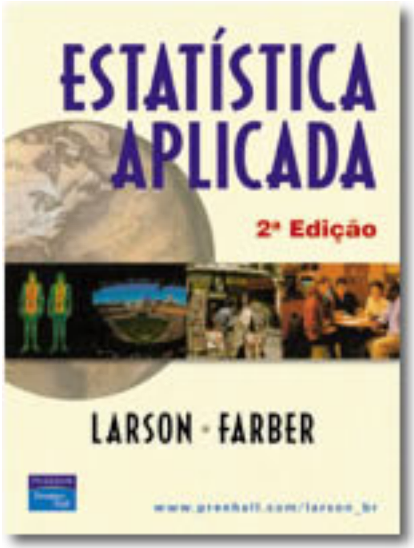
4 Distribuições discretas de probabilidade

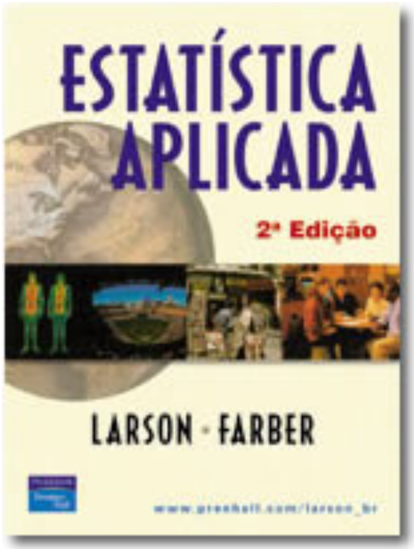
Estatística Aplicada

Larson Farber



Seção 4.1

Distribuições de probabilidade



Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória, ***x***, é o resultado numérico de um experimento probabilístico.

x = o número de pessoas num carro.

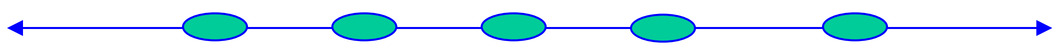
x = quantos metros cúbicos de gás são comprados numa semana.

x = o tempo que leva para ir de carro de casa até a escola.

x = o número de vezes que você vai à escola por semana.

Tipos de variáveis aleatórias

Uma variável aleatória é discreta se o número de resultados possíveis é finito ou pode ser contado. Variáveis aleatórias discretas são determinadas por uma contagem.



Uma variável aleatória é contínua se pode assumir qualquer valor dentro de determinado intervalo. O número de resultados possíveis não pode ser listado. Variáveis aleatórias contínuas são determinadas por uma medição.

Tipos de variável aleatória

Identifique cada variável aleatória como discreta ou contínua.

x = o número de pessoas em um carro.

Discreta – *você conta o número de pessoas: 0, 1, 2, 3… Os valores possíveis podem ser enumerados.*

x = quantos metros cúbicos de gás são comprados numa semana.

Contínua – *você mede os metros cúbicos de gás. Você não pode enumerar todos os valores possíveis.*

x = o tempo que leva para ir de carro de casa até a escola.

Contínua – *você mede a quantidade de tempo. Os valores possíveis não podem ser enumerados.*

x = o número de vezes que você vai à escola por semana.

Discreta – *você conta o número de vezes que vai. Os valores possíveis podem ser enumerados.*

Distribuições discretas de probabilidade

Uma **distribuição discreta de probabilidade** enumera cada valor possível da variável aleatória, bem como sua probabilidade.

