Spline Cúbica - Aplicação em Imagens

Luiz Gonzaga da Silva Junior[a]

[a]Institute of Mathematical and Computer Sciences, University of São Paulo, São Carlos, Brazil

ARTICLE HISTORY
Compiled December 1, 2019

1. Introdução

Spline é uma técnica de interpolação na qual faz uma interpolação polinomial por partes. A interpolação ocorre quando temos um conjunto de pontos mas precisamos obter o valor para outro ponto na qual não está tabelado [2]. Por exemplo: uma empresa calcula seu estoque diariamente, exceto nos finais de semana, podemos através da interpolação estimar os valores do estoque no final de semana.

2. Splines

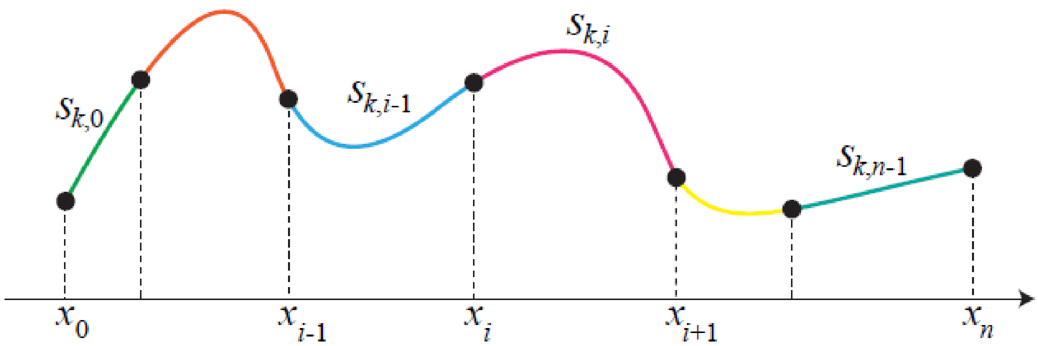

Figure 1.: spline de grau k

Dados $(n+1)$ pontos $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ com $a = x_0 < ... < x_n = b$. Uma função $S_k(x)$ é chamada de spline de grau k se satisfaz as seguintes condições:

- $S_{k,i} = S_k|_{[x_i, x_{i+1}]}$, com $i = 0, ..., n-1$, é o polinômio de grau k;
- $S_k \in C^{k-1}([a,b])$;
- $S_k(x_i) = y_i$, com $i = 0, .., n$.

*Corresponding author. Email: luiz.gonzaga.silva@usp.br

3. Spline Cúbica

Uma função $S_3(x)$ que satisfaz as condições abaixo é chamada de splica cúbica.

- $S_{3,i} = S_3|_{[x_i, x_{i+1}]}$, com $i = 0, ..., n-1$, é o polinômio de grau 3;
- $S_3 \in C^2([a, b])$;
- $S_3(x_i) = y_i$, com $i = 0, .., n$.

Existem n polinômios cúbicos $S_{3,i}(x)$ que satisfazem as condições:

(1) $S_{3,i-1}(x_{i-1}) = y_{i-1}$ e $S_{3,i-1}(x_i) = y_i, i = 1, ..., n$;
(2) $S_{3,i-1}(x_i) = S_{3,i}(x_i), i = 1, ..., n-1$;
(3) $S'_{3,i-1}(x_i) = S'_{3,i}(x_i), i = 1, ..., n-1$;
(4) $S''_{3,i-1}(x_i) = S''_{3,i}(x_i), i = 1, ..., n-1$;
(5) Condições de contorno naturais: $S''_3(x_0) = S''_3(x_n) = 0$.

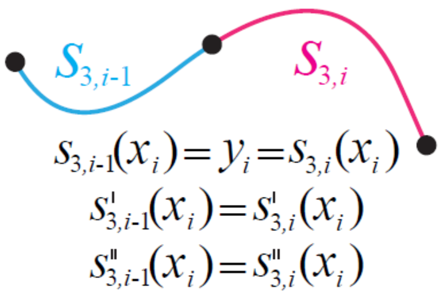

Figure 2.: spline cúbica

Levando em consideração a condição (4) e após algumas manipulações algébricas chegamos na seguinte equação:

$$S_{3,i}(x) = \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D, i = 0, ..., n-1.$$

onde $h_i = x_{i+1} - x_i$, C e D são constante de integração que precisamos determinar.

