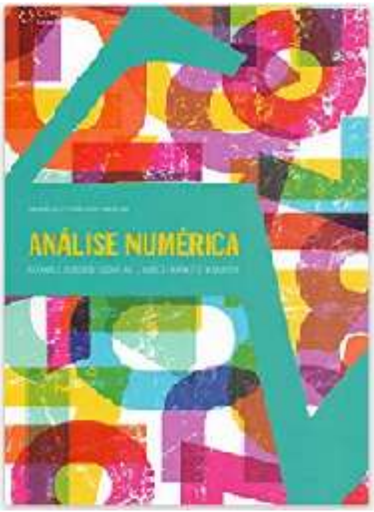
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 09 – 2º SEMESTRE/2019
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES (I)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o problema de interpolação de funções
- Estudar o Método de Interpolação por Polinômios de Lagrange



Para esta semana, usamos como referência a **Seção 3.1 (Interpolação e Polinômios de Lagrange)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

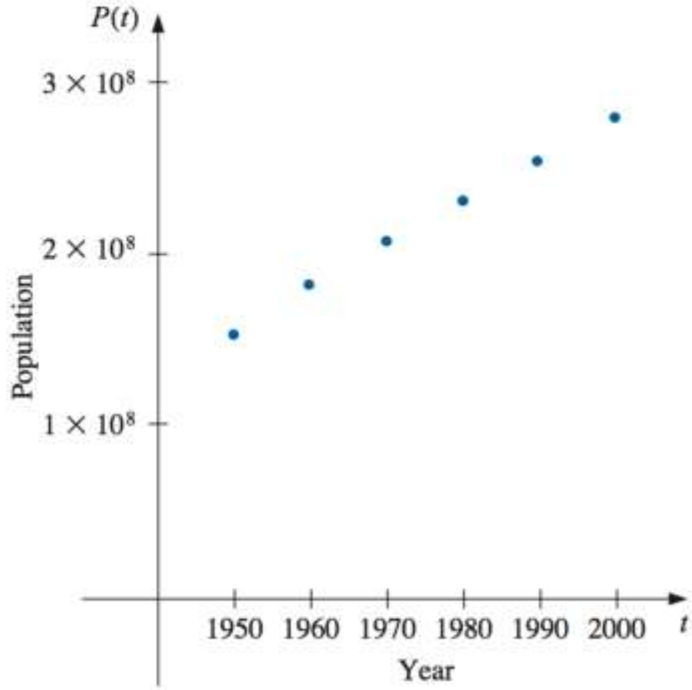
PROBLEMA DA INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES

- Suponha que tenhamos o censo populacional de 1950 a 2000, tomado de 10 em 10 anos, conforme mostrado na tabela abaixo:

Year	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Population (in thousands)	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633	281,422

- Seria possível,a partir destes dados, obter uma estimativa da população no ano de 1975 e em 2010 ?

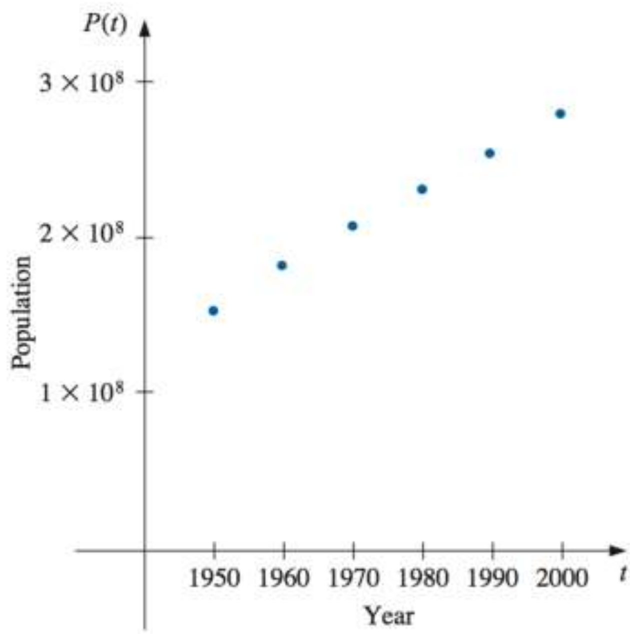
- Colocando os pontos da tabela anterior em um gráfico, obtemos uma **função discreta** conforme mostrado a seguir:

