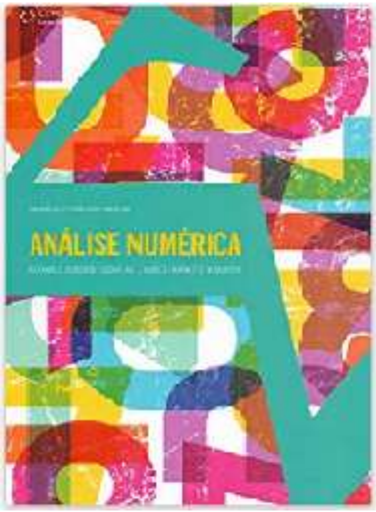
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 11 – 2º SEMESTRE/2019
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES (IV)

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o problema de aproximação de funções
- Conhecer e praticar com o Método de Mínimos Quadrados para aproximação de funções lineares



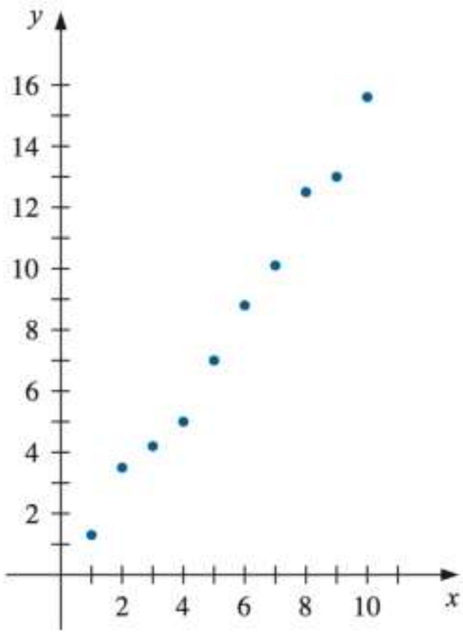
Para esta semana, usamos como referência a **Seção 8.1 (Aproximação de Mínimos Quadrados Discretos)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

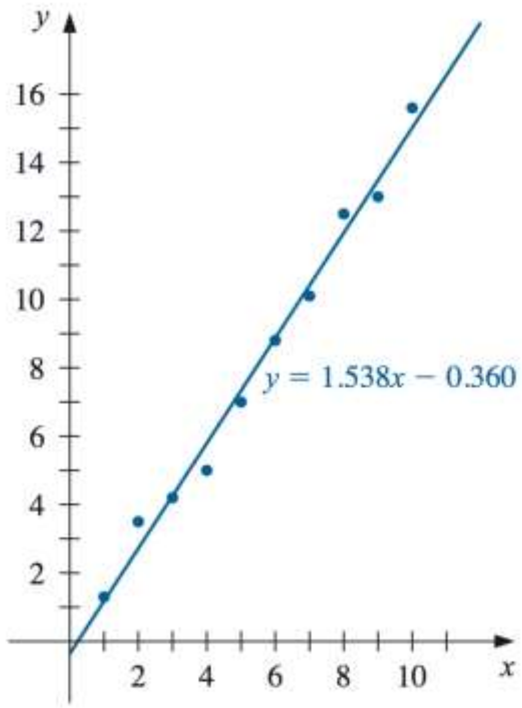
Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES

- Considere os 10 pontos mostrados no gráfico abaixo:



- Se observarmos com cuidado este gráfico, verificaremos que há uma tendência destes pontos em se **aproximar** de uma reta, conforme mostrado no gráfico abaixo:



- Diferentemente do problema de interpolação, na **aproximação** estamos interessados em obter curvas que **minimizem a distância** a um determinado conjunto de pontos dados.

MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS (MMQ)

- O **Método de Mínimos Quadrados (MMQ)** consiste em encontrar os **coeficientes de uma reta** que **minimizem a função-distância quadrática** mostrada a seguir:

$$E \equiv E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0)\right]^2$$

- Para o exemplo do gráfico anterior, estaríamos procurando por coeficientes a_0 e a_1 que minimizem a função-distância abaixo:

$$E_2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{10} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0)\right]^2$$

- Como se trata de uma **função de duas variáveis**, no processo de encontrar os **pontos críticos** (possivelmente, os **pontos de mínimos**), vamos usar **derivadas de primeira ordem e igualá-las a 0**:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

