VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Uma quantidade X, associada a cada possível resultado do espaço amostral é denominada variável aleatória discreta, se assume valores num conjunto enumerável, com certa probabilidade.

Por outro lado, variável aleatória contínua é se seus elementos formam um intervalo de números reais, isto é, não-enumerável.

Vamos estudar as variáveis discretas.

Seja X uma variável aleatória discreta e $x_1, x_2, x_3, \ldots$ seus diferentes valores.

Definição: Função Discreta de Probabilidade(ou função de probabilidades) é a função que atribui a cada valor x_i sua probabilidade.

Notação: $P(X = x_i) = p(x_i) = p_i$; $i = 1, 2, 3, \ldots$

Ou

X	X_1	X_2	X_3	...
p_i	P_1	P_2	P_3	...

Onde $0 \le p_i \le 1$ e $\sum_{i=1} p_i = 1$

- Em geral, X terá apenas um número finito de valores possíveis e, assim, a verificação de que a soma das probabilidades é 1 será feita através de uma soma finita.

- As variáveis aleatórias são completamente caracterizadas por sua função de probabilidades e uma parte importante da estatística é, justamente, obter, para uma dada variável de interesse, a função de probabilidades que melhor representa seu comportamento na população.

Exemplo 1: Com os dados obtidos no último censo, a assistente social de um centro de saúde constatou que para as famílias da região, 20% não têm filhos, 30% têm um filho, 35% têm 2 filhos e as restantes se dividem igualmente entre 3, 4 ou 5 filhos. Suponha que uma família será escolhida ao acaso nessa região e o número de filhos averiguado.

- Seja N a variável aleatória número de filhos.

- Consideramos que a escolha é feita entre as diversas opções de valores para N, isto é, não importa qual a família escolhida, mas apenas qual é a resposta dada quanto ao número de filhos.

- Assim, sorteamos um valor de N dentre: 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

- A função de probabilidade segue as informações disponíveis:

20% das famílias não têm filhos, logo a probabilidade de uma família sorteada não ter filhos é:

$P(N = 0) = 0{,}20$,

- De forma semelhante: $P(N = 1) = 0{,}30$; $P(N = 2) = 0{,}35$.

- Para completar falta obter $P(N=3)$, $P(N=4)$ e $P(N=5)$ que, segundo informações dadas são iguais. Logo:

$$P(N=3) = P(N=4) = P(N=5) = p$$

E como $\sum_{i=1}^{5} P(N=i) = 1$ temos que P(N=1) + P(N=2) + P(N=3) + P(N=4) + P(N=5) = 1

Ou seja: 0,20 + 0,30 + 0,35 + p + p + p = 1 de onde obtemos que p = 0,15/3 = 0,05

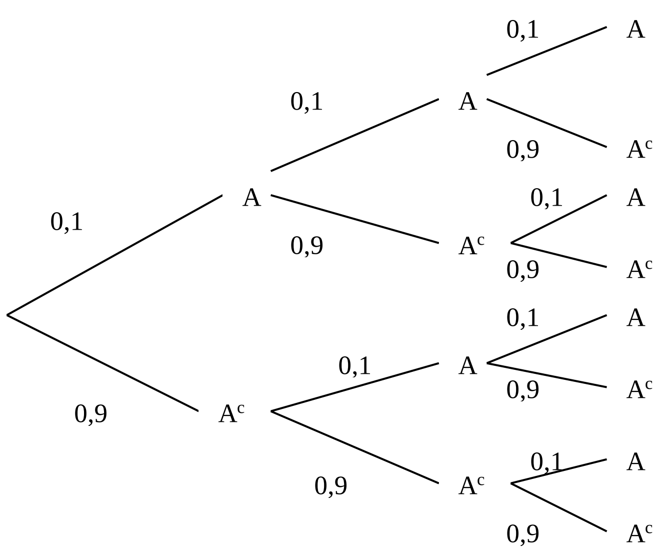
E a função de probabilidade para N é dada pela tabela:

N	0	1	2	3	4	5
p_i	0,20	0,30	0,35	0,05	0,05	0,05

Exemplo 2: Na construção de um prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade e, para cada 5 metros de estaca colocados, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos na resistência do subsolo. Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra. Com base em avaliações geológicas admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0,1 para cada 5m. O custo básico inicial é de 100UPCs e será acrescido de 50k, com k representando o número de alterações observadas. Como se comporta a variável custo das obras de fundação?

