2. PROBABILIDADE

2.1. – Experimento Aleatório

São aqueles que não podem ser previamente determinados. Essa impossibilidade de prever-se os resultados, chamamos de acaso .

Exemplo: Lançar um dado e anotar o número que ocorrerá na face voltada para cima.

2.2. – Espaço Amostral (Ω)

É o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplo 1: Ao se lançar um dado e observar a face superior, tem-se o espaço amostral:

$$\Omega = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

Exemplo 2: Numa partida de futebol, uma das equipes pode obter resultados tais como: vitória (v), empate (e) ou derrota (d). Tem-se então:

$$\Omega = \{ v, e, d \}$$

2.3. – Evento

É um conjunto qualquer de resultados de um experimento aleatório. Pode-se dizer que um evento é um subconjunto do espaço amostral.

Tipos de eventos:

- Evento certo – é o próprio espaço amostral.

Exemplo: Lançamento de um dado e ocorrência de um número menor ou igual a 6 na face superior.

- Evento impossível – é o subconjunto vazio do espaço amostral.

Exemplo: Lançamento de um dado e ocorrência de um número maior do que 6 na face superior.

- Eventos elementares – são aqueles que têm um só elemento.

Exemplo: Lançamento de um dado e ocorrência de um número ímpar maior do que 4 na face superior.

EXERCÍCIOS

1 – No lançamento de uma moeda duas vezes consecutivas, determine o número de ocorrência de:

R: $\Omega = \{ (C,C),(C,K),(K,C),(K,K) \}$

a) duas coroas (c); R: 1
b) duas caras (k); R:1
c) exatamente uma cara; R: 2
d) exatamente uma coroa; R: 2
e) pelo menos uma cara; R: 3
f) pelo menos uma coroa; R: 3
g) no mínimo uma cara; R: 3
h) no máximo uma cara. R: 3

2 - No lançamento consecutivo de dois dados de cores diferentes, um vermelho e um branco, observando-se a face superior temos o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6) \\ (2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6) \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6) \\ (4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6) \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6) \\ (6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6) \end{array} \right\}$$

Com base no espaço amostral acima, determine a ocorrência de números:

a) iguais nos dois dados; R: 6
b) cuja soma seja 12; R: 1
c) cuja soma seja menor ou igual a 12; R: 36
d) cuja soma seja igual a 9; R: 4
e) cuja soma seja menor que 10; R: 30
f) cuja soma seja 7; R: 6
g) iguais ou com soma igual a 8; R: 10
h) múltiplos de 3 nos dois dados. R: 4

4.1. O CÁLCULO DA PROBABILIDADE

Chamamos de probabilidade de um evento *A* $(A \subset \Omega)$ o número real P(A), tal que:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

onde: n(A) é o número de elementos de *A*;
n(Ω) é o número de elementos de Ω.

Exemplo 1: Considerando o lançamento de uma moeda e o evento *A* “obter cara”.

R: Ω = { k, c } n (Ω) = 2
A = { k } n (A) = 1

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 2: Considerando o lançamento de um dado, vamos calcular a probabilidade do:

R: Ω = { 1,2,3,4,5,6 }

a) evento *A* “obter um número par na face superior”. R: 1/2
b) evento *B* “obter um número menor ou igual a 6 na face superior”. R: 6/6
c) evento *C* “obter um número 4 na face superior”. R: 1/6
d) evento *D* “obter um número maior que 6 na face superior”. R: 0/6

Pelos exemplos que acabamos de ver, podemos concluir que:

- Probabilidade do evento certo é igual a 1.
- Probabilidade do evento impossível é igual a 0.
- Probalidade de um evento *A* qualquer $(A \subset \Omega)$ um número real P(*A*), tal que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Exemplo 3: Qual a probabilidade de sair o ás de ouro quando retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas?

R:1/52

Exemplo 4: Qual a probabilidade de sair um rei quando retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas?
R:1/13

Exemplo 5: Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Sendo retirada uma peça, calcule a probabilidade de essa peça ser defeituosa.

R:1/3

Exemplo 6: No lançamento de dois dados, calcule a probabilidade de se obter soma igual a 5.
R:1/9

Eventos Complementares ($P(A^c)$)

Dois eventos A e B são complementares se sua união é o espaço amostral e sua intersecção é vazia. O complementar de A será representado por A^c e temos: $A \cup A^c = \Omega$ e $A \cap A^C = \phi$.

A probabilidade de não ocorrer o evento *A* é igual a 1 menos a probabilidade de ocorrer *A*, que pode ser representada por:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Exemplo: A tabela a seguir, apresenta o número de bombas injetoras existentes em uma fábrica, conforme as suas características. Todas estão em caixas iguais. Escolhendo uma caixa ao acaso, determine a probabilidade dela:

Bombas	*Elétricas*	*Manuais*
Novas	45	30
Usadas	15	10

a) conter uma bomba nova;
R:3/4
b) conter uma bomba manual;
R:2/5
c) não conter uma bomba elétrica nova;
R:11/20
d) não conter uma bomba manual usada.
R:9/10

3.2. AXIOMAS E TEOREMAS

A probabilidade de ocorrer um evento A é representado por p(A) que satisfaz os seguintes axiomas.

1) $P(A) \geq 0$

2) $P(s) = 1$

3) $P(\phi) = 0$ (A probalidade de um conjunto vazio é zero.)