Por simplicidade, vamos denotar $S_{3,i}(x)$ como:

$$S_{3,i}(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, i = 0, ..., n-1. \text{ com}$$

$$a_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{6h_i}, b_i = \frac{z_i}{2}, c_i = -\frac{h_i z_{i+1}}{6} - \frac{h_i z_i}{3} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}, d_i = y_i$$

Para determinar $S_3(x)$ precisamos determinar cada $S_{3,i}(x)$, isto é:

$$\{a_0, b_0, c_0, d_0, ..., a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, dn - 1\}, 4n \text{ incógnitas.}$$

Os valores z_i são obtidos resolvendo o sistema linear de ordem $(n-1)$:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

onde

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}), \quad v_i = w_i - w_{i-1}, \quad w_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

As splines cúbicas naturais são obtidas resolvendo um sistema linear $n-1$ ao invés de um sistema de ordem $4n$.

4. Aplicação em Imagens

Com intuito de aplicar a teoria detalhada acima, vamos trabalhar com um conjunto de imagens como nosso principal conjunto de dados. E como ferramenta vamos fazer uso do software Octave 5.1.0.
Nosso conjunto de dados é proveniente de um projeto realizado pelo fotógrafo Noah Kalina [1], que aos 22 anos decidiu tirar uma foto do seu rosto todos os dias, onde se acumulou mais de 45.000 imagens em 12 anos.

Figure 3.: projeto everyday

Devido a repercução do projeto e o grande valor estatístico que esse conjunto de imagens oferece, principalmente para algoritmos que simulam envelhecimento, não é possível obter o conjunto completo de forma gratuíta.

Após algumas pesquisas feita na internet foi possível obter algumas imagens com datas específicas, são fotos que foram tiradas aos 22, 30, 39 e 43 anos.

Figure 4.: fotos originais aos 22, 30, 39 e 43 anos

O objetivo desse trabalho é, a partir das imagens originais, obter novas imagens para algumas idades específicas mas que não se encontram no conjunto original.

Porém como essas imagens são muito heterogeneas, pois foram obtidas de diferentes fontes e cada uma foi armazenada em um formato específico e resolução dieferente, alguns tratamentos foram necessários para que seja possível trabalhar. O primeiro tratamento é deixar todas as imagens na escala do cinza, assim temos os valores dos pixels normalizado. O segundo tratamento aplicado teve foco em padronizar os tamanhos das imagens para de menor tamanho, que no nossa caso foi 336 x 202, e assim obtendo as imagens finais:

interpolacao.m cubic_spline.m

```
# le as imagens e armazena em suas respectiva variaveis em formato martical
noah22 = imread('Noah\noah22.png');
noah30 = imread('Noah\noah30.jpg');
noah39 = imread('Noah\noah39.png');
noah43 = imread('Noah\noah43.jpg');

size(noah22); size(noah30); size(noah39); size(noah43)

# padroniza o tamnaho das matrizes
noah22 = double(noah22(1:336,1:202,:));
noah30 = double(noah30(1:336,1:202,:));
noah39 = double(noah39(1:336,1:202,:));
noah43 = double(noah43(1:336,1:202,:));

size(noah22); size(noah30); size(noah39); size(noah43)

```

Figure 5.: código para tratamento das imagens

Obtendo assim as imagens finais que seram utilizadas para interpolação.

Figure 6.: fotos tratadas aos 22, 30, 39 e 43 anos

Para que seja possível aplicar o algoritmo vamos considerar que cada imagem é um ponto da nossa tabela de dados, ou seja, $(n+1) = 4$ pontos $(x_0, y_0), ..., (x_3, y_3)$ com $22 = x_0 < ... < x_3 = 43$ e cada elemento da matriz, que representa o valor do pixel, será a variável y_i.

