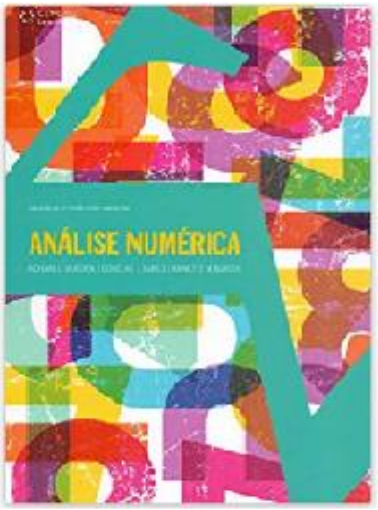
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 03 – 2º SEMESTRE/2019
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES (I)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o problema de resolução de sistemas lineares.
- Conhecer o método de eliminação de Gauss para resolução de sistemas lineares.
- Calcular a complexidade do método de eliminação de Gauss.



Para esta semana, usamos como referência as **Seção 6.1 (Sistemas de Equações Lineares)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 8.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

- Um **sistema de equações lineares** ou, abreviadamente, um **sistema linear** é um conjunto de equações lineares, conforme mostrado no exemplo abaixo:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\
E_2 &: \quad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\
E_3 &: \quad 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\
E_4 &: \quad -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4
\end{aligned}
$$

- Este exemplo possui, como **solução única**, $\mathbf{x_1 = 1}$, $\mathbf{x_2 = 2}$, $\mathbf{x_3 = 0}$ e $\mathbf{x_4 = 1}$.

- Genericamente, um sistema linear pode ser colocado na seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

- Existem **duas grandes categorias** de **métodos (algoritmos) numéricos** para resolver sistemas lineares:

    - **Métodos diretos:** fornecem uma resposta em um número fixo de passos, sujeita somente a erros de arredondamento. Exemplos: **Método de Eliminação de Gauss** (que será estudado nesta aula), Método de Gauss-Jordan, Método de Gauss-Jordan com Pivotamento Parcial, Fatoração LU, Fatoração QR, Método de Cholesky, dentre outros.

    - **Métodos de aproximação:** a partir de uma **aproximação inicial** (**"chute" inicial da solução**), realizam **processos iterativos** para obter **novas aproximações**, até atingir uma **tolerância de erro especificada**. Exemplos: **Método de Jacobi**, Método de Gauss-Seidel, dentre outros.

- **Operações Elementares**
    - A equação E_i pode ser multiplicada por qualquer constante λ que não seja nula e a equação resultante utilizada no lugar de E_i. Esta operação é denotada $(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$.
    - A equação E_j pode ser multiplicada por qualquer constante λ e adicionada à equação E_i e a equação resultante utilizada no lugar de E_i. Esta operação é denotada por $(E_i + \lambda E_j) \rightarrow E_i$.
    - As equações E_i e E_j podem troca de posição. Essa operação é denotada $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$.

    Por meio dessas operações um sistema linear pode ser transformado em um sistema linear mais fácil de resolver que terá as mesmas soluções.

MÉTODO DE GAUSS

- O **Método de Gauss** é um dos métodos diretos mais elementares para resolução de sistemas lineares e consiste em transformar o sistema a ser resolvido em um **sistema triangular superior equivalente** , de resolução mais simples.

- Um **sistema triangular superior** é aquele em que temos **coeficientes diferentes de zero** somente nas **posições iguais ou superiores à diagonal principal**, conforme mostrado no exemplo a seguir:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + x_2 \qquad\quad + \ 3x_4 = \ \ 4 \\
E_2 &: \quad\ \ - x_2 - \ x_3 - \ 5x_4 = -7 \\
E_3 &: \qquad\qquad\quad 3x_3 + 13x_4 = \ \ 13 \\
E_4 &: \qquad\qquad\qquad\ - 13x_4 = -13
\end{aligned}
$$

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

1. Resolva, através de substituições retroativas (ou sucessivas), o sistema linear abaixo:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 + x_2 \qquad\quad + \ 3x_4 = \ \ 4 \\
E_2 &: \quad\ \ - x_2 - \ x_3 - \ 5x_4 = -7 \\
E_3 &: \qquad\qquad\quad 3x_3 + 13x_4 = \ \ 13 \\
E_4 &: \qquad\qquad\qquad\ - 13x_4 = -13
\end{aligned}
$$

Como E_4 implica $x_4 = 1$, podemos determinar x_3 a partir de E_3:

$$x_3 = \frac{1}{3}(13 - 13x_4) = \frac{1}{3}(13 - 13) = 0.$$

Continuando, E_2 resulta em

$$x_2 = -(-7 + 5x_4 + x_3) = -(-7 + 5 + 0) = 2,$$

e E_1 resulta em

$$x_1 = 4 - 3x_4 - x_2 = 4 - 3 - 2 = -1.$$

A solução do sistema é portanto, $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 0$ e $x_4 = 1$.

- Um sistema triangular superior pode ser colocado, genericamente, na seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{nn}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned}$$

e, sua resolução, através da seguinte fórmula:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

...

$$x_i = \frac{a_{i,n+1} - a_{i,n}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \cdots - a_{i,i+1}x_{i+1}}{a_{ii}} = \frac{a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

EXERCÍCIO TUTORIADO

2. Escreva um algoritmo numérico chamado TRIANGULAR que resolva um sistema triangular superior, supondo que a solução exista. Estime a quantidade de operações realizadas em função do tamanho do sistema (n equações e n incógnitas).