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (teorema da soma para eventos mutuamente exclusivos)

Há duas maneiras principais de atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral:

1) Atribuir probabilidades baseando-se em <u>características teóricas</u> da realização do fenômeno. Por exemplo, ao lançarmos um dado, temos o espaço amostral Ω = { 1,2,34,5,6 }. Admitindo que o dado foi construído de forma homogênea e com medidas rigorosamente simétricas, não temos nenhuma razão para privilegiar alguma das faces. Assim:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$$

2) Através de <u>frequência de ocorrências</u>. Observando as diversas repetições do fenômeno em que ocorre a variável de interesse podemos anotar o número de ocorrências de cada valor dessa variável. Para um número grande de realizações, a freqüência relativa poderia ser usada como probabilidade. Por exemplo, desejando estabelecer as probabilidades de cada face do dado, sem fazer nenhuma suposição teórica inicial sobre sua construção, usamos a experiência de sucessivas ocorrências.

De modo geral diremos que estamos fazendo um sorteio aleatório ou ao acaso em uma população, se a escolha desse ou daquele elemento só depende da probabilidade a ele atribuída, seja através da freqüência relativa ou de alguma suposição teórica.

Exemplo: Em uma sala de aula foi pesquisada a idade dos 50 alunos e obtivemos o seguinte resultado:

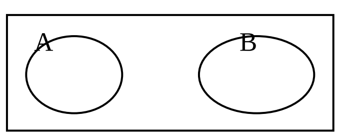
Idade	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Quantidade	9	22	7	4	3	0	2	1	2

Para a variável *Idade* na tabela do capítulo anterior, o espaço amostral será: Ω = { 17,18,19,20,21,22,23,24,25 }. Supondo que um aluno é escolhido ao acaso nessa população, definimos a probabilidade dele ter certa *Idade* pela freqüência relativa associada a essa respectiva *Idade* . Assim: P(17) = 0,18; P(18) = 0,44;.....; P(25) = 0,04.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUSIVOS (DISJUNTOS):

Dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um impede a ocorrência do outro. Diferentemente dos eventos complementares onde não necessariamente a união de dois eventos mutuamente exclusivos vai constituir o espaço amostral. Por isso todos os eventos complementares são mutuamente exclusivos, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, se lançarmos um dado e considerarmos os seguintes eventos: o primeiro estabelece o resultado como um número maior que dois { 3, 4 , 5 , 6} e o segundo um resultado menor que dois { 1 }. Nesse caso um número não pode ser maior e menor que dois ao mesmo tempo e a união dos dois conjuntos não forma o espaço amostral, pois o 2 está de fora.

Sendo A e B evento mutuante excludentes, isto é não podem ocorrer ao mesmo por $A \cap B = \phi$



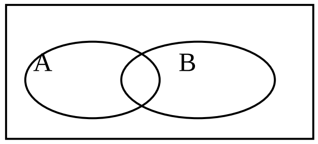
5) Se A1, A2.... An são dois eventos mutuante excludentes.

$$P(A1 \cup A2 \cup A3 \cup \ldots \cup An \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Ai)$$

6) P (AUB) = P (A) + P (B) – P ($A \cap B$) (regra geral ou para eventos não exclusivos)

EVENTOS NÃO EXCLUSIVOS:

Dois ou mais eventos são não mutuamente exclusivos quando é possível ambos ocorrerem simultaneamente. Necessariamente os dois eventos não necessitam ocorrer juntos.



4.3. PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

REGRAS DE MULTIPLICAÇÃO:

As regras de multiplicação se relacionam com a determinação da probabilidade da ocorrência conjunta de A e B, isto é a interseção de A e B.

P (A e B) = P $(A \cap B)$ = P (A) . P (B) (para eventos independentes)

P (A e B) = P $(A \cap B)$ = P (A) . P (B / A) (para eventos dependentes)

EVENTOS INDEPENDENTES:

Diz-se que dois ou mais eventos são independentes, quando eles não exercem ações recíprocas, comportando-se cada um de maneira que lhe é própria, sem influenciar os demais. Isto é, a ocorrência de um não influencia de maneira alguma a ocorrência do outro. Lançando-se uma moeda o fato de sair cara no primeiro lançamento em nada influencia a probabilidade de sair uma nova cara, ou não, em um segundo lançamento, porém, em um sorteio como o da loto, o fato de um número ter saído no primeiro sorteio já altera as probabilidades dos outros números saírem nos próximos sorteios.

EVENTOS DEPENDENTES:

Dois ou mais eventos são dependentes, quando eles exercem ações recíprocas, ou seja a ocorrência de um influencia de alguma maneira a ocorrência do outro.

O diagrama de árvore é particularmente útil como método para descrever os possíveis eventos conjuntos associados com as observações ou as tentativas seqüenciais.

Exemplo: A probabilidade de duas pessoas A e B resolverem um problema são 1/3 e 2/5, respectivamente. Sabendo que a resolução do problema é independente para A e B, calcule a probabilidade de que:

(a) nenhum resolva o problema
(b) pelo menos um resolva o problema
(c) A resolva o problema, mas B não
(d) B resolva o problema, mas A não.

Pessoa A	pessoa B	evento conjunto	probabilidade do evento conjunto
Ar	Br	Ar e Br	1/3 . 2/5
Ar	B $\bar{r}$	Ar e B $\bar{r}$	1/3 . 3/5
A $\bar{r}$	Br	A $\bar{r}$ e Br	2/3 . 2/5
A $\bar{r}$	B $\bar{r}$	A $\bar{r}$ e B $\bar{r}$	2/3 . 3/5