Universidade Presbiteriana Mackenzie

Programação Linear Geométrica – Modelagem e Otimização

Prof. Dr. Pericles do Prado

Faculdade de Computação e Informática

São Paulo, 12 de maio de 2015

- Neste capítulo é descrita uma técnica geométrica para maximizar ou minimizar uma expressão linear em duas variáveis sujeita a um conjunto de vínculos (restrições) lineares.
- O estudo da teoria da Programação Linear foi muito ampliado desde o trabalho pioneiro de George Dantzig no final da década de 1940. Hoje em dia, a Programação Linear é aplicada a uma grande variedade de problemas na indústria e na ciência.
- Neste capítulo apresentaremos uma abordagem geométrica para solução de problemas simples de Programação Linear.
- Começaremos com alguns exemplos.

- **EXEMPLO 1: Marcenaria**

Uma marcenaria produz dois produtos: mesa e armário. Para produzir uma mesa são gastos 2 m^2 de madeira e 2 H.h de mão de obra e para produzir um armário são gastos 3 m^2 de madeira e 1 H.h de mão-de-obra. Sabendo que a disponibilidade de madeira é de 12 m^2 e a disponibilidade de mão de obra é de 8 H.h.. Determinar quanto deve ser produzido de cada um dos produtos para maximizar a margem de contribuição total (lucro) da empresa, sabendo que cada mesa vendida a margem é de R$ 4,00 e que cada armário vendido fornece uma margem de R$ 1,00.

- *Solução*
- Vamos formular esse problema matematicamente (construir o modelo matemático).
- A quantidade de mesas a serem produzidas é x_1.
- A quantidade de armários a serem produzidos é x_2.
- Como a mesa fornece um lucro unitário de R$ 4,00 e o armário um lucro unitário de R$ 1,00, o lucro total obtido *z* (em reais) será

$$z = 4{,}00x_1 + 1{,}00x_2$$

Cada mesa produzida utiliza 2 m^2 de madeira e cada armário produzido utiliza 3 m^2 de madeira. A quantidade total de madeira utilizada é:

$$2x_1 + 3x_2$$

De maneira similar, ada mesa produzida utiliza 2 H.h de mão de obra e cada armário produzido utiliza 1 H.h de mão de obra. A quantidade total de mão de obra utilizada é:

$$2x_1 + 1x_2$$

- Já que o fabricante só pode usar, no máximo, 12 m^2 de madeira e 8 H.h de mão de obra, nós devemos ter:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

- Além disso, como x_1 e x_2 não podem ser números negativos, temos

$$x_1 \geq 0 \qquad e \qquad x_2 \geq 0$$

- Isso mostra que o problema pode ser formulado matematicamente, como segue:

- Encontrar valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 4{,}00x_1 + 1{,}00x_2$$

sujeito a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Adiante veremos como resolver geometricamente este tipo de problema.

- **EXEMPLO 2 – Maximizando o Lucro de Vendas**

Um fabricante de bombons tem estocado bombons de chocolate, sendo 130 kg com recheio de cerejas e 170 kg com recheio de menta. Ele decide vender o estoque na forma de dois pacotes sortidos diferentes. Um pacote contém uma mistura com metade do peso em bombons de cereja e metade em menta e vende por R$ 20,00 por kg. O outro pacote contém uma mistura de um terço de bombons de cereja e dois terços de menta e vende por R$ 12,50 por kg. O vendedor deveria preparar quantos quilos de cada mistura a fim de maximizar seu lucro de vendas?

- Encontrar valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 20{,}00x_1 + 12{,}50x_2$$

sujeito a

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 130$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 170$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Adiante veremos como resolver geometricamente este tipo de problema.

- **EXEMPLO 3 – Maximizando o Rendimento Anual**

Uma mulher tem R$ 10.000 para investir e seu corretor sugere investir em dois títulos, A e B. O título A é bastante arriscado, com lucro anual de 10% e o título B é bastante seguro, com um lucro anual de 7%. Depois de algumas considerações, resolve investir no máximo R$ 6.000 no título A, no mínimo R$ 2.000 no título B e investir no mínimo tanto no título A quanto no título B. Como ela deverá investir seu R$ 10.000 a fim de maximizar o rendimento anual?

