CADEIA DE MARKOV DISCRETAS COM ESPAÇO DE ESTADOS FINITO

REFERÊNCIA (BIBLIOTECAMVIRTUAL PEARSON): TAHA, H. PESQUISA OPERACIONAL. 8 ED. SÃO PAULO: PEARSON, 2008, CAPÍTULO 17.

Classificação dos Estados

Se E é o espaço de estados de uma cadeia de Markov discreta, com matriz de transição P, e $u \in E$, vamos representar por N_u o número de visitas ao estado u.

Diz-se que o estado $u \in E$ é transitório, se $P(N_u = +\infty | X_0 = u) = 0$.

Diz-se que o estado $u \in E$ é recorrente, se $P(N_u = +\infty | X_0 = u) = 1$.

Observação: Um caso particular de recorrência ocorre quando um estado $u \in E$ é tal que $P(u, u) = 1$. Nesse caso, diz-se que o estado $u \in E$ é absorvente.

Número Esperado de Visitas à um Estado

Se E é o espaço de estados de uma cadeia de Markov discreta, com matriz de transição P, e $u \in E$, o número esperado de visitas à u nas primeiras m etapas, partindo do estado $v \in E$ no instante inicial $i = 0$, é dado pela soma:

$$\sum_{n=1}^{m} P^n\,(v, u)$$

Assim, número esperado de visitas à u, partindo do estado $v \in E$ no instante inicial $i = 0$, é dado pela soma

$$E(N_u | X_0 = v) = \sum_{n=1}^{+\infty} P^n\,(v, u)$$

Comunicação

Se E é o espaço de estados de uma cadeia de Markov discreta, com matriz de transição P, e $u, v \in E$, diz-se que:

- u conduz a v (notação: $u \to v$), se existir uma trajetória $X_0 = e_0, X_1 = e_1, \dots, X_n = e_n$, com $e_0 = u$ e $e_n = v$, tal que $P(e_{i-1}, e_i) > 0$, $i = 1,2, \dots n$.
- u e v se comunicam (notação: $u \leftrightarrow v$): se $u \to v$ e $v \to u$

Se $C \subset E$, diz-se que:

- C é uma classe fechada se nenhum estado de C conduz à um estado fora de C. Diz-se que uma classe fechada C é irredutível se $u \to v$ para quaisquer $u, v \in C$.
- C é uma classe comunicante se $u \leftrightarrow v$ para quaisquer $u, v \in C$.

Observação: Se $u, v \in E$, $v \to u$ e u é recorrente, então $E(N_u|X_0 = v) = +\infty$

Se $u, v \in E$, $\neg(v \to u)$ então $E(N_u|X_0 = v) = 0$

Se $u, v \in E$, $v \to u$ e u é transitório, então $E(N_u|X_0 = v) = \frac{\rho_{vu}}{1-\rho_{uu}} < +\infty$

em que $\rho_{sw} = P(V_w < +\infty|X_0 = s)$, $s, w \in E$.

Observação: Se $u \in E$, representamos por V_u o instante da primeira visita ao estado u.

Propriedades

Uma cadeia de Markov discreta pode ter uma ou mais classes comunicantes.

Todos os estados de uma classe comunicante são do mesmo tipo.

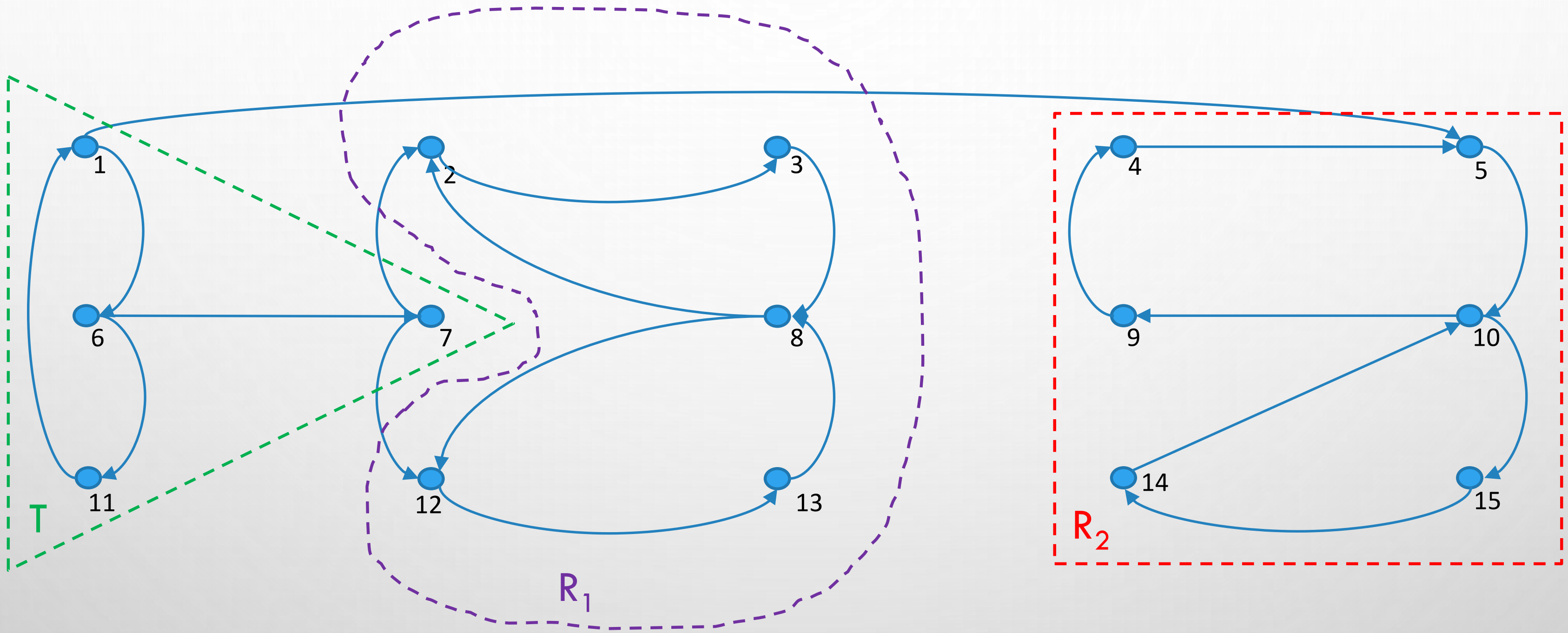
Os estados de uma cadeia de Markov discreta (com espaço de estados finito) não podem ser todos transitórios.