- Expandindo as equações acima, teremos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_0} \sum_{i=1}^{m} \left[(y_i - (a_1 x_i - a_0) \right]^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_1 x_i - a_0)(-1)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial a_1} \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - (a_1 x_i + a_0) \right]^2 = 2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - a_1 x_i - a_0)(-x_i)$$

- Simplificando estas duas equações, obteremos as seguintes equações:

$$a_0 \cdot m + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \quad \text{and} \quad a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i.$$

- Temos, então, um **sistema com duas equações e duas incógnitas**. Resolvendo este sistema, obteremos os seguintes valores para os coeficientes a_0 e a_1 :

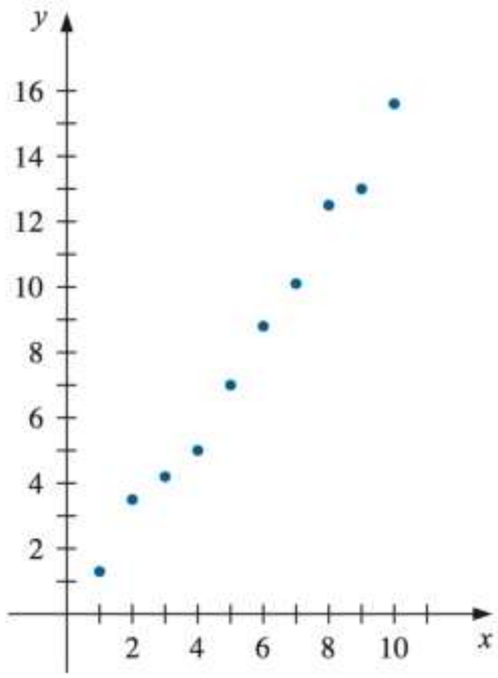
$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}$$

$$a_1 = \frac{m \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}.$$

- O método MMQ consiste em **efetuar todas os somatórios indicados** anteriormente, obtendo os **dois coeficientes desejados da reta de aproximação**.

EXERCÍCIO TUTORIADO

1. Encontre a reta aproximadora de pontos pelo Método MMQ para os dados abaixo:



x_i	y_i
1	1.3
2	3.5
3	4.2
4	5.0
5	7.0
6	8.8
7	10.1
8	12.5
9	13.0
10	15.6

Solução Primeiro, estendemos a tabela para incluir x_i^2, $x_i y_i$ e a soma das colunas. Isso é mostrado na Tabela.

TABELA MMQ

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$P(x_i) = 1.538x_i - 0.360$
1	1	1.3	1	1.3	1.18
2	2	3.5	4	7.0	2.72
3	3	4.2	9	12.6	4.25
4	4	5.0	16	20.0	5.79
5	5	7.0	25	35.0	7.33
6	6	8.8	36	52.8	8.87
7	7	10.1	49	70.7	10.41
8	8	12.5	64	100.0	11.94
9	9	13.0	81	117.0	13.48
10	10	15.6	100	156.0	15.02
Somas	55	81.0	385	572.4	$E = \sum_{i=1}^{10}(y_i - P(x_i))^2 \approx 2.34$

Sendo:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \sum_{i=1}^{m} y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \sum_{i=1}^{m} x_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2} \qquad a_1 = \frac{m \sum_{i=1}^{m} x_i y_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{i=1}^{m} y_i}{m\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^2}.$$

As equações implicam que

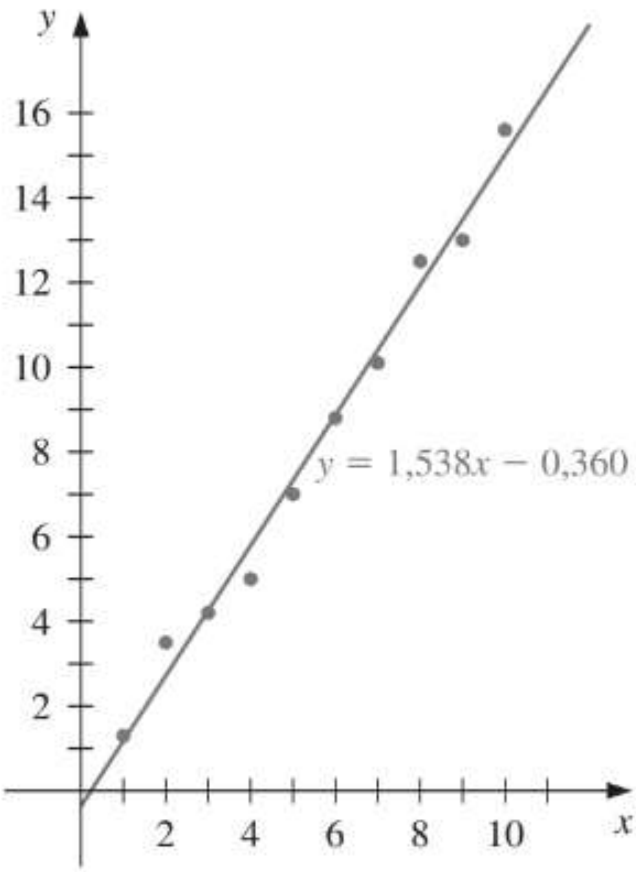
$$a_0 = \frac{385(81) - 55(572{,}4)}{10(385) - (55)^2} = -0{,}360$$

