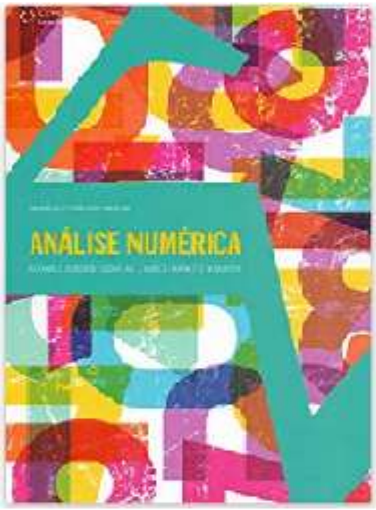
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 01 – 2º SEMESTRE/2019
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: REPRESENTAÇÃO E ARITMÉTICA EM PONTO FLUTUANTE

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer a representação em ponto flutuante para implementação de algoritmos numéricos.
- Conhecer as bases da aritmética em ponto flutuante.
- Praticar com representação e aritmética de ponto flutuante.



Para esta semana, usamos como referência a **Seção 1.2 (Erros de Arredondamento e Aritmética no Computador)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. Norte Americana, São Paulo: Cengage Learning, 2017.

Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

REPRESENTAÇÃO EM PONTO FLUTUANTE

- Quando efetuamos cálculos em uma calculadora ou computador, os resultados podem ser diferentes daqueles que conhecemos em cursos tradicionais de álgebra ou cálculo. Por exemplo, sabemos de álgebra básica que 2+2=4, 4*8=32 e $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

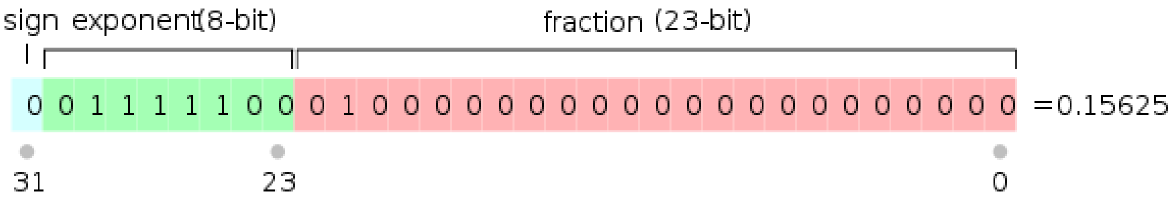
- Na **aritmética computacional padrão**, esperamos resultados **exatos** para 2+2=4 e 4*8=32, mas não podemos garantir que $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$. Isto advém do fato de que, quando calculamos uma raiz quadrada na aritmética computacional padrão, temos **erros de arredondamento** devido à **representação e aritmética em ponto flutuante**.

- Espere **erros de arredondamento** sempre que forem feitos **cálculos usando números que não sejam potências de 2**. Manter estes **erros sob controle** é importante quando o **número de cálculos for grande**.

- Em 1985, o IEEE (*Institute of Electrical and Electronic Engineers*) publicou um relatório chamado **Binary Floating Point Arithmetic Standard 754-1985**, que especificava formatos para **precisão simples**, **dupla** e **estendida**. Isto é conhecido como **Padrão IEEE 754 (ou Padrão IEEE para Ponto Flutuante)** e é seguido por fabricantes de hardware e desenvolvedores do software que manipulam ponto flutuante.

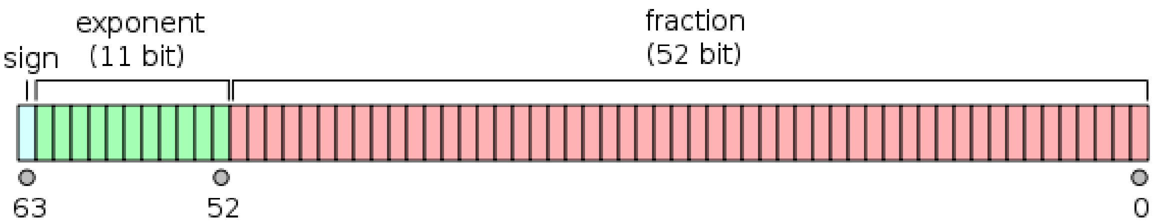
- Comumente, utilizamos dois tipos deste padrão: **float (ponto flutuante de precisão simples)** e **double (ponto flutuante de precisão dupla)**.

- Na representação do tipo float, utilizamos **32 bits** conforme mostrado na representação do número real 0.15625:



  Para o tipo **float**, o primeiro bit é um indicador de **sinal** (**sign**), os próximos **8 bits** são chamados de **expoente** (**E**) ou **característica** e, os **23 bits** restantes, de **fração** ou **mantissa** (**M**). A mantissa é normalizada na forma $0, d_1 d_2 \dots d_{23}$.