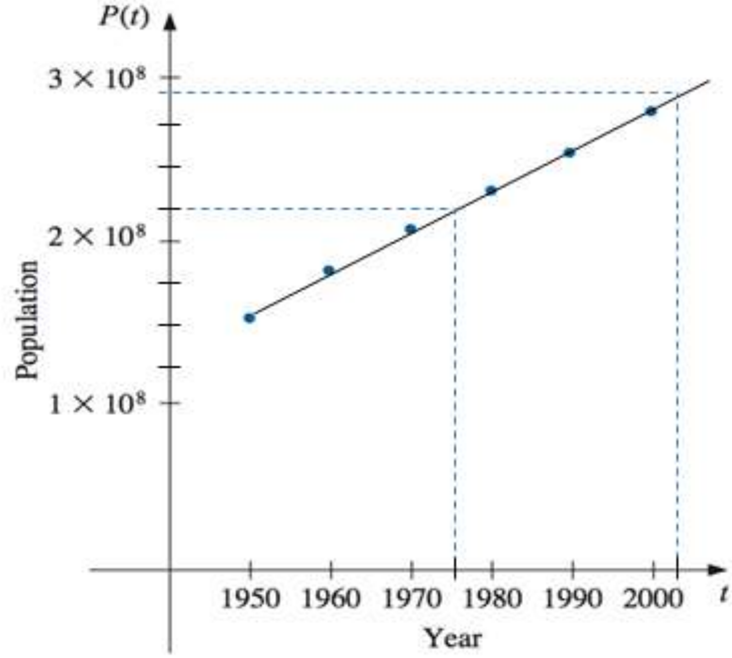


- Se quisermos obter uma estimativa da população em 1975, devemos gerar um novo ponto do gráfico em t=1975 e obter um valor correspondente a este ponto. Isto é chamado de **interpolação de dados**, pois estamos gerando novos pontos no interior do conjunto conhecidos de dados. Para 2010, devemos obter um ponto for a do conjunto conhecido de dado e isto é chamado de **extrapolação de dados**.

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

1. Obtenha, graficamente, uma interpolação para t=1975 e para t=2021 para a função discreta mostrada abaixo:





INTERPOLAÇÃO POR POLINÔMIOS DE LAGRANGE

- Os Polinômios de Lagrange representam uma estratégia de interpolação polinomial, que constrói uma base de um espaço vetorial de polinômios, cuja combinação linear tem a propriedade de passar pelos pontos que estão sendo interpolados.

- Vamos considerar, inicialmente, somente **dois pontos** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ e $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, com $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{y_0}$ e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}) = \boldsymbol{y_1}$**.** Construímos, inicialmente, dois polinômios com estes dois pontos, mostrados abaixo:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

- Vamos construir uma função interpoladora $P(x)$ com base nos polinômios acima da seguinte maneira:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1)$$

- $P(x)$ é chamado **Polinômio Interpolador de Lagrange de grau 1** da função $f(x)$ ou, simplesmente, **Polinômio de Lagrange** de $f(x)$.

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

2. Mostre que o Polinômio de Lagrange $P(x)$ passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Em primeiro lugar, definimos as funções:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

O **polinômio interpolador de Lagrange** linear por (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1).$$

Observe que

$$L_0(x_0) = 1, \qquad L_0(x_1) = 0, \qquad L_1(x_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad L_1(x_1) = 1,$$

o que implica que

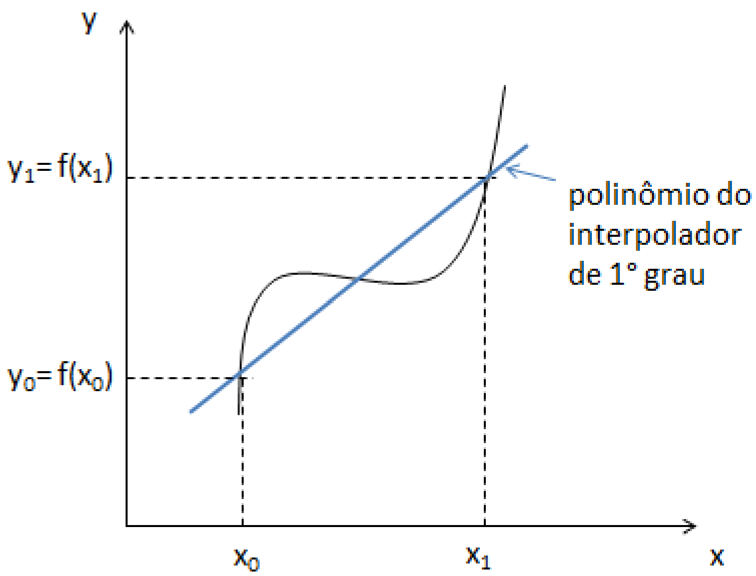
$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

e

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Assim, P é o único polinômio de grau no máximo 1 que passa por (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

