Teorema de Frisch-Waugh-Lovell

Intuição: Queremos verificar o efeito puro de x em y, ou seja, queremos “limpar” o efeito de outras variáveis tanto sobre x quanto em y.

Demonstração (livro)

$x_{ji} = \hat{x}_{ji} + \hat{r}_{ji}$

$\hat{x}_{ji} = \hat{\gamma}_1 x_{1i} + ... + \hat{\gamma}_{j-1} x_{j-1i} + \hat{\gamma}_{j+1} x_{j+1i} + ... + \hat{\gamma}_k x_{ki}$

Pelas CPO, sabemos que:

$$\sum x_{ji}\hat{u}_i = 0$$

Substituindo x_{ji} por $\hat{x}_{ji} + \hat{r}_{ji}$

$$\sum(\hat{x}_{ji} + \hat{r}_{ji})\hat{u}_i = 0$$

Livro: “Como x_j é uma combinação linear de x_1 a x_k (exceto x_j), temos que $\sum \hat{x}_{ji}\hat{u}_i = 0$ (segunda propriedade algébrica do MQO para a eq. auxiliar). Assim, sabemos que:”

$$\sum \hat{r}_{ji}\hat{u}_i = 0$$

Dúvida: Não entendi que propriedade é essa nem como demonstrar.

Continuando... Substituir agora o $\hat{u}_i$ pelo modelo estimado:

$$\sum \hat{r}_{ji}(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - ... - \hat{\beta}_k x_k) = 0$$

Ao fazer isso, ficamos com:

$$\sum \hat{r}_{ji} y_i - \hat{\beta}_j \sum \hat{r}_{ji} x_{ji} = 0$$

Dúvida: não entendi porque ao distribuir $\hat{r}_{ji}$ nos demais termos do modelo isso resultou na expressão acima. Por exemplo (vamos distribuir em todos os termos abaixo):

$$\sum \hat{r}_{ji} y_i - \hat{\beta}_0 \sum \hat{r}_{ji} - \hat{\beta}_1 \sum \hat{r}_{ji} x_{1i} - ... - \hat{\beta}_j \sum \hat{r}_{ji} x_{ji} = 0$$

No final, ficamos com:

$$\sum \hat{r}_{ji} y_i - \hat{\beta}_j \sum \hat{r}_{ji} x_{ji} = 0$$

Mas o que aconteceu com $\hat{\beta}_0 \sum \hat{r}_{ji}$, $\hat{\beta}_1 \sum \hat{r}_{ji} x_{1i}$, etc.? Entendo que zeraram, mas não entendi o porquê.

Continuando...

$$\sum \hat{r}_{ji} y_i - \hat{\beta}_j \sum \hat{r}_{ji} x_{ji} = 0$$

Livro: "Substituindo $x_{ji} = \hat{x}_{ji} + \hat{r}_{ji}$:"

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum \hat{r}_{ji} y_i}{\sum \hat{r}_{ji}^2}$$

Dúvida: Não entendi porque essa substituição leva ao resultado final. Se substituirmos $x_{ji} = \hat{x}_{ji} + \hat{r}_{ji}$, temos:

$$\sum \hat{r}_{ji} y_i - \hat{\beta}_j \sum \hat{r}_{ji} (\hat{x}_{ji} + \hat{r}_{ji}) = 0$$

$$\sum \hat{r}_{ji} y_i - \hat{\beta}_j \sum \hat{r}_{ji} \hat{x}_{ji} + \hat{\beta}_j \sum \hat{r}_{ji}^2 = 0$$

O termo $\hat{\beta}_j \sum \hat{r}_{ji} \hat{x}_{ji}$ deve ser 0? Se sim, por quê?