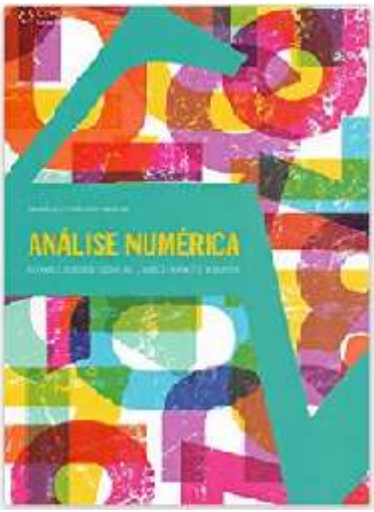
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO E INFORMÁTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ANÁLISE NUMÉRICA – Aula 05 – 2º SEMESTRE/2019
PROF. Jamil Kalil Naufal Junior

TEORIA: RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES (III)



Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o método iterativo de Jacobi para resolver sistemas de equações lineares.
- Praticar com simulações do método iterativo de Jacobi.

Para esta semana, usamos como referência as **Seção 7.3 (Técnicas Iterativas para Resolução de Sistemas Lineares até o Algoritmo 7.1)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

Não deixem de ler esta seção depois desta aula!

MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI

- A ideia básica dos **algoritmos iterativos** é escolher uma **aproximação inicial** e, a partir dela, **calcular as próximas aproximações** até que uma **tolerância de erro seja atingida**.
- Por exemplo, vamos considerar o seguinte sistema de equações lineares:

$$
\begin{aligned}
E_1: &\quad 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6,\\
E_2: &\quad -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25,\\
E_3: &\quad 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11,\\
E_4: &\quad 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15
\end{aligned}
$$

- A ideia do Método de Jacobi é **isolar cada variável do sistema** da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \phantom{-\frac{1}{5}x_1 +{}} \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 \phantom{{}+\frac{1}{10}x_4} + \frac{3}{5}, \\
x_2 &= \frac{1}{11}x_1 \phantom{{}+\frac{1}{10}x_2} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11} \\
x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \phantom{{}+\frac{1}{11}x_3} + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10} \\
x_4 &= \phantom{-\frac{1}{5}x_1} - \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \phantom{{}+\frac{1}{10}x_4} + \frac{15}{8}
\end{aligned}
$$

- Se **tomarmos uma aproximação inicial** $\boldsymbol{x^{(0)} = (0,0,0,0)}$, podemos obter a próxima aproximação da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} = 0.6000, \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(0)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} + \frac{25}{11} = 2.2727, \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{10}x_2^{(0)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} - \frac{11}{10} = -1.1000, \\
x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(0)} + \frac{1}{8}x_3^{(0)} + \frac{15}{8} = 1.8750.
\end{aligned}
$$

- **Continuando as aproximações pelo mesmo esquema**, obtemos o seguinte quadro:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{(k)}$	0.0000	0.6000	1.0473	0.9326	1.0152	0.9890	1.0032	0.9981	1.0006	0.9997	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0000	2.2727	1.7159	2.053	1.9537	2.0114	1.9922	2.0023	1.9987	2.0004	1.9998
$x_3^{(k)}$	0.0000	−1.1000	−0.8052	−1.0493	−0.9681	−1.0103	−0.9945	−1.0020	−0.9990	−1.0004	−0.9998
$x_4^{(k)}$	0.0000	1.8750	0.8852	1.1309	0.9739	1.0214	0.9944	1.0036	0.9989	1.0006	0.9998

- A decisão de parar após 10 iterações baseou-se no critério a seguir, no qual 10^{-3} representa a **tolerância mínima** (ε) **permitida na aproximação**:

$$
\frac{\|\mathbf{x}^{(10)} - \mathbf{x}^{(9)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(10)}\|_\infty} = \frac{8.0 \times 10^{-4}}{1.9998} < 10^{-3}
$$

considerando-se a **norma-infinito:**

$$
\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|
$$

1. Obtenha uma aproximação para o sistema linear abaixo, tomando $x = (0,0)$ como aproximação e tolerância ε=0.1:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

