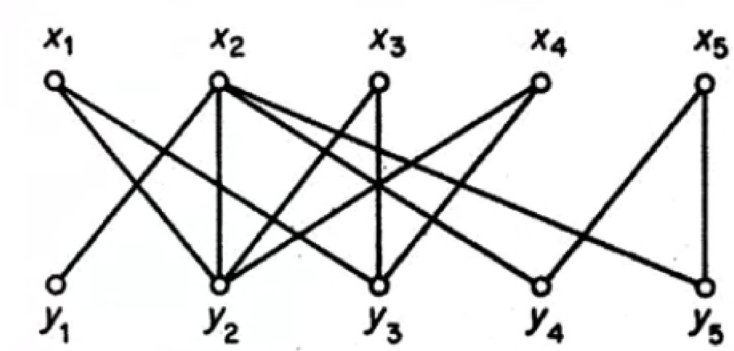
Emparelhamentos e

Luiz Tagliaferro

Emparelhamento

- Um emparelhamento em um grafo G é um **subconjunto E** $\subseteq$ **AG** tal que todo elemento de E é distinto de laço e todo vertice de G é extremo de, no maximo, um elemento de E



São emparelhamentos:

- E1 = { x1y2 }
- E2 = { x2y1, x1y3 }
- E3 = { x2y1, x1y3, y4x5 }

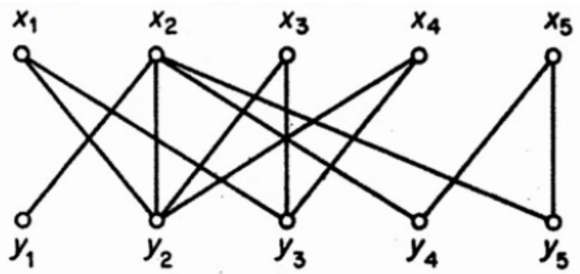
- O grafo nao tem nenhum emparehamento de tamanho 5

Nao sao emparehamentos:

- E4 = {x2y1, x2y2} pois x2 é extremo de 2 arestas distintas

Cobertura

- Uma **cobertura** (de vertices) em um grafo G é um **subconjunto C** $\subseteq$ **VG** tal que **toda aresta** de G é extremo de, **pelo menos**, um vertice de C



São coberturas:

- C1 = { x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5 } de tamanho 10
- C2 = { x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4 } de tamanho 9
- C3 = { x1, x2, x3, x4, x5 } de tamanho 5
- C4 = { x2, x5, y2, y3 } de tamanho 4

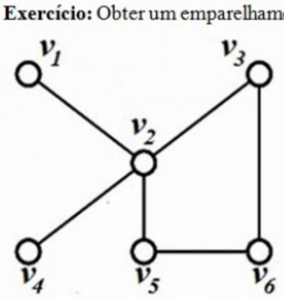
Teorema:

Teorema. Em um grafo bipartido G, seja E um emparelhamento em G e C uma cobertura em G, se |E| = |C| então E é um emparelhamento máximo e C é uma cobertura mínima.

No grafo acima, E4 é um aemparelhamento de tamanho 4 e C4 é uma cobertura de tamanho 4, logo E4 é um emparelhamento máximo e C4 é uma cobertura mínima.

Um grafo é bipartido se,e somente se, nao conter um circuito de tamanho impar

Exercício: Obter um emparelhamento máximo no grafo abaixo:

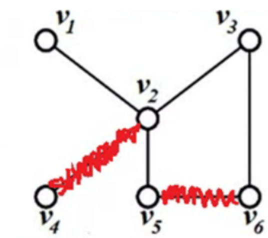


Um emparelhamento máximo é E = { v1v2, v3v6 }.
Justifique que este emparelhamento é máximo.

Considere a cobertura C = { v2, v6 }.

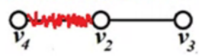
Como o grafo é bipartido e |E| = |C|, E é um emparelhamento máximo (e C é uma cobertura mínima).

Caminho alternante

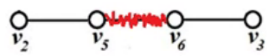


Dado um grafo G e um emparelhamento E em G, um **caminho E-alternante** em G é um caminho em G cujas arestas estão **alternadamente** em E e AG\E.

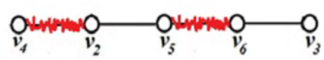
$C_1=(v_4, v_4v_2, v_2, v_2v_3, v_3)$:



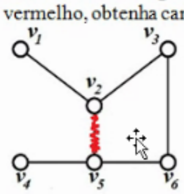
$C_2=(v_2, v_2v_5, v_5, v_5v_6, v_6, v_3v_6, v_3)$



$C_3=(v_4, v_4v_2, v_2, v_2v_5, v_5, v_5v_6, v_6, v_6v_3, v_3)$



Exercício: Dado o grafo G abaixo com um emparelhamanto P anotado com suas arestas em vermelho, obtenha caminhos P-alternantes em G



- C1 = (v1, v1v2, v2)
- C2 = (v2, v2v5, v5)
- C3 = (v4, v4v5, v5, v5v2, v2)
- C4 = (v4, v4v5, v5, v5v2, v2, v2v1, v1)
- C5 = (v3, v3v2, v2, v2v5, v5, v5v6, v6)

Vértices cobertos por P: { v2, v5 }
Vértices livres de P: { v1, v4, v3, v6 }

v3 é um vértice livre de P e v6 é um vértice livre de P