Solução: Assumimos que as alterações são independentes entre cada um dos 3 intervalos de 5m e representamos por A a ocorrência de alteração em cada intervalo e por A^c a não ocorrência.

Fazendo a árvore de probabilidades:



Assim, AA^cA significa que ocorreram alterações na primeira e terceira etapas, mas não na segunda. Como temos três etapas, cada uma com 2 possibilidades, temos um total de $2^3 = 8$ eventos.

Assim, sendo C a variável aleatória custo da obra, obtemos a tabela:

EVENTOS	PROBABILIDADES	C (em UPCs)
AAA	$(0,1)^3$	250
AAA^c	$(0,1)^2x(0,9)$	200
AA^cA	$(0,1)^2x(0,9)$	200
AA^cA^c	$(0,1)x(0,9)^2$	150
A^cAA	$(0,1)^2x(0,9)$	200
A^cAA^c	$(0,1)x(0,9)^2$	150
A^cA^cA	$(0,1)x(0,9)^2$	150
$A^cA^cA^c$	$(0,9)^3$	100

Associamos a cada evento do espaço amostral um valor para a variável aleatória C. Os valores possíveis são: $C_1 = 100$, $C_2 = 150$, $C_3 = 200$, $C_4 = 250$.

Além disso podemos ter um mesmo valor da variável associado a mais de um elemento do espaço amostral, por exemplo:

$$P(C = C_2) = P(C = 150) = P(AA^cA^c \cup A^cAA^c \cup A^cA^cA)$$

A probabilidade da união é a soma das probabilidades de cada evento, pois eles são disjuntos. Então:

$$P(C = C_2) = P(C = 150) = P(AA^cA^c) + P(A^cAA^c) + P(A^cA^cA) = 3x(0,1)x(0,9)^2 = 0,243$$

Fazendo o mesmo para os outros termos obtemos a função de probabilidade:

C	100	150	200	250
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Exemplo 3: Considere o experimento de lançar uma moeda e observar se ocorre cara ou coroa. Descreva o comportamento da variável número de caras em 2 lançamentos dessa moeda.

Solução: N é nossa variável de interesse, pode assumir os valores 0, 1 ou 2.

Suposições: a) P(cara) = P(coroa) = 0,5 (moeda “ honesta”)

b) Os lançamentos são independentes.

O espaço amostral é : $\Omega = \{$ CC, CR, RC, RR$\}$, onde C = cara e R = coroa.

Assim o valor 0 ocorre no evento RR, o valor 1 nos eventos CR e RC e o valor 2 no evento CCsegue então que as probabilidades associadas aos valores de N são as seguintes:

N	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

Exemplo 4: Um jogador paga 5 fichas para participar de um jogo de dados, disputando com a banca quem tem o ponto maior. O jogador e a banca lançam cada um o seu dado e a seguinte regrade premiação é estabelecida:

- Se o ponto do jogador é maior, ele ganha 2 vezes a diferença entre seu ponto e o obtido pela banca;

- Se o ponto do jogador é menor ou igual ao da banca ele não ganha nada.

O que você acha desse jogo?

Solução: Suposição - dados homogêneos

Sejam os pares (b, j) onde b = resultado da banca e j = resultado do jogador

b e j têm a mesma probabilidade de ocorrer, logo qualquer par também tem e com probabilidade 1/36.

Seja a variável discreta G como sendo o ganho bruto do jogador em uma jogada, isto é, o valor arrecadado sem descontar as fichas iniciais pagas para participar do jogo.

Pelas regras da premiação temos que:

$$G = \begin{cases} 2.(j - b) & \text{, se } j > b \\ 0 & \text{, se } j \leq b \end{cases}$$

Assim, se j = 5 e b = 6 então G = 0 pois j < b. Já se j = 3 e b = 1, então G = 2x(3-1) = 4.

