

### Exercícios de "aquecimento"

1. O que é um grafo conexo?
2. O que é um subgrafo gerador?
3. Desenhe um grafo conexo com 7 vértices e cuja quantidade de arestas seja a menor possível.

### Definição de árvore

Um grafo que não contém circuitos é chamado de **acíclico**. Uma **árvore** é um grafo conexo e acíclico.

**Exercício:** Desenhe todos os grafos conexos com  $n$  vértices e  $n-1$  arestas para  $n=1,2,\dots,6$ :

**Teorema.** Um grafo conexo  $G$  é uma árvore se e somente se  $|AG|=|VG|-1$ .

Um grafo acíclico é também chamado **floresta**. Ou seja uma floresta é um grafo tal que toda componente é uma árvore.

### Algumas propriedades interessantes

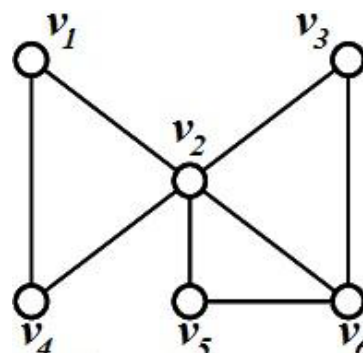
Se  $G$  é uma árvore:

- $G$  não tem laços e entre quaisquer dois vértices de  $G$  existe um único caminho.
- $G$  é acíclico e se quaisquer dois vértices não adjacentes são ligados por uma aresta  $e$  então  $G+e$  tem exatamente um circuito (isto é,  $G$  é um grafo acíclico maximal).
- $G$  é conexo e se  $e \in AG$  então  $G-e$  é desconexo. (Em outras palavras,  $G$  é conexo e toda aresta de  $G$  é de corte.)
- se  $G$  tem 2 ou mais vértices então  $G$  tem, pelo menos, 2 vértices de grau 1.
- $G$  é bipartido.

**Definição.** Uma **árvore geradora** ("spanning tree") de um grafo  $G$  é um subgrafo gerador que é uma árvore.

Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

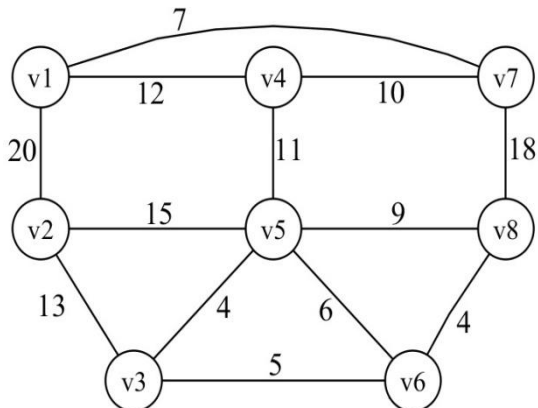
**Exercício:** Desenhe uma árvore geradora do grafo abaixo:



## Grafos com custos nas arestas

Um grafo  $G$  com custos associados às suas arestas (ou seja,  $G$  é **aresta valorado**) é um grafo tal que toda aresta  $a \in AG$  tem um custo  $c(a) \geq 0$ .

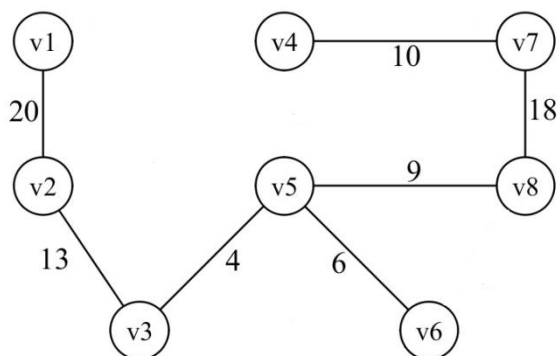
**Exemplo:** Considere o grafo  $H$  abaixo



No grafo  $H$ , o custo da aresta  $v3v6$  é 5. Note que toda aresta de  $H$  tem seu respectivo custo.

### Problema da árvore geradora de custo mínimo

Todo grafo conexo tem uma árvore geradora. No caso de um grafo com custos nas arestas, definimos o **custo de uma árvore geradora** como a soma dos custos das arestas pertencentes à árvore. Por exemplo, abaixo temos uma árvore geradora do grafo  $H$  acima cujo custo é 80.



**Pergunta :** Será que o grafo  $H$  tem alguma outra árvore geradora cujo custo seja menor que 80? Sim.

**Problema:** Obter uma árvore geradora de  $H$  cujo custo seja o menor possível.

Este é o problema da árvore geradora de custo mínimo.

## Algoritmo de Kruskal

O algoritmo de Kruskal é um algoritmo guloso usado para encontrar uma árvore geradora de custo mínimo em um grafo com custos nas arestas.

**Entrada:** Grafo conexo com custos nas arestas  $G$  com custos  $c(a) \in \mathbb{R}$  associados às arestas  $a \in AG$ ;  
**Saída:** Árvore geradora de custo mínimo  $T$ .

1. **Ordene** as arestas de  $G$  em ordem não decrescente de seus custos. Chame-as de  $a_1, a_2, \dots, a_m$  com  $c(a_1) \leq c(a_2) \leq \dots \leq c(a_m)$ .
2.  $A \leftarrow \emptyset$ .
3. **Para**  $i = 1$  **até**  $m$  **faça**  
    **se**  $G[A \cup \{a_i\}]$  é acíclico **então**  $A \leftarrow A \cup \{a_i\}$ .
4.  $T \leftarrow G[A]$ . **Pare**

O **passo 1** ordena as arestas do grafo para que, no passo 3 as arestas de menor custo sejam tratadas antes que aquelas de custo maior.

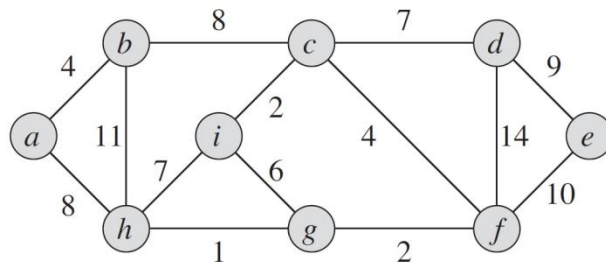
O **passo 2** do algoritmo inicializa o conjunto de arestas da árvore geradora como vazio.

No **passo 3**, avaliamos cada aresta do grafo verificando se ela forma um circuito com as arestas previamente selecionadas; caso afirmativo, ela é descartada, senão ela é incluída na árvore.

No **passo 4**, definimos a árvore geradora de custo mínimo como o subgrafo induzido pelas arestas selecionadas.

### Exercícios

1. Simulando o algoritmo de Kruskal, obtenha uma árvore geradora do grafo  $H$  ao lado.
2. Simulando o algoritmo de Kruskal, obtenha uma árvore geradora do grafo abaixo.



(exercício resolvido detalhadamente na próxima página)

3. O algoritmo de Prim é um outro algoritmo para calcular a árvore geradora de custo mínimo. Faça uma pesquisa sobre este algoritmo.

Cada figura (marcadas de (a) até (n)) apresenta uma iteração do passo 3 do algoritmo de Kruskal. A aresta indicada por uma seta é aquela sendo tratada da iteração.