Em um levantamento, perguntou-se a uma amostra de famílias quantos veículos elas possuíam.

número de veículos

x	$P(x)$
0	0,004
1	0,435
2	0,355
3	0,206

Propriedades de uma distribuição de probabilidade

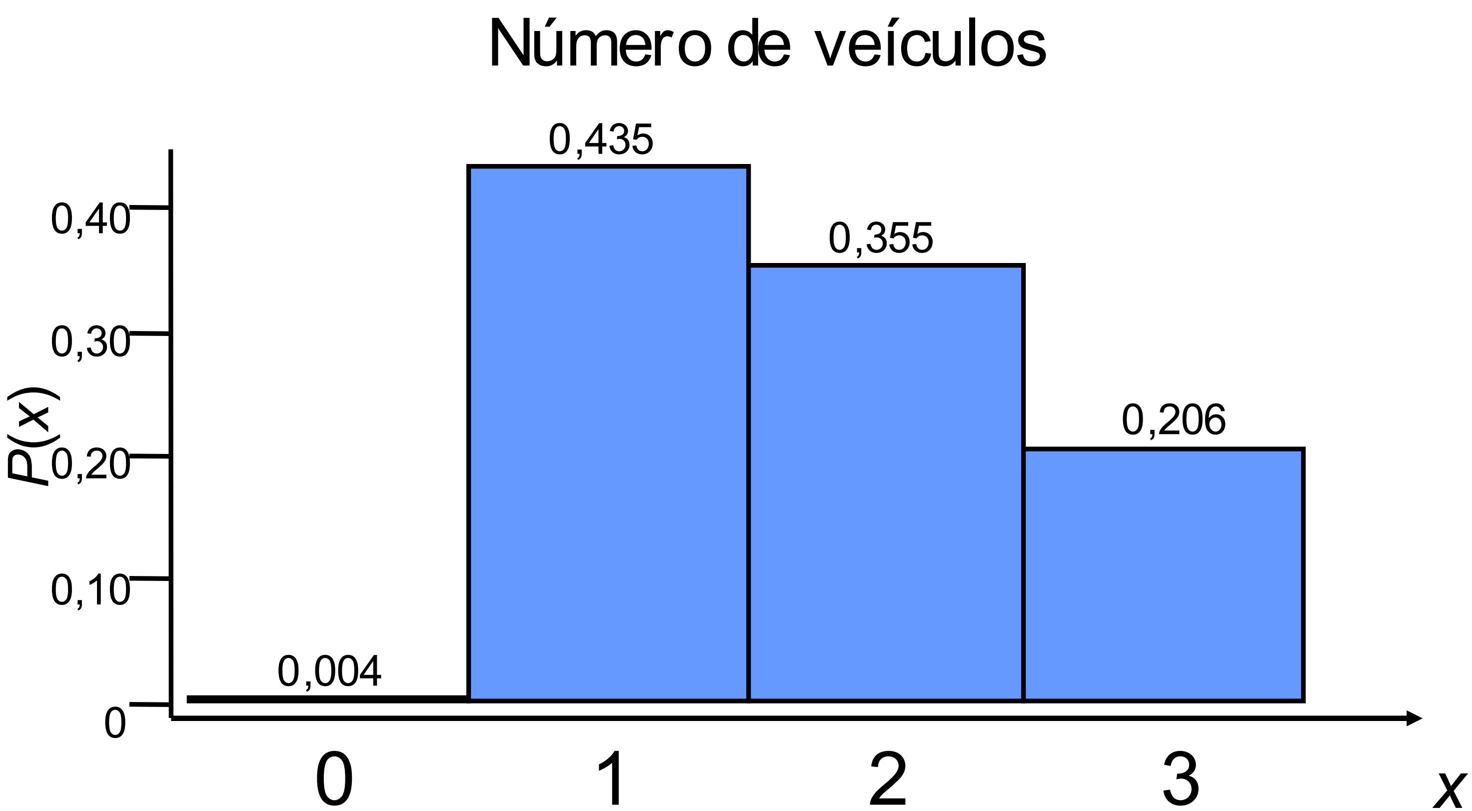
- Cada probabilidade precisa estar entre 0 e 1, inclusive.

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

- A soma de todas as probabilidades é 1.

$$\Sigma P(x) = 1$$

Histograma de probabilidade



- A altura de cada barra corresponde à probabilidade de *x*.
- Se a largura da barra é 1, sua área corresponde à probabilidade de que o valor de *x* ocorra.