O espaço amostral representado através dos pares (b, j) correspondente a uma jogada é dado abaixo:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)

(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

O valor G = 0 acontecerá quando o ponto do jogador for menor ou igual ao da banca, ou seja, corresponde ao seguinte subconjunto do espaço amostral:

(1, 1)

(2, 1), (2, 2)

(3, 1), (3, 2), (3, 3)

(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)

(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)

Esses 21 pares têm todos a mesma probabilidade de ocorrência e, portanto teremos P(G = 0) = 21/36. De modo análogo calculamos os demais valores e obtemos:

G	0	2	4	6	8	10
p_i	21/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

A conclusão sobre o jogo é óbvia. Tendo em vista as 5 fichas pagas no inicio o jogador só não terá prejuízo nos casos em que obtiver 6, 8 ou 10 fichas de retorno, o que acontecerá com a probabilidade: 3/36 + 2/36 + 1/36 = 6/36 = 1/6. Logo o jogo é altamente favorável à banca e, somente com muita sorte (1/36), o jogador ganhará o dobro do que apostou.

PROBABILIDADE ACUMULADA: FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

Definição: A função distribuição de probabilidade (ou função acumulada de probabilidade) de uma variável aleatória discreta X é definida, para qualquer x real, pela seguinte expressão:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Exemplo 5. Uma população de 1000 crianças foi analisada num estudo para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. No estudo, as crianças recebiam uma dose de vacina e, após um mês, passavam por um novo teste. Caso ainda estivessem tendo alguma reação alérgica recebiam outra dose de vacina. Ao fim de 5 doses todas as crianças foram consideradas imunizadas. Os resultados completos estão na tabela abaixo:

DOSES	1	2	3	4	5
FREQUÊNCIA	245	288	256	145	66

Supondo que uma criança dessa população é sorteada ao acaso, qual será a probabilidade dela ter recebido 2 doses?

Solução: A função de probabilidade é dada na tabela abaixo:

DOSES	1	2	3	4	5
p_i	0,245	0,288	0,256	0,145	0,066

Logo, a probabilidade desejada é: 0,288.

Se desejarmos calcular a probabilidade da criança ter recebido até 2 vacinas o que precisamos obter é a função de distribuição no ponto 2, ou seja, calculamos a probabilidade acumulada de ocorrências de valores menores ou iguais a 2. Assim:

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}533$$

Note que, como a variável só assume valores inteiros, esse valor fica inalterado no intervalo [2, 3). Isto é, F(2, 1), F(2,45) ou F(2,99) têm todos o mesmo valor acima. Por essa razão escrevemos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{.........se...} x < 1 \\ 0{,}245 \text{..se...} 1 \leq x < 2 \\ 0{,}533 \text{..se...} 2 \leq x < 3 \\ 0{,}789 \text{..se...} 3 \leq x < 4 \\ 0{,}934 \text{..se...} 4 \leq x < 5 \\ 1 \text{.........se...} x \geq 5 \end{cases}$$

Exemplo 6: Num estudo sobre incidência de câncer foi registrado, para cada paciente com esse diagnóstico, o número de casos de câncer em parentes próximos (pais, irmãos, tios, filhos, primos e sobrinhos). Os dados de 26 pacientes são os seguintes:

PACIENTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
INCIDÊNCIA	2	5	0	2	1	5	3	3	3	2	0	1	1	4

PACIENTE	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
INCIDÊNCIA	5	2	2	3	2	1	5	4	0	0	3	3

Estudos anteriores assumem que a incidência de câncer em parentes próximos pode ser teoricamente modelado pela seguinte função discreta de probabilidades:

incidência	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,1	0,3	0,3	0,1	0,1

Os dados observados concordam com o modelo clássico?

Solução: Da tabela de dados brutos retiramos cada valor da variável incidência e o número de ocorrências. Por outro lado, seguindo o modelo teórico, o número de observações que seria esperado em cada incidência (freqüência esperada) é calculado como $e_i = 26.p_i$.

