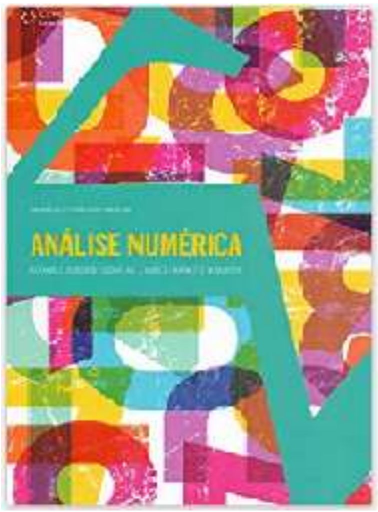
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 02 – 2º SEMESTRE/2019
PROF. Jamil Kalil Naufal Júnior

TEORIA: ALGORITMOS NUMÉRICOS

Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o conceito de algoritmo numérico.
- Conhecer os conceitos de complexidade e convergência de algoritmos numéricos.
- Praticar com cálculo de complexidade e convergência de algoritmos numéricos.



Para esta semana, usamos como referência as **Seções 1.3 (Algoritmos e Convergência) e 1.4 (Software Numérico)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

Não deixem de ler estas seções depois desta aula!

ALGORITMOS NUMÉRICOS E COMPLEXIDADE

- **Algoritmos (ou métodos) numéricos** são esquemas que, normalmente, buscam por **soluções numéricas exatas ou aproximadas de problemas**.

- O estudo destes algoritmos é, geralmente, realizado por duas disciplinas: **Cálculo Numérico** e **Análise Numérica**. Em **Cálculo Numérico**, a preocupação essencial é o desenvolvimento do próprio algoritmo, sem preocupações com complexidade e convergência. Em Análise Numérica, além da **preocupação com o algoritmo**, as questões de **quão eficiente é o algoritmo** em termos de **complexidade** e **convergência** tornam-se importantes.

- A **descrição de um algoritmo numérico** pode ser feita, por exemplo, através de **pseudocódigo**. Geralmente, um algoritmo numérico possui uma ou mais entradas e uma ou mais saídas. O **cálculo da complexidade do algoritmo** é feito, normalmente, através de **análise assintótica**, com **cota superior** $\boldsymbol{O}(\cdot)$ e, se necessário, com **cota inferior** $\boldsymbol{\Omega}(\cdot)$.

EXERCÍCIO TUTORIADO

1. Descreva, em pseudocódigo, um algoritmo para calcular a soma abaixo. Calcule a complexidade com cota superior deste algoritmo.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$$

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

2. Descreva, em pseudocódigo, um algoritmo para calcular uma aproximação da função

$$f(x) = \ln(1 + x)$$

utilizando a expansão em Série de Taylor truncada mostrada a seguir. Calcule a complexidade com cota superior deste algoritmo.

$$\ln\ (1 + x)\ \approx \sum_{i=1}^{N} \frac{(-1)^{i+1} x^i}{i} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{N+1} x^N}{N}$$

- Além do aspecto da própria complexidade do algoritmo numérico, saber o **quão rápido ele se aproxima (converge) de (para) um valor desejado** é uma **medida** importante associada ao algoritmo.

- Geralmente, os algoritmos numéricos geram valores **intermediários nas aproximações**, que podem ser vistos como **sequências de números reais**.

- **Definição:** Suponha que se saiba que a sequencia $\{\boldsymbol{\beta_n}\}_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ **convirja para zero** e que $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ **convirja para um número real** $\boldsymbol{\alpha}$. Se existir uma constante K positiva tal que

$$|\boldsymbol{\alpha_n} - \boldsymbol{\alpha}| \leq \boldsymbol{K}|\boldsymbol{\beta_n}|$$

dizemos que a sequência $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para α com **taxa de convergência** $O(\beta_n)$. Normalmente, indica-se esta convergência por $\boldsymbol{\alpha_n} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{O}(\boldsymbol{\beta_n})$

- Na prática, normalmente se utiliza $\boldsymbol{\beta_n} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n^p}}$, para algum **número real** $\boldsymbol{p} > \boldsymbol{0}$. Assim, no cálculo de taxa de convergência de um algoritmo numérico, estamos interessados no **maior valor de** $\boldsymbol{p}$ com $\boldsymbol{\alpha_n} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{O}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n^p}}\right)$.

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

3. Considere dois algoritmos numéricos α_n e $\hat{\alpha}_n$, cujas sequências de aproximação sejam dadas por:

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2} \quad e \quad \hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3}\ , para\ n \geq 1$$

(a) Calcule o limite destas duas sequências e mostre qual o valor para onde elas convergem.

(b) Preencha a tabela com os valores abaixo e verifique qual destes dois algoritmos parece convergir mais rápido para 0.

n	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
α_n							
$\hat{\alpha}_n$							

4. Calcule as taxas de convergência dos dois algoritmos anteriores e mostre qual deles converge mais rápido.

$$\alpha_n = \frac{n+1}{n^2} \quad e \quad \hat{\alpha}_n = \frac{n+3}{n^3}\,, para\, n \geq 1$$

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Descreva, em pseudocódigo, um algoritmo para calcular uma aproximação da função

$$f(x) = e^x$$

utilizando a expansão em Série de Taylor truncada mostrada abaixo. Calcule a complexidade com cota superior deste algoritmo.

$$e^x \approx \sum_{i=0}^{N} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \cdots + \frac{x^N}{N!}$$

2. Utilizando o seu algoritmo, calcule aproximações para e^3 com N=5 e N=10, utilizando aritmética de arredondamento com 4 casas decimais. Para qual valor de N (5 ou 10), a aproximação pareceu ser mais precisa ? Por quê ?

3. Determine a taxa de convergência de cada uma das sequencias abaixo:

   a. $\alpha_n = sen\ \frac{1}{n}\ , para\ n \geq 1$

   b. $\alpha_n = \frac{sen\ n}{n}\ , para\ n \geq 1$

   c. $\alpha_n = \frac{1-e^n}{n}\ , para\ n \geq 1$