Supondo um sistema linear n x n em sua forma triangular superior:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1}, \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1}, \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{nn}x_n &= a_{n,n+1}, \end{aligned}$$

Um algoritmo numérico em pseudocódigo denominado TRIANGULAR conterá:

ENTRADA número de incógnitas e de equações n; matriz aumentada $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n + 1$.

SAÍDA solução $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Passo 1 Faça $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$. *(Começa a substituição regressiva.)*

Passo 2 Para $i = n - 1, \ldots, 1$ faça $x_i = [a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j]/a_{ii}$.

Passo 3 SAÍDA $(x_1, \ldots, x_n)$; *(Processo completado com sucesso.)*

PARE.

Complexidades:

Multiplicações/divisões:

$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} ((n - i) + 1) = 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} (n - i) \right) + n - 1$$

$$= n + \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) = n + \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Adições/subtrações:

$$\sum_{i=1}^{n-1} ((n - i - 1) + 1) = \sum_{i=1}^{n-1} (n - i) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n^2 - n}{2}$$

Número de operações de multiplicações/divisões é conforme apresentado, para um n grande o número de multiplicações e divisões será aproximadamente $n^2/2$, igualmente para adições e subtrações. A quantidade de operações e tempo exigidos aumenta com n proporcionalmente a n^2, portanto o algoritmo possui uma ordem de complexidade com crescimento quadrático.

MÉTODO DE GAUSS (CONTINUAÇÃO)

- Para transformar o sistema a ser resolvido em um sistema triangular superior equivalente, o Método de Gauss utiliza uma estratégia chamada **pivotamento**, que opera sobre a **matriz aumentada no sistema**.

- Considerando que o sistema a ser resolvido seja

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 &: \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
E_n &: \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

  sua matriz aumentada é dada por

$$
\tilde{A} = [A, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]
$$

- Cada passo (k) do **pivotamento** é dado pela fórmula abaixo. Executamos os passos de pivotamento para k=1,2,..., n.

$$
a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k-1)}, & \text{when } i = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ and } j = 1, 2, \ldots, n+1, \\ 0, & \text{when } i = k, k+1, \ldots, n \text{ and } j = 1, 2, \cdots, k-1, \\ a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} a_{k-1,j}^{(k-1)}, & \text{when } i = k, k+1, \ldots, n \text{ and } j = k, k+1, \ldots, n+1 \end{cases}
$$

- Embora os passos do pivotamento sejam definidos recursivamente, o algoritmo de **pivotamento normalmente é especificado sem uso da recursividade**.

EXERCÍCIO TUTORIADO

3. Utilizando a técnica de pivotamento do Método de Gauss, transforme o sistema linear para um sistema triangular superior equivalente e, sem seguida, resolva-o.

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8,\\
E_2 &: \quad 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20,\\
E_3 &: \quad x_1 + x_2 + x_3 = -2,\\
E_4 &: \quad x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4.
\end{aligned}$$

Resposta:

Solução A matriz aumentada é

$$\tilde{A} = \tilde{A}^{(1)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

e efetuando as operações

$$(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2),\ (E_3 - E_1) \rightarrow (E_3) \quad \text{e} \quad (E_4 - E_1) \rightarrow (E_4),$$

teremos

$$\tilde{A}^{(2)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right].$$

O elemento diagonal $a_{22}^{(2)}$, chamado **elemento pivô**, é nulo, de modo que o procedimento não pode continuar na forma atual. Mas a operação $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$ é permitida, de modo que é feita uma busca nos elementos $a_{32}^{(2)}$ e $a_{42}^{(2)}$ pelo primeiro elemento diferente de zero. Como $a_{32}^{(2)} \neq 0$, a operação $(E_2) \leftrightarrow (E_3)$ é efetuada para se obter uma nova matriz,

$$\tilde{A}^{(2)'} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 12 \end{array}\right].$$

Como x_2 já foi eliminado de E_3 e E_4, $\tilde{A}^{(3)}$ será $\tilde{A}^{(2)'}$ e os cálculos continuam com a operação $(E_4 + 2E_3) \rightarrow (E_4)$, o que fornece

$$\tilde{A}^{(4)} = \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right].$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{4}{2} = 2, \\ x_3 &= \frac{[-4 - (-1)x_4]}{-1} = 2, \\ x_2 &= \frac{[6 - [(-1)x_3 + x_4]]}{2} = 3, \\ x_1 &= \frac{[-8 - [(-1)x_2 + 2x_3 + (-1)x_4]]}{1} = -7. \end{aligned}$$

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Escreva um algoritmo numérico chamado PIVOTAMENTO para representar a estratégia de pivotamento do Método de Gauss. Calcule a complexidade do seu algoritmo em função do tamanho do sistema a ser resolvido.

2. Escreva um algoritmo numérico chamado GAUSS, quer utilize o algoritmo PIVOTAMENTO da questão (1) e o algoritmo TRIANGULAR visto em aula para resolver sistemas lineares. Calcule a complexidade do seu algoritmo em função do tamanho do sistema a ser resolvido.

3. Resolva, se possível, os sistemas abaixo pelo Método de Gauss:

a.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -x_1 + 2x_3 &= 3, \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 &= 1. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 &= 3, \\ x_1 + 1.5x_2 &= 4.5, \\ -3x_2 + 0.5x_3 &= -6.6, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0.8. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$