne o n-ésimo termo da sequência de tetranacci.

27. A multiplicação à Russa consiste em:

    (a) Escrever os números a e b, que se deseja multiplicar na parte superior das colunas.

    (b) Dividir a por 2, sucessivamente, ignorando o resto até chegar à unidade, escrever os resultados da coluna a.

    (c) Multiplicar b por 2 tantas vezes quantas se haja dividido a por 2, escrever os resultados sucessivos na coluna b.

    (d) Somar todos os números da coluna b que estejam ao lado de um número ímpar da coluna a.

    Exemplo: 27×82

a	b	Parcelas
27	82	82
13	164	164
6	328	-
3	656	656
1	1312	1312
	Soma:	2214

    Escreva uma função recursiva que implemente a multiplicação à Russa de dois inteiros a e b.