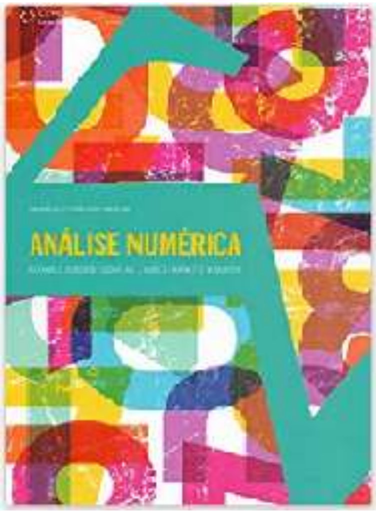
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 11 – 2º SEMESTRE/2019
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES (IV)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o problema de aproximação de funções
- Conhecer e praticar com o Método de Mínimos Quadrados para aproximação de funções lineares



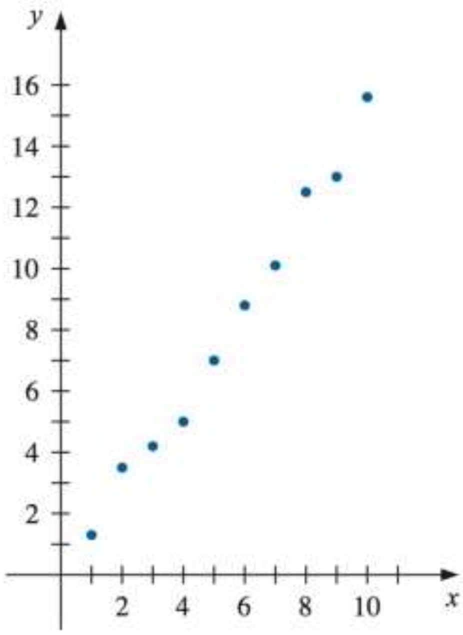
Para esta semana, usamos como referência a **Seção 8.1 (Aproximação de Mínimos Quadrados Discretos)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

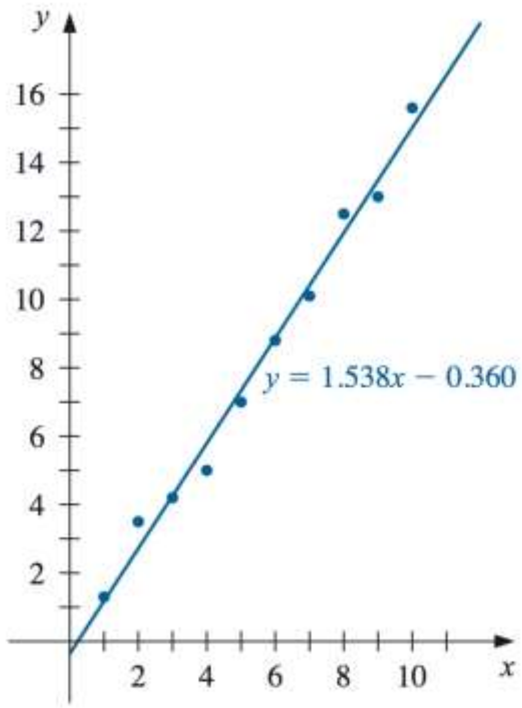
Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES

- Considere os 10 pontos mostrados no gráfico abaixo:



- Se observarmos com cuidado este gráfico, verificaremos que há uma tendência destes pontos em se **aproximar** de uma reta, conforme mostrado no gráfico abaixo:



- Diferentemente do problema de interpolação, na **aproximação** estamos interessados em obter curvas que **minimizem a distância** a um determinado conjunto de pontos dados.

MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS (MMQ)

- O **Método de Mínimos Quadrados (MMQ)** consiste em encontrar os **coeficientes de uma reta** que **minimizem a função-distância quadrática** mostrada a seguir:

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0)\right]^2$$

- Para o exemplo do gráfico anterior, estaríamos procurando por coeficientes a_0 e a_1 que minimizem a função-distância abaixo:

$$E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0)\right]^2$$

- Como se trata de uma **função de duas variáveis**, no processo de encontrar os **pontos críticos** (possivelmente, os **pontos de mínimos**), vamos usar **derivadas de primeira ordem e igualá-las a 0**:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

- Expandindo as equações acima, teremos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^{m} \left[(y_i - (a_1 x_i - a_0)\right]^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_1 x_i - a_0)(-1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0)\right]^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i)$$

- Simplificando estas duas equações, obteremos as seguintes equações:

$$a_0 \cdot m + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \quad \text{and} \quad a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

- Temos, então, um **sistema com duas equações e duas incógnitas**. Resolvendo este sistema, obteremos os seguintes valores para os coeficientes a_0 e a_1 :

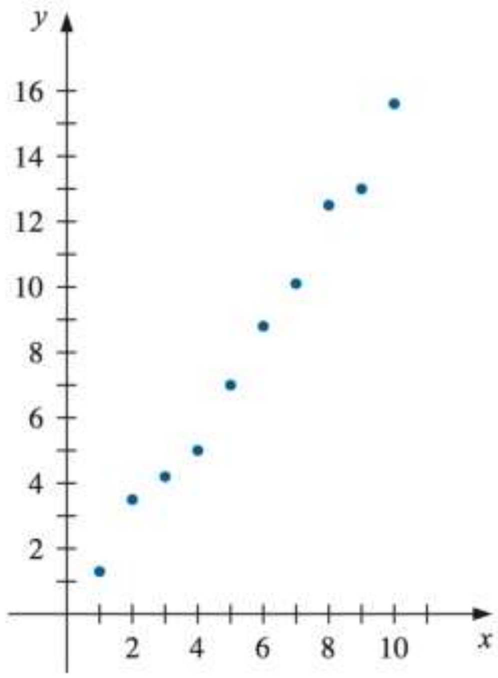
$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}$$

$$a_1 = \frac{m \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}.$$

- O método MMQ consiste em **efetuar todas os somatórios indicados** anteriormente, obtendo os **dois coeficientes desejados da reta de aproximação**.

EXERCÍCIO TUTORIADO

1. Encontre a reta aproximadora de pontos pelo Método MMQ para os dados abaixo:



x_i	y_i
1	1.3
2	3.5
3	4.2
4	5.0
5	7.0
6	8.8
7	10.1
8	12.5
9	13.0
10	15.6

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

2. Encontre a reta aproximadora de pontos pelo Método MMQ para os dados abaixo:

x_i	y_i
0	1.0000
0.25	1.2840
0.50	1.6487
0.75	2.1170
1.00	2.7183

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Encontre a reta aproximadora de pontos pelo Método MMQ para os dados abaixo:

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

2. Encontre a reta aproximadora de pontos pelo Método MMQ para os dados abaixo:

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

3. Implemente o Método MMQ em Python.