- *Solução*
- Para formular o problema matematicamente, sejam x_1 a quantia investida no título A e x_2 a quantia investida no título B.
- Como cada real investido no título A rende R$ 0,10 por ano e cada real investido no B rende R$ 0,07 por ano, o total do rendimento anual *z* (em reais) de ambos os títulos é dado por:

$$z = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$$

- Os vínculos (restrições) impostos podem ser formulados como segue:

- Investir no máximo R$ 10.000 $x_1 + x_2 \leq 10.000$
- Investir no máximo R$ 6000 em A $x_1 \leq 6.000$
- Investir no mínimo R$ 2000 em B $x_2 \geq 2.000$
- Investir no mínimo tanto em A como em B $x_1 \geq x_2$
- Além disso, estamos supondo implicitamente que ambos x_1 e x_2 são números não-negativos:

$$x_1 \geq 0 \quad e \quad x_2 \geq 0$$

- Assim, uma formulação completa do problema (modelo) é como segue:

Encontrar os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10.000 \\ x_1 &\leq 6.000 \\ x_2 &\geq 2.000 \\ x_1 &\geq x_2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- **EXEMPLO 4 – Minimizando o Custo**

Um estudante quer projetar um desjejum com flocos de milho e leite que seja o mais econômico possível. Levando em conta o que ele consegue comer nas suas outras refeições, ele decide que seu café da manhã deveria supri-lo com 9 gramas de proteínas, pelo menos uma terça parte da necessidade diária recomendada (NDR) de vitamina D e pelo menos uma quarta parte da NDR de cálcio. Ele encontra as seguintes informações nutricionais nas embalagens do leite e dos flocos de milho:

	Leite (meio copo)	Flocos de milho (1 xícara
Custo	7,5 centavos	50 centavos
Proteína	4 gramas	2 gramas
Vitamina D	1/8 de NDR	1/10 de NDR
Cálcio	1/6 de NDR	Nada

A fim de não ter uma mistura muito empapada ou muito seca, o estudante decide limitar-se a misturas que contenham no mínimo 1 e no máximo 3 xícaras de flocos de milho por copo de leite. Quais quantidades de leite e de flocos de milho ele deve utilizar para minimizar o custo de seu desjejum?

Solução:

Para formular o problema matematicamente, sejam x_1 a quantidade de leite utilizada (medida em meios copos) e x_2 a quantidade de flocos de milho utilizada (medidas em xícaras). Então, sendo *z* o custo do desjejum em centavos, podemos escrever a função objetivo, que é o custo do desjejum, que deve ser minimizada:

$$z = 7{,}5x_1 + 50x_2$$

E as restrições:

Pelo menos 9g de proteína $4x_1 + 2x_2 \geq 9$

Pelo menos 1/3NDR de vitamina D $\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \geq \frac{1}{3}$

Pelo menos 1/4NDR de Cálcio $\frac{1}{6}x_1 \geq \frac{1}{4}$

Pelo menos 1 xícara de flocos de milho por copo (dois meios copos) de leite: $\frac{x_2}{x_1} \geq \frac{1}{2}$

No máximo 3 xícaras de flocos de milho por copo (dois meios copos) de leite: $\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{3}{2}$

Como antes, também estamos supondo que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

- Assim, a formulação matemática completa do problema é como segue:
- Encontrar valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 7{,}5x_1 + 50x_2$$

sujeito a

$$4x_1 + 2x_2 \geq 9$$

$$\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6}x_1 \geq \frac{1}{4}$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$3x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

- **Uma solução geométrica para Problemas de Programação Linear**

Cada um dos três problemas precedentes é um caso especial do seguinte problema:

✓ *Problema.* Encontrar valore de x_1 e x_2 que ou maximizam ou minimizam

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{1}$$

sujeito a

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ (\ )(\ )(\ ) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ (\ )(\ )(\ ) b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ (\ )(\ )(\ ) b_m \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \geq 0 \quad e \quad x_2 \geq 0 \tag{3}$$

Em cada uma das m restrições de (2), pode ser usado qualquer um dos símbolos $\leq, \geq$ ou $=$.

O problema acima é chamado ***problema geral de programação linear*** em duas variáveis.

A função linear *z* em (1) é chamada ***função-objetivo***. As equações (2) e (3) são chamadas **restrições ou vínculos**; em particular, as equações em (3) são chamadas **restrições de não-negatividade** das variáveis x_1 e x_2.

- Vamos ver agora como resolver graficamente um problema de programação linear em duas variáveis. Um par de variáveis (x_1, x_2) que satisfaz todas as restrições é chamado de ***solução viável.*** O conjunto de todas as soluções viáveis determina um subconjunto do plano x_1x_2 chamado ***região viável***.
- Nosso objetivo é encontrar uma solução viável que maximize a função objetivo. Uma tal solução é chamada ***solução ótima.***
- Para examinar a região viável de um problema de programação linear, observamos que cada restrição do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

define uma reta no plano x_1x_2, enquanto cada restrição da forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \text{ ou } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

