Emparelhamentos e Coberturas

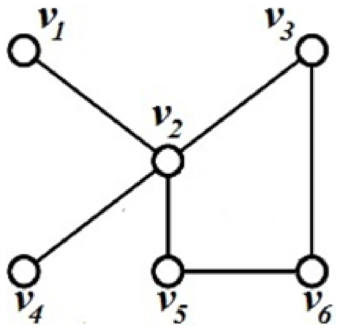
Teoria dos Grafos - 2020

Prof. Roberto C. de Araujo

1. Emparelhamentos

Num grafo G, um subconjunto não vazio E de arestas é chamado um ***emparelhamento*** se as arestas de E são distintas de laços e qualquer par a_1 e a_2 de arestas de E, com $a_1 \neq a_2$, implica que a_1 e a_2 não são adjacentes.

Exemplo: considerando o grafo G abaixo,



são emparelhamentos:

- $E_1 = \{v_1v_2\}$
- $E_2 = \{v_3v_6\}$
- $E_3 = \{v_2v_4,\ v_5v_6\}$
- $E_4 = \{v_2v_5,\ v_3v_6\}$
- ... e outros

(Ou seja, um emparelhamento é um subconjunto E de arestas distintas de laços tal que todo vértice em G é extremo de, no máximo, uma aresta em E.)

Seja $X \subseteq VG$. Um emparelhamento E ***cobre*** X se em cada vértice de X incide uma aresta em E. Neste caso, também dizemos que X é ***coberto*** por E.

- Se um emparelhamento em G cobre VG então E é chamado ***emparelhamento perfeito***.
- Se X={v} então dizemos simplesmente E ***cobre*** v, ou v é ***coberto por*** E.
- Se e=uv pertence a um emparelhamento E então também dizemos que u e v **são** (ou **estão**) ***emparelhados*** por E.
- Se um vértice *v* não é coberto por um emparelhamento E,dizemos que *v* é ***livre em*** E (ou, simplesmente, v é ***livre*** se E estiver claro pelo contexto).

Exercício: Para cada um dos emparelhamentos E*i*, $1 \leq i \leq 4$, do grafo G exibidos acima,

a) quais deles são perfeitos?
b) quais são os vértices cobertos por E*i*?
c) quais são os vértices livres em E*i*?
d) G tem algum emparelhamento perfeito?

Problemas de Interesse

- Encontrar um emparelhamento máximo.
- Como verificar se um emparelhamento E é máximo?
- Dado um grafo bipartido, será que existe um emparelhamento que cobre um dos conjuntos da bipartição?

Definição. Seja E um emparelhamento em um grafo G. Um ***caminho E-alternante*** em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em E e AG\ E.

Considerando o **Exemplo** ao lado, apresente:

a) um caminho E_1-alternante de comprimento 2.

b) um caminho E_2-alternante de comprimento 1.

c) um caminho E_2-alternante de comprimento 3.

d) um caminho E_3-alternante de comprimento 4.

e) um caminho E_4-alternante de comprimento 5.

Definição. Um ***caminho E-aumentador*** em G é um caminho E-alternante cuja origem e término não são cobertos por E.

Teorema. (Berge, 1947)
Seja E um emparelhamento em G. Então E é máximo se e somente se não existe em G um caminho E-alternante cujos extremos não são cobertos por E.

Teorema. (Hall, 1935)
Seja G um grafo bipartido com bipartição {X,Y}. Então G tem um emparelhamento que cobre X sse

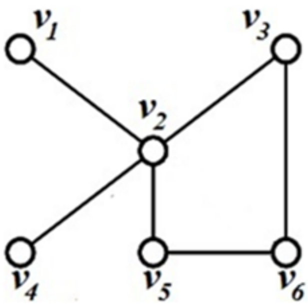
$$\forall S \subseteq X,\ |Adj(S)| \geq |S|.$$

Teorema. Se G é um grafo k-regular bipartido, k>0, então G tem um emparelhamento perfeito.

2. Coberturas

Definição. Uma ***cobertura*** em um grafo G é um conjunto $C \subseteq VG$ tal que toda aresta de G tem pelo menos um de seus extremos em C.

Exemplo: Considerando o grafo G abaixo



são coberturas:

- $K_1=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$
- $K_2=\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$
- $K_3=\{v_2, v_3, v_6\}$
- ... e outros.

Definição. Sejam $A \subseteq AG$ e $S \subseteq VG$. A ***cobre*** S sse todo $v \in S$ é extremo de pelo menos uma aresta de A.

Problema de interesse: Dado um grafo G, obter uma cobertura de G com a menor quantidade possível de vértices. Tal cobertura é chamada de ***cobertura mínima*** de G.

Exercício: Dado o grafo G acima, obter uma cobertura cobertura mínima de G.

Basta considerar $K_4=\{ v_2, v_6 \}$

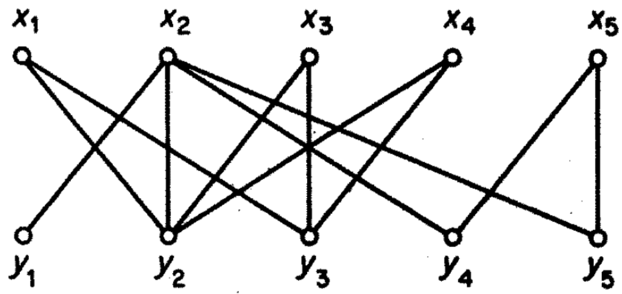
Problemas: Sejam G um grafo bipartido, E um emparelhamento máximo em G e K uma cobertura mínima em G.

- Como justificar precisamente que E é um emparelhamento máximo em G?
- Como justificar precisamente que K é uma cobertura mínima em G?

Para isto, basta usar o seguinte teoema:

Teorema. (König, 1931): Resultado Min-Max
Num grafo bipartido, o número de arestas em um emparelhamento máximo é igual ao número de vértices em uma cobertura mínima.

Exercício. Considere o grafo G abaixo:



a) Apresente um caminho em G de comprimento 4.
b) $E_1=\{x_1y_2, x_2y_1, x_3y_2\}$ é um emparelhamento em G? Justifique.
c) $E_2=\{x_1y_2, x_2y_4, x_3y_3\}$ é um emparelhamento em G? Justifique.
d) Determine um emparelhamento em G que tenha uma quantidade máxima de arestas.
e) Considerando $E_3=\{x_1y_2, x_2y_4\}$ apresente um caminho E_3-alternante que tenha comprimento máximo
f) $K=\{y_1, x_2, y_2, y_5\}$ é uma cobertura em G? Justifique.
g) Apresente uma cobertura em G com a quantidade mínima de vértices.