e

$$a_1 = \frac{10(572{,}4) - 55(81)}{10(385) - (55)^2} = 1{,}538,$$

de modo que $\boxed{P(x) = 1{,}538x - 0{,}360.}$ O gráfico dessa reta e os pontos dados são mostrados na Figura . Os valores aproximados fornecidos pela técnica de mínimos quadrados nos pontos dados estão na Tabela .

GRÁFICO MMQ



EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

2. Encontre a reta aproximadora de pontos pelo Método MMQ para os dados abaixo:

x_i	y_i
0	1.0000
0.25	1.2840
0.50	1.6487
0.75	2.1170
1.00	2.7183

TABELA MMQ

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	$P(x_i)$
1	0	1	0	0	0,8997
2	0,25	1,284	0,063	0,321	1,3266
3	0,5	1,649	0,25	0,82435	1,7536
4	0,75	2,117	0,563	1,58775	2,1806
5	1	2,718	1	2,7183	2,6075
somas	**2,5**	**8,768**	**1,875**	**5,4514**	

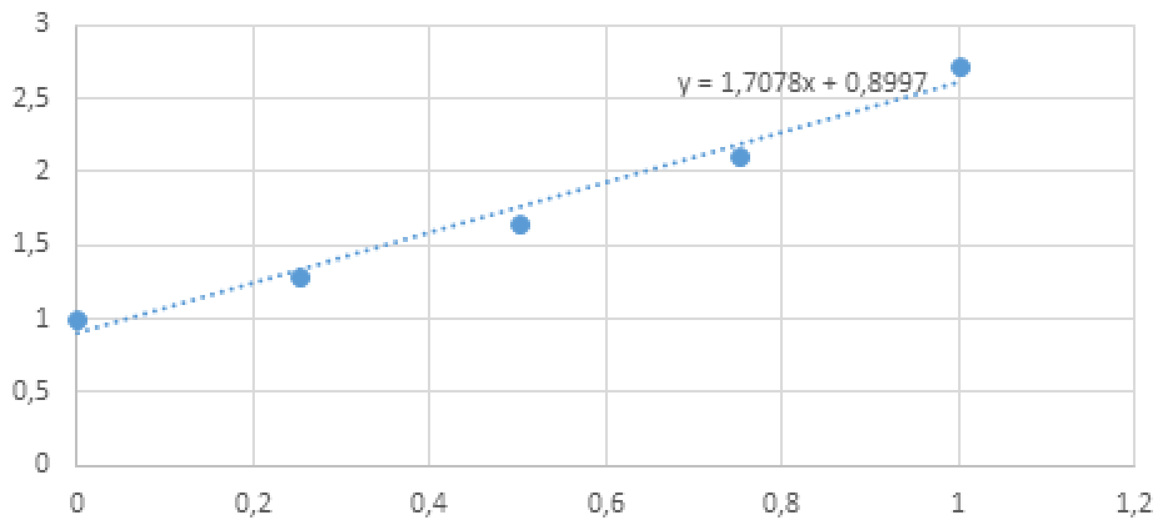
Portanto:

a_0=0,8997 (termo independente)

a_1=1,7078 (inclinação)

$P(x) = a_1x + a_0 = 1{,}7078x + 0{,}8997$

GRÁFICO MMQ



EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Encontre a reta aproximadora de pontos pelo Método MMQ para os dados abaixo:

x_i	1.0	1.1	1.3	1.5	1.9	2.1
y_i	1.84	1.96	2.21	2.45	2.94	3.18

2. Encontre a reta aproximadora de pontos pelo Método MMQ para os dados abaixo:

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

3. Implemente o Método MMQ em Python.