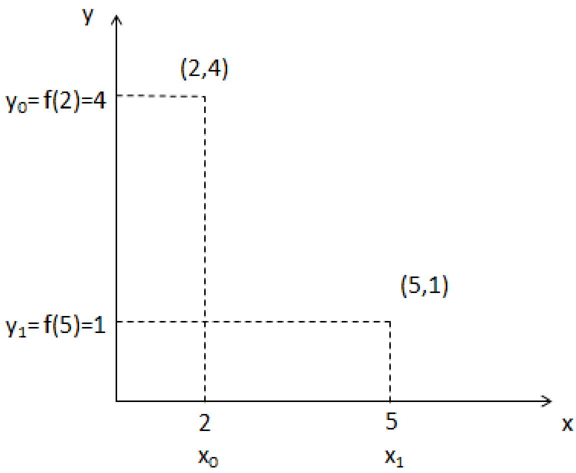
Gráfico com a reta de interpolação passando pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1)



3. Calcule o Polinômio de Lagrange que passe pelos pontos (2,4) e (5,1). Interprete geometricamente o que representa este polinômio.

$(x_0,y_0)=(2,4)$, $(x_1,y_1)=(5,1)$

Pontos identificados no plano cartesiano



Sendo:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{e} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

O **polinômio interpolador de Lagrange** linear por (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1).$$

$$\boldsymbol{L_0} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - 5}{2 - 5} = \frac{\boldsymbol{x - 5}}{\boldsymbol{-3}}$$

$$\boldsymbol{L_1} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{\boldsymbol{x - 2}}{\boldsymbol{3}}$$

$$f(x_0) = f(2) = 4$$

$$f(x_1) = f(5) = 1$$

$$P(x) = \frac{x - 5}{-3}.4 + \frac{x - 2}{3}.1 = \frac{-3x + 18}{3} = -x + 6$$

O polinômio interpolador de Lagrange será: $P(x) = -x + 6$

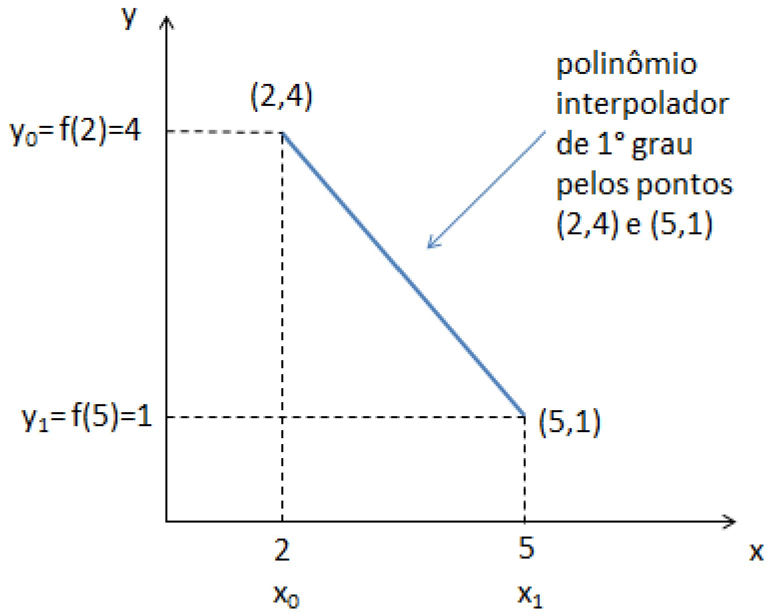
Teste:

$f(x_0) = f(2) = \ -2 + 6 = 4$

$f(x_1) = f(5) = -5 + 6 \ = 1$

Portanto, a função $P(x) = -x + 6$ passa pelos pontos: { (2,4), (5,1) }

Gráfico com a reta de interpolação passando pelos pontos (2,4) e (5,1)



INTERPOLAÇÃO POR POLINÔMIOS DE LAGRANGE (Continuação)

- A ideia anterior pode ser estendida para mais de pontos. Se **tivermos n+1 pontos** $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$…$(\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})$, definimos os seguintes polinômios:

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

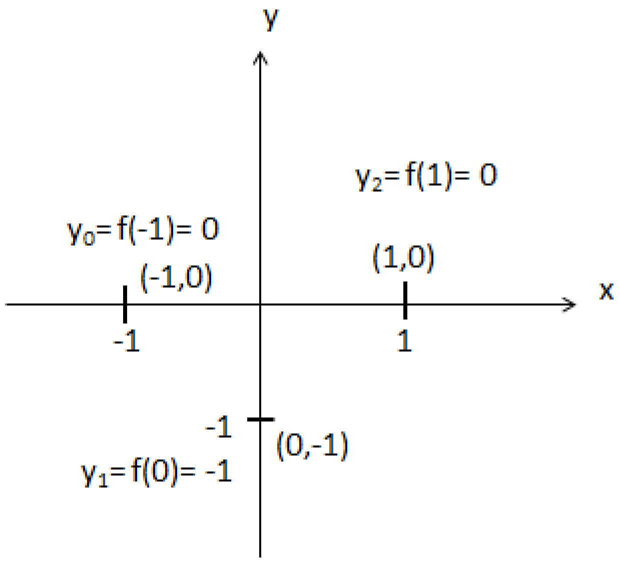
- A partir destes polinômios, definimos o **Polinômio Interpolador de Lagrange de grau n** da seguinte forma:

$$P(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_{n,k}(x),$$

4. Calcule o Polinômio de Lagrange que passe pelos pontos (-1,0), (0,-1) e (1,0). Interprete geometricamente o que representa este polinômio.

