Curso - LaTeX

Luiz

31 de agosto de 2022

1 Sites Uteis

Carlos Campani - UFPEL (Tutorial Beamer)
LaTeXin 24 hours CTAN

2 Aula 1

2.1 Escrevendo Equações

2.2 Escrevendo uma Integral Definida

Com o comando begin:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = E(x) = \bar{x} \tag{1}$$

Usando o duplo $:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = E(x) = \bar{x}$$

Equação alinhada ao texto, usamos o $ simples: $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = E(x) = \bar{x}$

2.3 Escrevendo um Somatório

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{i!} \tag{2}$$

2.4 Escrevendo um sistema de equações

$$\begin{cases} a_{11}x + a_n y = b_1 \\ a_{21}x + a_n y = b_2 \end{cases} \tag{3}$$

2.5 Escrevendo Matrizes e Determinantes

2.6 Matrizes com Parentêses

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

2.7 Matrizes com Colchetes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

2.8 Determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

2.9 Escrevendo pontos (reticências) em equações

- Pontos horizontais

$$\cdots \tag{7}$$

- Pontos Verticais

$$\vdots \tag{8}$$

- Pontos Diagonais

$$\ddots \tag{9}$$

2.10 Letras Gregas

- Alfa Minúsculo - α
- Beta Minúsculo - β
- Gama Minúsculo - γ
- Gama Maiúsculo - Γ

3 Aula 2

3.1 Exercício

No LaTeXquando escrevemos funções, devemos pensar em concatenação de símbolos. Quando escrevemos equações e símbolos mais robustos, criamos um ambiente e dentro desse ambiente criamos um outro ambiente, como por exemplo no caso de matrizes: Criamos o ambiente equation e dentro do equation criamos o ambiente bmatrix para matriz com colchete, pmatrix para matriz com parênteses e vmatrix para determinantes.

- $cos(t), sin(t), e^x, f(x), \alpha(t)$
- Derivada de uma função qualquer:

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=0} = f^{'}(0)$$

- Regra da Produto para Derivadas

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx} \tag{10}$$

- Limite de uma função qualquer

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{11}$$

Nesse caso, no lugar do comando ”to”podemos usar o comando ”rightarrow”

- Limite de uma função com fração

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2 \tag{12}$$

- Alinhando a equação

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+5 &= (1+2)+(3+4) && (13)\\ &= 3+7+5 && (14)\\ &= 10+5 && (15)\\ &= 15 && (16) \end{aligned}$$

- Escrevendo um limite alinhado

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} && (17)\\ &= \lim_{x \to 1} x+1 && (18)\\ &= 2 && (19) \end{aligned}$$

- Escrevendo uma integral indefinida

$$\int e^x \; dx = e^x + k, k \in \mathbb{R} \tag{20}$$

- Escrevendo uma integral definida com a barra

$$\int_0^1 e^x \; dx = e^x \Big|_0^1 \tag{21}$$

- Escrevendo um sistema de equações com o align

$$\begin{cases} 2x+y & = 1 \\ x+2y & = 0 \end{cases} \tag{22}$$

- Escrevendo a Matriz dos coeficientes do sistema acima

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

- Escrevendo uma matriz genérica qualquer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ e^x & f(x) & t \end{pmatrix} \tag{24}$$

- Escrevendo uma outra matriz genérica

$$\begin{bmatrix} t^3 & x_{12} & y^{34} \\ e^x & |u \times v| & t \cdot x \end{bmatrix} \tag{25}$$

- Representando o produto entre matrizes que origina o sistema já feito acima:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

4 Teoremas e Demonstrações

4.1 1° Teorema de Bem-Estar

O 1° Teorema do Bem-estar postula que para toda economia, a alocação de Equilíbrio é pareto eficiente. Isto é o conjunto das alocações de equilíbrio de Walras esta contido no conjunto de alocações pareto eficientes. Em uma linguagem matemática, enunciamos o teorema assim:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) \subset Par(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{27}$$

