



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

AULA 11

PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Eduardo Camargo de Siqueira
PESQUISA OPERACIONAL
TECNÓLOGO EM ANÁLISE E
DESENVOLVIMENTO DE SISTEMAS

INTRODUÇÃO

- A **Programação Dinâmica** é uma metodologia de otimização.
- Problemas que requerem decisões sequenciais inter-relacionadas.
- Objetivo:
 - como obter a sequência de decisões.
 - minimização custo total em um número de estágios.
 - compromisso entre custo imediato e futuro.



INTRODUÇÃO

- A Programação Dinâmica procura resolver o problema de otimização pela análise de uma sequência de problemas mais simples do que o problema original.
- A resolução do problema original de n variáveis é caracterizada pela determinação de uma variável e pela resolução de um problema que possua uma variável a menos ($n - 1$).
- Este por sua vez é resolvido pela determinação de uma variável e pela resolução de um problema de $n - 2$ variáveis e assim por diante.



PROBLEMA DA DILIGÊNCIA

- Problema elaborado pelo Prof. Harvey M. Wagner, para ilustrar os conceitos de programação dinâmica.
- Um caçador de ouros do Missouri decidiu participar da corrida do ouro na Califórnia.
- A viagem seria realizada por um território inseguro, correndo um grande risco de ser assaltado.



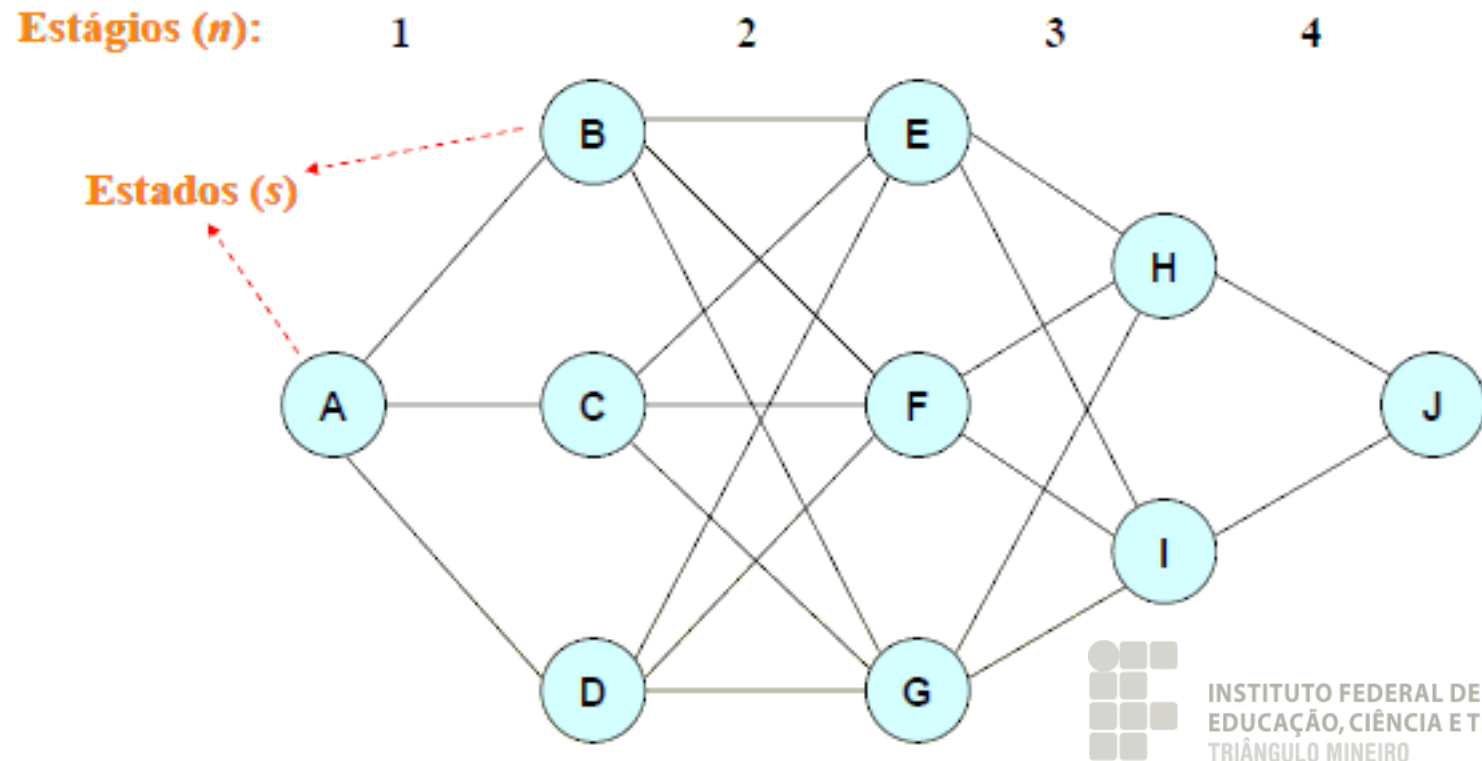
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA

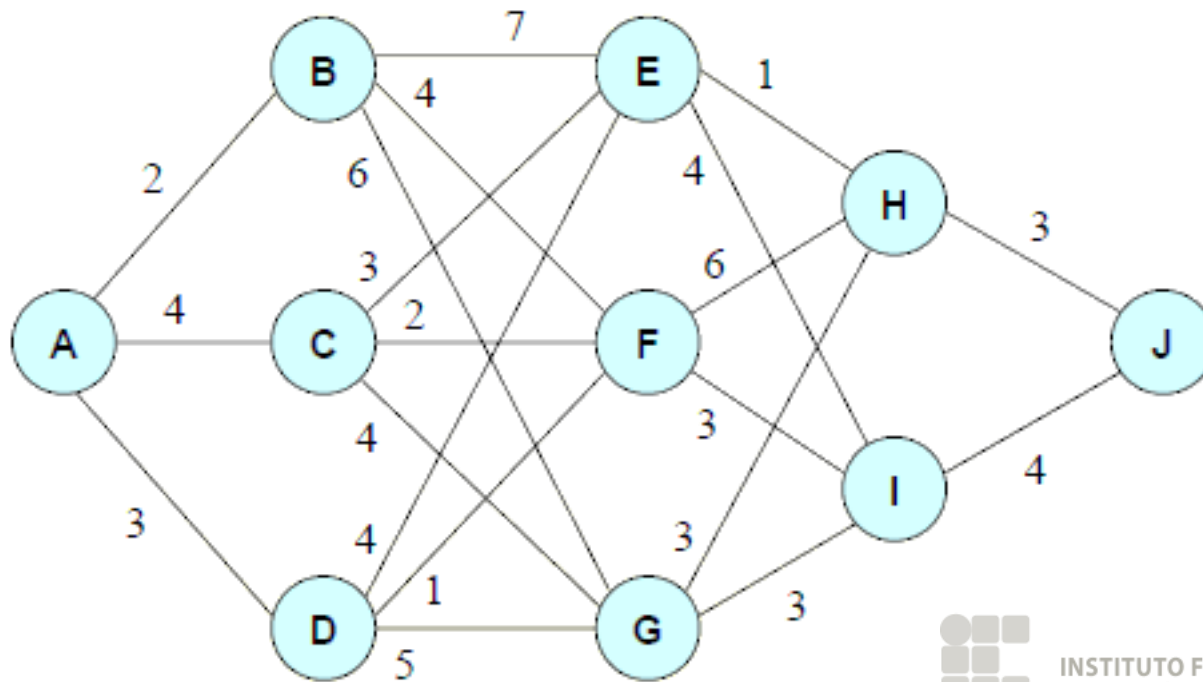
- O caçador estava preocupado com sua segurança ao longo da viagem.
- Empresas de seguros ofereciam apólices para passageiros de diligência.
- Os custos da apólice era calculado de acordo com a segurança do trecho percorrido.
- Assim, a rota mais segura seria aquela que tivesse a apólice mais barata.



PROBLEMA DA DILIGÊNCIA



PROBLEMA DA DILIGÊNCIA



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA

- Uma possível maneira seria resolver o problema por meio de tentativa e erro, porém seria necessário verificar todas as rotas possíveis.
- A Programação Dinâmica oferece uma solução com muito menos esforço.
- Inicia com uma pequena porção do problema original, e gradualmente aumenta o tamanho do problema, até que todo o problema seja resolvido.



PROBLEMA DA DILIGÊNCIA

- Para o problema da diligência, a solução é iniciada a partir do último estágio, onde o caçador quase completou sua viagem. Nesse caso, a solução é óbvia: ir do seu estado atual para o seu destino.
- A cada iteração, o problema é ampliado aumentando 1 estágio para completar a viagem.
- A solução do problema ampliado pode ser obtida baseada no resultado da iteração anterior.