$(x_0,y_0)=(-1,0)$, $(x_1,y_1)=(0,-1)$, $(x_2,y_2)=(1,0)$

Pontos no plano cartesiano



$P(x) = f(x_0).L_{2,0}(x) + f(x_1).L_{2,1}(x) + f(x_2).L_{2,2}(x)$

$f(x_0) = 0$

$f(x_1) = -1$

$f(x_2) = 0$

$$L_{2,0}(x) = L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)}{[(-1) - 0][(-1) - 1)} = \frac{x(x - 1)}{2}$$

$$\boldsymbol{L_0(x) = \frac{x^2 - x}{2}}$$

$$L_{2,1}(x) = L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{[(x - (-1)](x - 1)}{[0 - (-1)](0 - 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{-1}$$

$$\boldsymbol{L_1(x) = -x^2 + 1}$$

$$L_{2,2}(x) = L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$L_2(x) = \frac{[(x - (-1)](x - 0)}{[1 - (-1)](1 - 0)} = \frac{(x + 1)x}{2}$$

$$\boldsymbol{L_2(x) = \frac{x^2 + x}{2}}$$

Portanto,

$P(x) = f(x_0).L_0(x) + f(x_1).L_1(x) + f(x_2).L_2(x)$

$P(x) = 0.L_0(x) + (-1).(-x^2 + 1) + 0.L_2(x)$

$P(x) = x^2 - 1$

Teste:

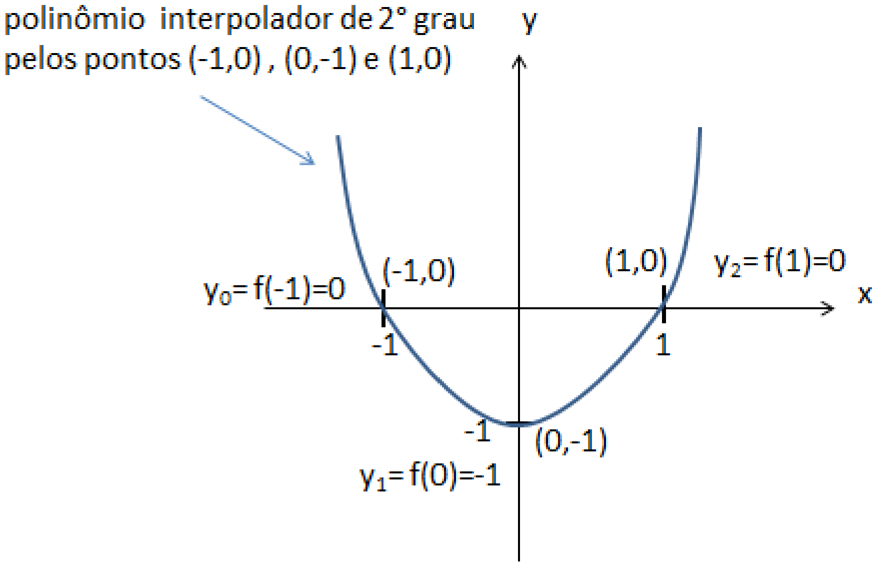
$f(x_0) = f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$

$f(x_1) = f(0) = (0)^2 - 1 = -1$

$f(x_2) = f(1) = (1)^2 - 1 = 0$

Portanto, a função $P(x) = x^2 - 1$ passa pelos pontos: { (-1,0), (0,-1), (1,0)}

Gráfico com uma parábola de interpolação passando pelos pontos (-1,0), (0,-1) e (1,0)



EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Calcule os Polinômios de Lagrange para as seguintes funções discretas:

   a. $f(8.4)$ if $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

   b. $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ if $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$, $f(0) = 1.10100000$

   c. $f(0.25)$ if $f(0.1) = 0.62049958$, $f(0.2) = -0.28398668$, $f(0.3) = 0.00660095$, $f(0.4) = 0.24842440$

   d. $f(0.9)$ if $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

2. Seja $f(x) = e^x$, para $0 \le x \le 2$:

   - Aproxime $f(0.25)$ usando uma interpolação linear neste intervalo
   - Aproxime $f(0.75)$ usando uma interpolação linear neste intervalo