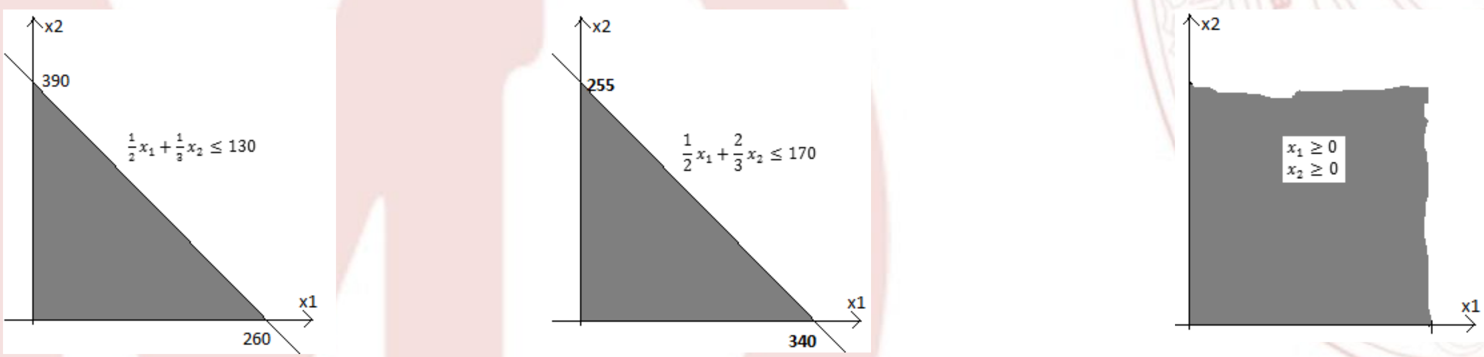
define um semipleno que inclui a reta da fronteira $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$

Assim, a região viável é sempre uma intersecção de um número finito de retas e planos.

Por exemplo, as quatro restrições

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 130$$
$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 170$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Do exemplo 1 definem os semiplanos indicados nas partes (a), (b) e (c) da figura abaixo:



(a) (b) (c)

Figura 1

A região viável deste problema é, portanto, a intersecção destes quatro semiplanos, que é a região indicada na figura:

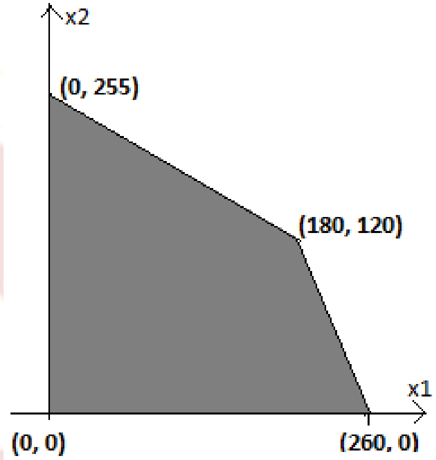
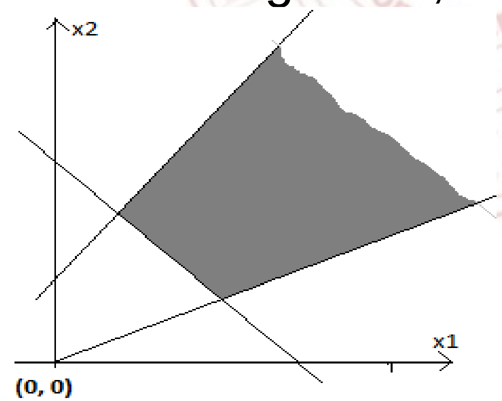


Figura 2

Pode-se mostrar que a região viável de um problema de programação linear tem uma fronteira que consiste de um número finito de segmentos de retas. Uma região viável é dita ***limitada*** (figura acima) se puder ser englobada num círculo suficientemente grande; caso contrário ela é ***ilimitada*** (figura abaixo):

Figura 3



Se a região viável é *vazia* (ou seja, não contém pontos), então as restrições são inconsistentes e o problema de programação linear não possui solução.

Os pontos de fronteira de uma região viável que são intersecções de dois segmentos de retas de fronteira, são chamados ***pontos extremos***, também chamados de pontos de esquina ou vértice. Por exemplo, pela figura 2, a região viável do Exemplo 1 tem quatro pontos extremos,

$$(0, 0), (0, 255), (180, 120), (260, 0) \qquad (4)$$

A importância dos pontos extremos de uma região viável é mostrada pelo seguinte teorema:

TEOREMA: Valores Máximos e Mínimos

Se a região viável de um problema de programação linear é não-vazia e limitada, então a função objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função pode ou não atingir valor máximo ou mínimo; contudo, se atingir, um valor máximo ou mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.

A figura abaixo sugere a ideia por trás da prova do teorema. Como a função-objetivo

$$z = c_1x_1 + c_2x_2$$

De um problema de programação linear é uma função linear de x_1 e x_2, suas curvas de nível (as curvas ao longo das quais z tem um valor constante) são retas. À medida que nos deslocamos perpendicularmente a essas retas, a função-objetivo cresce ou decresce monotonamente. Dentro de uma região viável limitada, os valores máximos e mínimos de z devem ocorrer, portanto, nos pontos extremos.