Média,variância e desvio padrão

A média de uma distribuição discreta de probabilidade é:

$$\mu = \Sigma x \cdot P(x)$$

A variância de uma distribuição discreta de probabilidade é:

$$\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 \cdot P(x)$$

O desvio padrão de uma distribuição discreta de probabilidade é:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Média (valor esperado)

Calcule a média: $\mu = \Sigma x \cdot P(x)$

Multiplique cada valor por sua probabilidade. Some os produtos.

x	$P(x)$	$xP(x)$
0	0,004	0
1	0,435	0,435
2	0,355	0,71
3	0,206	0,618
		1,763

O valor esperado (a média) é de 1,763 veículo.

Calcule a variância e o desvio padrão

A média é de 1,763 veículo. $\sigma^2 = \Sigma(x - \mu)^2 \cdot P(x)$

x	$P(x)$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x - \mu)^2 P(x)$
0	0,004	-1,763	3,108	0,012
1	0,435	-0,763	0,582	0,253
2	0,355	0,237	0,056	0,020
3	0,206	1,237	1,530	0,315
				0,601

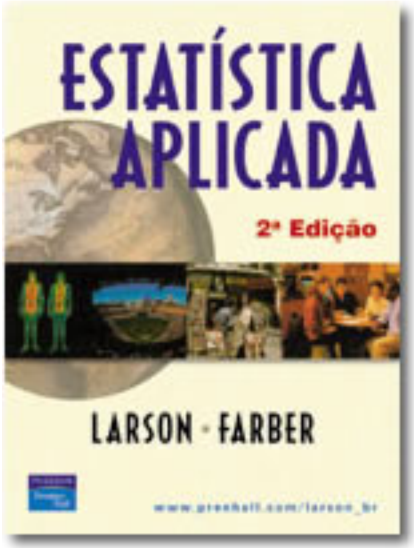
variância

$\sigma \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mathbf{0,661}} = \mathbf{0,775}$

O desvio padrão é de 0,775 veículo.

Seção 4.2

Distribuições binomiais



Experimentos binomiais

Características de um experimento binomial

- O número de tentativas é fixo **(*n*)**.
- As ***n*** tentativas são independentes e repetidas em condições idênticas.
- Para cada tentativa há dois resultados possíveis,
  S = sucesso *ou F* = fracasso.
- A probabilidade de sucesso numa tentativa única é ***p*.** ***P*(*S*) = *p***

  A probabilidade de fracasso é ***q*.** ***P*(*F*) =*q***, ***onde p* + *q* = 1**
- O problema central está em determinar a probabilidade de ***x*** sucessos em ***n*** tentativas, sendo ***x*** = 0 ou 1 ou 2 … ***n***.

A variável aleatória *x* é uma contagem do número de sucessos em *n* tentativas.

Tente adivinhar as respostas

1. Qual é o 11º dígito depois do ponto decimal de um número irracional *e*?
(a) 2 (b) 7 (c) 4 (d) 5

2. Qual foi o Índice Dow Jones em 27 de fevereiro de 1993?
(a) 3.265 (b) 3.174 (c) 3.285 (d) 3.327

3. Quantos jovens do Sri Lanka estudaram em universidades norte-americanas entre 1990 e 1991?
(a) 2.320 (b) 2.350 (c) 2.360 (d) 2.240

4. Quantos transplantes de rins foram feitos em 1991?
(a) 2.946 (b) 8.972 (c) 9.943 (d) 7.341

5. Quantos verbetes há no American Heritage Dictionary?
(a) 60.000 (b) 80.000 (c) 75.000 (d) 83.000

Resultados do teste

As respostas corretas são:

1. d 2. a 3. b 4. c 5. b

Conte o número de questões a que você respondeu corretamente. Chamemos esse número de *x*.

Por que esse foi um experimento binomial?

Quais são os valores de *n*, *p* e *q*?

Quais são os valores possíveis de *x*?

Experimentos binomiais

Um teste de múltipla escolha tem oito questões, cada qual com três alternativas, uma delas correta. Você quer saber qual a probabilidade de 'chutar' certo em exatamente cinco questões. Determine *n*, *p*, *q* e *x*.