$$x_0 = 22, \ x_1 = 30, \ x_2 = 39, \ x_3 = 43$$

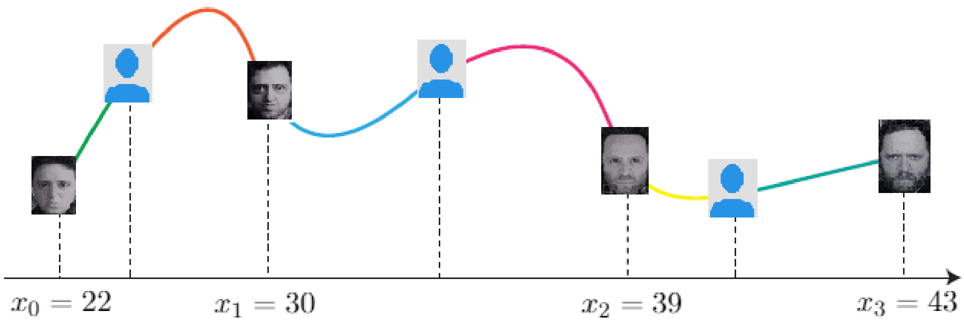

Figure 7.: spline aplicada

Toda simulação foi feita com auxílio do código abaixo variando o valor da variável *idade*.

```
# spline
idade = 33;

for i = 1:size(noah22,1)
  for j = 1:size(noah22,2)
    for c = 1:size(noah22,3)
      xi = [22 30 39 43];
      yi = [noah22(i,j,c), noah30(i,j,c), noah39(i,j,c), noah43(i,j,c)];
      s = cubic_spline(xi,yi,idade);
      spline(i,j,c) = s;
    end
  end
  printf("%d / %d\n", i, size(noah22,1))
end

noah22 = uint8(noah22);
noah30 = uint8(noah30);
noah39 = uint8(noah39);
noah43 = uint8(noah43);

spline = uint8(spline);
```

Figure 8.: código spline

O código faz uso da função "cubic_spline" apresentada em notas de aulas do professor Afonso Paiva [2].

```
function s = cubic_spline(xi,yi,x)
  [n,m] = size(xi);
  if (n==1) xi = xi'; yi = yi'; n = m; end

  h = xi(2:end)-xi(1:end-1);
  u = 2*(h(1:end-1)+h(2:end));
  A = spdiags([[h(2:end-1);0] u [0;h(2:end-1)]],-1:1,n-2,n-2);
  W = 6*(yi(2:end)-yi(1:end-1))./h;
  v = W(2:end)-W(1:end-1);
  z = A\v; z = [0;z;0];

  a = (z(2:end)-z(1:end-1))./(6*h);
  b = z(1:end-1)/2;
  c =-(h/6).*(z(2:end)+2*z(1:end-1))+(yi(2:end)-yi(1:end-1))./h;
  d = yi(1:end-1);

  pp = mkpp (xi,[a b c d]);
  s = ppval(pp ,x);

endfunction
```

Figure 9.: função spline cúbica

A primeira simulação estamos interessados em saber como era o formado do rosto do Noah quando tinha 24 e 26 anos.

Figure 10.: estimativas para 24 e 26 anos

As imagens no centro da figura foram interpoladas através a partir dos demais pontos.

Também fizemos a simulação para alguns valores entre 30 e 39 anos.

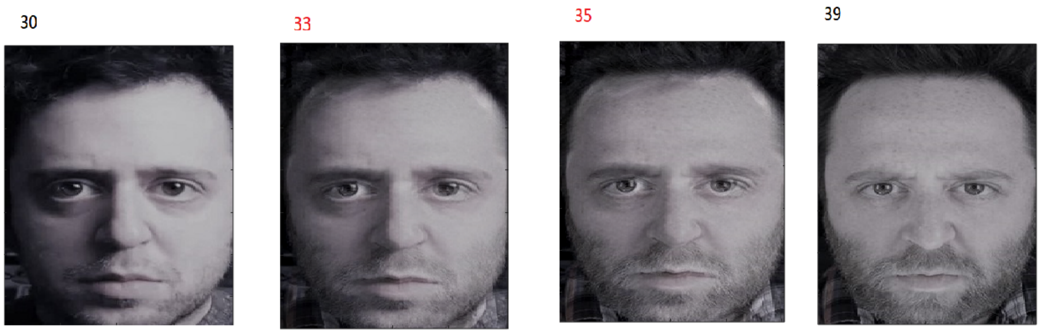

Figure 11.: estimativas para 33 e 35 anos

5. Conclusão

Normalmente interpolação através de spline cúbica são muito utilizadas em séries onde se tem alguns valores e pretende conhecer a cara da curva e consequentemente estimar valores faltantes. Neste trabalho a idéia era fazar algo diferente e assim mostrar o poder e flexibilidade que este modelo oferece. Para o domínio dos dados que foi utilizado, os resultados foram bastante satisfatórios, tivemos algumas dirtorções devido a posição que as fotos foram tiradas não serem exatamente as mesmas, porém foi possível atenuar o problema através da sobreposição das imagens, mas não elminar totalmente o efeito.

References

[1] Kalina, N. (2019 (accessed November 29, 2019)). *NOAH KALINA - HomePage.* http://noahkalina.com/.

[2] Paiva, A. (2019). Notas de aula: Interpolação.