- Na representação do tipo double, utilizamos **64 bits** conforme mostrado no esquema a seguir:



  Para o tipo **double**, o primeiro bit também é um indicador de **sinal (sign)**, os próximos **11 bits** são o **expoente** ou **característica** e, os **52 bits** restantes, a **fração** ou **mantissa**. A **mantissa é normalizada** na forma $0, d_1 d_2 \dots d_{52}$.

- Para o tipo **double**, em particular, pode-se **recuperar o número representado** pela seguinte forma:

$$(-1)^{sinal} 2^{expoente-1023} (1+f)$$

  Uma fórmula similar pode ser obtida para quantidades em diferentes tipos de formato (lista de exercícios, exercício 1 extra-classe).

EXERCÍCIO TUTORIADO

1) Considere o seguinte número binário representado como **double** em IEEE-754:

   0   10000000011   1011100100010000000000000000000000000000000000000000

   Utilizando a fórmula da página anterior, recupere a representação decimal deste número.

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

2) Considere o seguinte número binário representado como **double** em IEEE-754:

   0   10000000011   1011100100010000000000000000000000000000000000000001

   Utilizando a fórmula da página anterior, recupere a representação decimal deste número.

TRUNCAMENTO/ARREDONDAMENTO EM PONTO FLUTUANTE

- Qualquer **número em ponto flutuante** pode ser **normalizado (na base decimal)** da seguinte forma:

$$\pm\, 0, d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n, com\ 1 \leq d_1 \leq 9\ e\ 0 \leq d_i \leq 9, para\ \ 2 \leq i \leq k$$

- Porém, devido ao tamanho dos registradores dos processadores, sabemos da **impossibilidade** de se **representar infinitas casas decimais** de um número. Assim, podemos utilizar duas operações possíveis para uma representação finita do número:

    - **Truncamento:** $\pm\, 0, d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n, com\ \mathbf{1} \leq \boldsymbol{d_1} \leq \mathbf{9}\ e\ \mathbf{0} \leq \boldsymbol{d_i} \leq \mathbf{9}, para\ \ \mathbf{2} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{k}$

    - **Arredondamento:** se $d_{k+1} \geq 5$, somamos 1 em d_k; **se** $\boldsymbol{d_{k+1}} < \mathbf{5}$, mantemos o valor de d_k

EXERCÍCIO TUTORIADO

3) Sabemos que o número π tem uma expansão infinita da forma $\pi = 3{,}1415926535 \ldots$ Calcule a representação normalizada com 5 algarismos para as operações de truncamento e arredondamento.

ERROS EM TRUNCAMENTO/ARREDONDAMENTO EM PONTO FLUTUANTE

- Tanto as **operações de truncamento** quanto **arredondamento** em **operações numéricas** em **ponto flutuante** podem produzir **erros**.

- Denotando por $\boldsymbol{fl(x)}$ e $\boldsymbol{fl(y)}$ as representações em **ponto flutuante de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$**, as **operações em ponto flutuante** são definidas pelas seguintes igualdades:

  - soma: $x \oplus y = fl(\,fl(x) + fl(y))$
  - subtração: $x \ominus y = fl(\,fl(x) - fl(y))$
  - multiplicação: $x \otimes y = fl(\,fl(x) \times fl(y))$
  - divisão: $x \oslash y = fl(\,fl(x)/fl(y))$

- Se p é o **valor exato** de um número e p^* uma **aproximação** de p, definimos o **erro absoluto** da aproximação por $|p - p^*|$ e o **erro relativo** da aproximação por $\frac{|p-p^*|}{|p|}$ (com $|p| \neq 0$).

EXERCÍCIO TUTORIADO

4) Seja $p = 0{,}54617$ e $q = 0{,}54601$. Calcule os erros absoluto e relativo produzidos na operação de **subtração** com **aritmética de quatro algarismos**, com os seguintes esquemas de aproximação:

   (a) truncamento

   (b) arredondamento

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Em aula, obtivemos uma fórmula para recuperar a representação decimal de um número em ponto flutuante de precisão dupla (double) com a fórmula abaixo:

$$(-1)^{sinal}2^{expoente-1023}(1+f)$$

2. Usando a aritmética de arredondamento, com **três algarismos**, calcule os erros absoluto e relativo com o **valor exato determinado com cinco algarismos** para os cálculos abaixo:

   a. $133 + 0{,}921$

   b. $133 - 0{,}499$

   c. $(121 - 0{,}327) - 119$

   d. $\left(\frac{2}{9}\right) \cdot \left(\frac{9}{7}\right)$

   e. $\frac{\pi - \frac{22}{7}}{\frac{1}{7}}$