Projeto e Análise de Algoritmos I
Teorema Mestre

Antonio Luiz Basile

Faculdade de Computação e Informática
Universidade Presbiteriana Mackenzie

March 13, 2018

Método Mestre (CLR)

O método mestre provê uma receita para resolver recorrências da forma

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \tag{1}$$

onde $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva.
O método mestre depende do teorema a seguir.

Teorema Mestre

Theorem

Seja $a \geq 1$ *e* $b > 1$ *constantes, seja* $f(n)$ *uma função, e seja* $T(n)$ *definida sobre inteiros não negativos pela recorrência*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde interpretamos n/b *significando* $\lfloor n/b \rfloor$ *ou* $\lceil n/b \rceil$*. Então* $T(n)$ *tem os seguintes limites assintóticos:*

1. *Se* $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ *para alguma constante* $\epsilon > 0$*, então* $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*.*
2. *Se* $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$*, então* $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$*.*
3. *Se* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ *para alguma constante* $\epsilon > 0$*, e se* $af(n/b) \leq cf(n)$ *para alguma constante* $c < 1$ *e* n *suficientemente grande, então* $T(n) = \Theta(f(n))$*.*

Teorema Mestre: entendendo

Observe que em cada um dos três casos, comparamos a função $f(n)$ com a função $n^{log_b a}$. Intuitivamente, a maior entre as duas funções determina a solução da recorrência.

- Se, como no caso 1, a função $n^{log_b a}$ é a maior, então a solução é $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$.
- Se, como no caso 3, a função $f(n)$ é a maior, então a solução é $T(n) = \Theta(f(n))$.
- Se, como no caso 2, as duas funções tem o mesmo tamanho, multiplicamos por um fator logaritmico, e a solução é $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n) = \Theta(f(n) \lg n)$.

Teorema Mestre: observações

- No caso 1 do teorema mestre $f(n)$ não precisa ser apenas menor que $n^{log_b a}$, precisa ser polinomialmente menor. Isto significa que $f(n)$ precisa ser assintoticamente menor que $n^{log_b a}$ por um fator n^ϵ para alguma constante $\epsilon > 0$.
- No caso 3, não apenas $f(n)$ precisa ser maior que $n^{log_b a}$, mas precisa ser polinomialmente maior, além de satisfazer a condição de regularidade de $af(n/b) \leq cf(n)$.

Teorema Mestre: Exemplos (CLR)

- $T(n) = 9T(n/3) + n$
- $T(n) = T(2n/3) + 1$
- $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$
- $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

Exemplo 1: $T(n) = 9T(n/3) + n$

Aqui $a = 9$, $b = 3$ e $f(n) = n$, portanto temos

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$$

. Como $f(n) = O(n^{log_3 9-\epsilon})$, onde $\epsilon = 1$, pelo caso 1 do teorema mestre concluímos que a solução é $T(n) = \Theta(n^2)$

Exemplo 2: $T(n) = T(2n/3) + 1$

Aqui $a = 1$, $b = 3/2$ e $f(n) = 1$, portanto temos

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$$

. O caso 2 do teorema mestre se aplica, já que $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$, portanto concluímos que a solução para a recorrência é $T(n) = \Theta(\lg n)$.

Exemplo 3: $T(n) = 3T(n/4) + n \lg n$

Temos $a = 3$, $b = 4$ e $f(n) = n \lg n$, e

$$n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = \Theta(n^{0.793})$$

Como $f(n) = \Omega(n^{log_4 3+\epsilon})$, onde $\epsilon \sim 0.2$, o caso 3 se aplica, caso seja possível mostrar que vale a condição de regularidade para $f(n)$. Para n suficientemente grande, temos que

$$af(n/b) = 3(n/4) \lg(n/4) \leq (3/4) n \lg n = cf(n),$$

para $c = 3/4$.
Logo, pelo caso 3 do teorema mestre a solução é $T(n) = \Theta(n \lg n)$

Exemplo 4: $T(n) = 2T(n/2) + n \lg n$

Neste exemplo temos: $a = 2$, $b = 2$, $f(n) = n \lg n$ e $n^{\log_b a} = n$. Como $f(n) = n \lg n$ é assintoticamente maior que $n^{\log_b a} = n$, pode-se achar que o caso 3 do teorema mestre se aplica. O problema é que não é polinomialmente maior. A razão $f(n)/n^{\log_b a} = (n \lg n)/n = \lg n$ é assintoticamente menor que n^{ϵ} para qualquer constante positiva ϵ.