$n = 8$ $p = 1/3$ $q = 2/3$ $x = 5$

Um médico lhe diz que certa cirurgia é bem-sucedida em 80% das vezes. Se a cirurgia for realizada sete vezes, determine a probabilidade de ser bem-sucedida em exatamente seis. Determine *n*, *p*, *q* e *x*.

$n = 7$ $p = 0{,}80$ $q = 0{,}20$ $x = 6$

Probabilidades binomiais

Determine a probabilidade de acertar exatamente três questões naquele teste que você fez.

Escreva as primeiras três corretas e as últimas duas erradas como SSSFF

$P(\text{SSSFF}) = (0{,}25)(0{,}25)(0{,}25)(0{,}75)(0{,}75) = (0{,}25)^3(0{,}75)^2 = 0{,}00879$

Uma vez que a ordem não importa, qualquer combinação de três questões corretas entre cinco servirá. Enumere essas combinações.

SSSFF SSFSF SSFFS SFFSS SFSFS
FFSSS FSFSS FSSFS SFSSF FFSSF

Cada uma dessas dez maneiras tem uma probabilidade de 0,00879.

$$P(x = 3) = 10(0{,}25)^3(0{,}75)^2 = 10(0{,}00879) = 0{,}0879$$

Combinação de *n* valores, escolhendo-se *x*

$$_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \qquad {}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!}$$

Há $_nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ maneiras.

Determine a probabilidade de alguém acertar exatamente três questões naquele teste.

Cada uma dessas dez maneiras tem uma probabilidade de 0,00879.

$$P(x = 3) = 10(0{,}25)^3(0{,}75)^2 = 10(0{,}00879) = 0{,}0879$$

Probabilidades binomiais

Em um experimento binomial, a probabilidade de ocorrerem exatamente *x* sucessos em *n* tentativas é de

$$P(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

Use a fórmula para calcular a probabilidade de alguém não acertar nenhuma questão, exatamente uma, duas, três, quatro ou todas as cinco questões do teste.

$$P(0) = {}_5C_0 p^0 q^{5-0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} \mathbf{(0{,}25)^0\ (0{,}75)^5 = 0{,}237}$$

$$P(1) = {}_5C_1 p^1 q^{5-1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} \mathbf{(0{,}25)^1\ (0{,}75)^4 = 0{,}396}$$

