

1ª Lista de Exercícios – Matemática Discreta II – Turmas C02G/C02N – II/2018

Tópicos abordados:

- Funções: definições básicas, injetividade, sobrejetividade e bijetividade
- Funções: composta, inversa e permutações;
- Definições recursivas

(1) Determine se f é uma função de \mathbb{Z} em \mathbb{R} , justificando caso não seja.

- $f(n) = \pm n$
- $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$
- $f(n) = \frac{1}{n^2 - 4}$

(2) Determine em cada caso se f é uma função do conjunto de todas as sequências binárias (isto é, formadas por zeros e/ou uns apenas) finitas e não-vazias para o conjunto dos inteiros. Caso f não seja uma função, justifique.

- $f(x)$ é a posição de um *bit* 0 em x
- $f(x)$ é a quantidade de *bits* 1 que aparecem em x
- $f(x) = i$, onde i é o menor inteiro para o qual o *bit* na posição i é 1.

(3) Determine em cada caso se a função f de \mathbb{Z} em \mathbb{Z} a seguir é injetora, justificando sua resposta.

- $f(n) = n - 1$
- $f(n) = n^2 + 1$
- $f(n) = n^3$
- $f(n) = \lceil n/2 \rceil$, onde $\lceil x \rceil$ indica o menor inteiro maior ou igual a x
(Exemplos: $\lceil 2,7 \rceil = 3$, $\lceil 1,1 \rceil = 2$ e $\lceil 4 \rceil = 4$).

(4) Determine quais funções do exercício anterior são sobrejetoras e/ou bijetoras, justificando suas respostas.

(5) Considere as associações definidas por $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ dadas por $f(n) = 2^n$ e $g(n) = |n|$, onde $|n|$ indica o módulo do inteiro n .

- Calcule, se possível, $(f \circ g)(2)$ e $(g \circ f)(2)$.
- Obtenha, se possível, uma expressão genérica para $(f \circ g)(n)$ e para $(g \circ f)(n)$.
- $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$ são funções? Se sim, são iguais?

(6) Dada a permutação $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, encontre sua inversa f^{-1} , representando-a na notação de arranjo retangular e de ciclos.

(7) [Gersting] Calcule os cinco primeiros termos das seguintes sequências definidas por recursão:

- $$\begin{cases} D(1) = 3 \\ D(2) = 5 \\ D(n) = (n-1)D(n-1) + (n-2)D(n-2) \text{ para } n > 2 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} W(1) = 2 \\ W(2) = 3 \\ W(n) = W(n-1)W(n-2) \text{ para } n > 2 \end{cases}$$

- (8) [Gersting] Um conjunto T de números é definido por recorrência por
- $$\begin{cases} 2 \text{ pertence a } T \\ \text{Se } x \text{ pertence a } T, \text{ então } x + 3 \text{ e } 2x \text{ também pertencerão} \end{cases}$$
- Quais entre os números 6, 7, 12 e 19 pertencem ao conjunto T ?

- (9) Considere o seguinte algoritmo recursivo que calcula o produto entre dois inteiros positivos m e n :

Algoritmo: <i>Produto</i> (m, n)
Entrada: inteiros positivos m e n
Saída: o produto $m \cdot n$
Início se $n = 1$, então retorne m senão retorne $\text{Produto}(m, n - 1) + m$ fim se fim

Para a chamada *Produto*(5,3), quantas vezes a função *Produto* é chamada (sem contar a própria *Produto*(5,3))? E para a chamada *Produto*(3,5)?