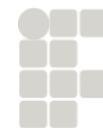
PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - FORMULAÇÃO

- As variáveis de decisão x_n são os destinos subsequentes ao início do estágio n .
- Assim a rota final seria:
 - $A \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 (x_4 = J)$.



PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - FORMULAÇÃO

- Seja $f_n(s, x_n)$ o custo total da melhor política a ser adotada para os próximos estágios;
 - O caçador está no estado s .
 - Pronto para seguir para o estágio n .
 - x_i é o seu destino imediato.
- Objetivo: $f_n^*(s, x_n) = \min f_n(s, x_n)$.
- $f_n(s, x_n) = C_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n)$.

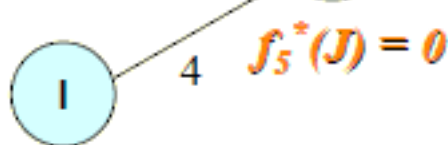
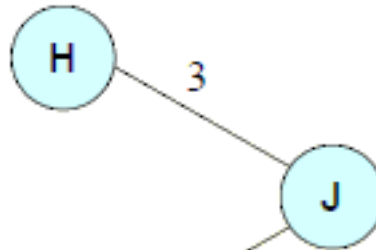


PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

$n = 4$:

s	$f_4^*(s) = c_{s,J}$	x_4^*
H	3	j
I	4	j

$$f_4^*(H) = 3$$



$$f_5^*(J) = 0$$

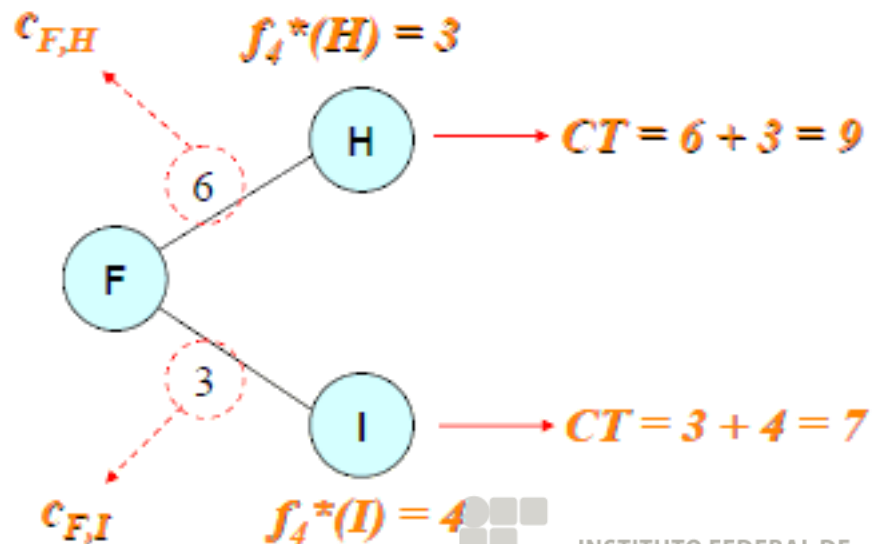
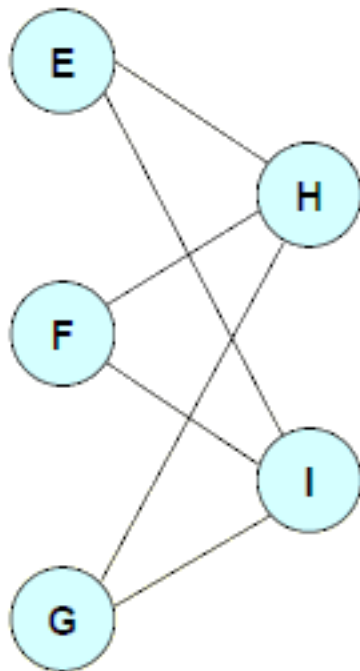
$$f_4^*(I) = 4$$