Obs.: os valores esperados não precisam ser inteiros, pois representam uma freqüência teórica caso o modelo fosse adequado. Os resultados estão na tabela abaixo:

INCIDÊNCIA	N_i (observado)	E_i (esperado)
0	4	2,6
1	4	2,6
2	6	7,8
3	6	7,8
4	2	2,6
5	4	2,6
TOTAL	26	26

Conclusão: Notamos que os dados observados seguem a mesma tendência do modelo teórico, porém seus valores são discrepantes. É uma amostra pequena, mas parece não haver boa adaptação entre os dois conjuntos de números.

PRINCIPAIS MODELOS DISCRETOS

Em situações práticas algumas variáveis aparecem com bastante freqüência e justificam um estudo mais aprofundado. Nesses casos a distribuição de probabilidade pode ser escrita de uma maneira mais compacta, isto é, existe uma lei para atribuir as probabilidades.

Por exemplo, se uma variável aleatória W tem função de probabilidade dada por:

W	1	2	3	4	5	6
p_i	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

Então escrevemos essas probabilidades como: $P(W = k) = k/21$; onde $k = 1, 2, 3, ..., 6$. Dessa maneira temos uma forma abreviada de apresentar a variável e sua probabilidade.

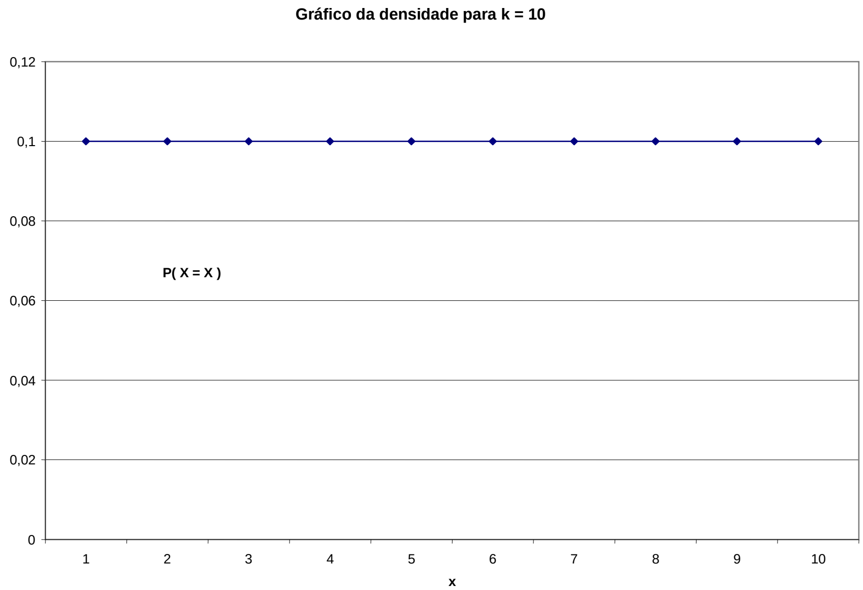
Veremos agora os principais modelos de variáveis aleatórias discretas. Comecemos pelo mais simples, que atribui igual probabilidade a todos os valores possíveis da variável.

MODELO UNIFORME DISCRETO: Seja X uma variável aleatória cujos valores são representados por x_1 , x_2 , x_3 ,..., x_k . Dizemos que X segue o Modelo Uniforme Discreto se atribui a mesma probabilidade 1/k a cada um dos k valores, isto é, se sua função de probabilidade for dada por:

$$P(X = x_j) = \frac{1}{k}$$ qualquer que seja j = 1 , 2 , 3 , ... , k.

Abaixo vemos o gráfico da densidade para o caso k = 10. Ou seja,

$$P(X = x) = \frac{1}{10} = 0{,}1$$



Observações: - Veja que a expressão na definição anterior representa uma função de probabilidade, uma vez que seus valores estão no intervalo [0 , 1] e a soma de todos vale 1.

- O modelo uniforme tem esse nome porque todos os seus valores ocorrem com a mesma probabilidade e, assim, podemos dizer que a probabilidade se distribui uniformemente entre os diversos valores.