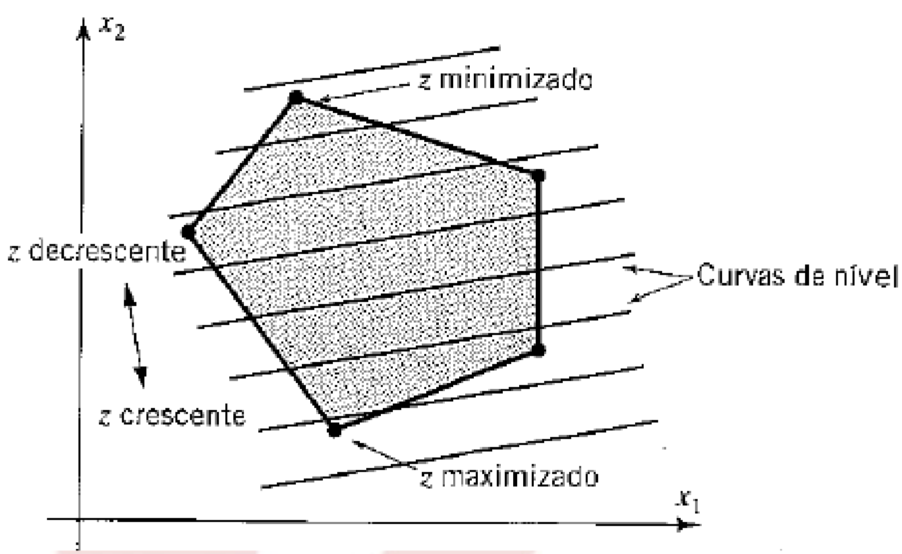


Figura 4

A seguir vamos usar o Teorema 1 para resolver vários problemas de programação linear e ilustrar as variações na natureza das soluções que podem ocorrer.

Exemplo 5 – De volta ao Exemplo 2

Da figura 2 nós vemos que a região viável do Exemplo 2 é limitada. Consequentemente pelo Teorema 1 a função-objetivo

$$z = 20{,}00x_1 + 12{,}50x_2$$

Atinge tanto um valor máximo quanto um mínimo em pontos extremos. Os quatro pontos extremos e os correspondentes valores de z são dados na tabela seguinte:

Ponto extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = 20{,}00x_1 + 12{,}50x_2$
(0, 0)	0
(0, 255)	3187,50
(180, 120)	5100,00
(260, 0)	5200,00

Nós vemos que o maior valor de z é 5200,00 e a correspondente solução ótima é (260, 0). Assim, o fabricante de balas atinge um valor máximo de R$ 5.200,00 quando ele produz 260 quilos da mistura A e nada da mistura B.

Exemplo 6 – Encontre os valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = x_1 + 3x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

na figura abaixo desenhamos a região viável deste problema. Por ser limitada, o valor máximo de z é atingido em um dos pontos extremos. Os valores da função-objetivo nos cinco pontos extremos são dados na tabela seguinte.

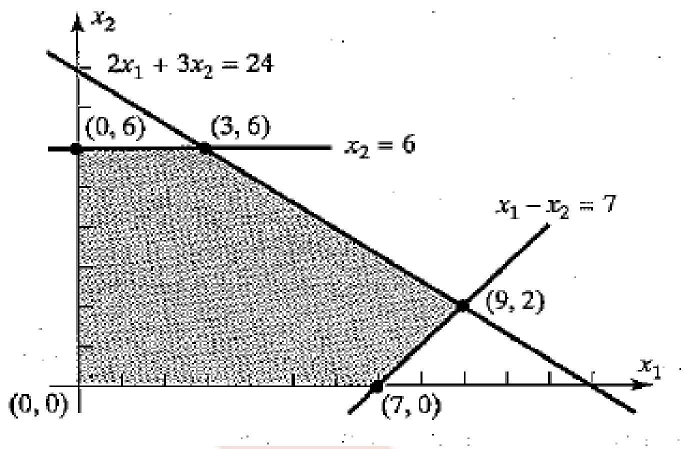


Figura 5

Ponto extremo (x_1, x_2)	Valor de $z = x_1 + 3x_2$
(0, 6)	18
(3, 6)	21
(9, 2)	15
(7, 0)	7
(0, 0)	0

A partir desta tabela vemos que o valor máximo de z é 21 atingindo x_1 = 3 e x_2 = 6.

Obrigado

Pericles do Prado
pericles.prado@mackenzie.br

Referência: Anton, H e Rorres, C. Álgebra Linear com Aplicações. 8ª ed. Porto Alegre. Editora Bookman. 2001.