Modelagem Matemática I – Prof. Eurico L. P. Ruivo

Método *Branch & Bound* em Programação Linear Inteira

Objetivo: Apresentar o Método *Branch & Bound* para um problema de PLI genérico.

Considere o seguinte problema de otimização:
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$
SUJEITO A:

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 8$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

A seguir, o método de resolução por Branch & Bound.

PASSO 1: Encontrar a solução ótima contínua. Utilizando o Excel Solver, chega-se a $x_1 \approx 3{,}69$ e $x_2 \approx 3{,}84$. Como queremos soluções inteiras, devemos procurar em regiões definidas por valores de x_1 e x_2 imediatamente anteriores e posteriores aos valores encontrados na solução contínua. Isto é, devemos considerar adicionar restrições do tipo $x_1 \leq 3$ ou $x_1 \geq 4$ e $x_2 \leq 3$ ou $x_2 \geq 4$.

PASSO 2: Adicionar a restrição $x_1 \leq 3$ e verificar se há solução. Temos o seguinte novo problema:

PROBLEMA 1
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$ SUJEITO A: $-2x_1 + 4x_2 \leq 8$ $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ $x_1 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$

A solução contínua nesse caso é $x_1 = 3$ e $x_2 = 3{,}5$, que ainda não serve, pois x_2 não é inteiro. Assim, vamos manter a restrição $x_1 \leq 3$ e tentar adicionar $x_2 \leq 3$ ou $x_2 \geq 4$ para obter uma solução inteira. Tentemos primeiro com $x_2 \leq 3$, obtendo o seguinte novo problema:

PROBLEMA 2
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$ SUJEITO A: $-2x_1 + 4x_2 \leq 8$ $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ $x_1 \leq 3$ $x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$

A solução ótima desse problema é $x_1 = 3$ e $x_2 = 3$, com $z = 27$ nesse caso. Assim, temos uma solução inteira válida para o Problema 2, mas que pode não ser a ótima para o problema original, assim devemos continuar nossa busca com todas as outras possibilidades, eliminando aquelas que não forem superiores ao que já obtivemos agora ($z = 27$). Portanto, agora adicionaremos ao Problema 1 a restrição $x_2 \geq 4$ e verificaremos se há solução inteira e, caso exista, se supera $z = 27$.

Chegamos agora ao problema dado abaixo:

PROBLEMA 3
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$ SUJEITO A: $-2x_1 + 4x_2 \leq 8$ $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ $x_1 \leq 3$ $x_2 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$

Utilizando o Solver, observa-se que não há solução viável. Como já esgotamos todas as possibilidades com $x_1 \leq 3$ (Problema 2 e Problema 3), resta checar o que aconteceria caso tivéssemos $x_1 \geq 4$.

PASSO 3: Voltando ao problema original, adicionamos agora a restrição $x_1 \geq 4$ e consideramos os casos restantes sem restrições para x_2 ainda, a exemplo do que fizemos no Problema 1.

PROBLEMA 4
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$ SUJEITO A: $-2x_1 + 4x_2 \leq 8$ $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ $x_1 \geq 4$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$

A solução obtida para esse problema foi $x_1 = 4$ e $x_2 \approx 3{,}33$. Agora devemos considerar as possibilidades $x_2 \leq 3$ e $x \geq 4$. Adicionando a $x_2 \leq 3$ ao Problema 4, temos:

PROBLEMA 5
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$ SUJEITO A: $-2x_1 + 4x_2 \leq 8$ $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ $x_1 \geq 4$ $x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$

Esse problema nos gera a solução ótima $x_1 = 4{,}2$ e $x_2 = 3$, com $z = 33$, o que está acima de nosso valor de referência obtido no Problema 2 ($z = 27$), nos obrigando a mexer novamente na variável x_1, que agora estará nas restrições $x_1 \leq 4$ e $x_1 \geq 5$.

PROBLEMA 6
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$ SUJEITO A: $-2x_1 + 4x_2 \leq 8$ $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ $x_1 \leq 4$ $x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$

Esse problema nos produz a solução ótima inteira $x_1 = 4$ e $x_2 = 3$ com $z = 32$, superando nossa solução inteira anterior dada no Problema 2 ($z = 27$). Agora nosso valor de referência é $z = 32$.

Resta considerar a possibilidade de termos $x_1 \geq 5$ e $x_2 \leq 3$:

PROBLEMA 7
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$ SUJEITO A: $-2x_1 + 4x_2 \leq 8$ $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ $x_1 \geq 5$ $x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$

A solução dada é $x_1 = 5$ e $x_2 = 1{,}66$ com $z = 31{,}66$. Como a solução contínua desse problema tem z menor que nosso atual valor de referência ($z = 32$), não precisamos continuar os testes nesse caso.

Por fim, voltando ao Problema 4 (primeiro do PASSO 3), resta considerar a possibilidade $x_1 \geq 4$ e $x_2 \geq 4$:

PROBLEMA 8
MAXIMIZAR $z = 5x_1 + 4x_2$ SUJEITO A: $-2x_1 + 4x_2 \leq 8$ $5x_1 + 3x_2 \leq 30$ $x_1 \geq 5$ $x_2 \leq 3$ $x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$

Esse problema não apresenta solução viável.

Uma vez que esgotamos todas as possibilidades de teste, concluímos que a solução ótima do problema original é a dada pelo Problema 6:

x_1	**4**
x_2	**3**
z	**32**

Problemas Propostos (retirados de [Taha, 2008]
Resolva pelo Método *Branch & Bound* com o auxílio do Excel Solver o seguinte problema de otimização: MAXIMIZAR $z = 4x_1 + 6x_2$ SUJEITO A: $4x_1 + 5x_2 \leq 40$ $3x_1 + 6x_2 \leq 36$ $x_1 \leq 8$ $x_1, x_2 \geq 0$ e inteiros
Você deverá entregar as resoluções feitas por você numa folha com nome, TIA e turma de laboratório. A descrição de cada Problema encontrado ao longo da solução, bem como seus valores ótimos devem constar na folha a ser entregue.