Exemplo 7: Uma rifa tem 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Eu tenho 5 bilhetes consecutivos numerados de 21 a 25 e meu colega tem outros 5 bilhetes com os números 1, 11, 29, 68, 93. Quem tem maior probabilidade de ser sorteado?
Solução: Para uma rifa honesta, todos os números têm a mesma probabilidade de ocorrer, com probabilidade 1/100 para cada um. Assim, a variável aleatória em questão segue o modelo uniforme discreto e, portanto, nós dois temos a mesma probabilidade de ganhar.
A maior ou menor probabilidade de ganhar depende da quantidade de bilhetes, e não da escolha do número.

Modelo de Bernoulli.

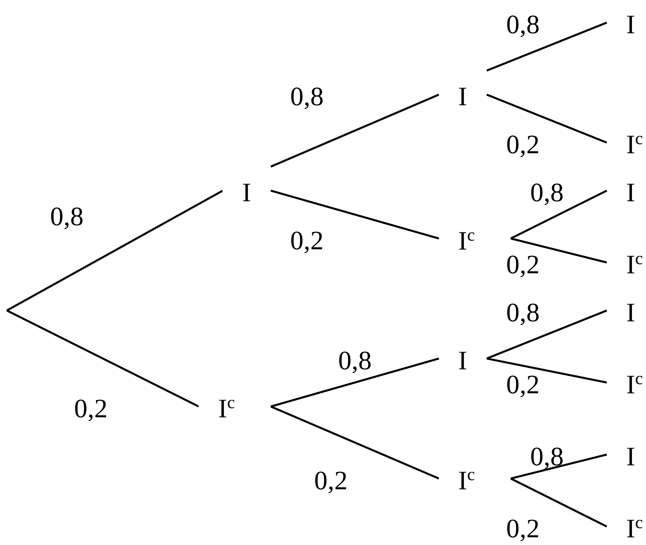
Em muitas situações práticas as variáveis assumem só 2 valores Por exemplo: peça boa ou peça defeituosa, alguém concorda ou não concorda com a sua opinião, a vacina imunizou ou não a criança.
São alternativas dicotômicas e que podemos genericamente considerar como sucesso X fracasso
- A atribuição de qual das respostas será definida como sucesso é feita de modo arbitrário, mas deve ser definida claramente.
- Esses eventos recebem o nome de Ensaios de Bernoulli e dão origem a uma variável aleatória de mesmo nome.
Dizemos que uma variável X segue o modelo de Bernoulli se atribui 0 ou 1 à ocorrência de fracasso ou sucesso, respectivamente, com p representando a probabilidade de sucesso. Sua função discreta de probabilidade é dada por:

X	0	1
p_i	1 - p	p

Ou, $$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}$$ para x = 0, 1.

A repetição de ensaios de Bernoulli independentes dá origem à mais importante variável aleatória discreta, denominada modelo Binomial.

Exemplo 8: Sabe- se que a eficiência de uma vacina é de 80%. Um grupo de 3 indivíduos é sorteado dentre a população vacinada e submetido a testes para averiguar se a imunização foi efetiva, evento representado por I.
Solução: Se considerarmos como sucesso a ocorrência de imunização temos a repetição de 3 ensaios de Bernoulli. Suponhamos que queremos estudar o comportamento da variável X : número de indivíduos imunizados nesse grupo. Ela assume os valores 0, 1, 2 e 3 com probabilidades calculadas com o auxilio da árvore:



De onde obtemos a tabela:

EVENTOS	PROBABILIDADES	X
III	$(0,8)^3$	3
III^c	$(0,8)^2x(0,2)$	2
II^cI	$(0,8)^2x(0,2)$	2
II^cI^c	$(0,8)x(0,2)^2$	1
I^cII	$(0,8)^2x(0,2)$	2
I^cII^c	$(0,8)x(0,2)^2$	1
I^cI^cI	$(0,8)x(0,2)^2$	1
$I^cI^cI^c$	$(0,2)^3$	0

Conseqüentemente, a função de probabilidade é:

X	0	1	2	3
p_i	$(0,2)^3$	$3x(0,8)x(0,2)^2$	$3x(0,8)^2x(0,2)$	$(0,8)^3$

O comportamento de X está completamente determinado pela função acima, cujas probabilidades também podem ser escritas através da expressão:

$$P(X = k) = \binom{3}{k} x 0{,}8^k x 0{,}2^{3-k} \quad \text{com } k = 0, 1, 2, 3.$$

Onde $$\binom{3}{k} = \frac{3!}{k!(3-k)!}$$

Modelo Binomial: Considere a repetição de n ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso p. A variável aleatória que conta o número total de sucessos é denominada Binomial com parâmetros n e p e sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{com } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- Notação: Usaremos X ~ b(n, p) para indicar que a variável aleatória X segue o modelo Binomial com parâmetros n e p.
- É importante notar que as probabilidades são completamente caracterizadas pela informação dos parâmetros.