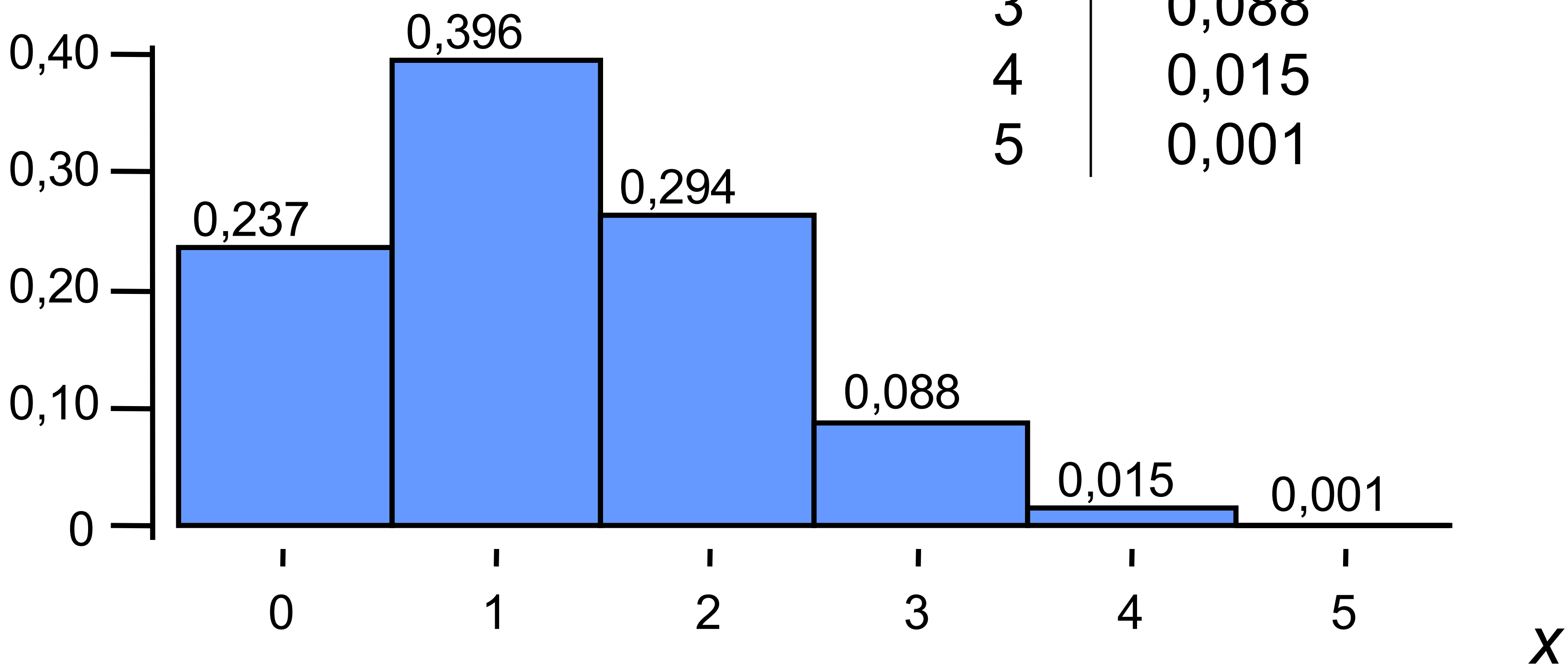
$$P(2) = {}_5C_2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} \mathbf{(0{,}25)^2\ (0{,}75)^3 = 0{,}264}$$

$P(3) = 0{,}088$ $P(4) = 0{,}015$ $P(5) = 0{,}001$

Distribuição binomial

x	$P(x)$
0	0,237
1	0,396
2	0,264
3	0,088
4	0,015
5	0,001

Histograma binomial



Probabilidades

x	$P(x)$
0	0,237
1	0,396
2	0,264
3	0,088
4	0,015
5	0,001

1. Qual é a probabilidade de se responder a duas ou quatro questões corretamente?

$$P(x = 2 \text{ ou } x = 4) = 0{,}264 + 0{,}015 = 0{,}279$$

2. Qual é a probabilidade de se responder corretamente a pelo menos três questões?

$$P(x \geq 3) = P(x = 3 \text{ ou } x = 4 \text{ ou } x = 5) = 0{,}088 + 0{,}015 + 0{,}001 = 0{,}104$$

3. Qual é a probabilidade de se responder corretamente a pelo menos uma questão?

$$P(x \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(x = 0) = 1 - 0{,}237 = 0{,}763$$

Parâmetros para um experimento binomial

Média: $\mu = np$

Variância: $\sigma^2 = npq$

Desvio padrão: $\sigma = \sqrt{npq}$

Use as fórmulas binomiais para determinar a média, a variância e o desvio padrão da distribuição de respostas corretas no teste.

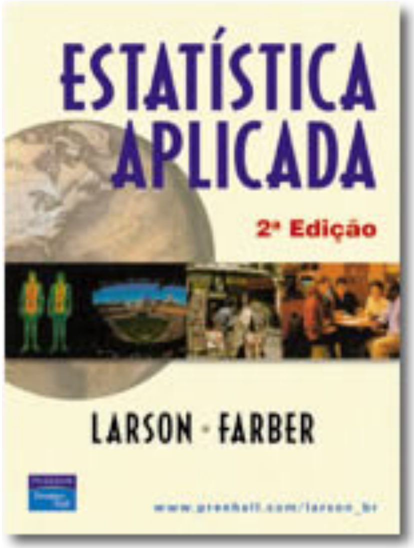
$$\mu = np = \mathbf{5(0{,}25)} = \mathbf{1{,}25}$$

$$\sigma^2 = npq = \mathbf{5(0{,}25)(0{,}75)} = \mathbf{0{,}9375}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq} = \sqrt{\mathbf{0{,}9375}} = \mathbf{0{,}968}$$

Seção 4.3

Mais distribuições discretas de probabilidade



A distribuição geométrica

Segundo uma pesquisa de mercado, a probabilidade de que cada pessoa que entra em determinada loja faça uma compra é de 0,30.