O espaço de estados (finito) de uma cadeia de Markov discreta, admite uma decomposição da forma

$$E = T \cup R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_k$$

em que T é o conjunto de estados transitórios e $R_1, R_2, \ldots, R_k$ são classes fechadas e irredutíveis de estados recorrentes.

Exemplo:



Exercício: Classifique os estados da cadeia de Markov cuja matriz de transição é

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccc} 0.3 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{array}\right| \end{array}$$

Probabilidades de Absorção em $\boldsymbol{R_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, k}$.

Em uma cadeia de Markov discreta as probabilidades de absorção em R_i, $i = 1,2, \dots, k$, partindo de um estado transitório $u \in T$, representadas por $R(u, i)$, satisfazem o sistema de equações

$$R(u, i) = B(u, i) + \sum_{v \in T} P(u, v) R(v, i),$$

para cada $i \in \{1,2, \dots, k\}$ fixado, em que

$$B(u, i) = \sum_{w \in R_i} P(u, w)$$

Em notação matricial, temos: $R = B + QR$, cuja solução, é $R = (I - Q)^{-1} B$. Além disso,

$R(u, i) = \rho_{uv}$, para todo $v \in R_i$.

Exemplo: Se uma cadeia de Markov tem matriz de transição

$$
P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\left|\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0.3 \\
0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\
0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5
\end{array}\right| \end{array}
$$

Então $T = \{2,3\}$, $R_1 = \{1\}$, $R_2 = \{4,5\}$ e as probabilidades de absorção a serem calculadas são:

$$R(2,1), R(2,2), R(3,1) \text{ e } R(3,2).$$

Nesse caso, o sistema linear $R = B + QR$, cuja solução, é $R = (I - Q)^{-1}B$, é tal que:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} B(2,1) & B(2,2) \\ B(3,1) & B(3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$R = \begin{bmatrix} R(2,1) & R(2,2) \\ R(3,1) & R(3,2) \end{bmatrix} = (I - Q)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3333 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0.6667 \end{bmatrix}$$

Distribuição Estacionária

Se o estado inicial da cadeia é $u \in E$ com probabilidade $p_0(u)$, diz-se que, p_0 é uma distribuição estacionária sobre E, se:

$$p_0(v) = \sum_{u \in E} p_0(u) P(u, v)$$

para todo $v \in E$.

Em notação matricial, p_0 é estacionária se $p_0 = p_0 P$.

Se o estado inicial da cadeia é $u \in E$ com probabilidade $p_0(u)$, e p_0 é uma distribuição estacionária sobre E, então, para cada $v \in E$,

$$P(X_n = v) = \sum_{u \in E} p_0(u) P^n(u, v) = p_0(v)$$

para todo $n \geq 1$.

Em notação matricial, se p_n é o vetor $(p_n(u) = P(X_n = u) : u \in E)$, então $p_n = p_0 P^n = p_0$, para todo $n \geq 1$.

Exemplo: Se uma cadeia de Markov tem matriz de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

então $p_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ é uma distribuição estacionária sobre E.

De fato, $p_0 P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Se uma cadeia de Markov discreta com espaço de estados E e matriz de transição regular P, então existe uma única distribuição estacionária p_0 sobre E e

$$\lim_{n\to+\infty} P^n(u,v) = p_0(v) = \frac{1}{m_v} > 0, \text{ para quaisquer } u, v \in E.$$

Observações: Diz-se que a matriz de transição, P , de uma cadeia de Markov discreta, é regular se, para algum $n \geq 1$,

$$P^n(u,v) > 0 \text{ para quaisquer } u, v \in E.$$

Em particular, isso ocorre quando todos os estados se comunicam e existe pelo menos um estado $u \in E$ para o qual $P(u,u) > 0$.

Se $u \in E$ representamos por m_u o tempo médio de recorrência do estado u (quanto tempo leva, em média, para retornar a u, partindo de u). Mais precisamente: $m_u = E(V_u|X_0 = u)$.