1ª Lista de Revisão – Matemática Discreta II – Turmas C02G/C02N – I/2018

(1) Sendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ o conjunto dos números naturais, dê um exemplo de uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que é:

a. Injetora, mas não sobrejetora.
b. Sobrejetora, mas não injetora.
c. Injetora e sobrejetora, mas diferente da função identidade (isto é, diferente da função dada por $f(x) = x$)
d. Nem injetora nem sobrejetora.

(2) Encontre o domínio e o conjunto imagem das funções abaixo.

a. A função que determina, para cada par de números inteiros positivos, o máximo desses dois inteiros.
b. A função que determina, para cada número inteiro positivo, quantos dos dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 não aparecem como dígito decimal do número inteiro dado (Exemplo: $f(9876543210) = 0$ pois nenhum dos dígitos deixa de aparecer e $f(1153) = 7$ pois não aparecem os seguintes sete dígitos: 0, 2, 4, 6, 7, 8 e 9).
c. A função que determina, para uma sequência não vazia de bits, o número de vezes que o bloco 11 aparece.

(3) Construa o gráfico da função $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = 1 - n^2$.

(4) [Rosen] Determine se a relação R no conjunto de todos os números reais é reflexiva, simétrica e/ou transitiva, em que $(x, y) \in R$ se, e somente se:

a. $x + y = 0$
b. $x = \pm y$
c. $x - y$ é um número racional
d. $xy \geq 0$
e. $x = 2y$

(5) Dado o conjunto A={1,2,3,4,5,6,7,8,9}, considere a relação R dada por $R = \{(x, y) \in A \times A: x \equiv y \bmod 3\}$.

a. Liste todos os pares da relação R.
b. Represente a relação R em notação de matriz.
c. Represente a relação R em notação de grafo.

(6) Considere a relação $R = \{(a, b): a \text{ divide } b\}$ no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a. Liste todos os pares ordenados na relação R.
b. Represente essa relação na forma de matriz.
c. Represente essa relação na forma de grafo direcionado.

(7) Determine se a relação R no conjunto de todos os inteiros é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e/ou transitiva.

a. $R = \{(a, b): a \neq b\}$.
b. $R = \{(a, b): a \cdot b \geq 1\}$.
c. $R = \{(a, b): a \text{ é } um\ múltiplo\ de\ b\}$.

(8) Quais destas relações no conjunto de todas as pessoas são relações de equivalência? Determine as propriedades de uma relação de equivalência que faltam para as outras.

a. $\{(a, b): a\ e\ b\ \text{têm}\ a\ mesma\ idade\}$
b. $\{(a, b): a\ e\ b\ \text{têm}\ os\ mesmos\ pais\}$
c. $\{(a, b): a\ e\ b\ \text{têm}\ um\ progenitor\ em\ comum\}$
d. $\{(a, b): a\ e\ b\ já\ se\ encontraram\}$
e. $\{(a, b): a\ e\ b\ falam\ uma\ mesma\ língua\}$

(9) Mostre que $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2: x \equiv y \bmod 4\}$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}^2$ e obtenha uma partição de $\mathbb{Z}$ induzida pela relação R.

(10) Resolva as seguintes relações de recorrência lineares:

a. $\begin{cases} T(1) = 0 \\ T(n) = 3 \cdot T(n-1) + 2n; n > 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} T(1) = -1 \\ T(n) = -T(n-1) + 1; n > 1 \end{cases}$