Lista 00 - Aprendizado de Máquinas

07 junho, 2022

Por favor, entregue esta lista utilizando o github classroom. Clique no link abaixo para criar o repositório.
https://classroom.github.com/a/4ha2gyfS

Exercício 01

Resolva o seguinte sistema linear $Ax = b$ com o comando `solve` (use `?` para obter ajudar de como usar o comando):

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -1 & -5 & 0 \\ -1 & 7 & 2 & -1 \\ -5 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

O resultado correto deve ser:

```
## [1] 0.1873874 0.4738739 0.1549550 1.4396396
```

Exercício 02

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica (i.e., $A^t = A$) é definida positiva se, para todos os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ diferentes do vetor zero, verifica-se:

$$x^t A x > 0$$

Um critério utilizado para verificar se uma matriz simétrica é definida positiva é chamado de "critério de Sylvester", que diz o seguinte:

Critério de Silvester: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se e somente se A possui determinante positivo e todas as submatrizes de A listadas abaixo possuem determinante positivo:

- a submatriz 1×1 formada pela primeira linha e primeira coluna;
- a submatriz 2×2 formada pelas primeiras duas linhas e colunas;
- $\vdots$
- a submatriz $(n-1) \times (n-1)$ formada pelas $(n-1)$ primeiras linhas e colunas.

Escreva uma função no `R` que recebe como argumento uma matriz A e retorna `TRUE` ou `FALSE` dependendo se ela é definida positiva ou não (use slicing para montar a submatriz e a função `det` para calcular o determinante). Teste sua função na matriz A do exercício anterior, que é positiva definida.

Exercício 03

Usando `ggplot2` faça gráficos das funções seno e cosseno para ângulos variando no intervalo de $[-2\pi, 2\pi]$. Mostre as duas funções na mesma figura.

Exercício 04

Sabemos que as soluções de sistemas lineares obtidas no computador, como no Exercício 01, são aproximadas, já que números reais são representados de forma aproximada no computador. Quando a matriz de um sistema linear é *mal condicionada*, as soluções dos sistemas lineares obtidas pelo computador podem ter os erros muito ampliados. Podemos mensurar o mal condicionamento de uma matriz inversível A usando o *número de condicionamento*, que é definido por:

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|,$$

em que $\|\cdot\|$ é uma norma matricial e A^{-1} a inversa de A. Quanto maior o valor de $\kappa(A)$, mais mal condicionada é a matriz. Ou seja, mais erros numéricos são esperados quando recebemos a solução do sistema linear calculado pelo computador. Podemos calcular o número de condicionamento no R usando a função `kappa` (use `?` para ver mais detalhes sobre esta função).

É possível modificar uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para torná-la melhor condicionada. Uma forma de fazer isso é aumentando os valores dos elementos de sua diagonal. Esse processo é usado algumas vezes em aprendizado de máquinas, como veremos mais para frente (por exemplo, aparece no processo de regularização da Regressão Ridge). Neste exercício, queremos fazer um gráfico do número de condicionamento de A a medida que aumentamos os elementos de sua diagonal.

Para isso, use uma matriz simétrica A gerada aleatoriamente pelo seguinte processo:

```
set.seed(1)
X = matrix(runif(100,-1,1),nrow=10)
A = t(X) %*% X
```

Ou seja, primeiro geramos uma matriz $X \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ com valores aleatórios entre $[-1, 1]$. Em seguida criamos $A := X^t X$, que será simétrica. A função `set.seed` inicia a semente do gerador de números aleatórios, desta forma a matriz aleatória resultante será sempre a mesma.

dicas: Use a função `diag` para gerar uma matriz identidade (por exemplo, teste o que `diag(3)` faz), depois disso, calcule o número de condicionamento de A com elementos da diagonal acrecidos de λ:

$$A' = A + \lambda I,$$

em que $\lambda \geq 0$, e $I \in \mathbb{R}^{d\times d}$ é a matriz identidade.