14 / 03 / 2024

D S T Q Q S S

Lista 1

$$5 \,\underline{|7}$$
$$\boxed{5} \quad 0$$

1.)

$x_{i+1} = 5x_i \bmod 7 \longrightarrow x_{n+1} = (a\,x_n) \bmod m$

Para $x_0 = 4$:

$x_1 = 5 \cdot x_0 \bmod 7$
$x_1 = 5 \cdot 4 \bmod 7$
$x_1 = 20 \bmod 7$
$x_1 = 6$

$x_2 = 5 \cdot x_1 \bmod 7$
$x_2 = 5 \cdot 6 \bmod 7$
$x_2 = 30 \bmod 7$
$x_2 = 2$

$x_3 = 5\,x_2 \bmod 7$
$x_3 = 5 \cdot 2 \bmod 7$
$x_3 = 10 \bmod 7$
$x_3 = 3$

$x_4 = 5 \cdot x_3 \bmod 7$
$x_4 = 5 \cdot 3 \cdot \bmod 7$
$x_4 = 15 \cdot \bmod 7$
$x_4 = 1$

$x_5 = 5 \cdot x_4 \cdot \bmod 7$
$x_5 = 5 \cdot 1 \cdot \bmod 7$
$x_5 = 5 \bmod 7$
$x_5 = 5$

$x_6 = 5 \cdot x_5 \cdot \bmod 7$
$x_6 = 5 \cdot 5 \bmod 7$
$x_6 = 25 \bmod 7$
$x_6 = 4$

Período = 6. Há a possibilidade de geração de período completo. Não é período máximo pois $m \neq 2^k$. Portanto, o período máximo é $\rho = m - 1 = 7 - 1 = 6$.

Para $x_0 = 7$:

$x_1 = 5 \cdot x_0 \bmod 7$
$x_1 = 5 \cdot 7 \bmod 7$
$x_1 = 35 \bmod 7$
$x_1 = 0$

$x_2 = 5 \cdot x_1 \bmod 7$
$x_2 = 5 \cdot 0 \bmod 7$
$x_2 = 0 \bmod 7$
$x_3 = 0$

O fato do valor gerado a partir do valor 7 ser igual a zero, fez com que toda a sequência se tornasse zero.

Comprovação do período completo:

$a \rightarrow 5$ é uma raiz primitiva de $m \rightarrow 7$.

$a^n \bmod m \neq 1$ p/ $n = 1, 2, \ldots, m-2$

$5^1 \bmod 7 = 5$
$5^2 \bmod 7 = 4$
$5^3 \bmod 7 = 6$
$5^4 \bmod 7 = 2$
$5^5 \bmod 7 = 3$
$5^6 \bmod 7 = 1$
$5^7 \bmod 7 = 5$

✓

Digitalizado com CamScanner

2-)

Distribuição de Poisson

C: variável aleatória para o número de chamada por hora

$P[C=c] = \frac{\lambda^c e^{-\lambda}}{c!}$, $c = 0, 1, \ldots$ e $\lambda > 0$: $E[C] = \lambda = var[C]$

$\lambda = \frac{60 \text{ chamadas}}{10 \text{ horas}} \therefore \lambda = 6 \frac{\text{chamadas}}{\text{hora}}$

a-) $P[C=0] = \frac{6^0 \cdot e^{-6}}{0!} \cong \underline{0,00248}$

b-) $P[C<8] = P[C=0] + P[C=1] + P[C=2] + P[C=3] + P[C=4] + P[C=5] + P[C=6] + P[C=7]$

$P[C<8] = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 \cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 \cdot e^{-6}}{2!} + \frac{6^3 \cdot e^{-6}}{3!} + \frac{6^4 \cdot e^{-6}}{4!} + \frac{6^5 e^{-6}}{5!} + \frac{6^6 \cdot e^{-6}}{6!} + \frac{6^7 \cdot e^{-6}}{7!}$

$\underline{P[C<8] \cong 0,74398}$

c-) $E[C] = 6$ chamadas/hora

d-) $VAR[C] = E[C] = 6$

e-) $STD[C] = \sqrt{6} \cong 2,45$

D S T Q Q S S

3-)

Rejeição ou aceitação: duas possibilidades (erro ou acerto), portanto, distribuição de Bernoulli. Como deseja-se avaliar diversas execuções, tem-se:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots n \qquad n = 8 \quad p = 0,15$$

a-) $p_{TOTAL} = p_0 + p_1 + p_2$

$$p_{TOTAL} = \binom{8}{0} 0,15^0 \cdot (1-0,15)^{8-0} + \binom{8}{1} \cdot 0,15^1 \cdot (1-0,15)^{8-1} + \binom{8}{2} \cdot 0,15^2 \cdot (1-0,15)^{8-2}$$

$$p_{TOTAL} = 0,85^8 + \frac{8!}{1!\,7!} \cdot 0,15 \cdot 0,85^7 + \frac{8!}{2!\,6!} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^6$$

$$p_{TOTAL} = 0,27249 + 8 \cdot 0,15 \cdot 0,85^7 + 4 \cdot 7 \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^6$$

