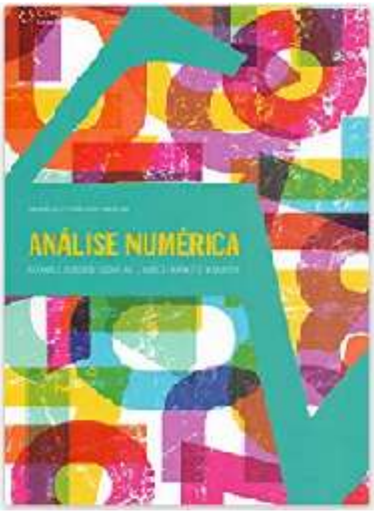
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 07 – 2º SEMESTRE/2019
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES (II)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Continuar trabalhando com o problema de resolução de equações.
- Conhecer e praticar com o Algoritmo de Newton para resolução de equações.



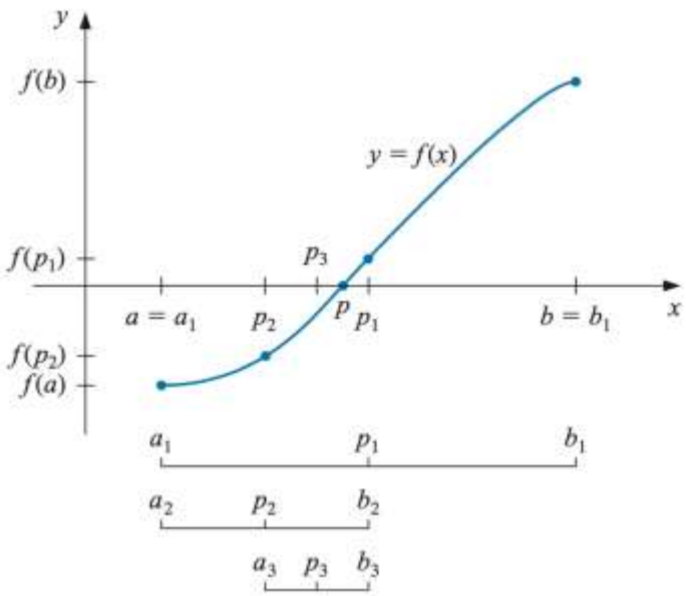
Para esta semana, usamos como referência a **Seção 2.3 (Método de Newton)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 8.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

MÉTODO DE NEWTON

- Vimos, na aula passada, que o **Método da Bissecção** baseia-se numa **busca binária iterativa**, tendo-se como base um **intervalo que contenha a raiz procurada**.



- Tanto para iniciar o Método da Bisseção, quanto para sua continuidade, sempre é necessário o **fornecimento de dois pontos a e b que definem o extremo do intervalo [a,b]**. Com o **Método de Newton** que veremos adiante, **só necessitaremos de um ponto**.

- Para se construir o Método de Newton, vamos supor que a **função f(x) seja "suficientemente" bem comportada** para que tenhamos uma **expansão em Séries de Taylor até o grau 2**, conforme mostrado a seguir, onde $\boldsymbol{p_0}$ **é o valor inicial** para se procurar a raiz:

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

- Se $\boldsymbol{p}$ **for a raiz procurada**, então podemos escrever que $\boldsymbol{f(p) = 0}$ e temos o seguinte resultado:

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p))$$

- Considerando que $|\boldsymbol{p - p_0}|$ **seja pequeno**, então $(\boldsymbol{p - p_2})^2$ **será menor** ainda e podemos fazer a seguinte aproximação:

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

- Isto é equivalente a dizer que:

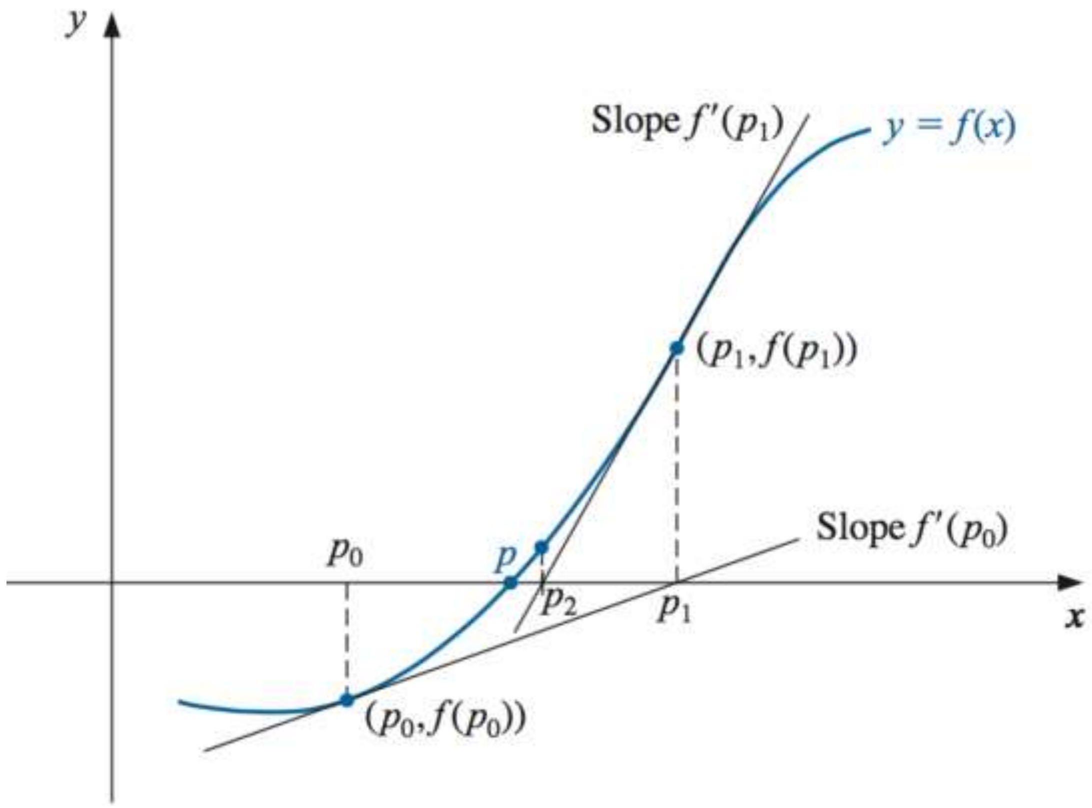
$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1.$$

ou seja, a **partir da primeira aproximação** $\boldsymbol{p_0}$, obtemos a **segunda aproximação** $\boldsymbol{p_1}$.

- Isto nos conduz ao seguinte **procedimento iterativo**, conhecido como **Método de Newton**:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})},$$

- **Geometricamente**, estamos realizando uma **aproximação da raiz** utilizando **retas tangentes**, conforme mostrado no esquema abaixo:



- Os **critérios de parada** podem ser os mesmos que utilizamos para o **Método da Bisseção**:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon,$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0,$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon.$$

EXERCÍCIO TUTORIADO

1. Encontre uma aproximação para uma raiz da equação abaixo, com tolerância ε=0.1, utilizando o Método de Newton. O valor inicial para busca fica a seu critério.

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

Utilize, como critério de parada, $|f(p_N)| < \varepsilon$.

2. Encontre uma aproximação para uma raiz da equação abaixo, com tolerância ε=0.001, utilizando o Método de Newton. O valor inicial para busca fica a seu critério.

$$f(x) = \cos x - x = 0$$

Utilize, como critério de parada, $|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon$.

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

3. Escreva o Método de Newton numa versão algorítmica.

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Utilize o Método de Newton para encontrar uma raiz das equações abaixo com tolerância ε=0.00001. Utilize os três critérios de parada e discuta a diferença entre eles (por exemplo, qual critério parece convergir mais rápido).

   a. $e^x + 2^{-x} + 2\cos x - 6 = 0$ for $1 \le x \le 2$

   b. $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$ for $1.3 \le x \le 2$

   c. $2x\cos 2x - (x-2)^2 = 0$ for $2 \le x \le 3$ and $3 \le x \le 4$

   d. $(x-2)^2 - \ln x = 0$ for $1 \le x \le 2$ and $e \le x \le 4$

   e. $e^x - 3x^2 = 0$ for $0 \le x \le 1$ and $3 \le x \le 5$

   f. $\sin x - e^{-x} = 0$ for $0 \le x \le 1$ $3 \le x \le 4$ and $6 \le x \le 7$

2. Implemente o Método de em Python como uma função newton(f,p,epsilon), que receba a função f, u, ponto inicial p e uma tolerância epsilon e devolve uma aproximação de uma raiz de f com tolerância epsilon.