Prof. Roberto C. de Araujo

1. Definição de grafo

Um ***grafo*** é uma tripla G=(V, A, ψ) tal que:

- V é um conjunto de elementos (chamados *vértices*)
- A é um conjunto de elementos (chamados *arestas*), e
- ψ é uma função (chamada *função de incidência*) que associa a cada elemento de A um par de elementos de V.

Exemplo: Considere G=(V, E, ψ) tal que

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$
$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

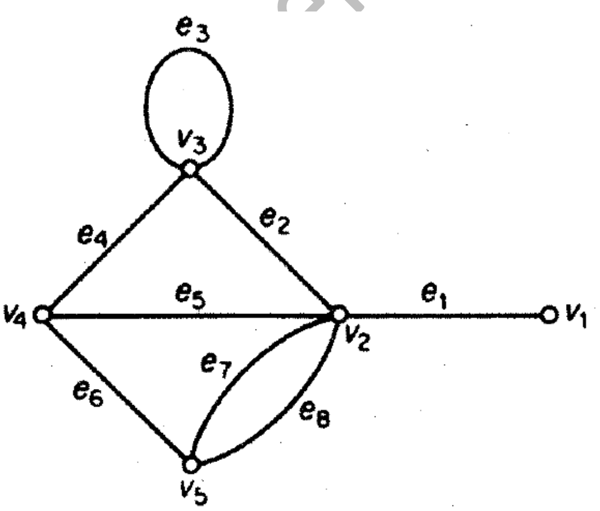
E a função de incidência ψ é definida como:

$$\begin{array}{ll} \psi_G(e_1) = v_1 v_2 & \psi_G(e_5) = v_2 v_4 \\ \psi_G(e_2) = v_2 v_3 & \psi_G(e_6) = v_4 v_5 \\ \psi_G(e_3) = v_3 v_3 & \psi_G(e_7) = v_2 v_5 \\ \psi_G(e_4) = v_3 v_4 & \psi_G(e_8) = v_2 v_5 \end{array}$$

2. Representação gráfica de um grafo

Normalmente apresentamos grafos através de sua ***representação gráfica***, na qual cada vértice é representado por um ponto e cada aresta é representada por uma linha ligando os pontos que representam seus dois vértices correspondentes..

Exemplo: Considere o grafo G=(V,A) do exemplo anterior



3. Conceitos Básicos

Convenção: se G é o nome de um grafo, **VG** denota seu conjunto de vértices e **AG** denota seu conjunto de arestas.

Se *a* é uma aresta de um grafo G tal que ψ(*a*)= *u v* então dizemos que *u* e *v* são os ***extremos*** de *a*. Se *u* e *v* são os extremos de uma aresta *a*, dizemos que *u* e *v* são vértices ***adjacentes*** (ou ***vizinhos***). Dizemos também que *a* ***incide*** em *u* (e em *v* também), ou ***liga*** os vértices *u* e *v*.

Duas arestas com um extremo em comum são chamadas ***adjacentes***; duas arestas distintas com os mesmos extremos são chamadas ***paralelas*** ou ***múltiplas***. Uma aresta com extremos idênticos é chamada ***laço*** (“loop”).

Exemplo: Considere o grafo desenhado no exemplo:

- e_7 e e_8 são paralelas
- e_1 e e_2 são adjacentes
- e_3 é um laço

A ***ordem*** de um grafo G é o número de vértices de G (notação: |VG|); o ***tamanho*** de um grafo é a soma do número de vértices com o número de arestas de G (o número de arestas de G é denotado por |AG|).

O ***grau*** de um vértice v em um grafo G, denotado por $g_G(v)$, é o número de arestas que incidem em v, onde os laços são contados duas vezes. Se o grafo a que estamos nos referindo é óbvio pelo contexto, o grau de um vértice v é denotado simplesmente por g(v).

Denotamos por δ(G) o mínimo dos graus dos vértices de G. Δ(G) denota o máximo dos graus dos vértices de G.

Proposição 1 A soma dos graus dos vértices de um grafo é igual ao dobro do número de arestas do grafo.

Corolário 1 Em todo grafo o número de vértices de grau ímpar é par.

4. Isomorfismo de Grafos

Sejam G e H dois grafos. Dizemos que G e H são isomorfos, denotado por $G \cong H$, se existem bijeções

- α: VG $\rightarrow$ VH
- β: AG $\rightarrow$ AH

tais que:

$a=\{u,v\}\in AG \;\Leftrightarrow\; \beta(a) = \{\, \alpha(u), \alpha(v) \,\}\in AH$

O par (α,β) é chamado de ***isomorfismo*** entre G e H.

5. Tipos Especiais de Grafos

Um grafo G é ***vazio*** se VG = AG = $\emptyset$. Um grafo com apenas um vértice e nenhuma aresta é chamado ***trivial***; caso contrário, ***não trivial***.

Um grafo é ***simples*** se não tem laços e nem arestas múltiplas. Um grafo G é ***finito*** se VG e AG são ambos finitos. (Neste curso trataremos apenas de grafos finitos.)

Grafo ***completo*** é um grafo simples em que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com *n* vértices; este grafo é denotado por $\boldsymbol{K_n}$.

Um grafo G é ***bipartido*** se VG pode ser particionado[1] em dois conjuntos, *X* e *Y*, tais que cada aresta de AG tem um extremo em X e o outro em Y . Uma tal partição (X,Y) é chamada uma ***bipartição do grafo***.

Um grafo ***bipartido completo*** é um grafo simples com bipartição (*X*,*Y*) no qual todo vértice de *X* é adjacente a todos os vértices de *Y*. Se $|X|= m$ e $|Y|= n$ então um tal grafo é denotado por $\boldsymbol{K_{m,n}}$.

Um grafo G é ***k-regular*** se $g(v)= k$ para todo v $\in$VG. G é ***regular*** se é G é *k*-regular para algum *k*.

Se G é um grafo simples, o ***complemento*** $\overline{G}$ de G é um grafo simples com $V\overline{G}$ = VG, sendo que dois vértices são adacentes em $\overline{G}$ sse eles não são adjacentes em G. (Outra notação: G^C.)

[1] $\{X,Y\}$ é uma ***partição*** de VG se $X\cup Y$ = VG e $X\cap Y= \emptyset$.

Convenção:

- Ao invés de nos referirmos à "aresta com extremos *u* e *v*", quando não houver perigo de confusão, por simplicidade diremos a **aresta *uv*** (ou, equivalentemente, diremos a **aresta *vu)***.

6. Exercícios

1. Considere a seguinte definição alternativa de grafo:
*Um **grafo** é um par G=(V, A) de conjuntos que satisfazem $A \subseteq [V]^2$. (Onde $[V]^2$ denota o conjunto de todos os subconjuntos de V com 2 elementos.)*
   a) *Tal definição é equivalente à anterior? Justifique.*
   b) Considerando esta definição desenhe o grafo G=(V,A) tal que
      - V= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
      - A= { {1,2}, {1,5}, {1,4}, {3,4}, {5,6} }
   c) Considerando o grafo G do item anterior,
      - Quanto vale g(4)?
      - Quanto vale δ(G)?
      - Quanto vale Δ (G)?

2. Apresente um grafo G com 6 vértices tal que todo vértice tenha grau 1.

3. Apresente todos os grafos completos com até 6 vértices.

4. Quantas arestas tem um grafo completo com n vértices?

5. Apresente o complemento do grafo apresentado no exercício 1.