$$p_{TOTAL} = 0,27249 + 0,38469 + 0,23760$$

$$\boxed{p_{TOTAL} = 0,89478}$$

b-) $p_{TOTAL} = p_6 + p_7 + p_8$

$$p_{TOTAL} = \binom{8}{6} \cdot 0,15^6 \cdot (1-0,15)^{8-6} + \binom{8}{7} \cdot 0,15^7 \cdot (1-0,15)^{8-7} + \binom{8}{8} 0,15^8 \cdot (1-0,15)^{8-8}$$

$$p_{TOTAL} = \frac{8!}{6!\,2!} \cdot 0,15^6 \cdot 0,85^2 + \frac{8!}{7!\,1!} \cdot 0,15^7 \cdot 0,85^1 + 0,15^8 \cdot 0,85^0$$

$$p_{TOTAL} = 4 \cdot 7 \cdot 0,15^6 \cdot 0,85^2 + 8 \cdot 0,15^7 \cdot 0,85 + 0,15^8$$

$$\boxed{p_{TOTAL} = 2,42307 \cdot 10^{-4}}$$

Digitalizado com CamScanner

___/___/___ D S T Q Q S S

4-)

Distribuição de Poisson: $P[X=x] = \dfrac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

$\lambda = \dfrac{6}{2} \dfrac{\text{folhas}}{\text{semana}} \therefore \lambda = 3 \dfrac{\text{folhas}}{\text{semana}}$

$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - (P[X=0] + P[X=1])$

$P[X \geq 2] = 1 - \left(\dfrac{3^{0} \cdot e^{-3}}{0!} + \dfrac{3^{1} \cdot e^{-3}}{1!} \right)$

$P[X \geq 2] = 1 - (0,19915) \cong \underline{0,80085}$

5-)

Exponencial: $P[X > x] = e^{-\lambda x}, \quad x > 0$

$P[X \leq x] = 1 - P[X > x]$

$P[X \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ $\qquad \lambda = \dfrac{1}{E[x]} \therefore \lambda = \dfrac{1}{28}$

$P[X \leq 4] = 1 - e^{-\frac{1}{28} \cdot 4}, \quad x > 0$

$\underline{P[X \leq 4] = 0,13312}$

6-) Retira com reposição significa que a probabilidade de ser preta ou branca se mantém inalterada a cada execução:

30 bolas brancas
20 bolas pretas
total de bolas: 50

p → probabilidade de ser preta: $p = \dfrac{20}{50} \therefore \underline{p = 0,4}$

Distr. geométrica: $f(x) = p \cdot (1-p)^{x-1}$

$p_{\text{total}} = f(x=6) \therefore f(x=6) = 0,4 \cdot (1-0,4)^{6-1} \therefore \underline{f(x=6) \cong 0,031104}$

Digitalizado com CamScanner

7-)

Método da inversa:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^2 - 1}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Fazendo $F(x) = U$:

$$U = \frac{e^x - 1}{e^2 - 1}$$

$$(e^2 - 1) \cdot U = e^x - 1$$

$$e^x = (e^2 - 1) \cdot U + 1$$

$$\ln e^x = \ln[(e^2 - 1) \cdot U + 1]$$

$$\underline{x = \ln[(e^2 - 1) \cdot U + 1]}$$

Cálculo de $F(x)$:

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^x}{e^2 - 1} dx$$

$$F(x) = \frac{1}{e^2 - 1} \int_0^x e^x dx$$

$$F(x) = \frac{1}{e^2 - 1} \cdot e^x \Big|_0^x$$

$$F(x) = \frac{e^x - 1}{e^2 - 1}$$

8-)

Método da aceitação e rejeição:

$$f(x) = 1,5x^2, \quad -1 < x < 1$$

① Gerar uma VA uniforme nos mesmos limites de $f(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{b - a}, \quad -1 < x < 1$$

$$g(x) = \frac{1}{1 - (-1)}, \quad -1 < x < 1$$

$$g(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1$$

② Calcular c:

$$c = \text{máx} \frac{f(x)}{g(x)} \therefore c = \text{máx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \therefore c = \text{máx}\left(\frac{1,5x^2}{1/2}\right) \therefore c = \text{máx } 3x^2 ; -1 < x < 1$$

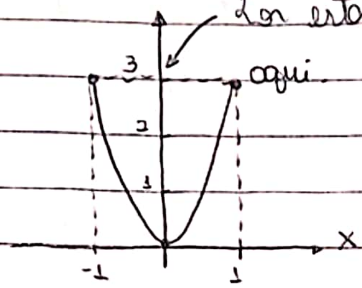
$\underline{c = 3}$ (Basta substituir o maior valor de x na função, uma vez que

Digitalizado com CamScanner

___/___/___
D S T Q Q S S

a derivada = 0 retorna o ponto de mínimo, pois a parábola tem concavidade voltada para cima.

Por estar limitado, a função tem máximo aqui.



③ Calcular $\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{1.5x^2}{3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1,5x^2}{1,5} = x^2$

④ Comparar $\frac{f(x)}{cg(x)} = x^2$ com $U_2(0,1)$.