14 / 03 / 2024

D S T Q Q S S

Lista 1

$$\begin{array}{r|l} 5 & 7 \\ \hline \boxed{5} & 0 \end{array}$$

1.)

$x_{i+1} = 5 x_i \bmod 7 \longrightarrow x_{n+1} = (a x_n) \bmod m$

Para $x_0 = 4$:

$x_1 = 5 \cdot x_0 \bmod 7$
$x_1 = 5 \cdot 4 \bmod 7$
$x_1 = 20 \bmod 7$
$x_1 = 6$

$x_2 = 5 \cdot x_1 \bmod 7$
$x_2 = 5 \cdot 6 \bmod 7$
$x_2 = 30 \bmod 7$
$x_2 = 2$

$x_3 = 5 x_2 \bmod 7$
$x_3 = 5 \cdot 2 \bmod 7$
$x_3 = 10 \bmod 7$
$x_3 = 3$

$x_4 = 5 \cdot x_3 \bmod 7$
$x_4 = 5 \cdot 3 \cdot \bmod 7$
$x_4 = 15 \cdot \bmod 7$
$x_4 = 1$

$x_5 = 5 \cdot x_4 \bmod 7$
$x_5 = 5 \cdot 1 \cdot \bmod 7$
$x_5 = 5 \bmod 7$
$x_5 = 5$

$x_6 = 5 \cdot x_5 \cdot \bmod 7$
$x_6 = 5 \cdot 5 \cdot \bmod 7$
$x_6 = 25 \bmod 7$
$x_6 = 4$

Período = 6. Há a possibilidade de geração de período completo. Não é período máximo pois $m \neq 2^k$. Portanto, o período máximo é $\rho = m - 1 = 7 - 1 = 6$.

Para $x_0 = 7$:

$x_1 = 5 \cdot x_0 \bmod 7$
$x_1 = 5 \cdot 7 \bmod 7$
$x_1 = 35 \bmod 7$
$x_1 = 0$

$x_2 = 5 \cdot x_1 \bmod 7$
$x_2 = 5 \cdot 0 \bmod 7$
$x_2 = 0 \bmod 7$
$x_3 = 0$

O fato do valor gerado a partir do valor 7 ser igual a zero, fez com que toda a sequência se tornasse zero.

Comprovação do período completo

$a \to 5$ é uma raiz primitiva de $m \to 7$.

$a^n \bmod m \neq 1$ p/ $n = 1, 2, \dots,$ $m-2$

$5^1 \bmod 7 = 5$
$5^2 \bmod 7 = 4$
$5^3 \bmod 7 = 6$
$5^4 \bmod 7 = 2$
$5^5 \bmod 7 = 3$
✓

$5^6 \bmod 7 = 1$
$5^7 \bmod 7 = 5$

2-)

Distribuição de Poisson

C: variável aleatória para o número de chamadas por hora

$P[C=c] = \frac{\lambda^c e^{-\lambda}}{c!}$, $c = 0, 1, \ldots$ e $\lambda > 0$: $E[C] = \lambda = var[C]$

$\lambda = \frac{60 \text{ chamadas}}{10 \text{ horas}} \therefore \lambda = 6 \frac{\text{chamadas}}{\text{hora}}$

a-) $P[C=0] = \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} \cong 0,00248$

b-) $P[C<8] = P[C=0] + P[C=1] + P[C=2] + P[C=3] + P[C=4] + P[C=5] + P[C=6] + P[C=7]$

$P[C<8] = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} + \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} + \frac{6^5 e^{-6}}{5!} + \frac{6^6 \cdot e^{-6}}{6!} + \frac{6^7 \cdot e^{-6}}{7!}$

$P[C<8] \cong 0,74398$

c-) $E[C] = 6$ chamadas/hora

d-) $VAR[C] = E[C] = 6$

e-) $STD[C] = \sqrt{6} \cong 2,45$

___/___/___
D S T Q Q S S

3-)

Rejeição ou aceitação: duas possibilidades (erro ou acerto), portanto, distribuição de Bernoulli. Como deseja-se analisar diversas execuções, tem-se:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad k = 0, 1, \dots n \qquad n = 8 \quad p = 0{,}15$$

a) $p_{TOTAL} = p_0 + p_1 + p_2$

$$p_{TOTAL} = \binom{8}{0} 0{,}15^0 \cdot (1-0{,}15)^{8-0} + \binom{8}{1} \cdot 0{,}15^1 \cdot (1-0{,}15)^{8-1} + \binom{8}{2} \cdot 0{,}15^2 \cdot (1-0{,}15)^{8-2}$$

$$p_{TOTAL} = 0{,}85^8 + \frac{8!}{1!\,7!} \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85^7 + \frac{8!}{2!\,6!} \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^6$$