Exemplo 9 : a) Calcular a probabilidade de 3 sucessos numa b (12; 0,4)

Solução: $$P(X = 3) = \binom{12}{3} 0{,}4^3 (0{,}6)^{12-3} = \frac{12!}{3!9!} 0{,}4^3 (0{,}6)^9 = 0{,}142$$

b) Obter a função de probabilidade para as 12 possibilidades:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	0,002	0,017	0,064	0,142	0,213	0,227	0,177	0,101	0,042	0,012	0,002	0^+	0^+

Exemplo 10 : (Variável Binomial aparecendo a partir de outras variáveis, através da criação de 2 categorias excludentes)

O escore em 1 teste internacional de proficiência em língua inglesa varia de 0 a 700 pontos, com mais pontos indicando melhor desempenho. Informações coletadas ao longo dos anos permitem estabelecer o seguinte modelo de desempenho no teste:

X	[0,200)	[200,300)	[300,400)	[400,500)	[500,600)	[600,700]
p_i	0,06	0,15	0,16	0,25	0,28	0,10

- Escore mínimo para Universidades Americanas: 600 pontos.
- De um grande número de estudantes brasileiros que fizeram o último exame escolhemos 20 deles. Qual a probabilidade de no máximo 3 atenderem ao requisito mínimo mencionado?

Solução: - Vamos assumir que a tabela vale para o último exame e que os estudantes brasileiros têm comportamento similar aos demais.

- critério : está apto – estudante que fizer 600 pontos ou mais.
Não- apto – estudante com menos de 600 pontos.
- Para cada individuo teremos a classificação de apto ou não, feita de modo independente e com as probabilidades:

P(apto) = 0,10 e P(não- apto) = 0,90 .

- Nova Variável: X = número de estudantes aptos dentre os 20. Temos X ~ b(20; 0,10) . A probabilidade de no máximo 3 serem aptos é calculada pela função distribuição no ponto 3, ou seja, F(3) = P(X≤ 3). Logo:

$$P(X \le 3) = \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} 0{,}1^k 0{,}9^{20-k} = \binom{20}{0} 0{,}1^0 0{,}9^{20} + \binom{20}{1} 0{,}1^1 0{,}9^{19} + \binom{20}{2} 0{,}1^2 0{,}9^{18} + \binom{20}{3} 0{,}1^3 0{,}9^{17} =$$

$$= 0{,}122 + 0{,}270 + 0{,}285 + 0{,}190 = 0{,}867$$

Portanto P(X ≤ 3) = 0,867. Este resultado reflete as altas probabilidades atribuídas aos escores menores de 600.

Exemplo 11: A probabilidade de ganhar em um certo jogo é 40% em 1 rodada, se uma pessoa vai jogar 5 rodadas, qual a probabilidade de ganhar:

a) uma rodada:

P = 0,40 q = 0,60 p + q = 1

x = 1
n = 5

P(X=1)=5x 0,4x 0,1296 = 0,2592

$P((X = x) = f(1) = C_n^x \,.\, p^x \,.\, q^{(n-x)}$

b) mais de 4 rodadas

X = 4

$P(x>4) = (x=5)\ f(x) = C_5^5 \,.\, 0{,}4^5 \,.\, 0{,}6^0 = 1 \times 0{,}01024 = 0{,}01014$

c) no máximo 1 rodada

X = 0 f (0) + f (1) = f (0) + f (1)