4.2 Demonstração

Considere f como uma alocação Walrasiana, ou seja, $f \in W(\boldsymbol{\varepsilon})$ e suponha, por contradição, que a alocação f não seja pareto eficiente, isso é, $f \notin Par(\boldsymbol{\varepsilon})$. Se a alocação não é pareto eficiente ela pode ser melhorada. Então existe uma outra alocação factível g dentro dessa economia, com $g \neq f$. Como não estamos fazendo a distinção entre eficiência forte e fraca, podemos escrever que:

1. $g(a) \succ_a f(a)$
2. $$\sum_{a \in A}^{n} g(a) = \sum_{a \in A}^{n} e(a) \tag{28}$$

Na condição 1 (1) temos que para todo $a \in A$, isto é, todos os agentes de A tem uma cesta melhor. Já a condição 2 (28) temos a condição de equilíbrio geral, pois g é factível.

Se f é uma alocação de Walras, então temps um vetor de preço de equilibrio, denotado por $\boldsymbol{\rho}$, com coordenadas estritamente positivas, isso é $\boldsymbol{\rho} \gg 0$. Isso é garantido pelo Teorema da Existência do Equilíbrio de Walras. O vetor preço de equilíbrio esta associado a alocação $f \in W(\boldsymbol{\varepsilon})$. Como $\boldsymbol{\rho}$ é o vetor de preço de equilíbrio, então como a cesta g já é melhor que f, ela tem que ser mais cara, aos preços de equilíbrio para todo agente (29)

$$\boldsymbol{\rho} \cdot g(a) > \boldsymbol{\rho} \cdot f(a), \forall a \in A \tag{29}$$

Somando os agentes temos (30):

$$\sum_{a \in A}^{n} \boldsymbol{\rho} \cdot g(a) > \sum_{a \in A}^{n} \boldsymbol{\rho} \cdot f(a) \tag{30}$$

Isso é equivalente a multiplicar o vetor de preços $\boldsymbol{\rho}$ pela demanda total (31)

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \sum_{a \in A}^{n} g(a) > \boldsymbol{\rho} \cdot \sum_{a \in A}^{n} f(a) \tag{31}$$

Passando tudo na equação (31) para a esquerda e pondo $\boldsymbol{\rho}$ em evidência temos (32):

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \left[\sum_{a \in A}^{n} g(a) - \sum_{a \in A}^{n} f(a) \right] > 0 \tag{32}$$

Como tanto f quanto g são factíveis temos que pela condição de equilibrio:

$$\sum_{a \in A}^{n} g(a) = \sum_{a \in A}^{n} e(a) \tag{33}$$

$$\sum_{a \in A}^{n} f(a) = \sum_{a \in A}^{n} e(a) \tag{34}$$

Dessa forma por fim:

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \left[\sum_{a \in A}^{n} e(a) - \sum_{a \in A}^{n} e(a) \right] > 0 \tag{35}$$

Porém:

$$\sum_{a \in A}^{n} e(a) - \sum_{a \in A}^{n} e(a) = 0 \tag{36}$$

temos uma contradição expressada por:

$$\boldsymbol{\rho} \cdot 0 > 0 \tag{37}$$

Logo, o teorema encontra-se demonstrado!

4.3 Conservação da Massa usando o Teorema do Transporte de Reynolds

Nessa seção iremos demonstrar a formulação diferencial para a lei de conservação da massa por meio do Teorema do Transporte de Reynolds, esse teorema nos diz o seguinte:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot b) d\forall + \int_{SC} \rho b(\vec{V} \cdot \widehat{n}) dS \tag{38}$$

A lei da conservação da massa nos diz que:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = 0 \tag{39}$$

Fazendo $B = m$ e $b = 1$ obtemos o seguinte no Teorema do Transporte de Reynolds:

$$\frac{dm_{sist}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) d\forall + \int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \widehat{n}) dS \tag{40}$$

Pelo Teorema da Divergência podemos transformar a integral (41) que é uma integral de superfície em uma integral de volume.

$$\int_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \widehat{n}) dS \tag{41}$$

O Teorema da Divergência postula que seja um campo vetorial $\vec{f}$:

$$\int_{\forall} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} d\forall = \int_{S} \vec{f} \cdot \widehat{n} dS \tag{42}$$

Comparando o Teorema da Divergência postulado em (42) com o que temos na integral (41), vemos que $\vec{f} = \rho\vec{V}$. Logo

$$\int_{SC} (\rho\vec{V}) \cdot \widehat{n} dS = \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) d\forall \tag{43}$$