$$p_{TOTAL} = 0{,}27249 + 8 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85^7 + 4 \cdot 7 \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}85^6$$

$$p_{TOTAL} = 0{,}27249 + 0{,}38469 + 0{,}23760$$

$$p_{TOTAL} = 0{,}89478$$

b) $p_{TOTAL} = p_6 + p_7 + p_8$

$$p_{TOTAL} = \binom{8}{6} \cdot 0{,}15^6 \cdot (1-0{,}15)^{8-6} + \binom{8}{7} \cdot 0{,}15^7 \cdot (1-0{,}15)^{8-7} + \binom{8}{8} 0{,}15^8 \cdot (1-0{,}15)^{8-8}$$

$$p_{TOTAL} = \frac{8!}{6!\,2!} \cdot 0{,}15^6 \cdot 0{,}85^2 + \frac{8!}{7!\,1!} \cdot 0{,}15^7 \cdot 0{,}85^1 + 0{,}15^8 \cdot 0{,}85^0$$

$$p_{TOTAL} = 4 \cdot 7 \cdot 0{,}15^6 \cdot 0{,}85^2 + 8 \cdot 0{,}15^7 \cdot 0{,}85 + 0{,}15^8$$

$$p_{TOTAL} = 2{,}42307 \cdot 10^{-4}$$

D S T Q Q S S

4-)

Distribuição de Poisson: $P[X=x] = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

$\lambda = \frac{6 \text{ falhas}}{2 \text{ semanas}} \therefore \lambda = 3 \frac{\text{falhas}}{\text{semana}}$

$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - (P[X=0] + P[X=1])$

$P[X \geq 2] = 1 - \left(\frac{3^0 \cdot e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 \cdot e^{-3}}{1!} \right)$

$P[X \geq 2] = 1 - (0,19915) \cong 0,80085$

5-)

Exponencial: $P[X > x] = e^{-\lambda x}$, $x > 0$

$P[X \leq x] = 1 - P[X > x]$

$P[X \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$ $\quad \lambda = \frac{1}{E[x]} \therefore \lambda = \frac{1}{28}$

$P[X \leq 4] = 1 - e^{-\frac{1}{28} \cdot 4}$, $x > 0$

$P[X \leq 4] = 0,13312$

6-) Retirar com reposição significa que a probabilidade de ser preta ou branca se mantém inalterada a cada execução:

30 bolas brancas
20 bolas pretas $\Big\}$ total de bolas: 50

p → probabilidade de ser preta: $p = \frac{20}{50} \therefore p = 0,4$

Distr. geométrica: $f(x) = p \cdot (1-p)^{x-1}$

$p_{TOTAL} = f(x=6) \therefore f(x=6) = 0,4 \cdot (1-0,4)^{6-1} \therefore f(x=6) \cong 0,031104$

___/___/___
D S T Q Q S S

7-)

Método da inversa:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^2 - 1}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Fazendo $f(x) = U$:

$$U = \frac{e^x}{e^2 - 1}$$

$$(e^2 - 1) \cdot U = e^x$$

$$e^x = (e^2 - 1) \cdot U$$

$$\ln e^x = \ln[(e^2 - 1) \cdot U]$$

$$x = \ln[(e^2 - 1) \cdot U]$$

$$x = \ln(e^2 - 1) + \ln U$$

8-)

Método da aceitação e rejeição:

$$f(x) = 1{,}5x^2, \quad -1 < x < 1$$

1 Gerar uma VA uniforme nos mesmos limites de $f(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{b-a}, \quad -1 < x < 1$$

$$g(x) = \frac{1}{1-(-1)}, \quad -1 < x < 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1$$

2 Calcular c:

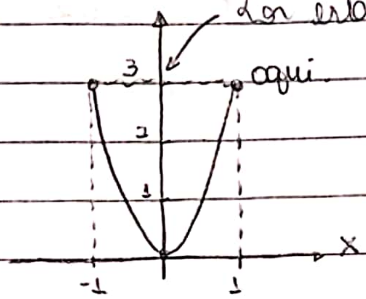
$$c = \text{máx} \frac{f(x)}{g(x)} \therefore c = \text{máx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \therefore c = \text{máx}\left(\frac{1{,}5x^2}{1/2}\right) \therefore c = \text{máx } 3x^2, \; -1 < x < 1$$

$\underline{c = 3}$ (Basta substituir o maior valor de x na função, uma vez que

___/___/___
D S T Q Q S S

a derivada = 0 retorna o ponto de mínimo, pois a parábola tem concavidade voltada para cima.

Por estar limitada, a função tem máximo aqui.



③ Calcular $\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{1,5\,x^2}{3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1,5\,x^2}{1,5} = x^2$

④ Comparar $\frac{f(x)}{cg(x)} = x^2$ com $U_2(0,1)$.