0,2592 + 0,0776 = 0,3868

$C_5^0 \,.\, 0{,}4^0 \,.\, 0{,}6^5 = 0{,}0776$

d) no mínimo 2 rodadas

f (2) U f (3) U f (4) U f (5)

ou

1 - (f (0) + f (1)) = 0,6632

Exemplo 12: Um time de futebol tem prob. constante de vencer um jogo num torneio equivalente a 30% qual a probabilidade de vencer a maioria das partidas em um torneio constituído por 5 jogos.

$$P(X \geq 3) = P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5)$$

$n = 5$
$p = 0{,}30$
$q = 0{,}70$

Exemplo 13: Uma companhia que vende equipamentos eletrônicos verifica que de todas as máquinas por ela instaladas, 40% exigem novos ajustamentos após a instalação.

a) Em 4 equipamentos instalados, qual a probabilidade de pelo menos 1 equipamento necessitar ajustamento.

a) $P = 0{,}40$
$q = 0{,}60$
$n = 4$

$$p(x \geq 1) = 1 - p(x = 0)$$

$$p(x = 0) = C_4^0 \; p^0 \; q^{4-0}$$

$$p(x \geq 1) = 1 - 0{,}1292 = 0{,}8704$$

Modelo de Poisson: Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad ; k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Onde λ é chamado de taxa de ocorrência.

Notação: $X \sim Po(\lambda)$.

- esse modelo é muito utilizado em modelos físicos e biológicos e, nesses casos, λ é a freqüência média ou esperada de ocorrências num determinado intervalo de tempo.
- Verificação que a expressão apresentada representa uma função de probabilidade.

a) $P \geq 0$ é óbvio.

b) $$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ é o desenvolvimento em série de Taylor do termo e^{λ}

Exemplo 15: A emissão de partículas radiativas tem sido modelada através de uma distribuição de Poisson, com o valor do parâmetro dependendo da fonte utilizada. Suponha que o número de partículas alfa, emitidas por minuto, seja uma variável aleatória segundo o modelo de Poisson com parâmetro 5, isto é, a taxa média de ocorrência é de 5 emissões a cada minuto. Calculemos a probabilidade de haver mais de 2 emissões em 1 minuto.

Solução: A = número de partículas α emitidas por minuto

A ~ Po (5) e a probabilidade desejada é:

$$P(A > 2) = \sum_{a=3}^{\infty} P(A = a) = 1 - \sum_{a=0}^{2} P(A = a) = 1 - \sum_{a=0}^{2} \frac{e^{-5} 5^{a}}{a!} = 0{,}875$$

Logo P(A > 2) = 0,875.

Se o intervalo de tempo é alterado, a variável aleatória mantém a mesma distribuição de Poisson, mas com o valor do parâmetro ajustado de forma conveniente. Assim, se o período de tempo for de 2 minutos, temos que o número de partículas emitidas em 2 minutos terá a distribuição: Po (10).

Exemplo 16: Engenheiros da companhia telefônica estudam se o modelo de Poisson pode ser ajustado ao número N de chamadas interestaduais que chegam por hora a uma central telefônica durante o período noturno. Os dados coletados, referentes a 650 períodos de 1 hora estão apresentados a seguir:

chamadas	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
Freq. observada	9	38	71	115	125	106	79	50	57

- Da tabela temos que, por exemplo, em 125 períodos de 1 hora ocorreram 4 chamadas.
- Os engenheiros sugerem utilizar uma taxa de ocorrência de o,45 chamadas por hora no período estudado. Seguindo o modelo indicado, a freqüência esperada de ocorrências com k chamadas é obtida multiplicando 650 (o total das observações) pela probabilidade de k chamadas. Assim, para k = 2 temos:

Freq. Esperada para 2 chamadas = 650xP(N=2) = $650x \frac{e^{-4,5}\, 4{,}5^{2}}{2!} = 73{,}13$

De modo análogo obtemos os demais valores:

chamadas	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
observadas	9	38	71	115	125	106	79	50	57
esperadas	7,22	32,50	73,13	109,66	123,37	111,02	83,27	53,56	53,36

A tabela acima parece indicar que o modelo de Poisson, com λ = 4,5 fornece um bom ajuste para a variável de interesse.
Pode- se ajustar melhor o parâmetro, visto que o indicado ($\lambda = 4{,}5$) já dá uma “boa pista” .