Assim podemos substituir a integral no próprio Teorema do Transporte de Reynolds (40 e somar as integrais, dadas que elas estão na mesma região ou volume de integração, obtendo por fim que:

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) d\forall + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{V}) d\forall = 0 \tag{44}$$

Assim:

$$\int_{VC} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right) d\forall = 0 \tag{45}$$

Como pelo Teorema da Localização concluimos que se a integral de uma função continua é nula para qualquer região ou intervalo de integração, então essa função é nula também. Com isso obtemos a chamada Equação de Continuidade dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \tag{46}$$

4.4 Matrizes e Tensores

Em cálculo vetorial e mecânica dos fluidos podemos definir vetores como uma matriz coluna com 3 linhas, isto é, uma matriz 3×1. Dessa forma podemos colocar como um vetor arbitrário $\vec{A}$ assim:

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \tag{47}$$

Analogamente para um vetor arbitrário $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \tag{48}$$

Um tensor é uma entidade matemática que é representada por 9 números, sendo assim uma matriz 3×3. Dessa forma definimos tensor como:

$$\vec{\vec{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{49}$$

Com isso, podemos enunciar o produto tensorial entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ como:

$$\vec{A}\vec{B} = \begin{bmatrix} A_x \cdot B_x & A_x \cdot B_y & A_x \cdot B_z \\ A_y \cdot B_x & A_y \cdot B_y & A_y \cdot B_z \\ A_z \cdot B_x & A_z \cdot B_y & A_z \cdot B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_xB_x & A_xB_y & A_xB_z \\ A_yB_x & A_yB_y & A_yB_z \\ A_zB_x & A_zB_y & A_zB_z \end{bmatrix} \tag{50}$$

Dessa forma podemos definir um tensor transposto $(\vec{\vec{\tau}})^T$ dessa forma:

$$(\vec{\vec{\tau}})^T = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau yy & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau yz & \tau_{zz} \end{bmatrix} \tag{51}$$

4.5 Equação de Bernoulli com base na Equação de Navier Stokes

A equação de Bernoulli é uma relação aproximada entre pressão, velocidade e elevação válida para regiões em que o escoamento é incompressível, em regime permanente e com forças de atrito viscosas resultantes desprezíveis. Pela Equação de Navier Stokes:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{V} \tag{52}$$

Como o regime é permanente e sem forças viscosas:

$$\rho 0 \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + 0 \mu \nabla^2 \vec{V} \tag{53}$$

Obtemos:

$$\rho(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p \tag{54}$$

Pela seguinte identidade vetorial:

$$(\vec{V}\cdot\vec{\nabla})\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(V^2) - \vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \tag{55}$$

em que aqui tratamos V como o módulo do vetor velocidade:

$$V = \sqrt{\vec{V}\cdot\vec{V}} = |\vec{V}| \tag{56}$$

A aceleração gravitacional é dada vetoralmente por:

$$\vec{g} = -g\hat{k} \tag{57}$$

com g constante, mas...

$$\vec{\nabla}z = \hat{k} \tag{58}$$

Então, podemos escrever:

$$\vec{g} = \vec{\nabla}(-gz) = -\vec{\nabla}(gz) \tag{59}$$

Substituindo (55) e (59) em (54), temos:

$$\frac{1}{2}\rho\vec{\nabla}(V^2) + \vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}(gz) = \rho\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \tag{60}$$

Como o escoamento é incompressível, o ρ é constante:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho\vec{V}^2\right) + \vec{\nabla}p + \nabla(\rho gz) = \rho\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \tag{61}$$

Agrupando os termos em função de $\vec{\cdot}$:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho gz\right) = \rho\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \tag{62}$$

Vamos assumir que o escoamento é irrotacional, isto é, o seu vetor de vorticidade $\vec{\Omega} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \vec{0}$. Logo temos que:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho gz\right) = 0\rho\vec{V}\times(\vec{\nabla}\times\vec{V}) \tag{63}$$

Dessa forma temos que por fim:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho gz\right) = \vec{0} \tag{64}$$

Que é a mesma coisa que escrevermos que:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho gz = cte \tag{65}$$