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

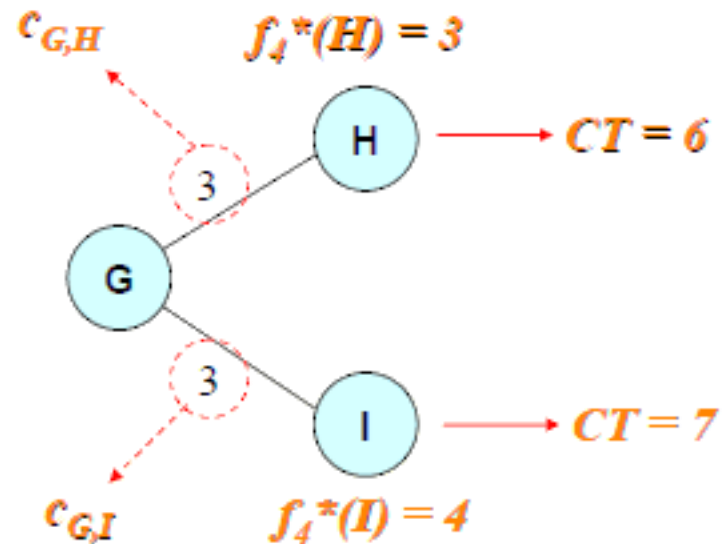
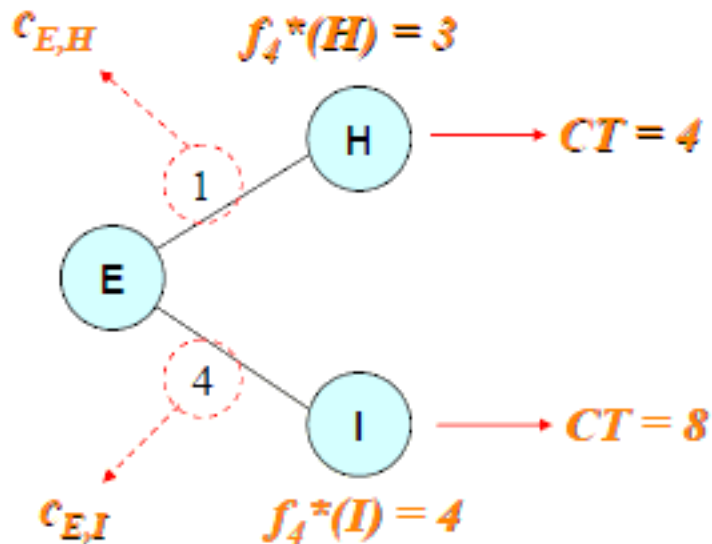
PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

- Para $n = 3$ tem-se:



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO



PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

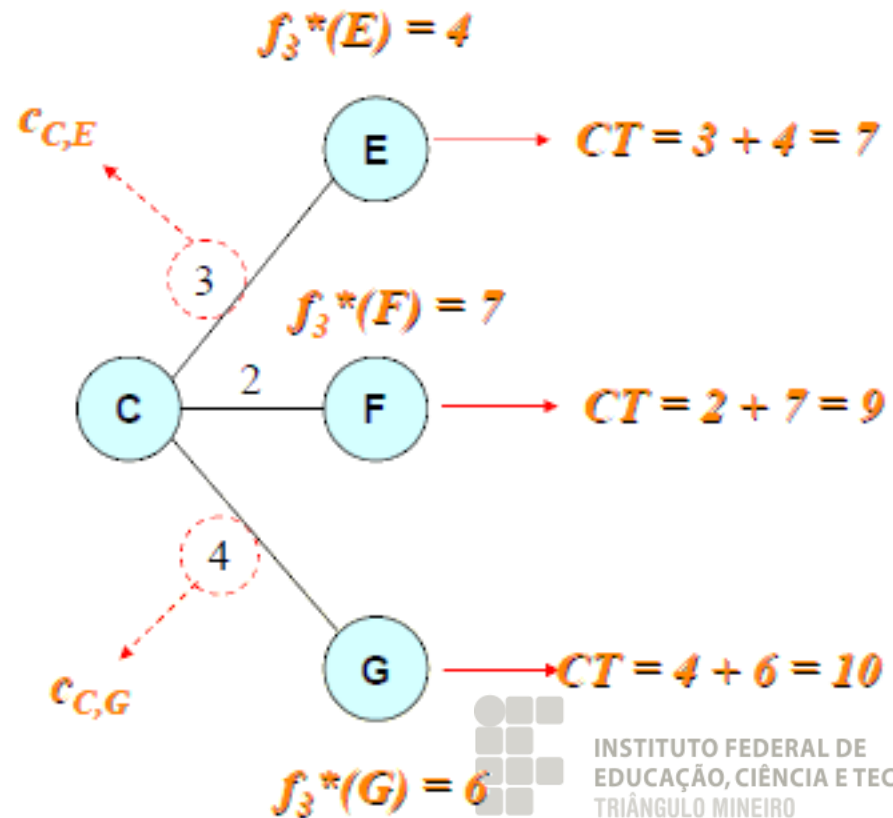
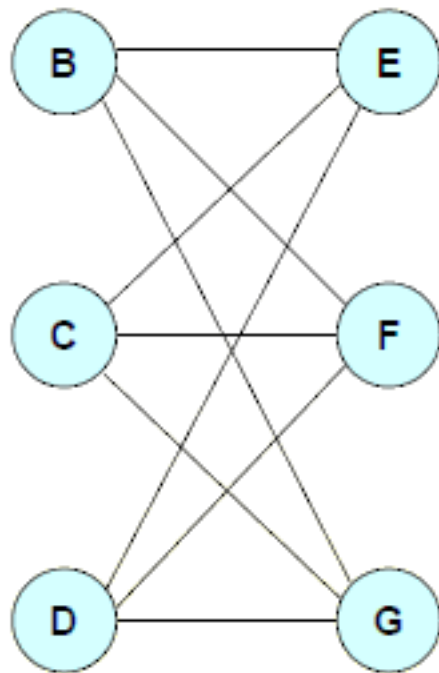
$n = 3$:

$s \backslash x_3$	$f_3^*(s, x_3) = c_{sx3} + f_4^*(x_3)$		$f_3^*(s)$	x_3^*
	H	I		
E	$1 + 3 = 4$	$4 + 4 = 8$	4	H
F	$6 + 3 = 9$	$3 + 4 = 7$	7	I
G	$3 + 3 = 6$	$3 + 4 = 7$	6	H



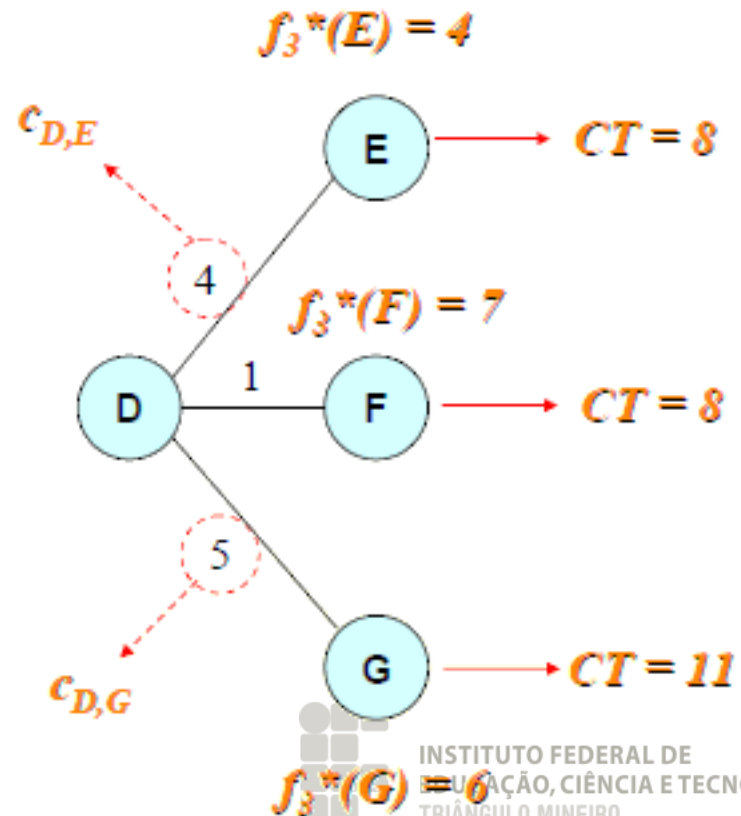
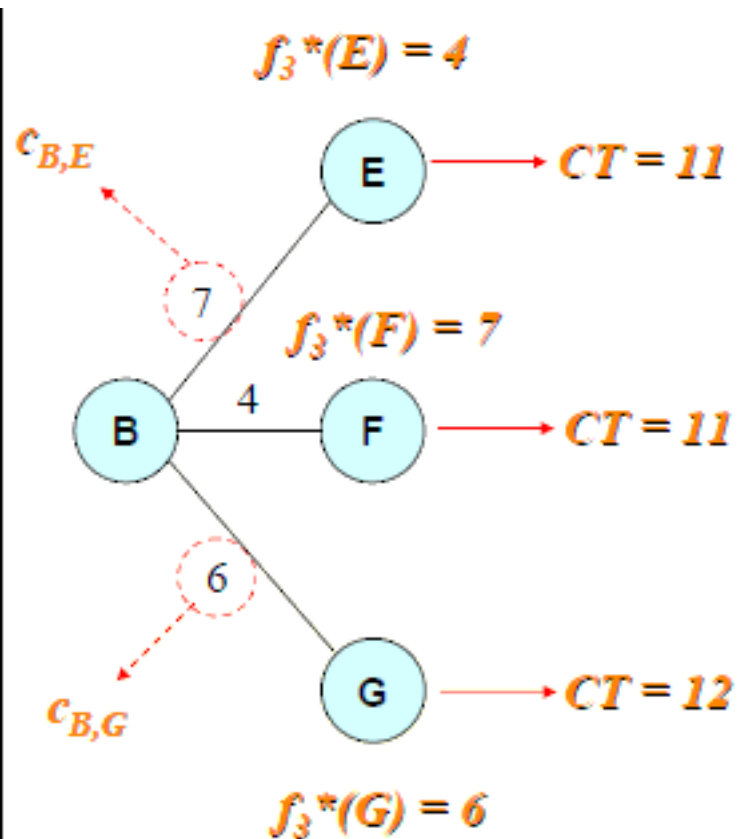
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO



PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

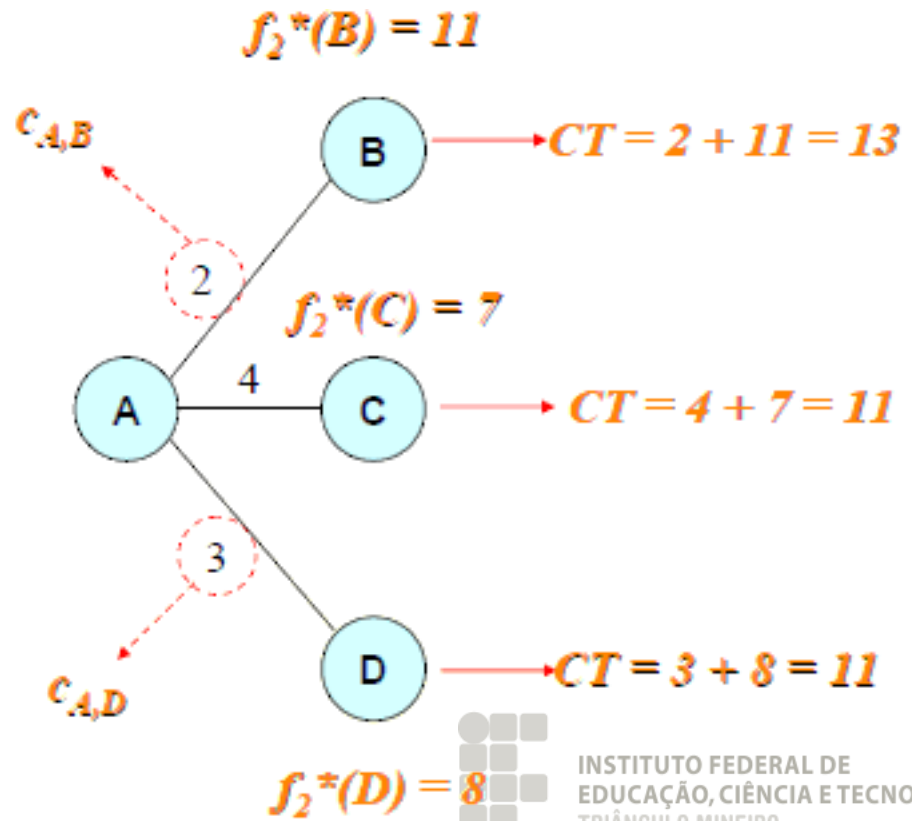
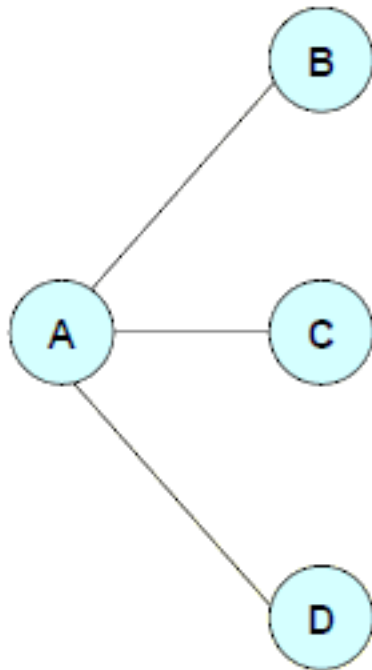
$n = 2$:

$s \backslash x_2$	$f_2^*(s, x_2) = c_{sx2} + f_3^*(x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	E	F	G		
B	$7 + 4 = 11$	$4 + 7 = 11$	$6 + 6 = 12$	11	E ou F
C	$3 + 4 = 7$	$2 + 7 = 9$	$4 + 6 = 10$	7	E
D	$4 + 4 = 8$	$1 + 7 = 8$	$5 + 6 = 11$	8	E ou F



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

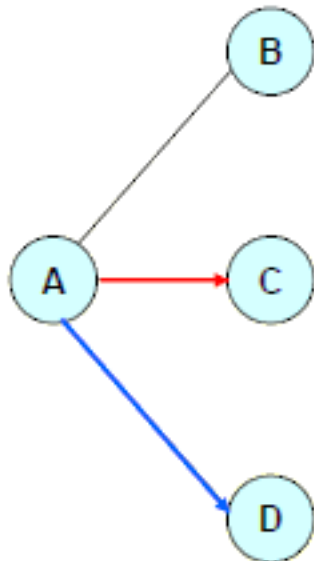


INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

$n = 1$:

$s \backslash x_1$	$f_1^*(s, x_1) = c_{sx1} + f_2^*(x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	B	C	D		
A	$2 + 11 = 13$	$4 + 7 = 11$	$3 + 8 = 11$	11	C ou D

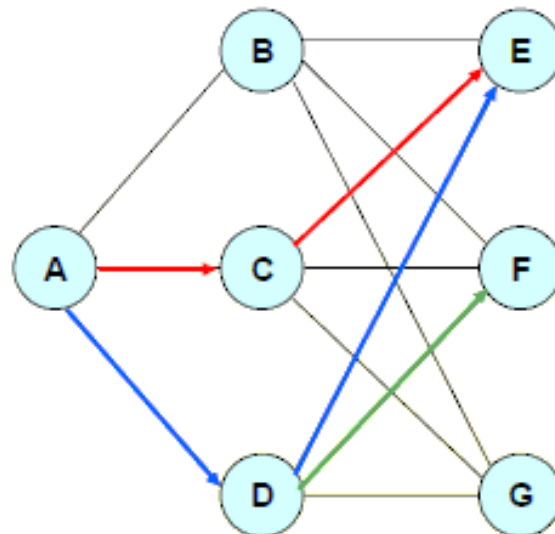


INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

$n = 2$:

$s \backslash x_2$	$f_2^*(s, x_2) = c_{sx_2} + f_3^*(x_2)$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	E	F	G		
B	$7 + 4 = 11$	$4 + 7 = 11$	$6 + 6 = 12$	11	E ou F
C	$3 + 4 = 7$	$2 + 7 = 9$	$4 + 6 = 10$	7	E
D	$4 + 4 = 8$	$1 + 7 = 8$	$5 + 6 = 11$	8	E ou F

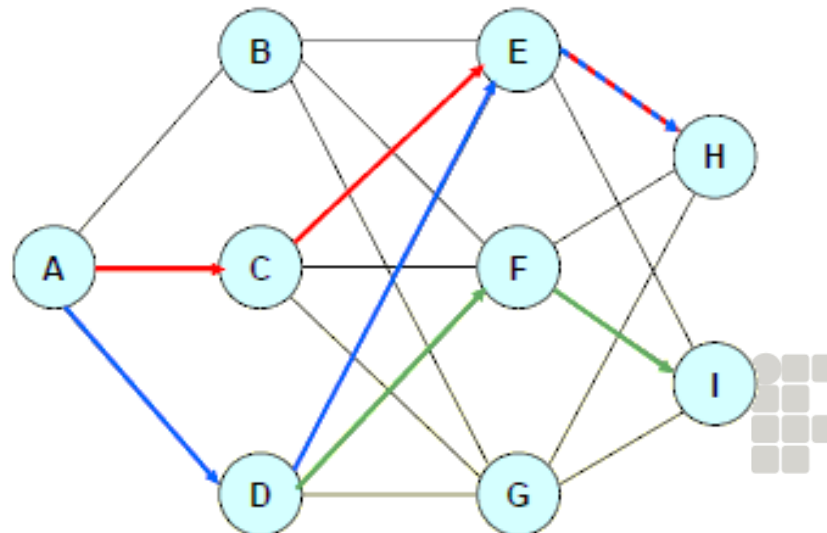


INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

$n = 3$:

$s \backslash x_3$	$f_3^*(s, x_3) = c_{sx3} + f_4^*(x_3)$		$f_3^*(s)$	x_3^*
	H	I		
E	$1 + 3 = 4$	$4 + 4 = 8$	4	H
F	$6 + 3 = 9$	$3 + 4 = 7$	7	I
G	$3 + 3 = 6$	$3 + 4 = 7$	6	H

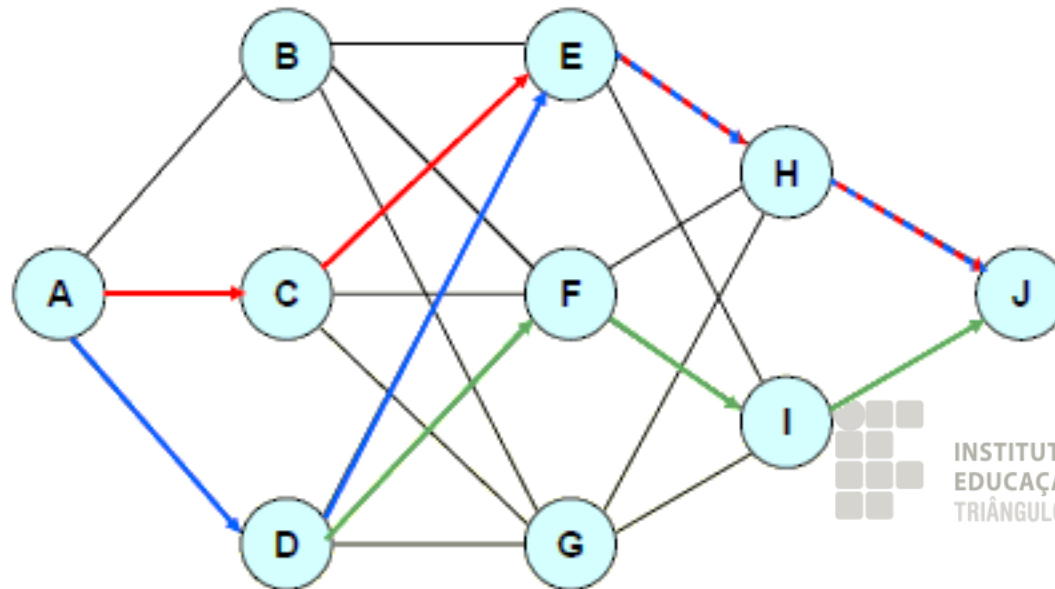


INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

$n = 4$:

s	$f_4^*(s) = c_{s,J}$	X_4^*
H	3	j
I	4	j



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO

PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - RESOLUÇÃO

- Três rotas oferecem a mesma segurança:
 - $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$.
 - $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$.
 - $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$.
- Qualquer uma dessas oferecem a maior segurança possível.
- Custo total = 11.



PROBLEMA DA DILIGÊNCIA - CONCLUSÃO

- O problema da diligência foi elaborado para oferecer uma interpretação física da estrutura abstrata dos problemas de programação dinâmica.
- Uma maneira de reconhecer se uma situação pode ser formulada como um problema de PD é verificar se a estrutura do problema é análoga ao problema da diligência.



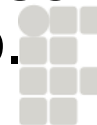
CARACTERÍSTICAS DE PROBLEMAS DE PD

- O problema pode ser dividido em **estágios**, com uma **decisão** a ser tomada em cada estágio.
- Cada estágio tem um conjunto de **estados** associados.
 - O número de estados pode ser *finito* ou *infinito*.
- O efeito da **decisão** em cada estágio é relacionar o estado atual a um estado do próximo estágio.



CARACTERÍSTICAS DE PROBLEMAS DE PD

- O procedimento de resolução é desenvolvido para encontrar a melhor solução para o problema com um todo.
- Dado o estágio atual, uma solução ótima para os demais estados é independente das decisões adotadas nos estágios anteriores (Princípio da Otimalidade de Bellman).
- O procedimento de resolução inicia-se encontrando a melhor solução para o último estágio.



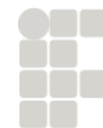
CARACTERÍSTICAS DE PROBLEMAS DE PD

- Existe uma relação que identifica a melhor solução para o estágio n , dado que a solução ótima para o estágio $n + 1$ está disponível.
- O procedimento de resolução inicia-se pelo fim do problema e retrocede estágio por estágio até encontrar a melhor solução no início do problema.



FIM

- Dúvidas?
- Obrigado pela atenção!



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
TRIÂNGULO MINEIRO