- A probabilidade de que a primeira compra seja feita pela primeira pessoa que entrar na loja é de 0,30. Ou seja: $P(1) = 0{,}30$.

- A probabilidade de que a primeira compra seja feita pela segunda pessoa que entrar na loja é de (0,70) (0,30).
Logo, $P(2) = (0{,}70)\ (0{,}30) = 0{,}21$.

- A probabilidade de que a primeira compra seja feita pela terceira pessoa que entrar na loja é de (0,70)(0,70)(0,30).
Logo, $P(3) = (0{,}70)\ (0{,}70)\ (0{,}30) = 0{,}147$.

A probabilidade de que a primeira compra seja feita pela pessoa número x é de
$P(x) = (0{,}70)^{x-4}(0{,}30)$

A distribuição geométrica

Uma distribuição geométrica é uma distribuição discreta de probabilidade da variável aleatória *x* que satisfaz as seguintes condições.

1. *A tentativa é repetida até que o sucesso ocorra.*
2. *As sucessivas tentativas são independentes entre si.*
3. *A probabilidade de sucesso,* p*, é a mesma a cada tentativa.*

A probabilidade de que o primeiro sucesso ocorra na tentativa número *x* *é*: $P(x) = (q)^{x-1}p$, onde $q = 1 - p$.

Aplicação

Um fabricante de cereais colocou uma peça premiada nas embalagens de seu produto. A probabilidade de ganhar um prêmio é de um para quatro. Determine a probabilidade de que você:

a) *ganhe seu primeiro prêmio na quarta compra*;

$$P(4) = (0{,}75)^3 \cdot (0{,}25) = 0{,}1055$$

b) *ganhe seu primeiro prêmio na segunda ou terceira compra*;

$P(2) = (0{,}75)^1(0{,}25) = 0{,}1875$ e

$P(3) = (0{,}75)^2(0{,}25) = 0{,}1406$

Logo, $P(2 \text{ ou } 3) = 0{,}1875 + 0{,}1406 = 0{,}3281$

c) *não ganhe nenhum prêmio nas quatro primeiras compras*.

$$1 - (P(1) + P(2) + P(3) + P(4))$$
$$1 - (0{,}25 + 0{,}1875 + 0{,}1406 + 0{,}1055)$$
$$= 1 - 0{,}6836 = 0{,}3164$$

A distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta de probabilidade de uma variável aleatória *x* que satisfaz as seguintes condições:

1. O experimento consiste em contar o número de vezes, *x*, que um evento ocorre num intervalo de tempo, área ou espaço.
2. A probabilidade de que o evento ocorra é a mesma em cada intervalo.
3. O número de ocorrências em um intervalo independe do número de ocorrências em outro.

A probabilidade de exatamente *x* ocorrências em um intervalo é

$$P(x) = \frac{m^x e^{-\mu}}{x!}$$

e é um número irracional aproximadamente igual a 2,71828.
μ é o número médio de ocorrências por intervalo.

Aplicação

Estima-se que, em todo o mundo, os tubarões matem dez pessoas por ano. Determine a probabilidade:

a) de que três pessoas sejam mortas por tubarões este ano

$$P(3) = \frac{10^3\ (2{,}71828)^{-10}}{3!} = 0{,}0076$$

b) de que duas ou três pessoas sejam mortas por tubarões este ano

$$P(2) = \frac{10^2\ (2{,}71828)^{-10}}{2!} = 0{,}0023$$

$P(3) = 0{,}0076$

$P(2 \text{ ou } 3) = 0{,}0023 + 0{,}0076 = 0{,}0099$