Resposta:

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$x_1^{(k)}$	0	1	1/2	1/4	3/8	7/16
$x_2^{(k)}$	0	1	3/2	5/4	9/8	19/16
ε	-	1	1/3	1/5	1/9	1/19

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$x_1^{(k)}$	0	1	0,5000	0,2500	0,3750	0,4375
$x_2^{(k)}$	0	1	1,5000	1,2500	1,1250	1,1875
ε	-	1	0,3333	0,2000	0,1111	0,0526

$|| x^{(5)} - x^{(4)} ||_\infty / || x^{(5)} ||_\infty$ = 1/19 (ou 0,0526) < 0,1

Sendo o valor exato:

x_1	2/5
x_2	6/5

x_1	0,4000
x_2	1,2000

De fato, $|| x - x^{(5)} ||_\infty = || 2/5 - 7/16 ||_\infty$ = 3/80 (ou 0,0375)

e, $|| x - x^{(5)} ||_\infty / ||x||_\infty$ = 1/32 (ou 0,03125)

- O **isolamento de cada variável no Método de Jacobi** pode ser colocado da seguinte forma:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij} x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}},$$

- A partir deste isolamento, define-se o seguinte **processo iterativo de aproximação**:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(-a_{ij} x_j^{(k-1)} \right) + b_i \right]$$

- **Repetimos a iteração** até que a **quantidade a seguir** fique **menor ou igual à tolerância especificada**:

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|_\infty}$$

EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

2. Construa um algoritmo para o Método de Jacobi, tendo como entrada os coeficientes do sistema, a aproximação inicial e a tolerância.

Técnica iterativa de Jacobi

Para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dada uma aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$:

ENTRADA o número de equações e incógnitas n; os elementos a_{ij}, $1 \le i, j \le n$ da matriz A; as componentes b_i, $1 \le i \le n$ de $\mathbf{b}$; as componentes XO_i, $1 \le i \le n$ de $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$; tolerância TOL; número máximo de iterações N.

SAÍDA a solução aproximada $x_1, \ldots, x_n$ ou uma mensagem de que o número máximo de iterações foi excedido.

Passo 1 Faça $k = 1$.

Passo 2 Enquanto ($k \le N$) execute Passos 3 a 6.

Passo 3 Para $i = 1, \ldots, n$

faça $x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (a_{ij}XO_j) + b_i\right].$

Passo 4 Se $\|\mathbf{x} - \mathbf{XO}\| < TOL$ então SAÍDA ($x_1, \ldots, x_n$);

(O procedimento foi bem-sucedido.)

PARE.

Passo 5 Faça $k = k + 1$.

Passo 6 Para $i = 1, \ldots, n$ faça $XO_i = x_i$.

Passo 7 SAÍDA ('Número máximo de iterações excedido');

(O procedimento não foi bem-sucedido.)

PARE.

O passo 3 do algoritmo exige que $a_{ii} \neq 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Se um dos elementos a_{ii} for 0 e o sistema for não singular, um reordenamento das equações pode ser realizado de modo que $a_{ii} = 0$.

Outro possível critério de parada no Passo 4 é iterar até que

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|}$$

seja menor que alguma tolerância preestabelecida. Para tal, qualquer norma conveniente pode ser utilizada, sendo o usual a norma l_∞.

EXERCÍCIO DE IMPLEMENTAÇÃO – DATA DE ENTREGA: 08/09/2019

1) Implemente o algoritmo do Método de Jacobi com um notebook em Python.

2) Teste a sua implementação para exemplos (que você deve criar) de sistemas lineares com as seguintes dimensões e com as seguintes tolerâncias $\varepsilon=0.1$, $\varepsilon=0.01$, $\varepsilon=0.001$ e $\varepsilon=0.0001$.

   - 2x2
   - 3x3
   - 4x4
   - 5x5

   Mantenha todos os testes efetuados já calculados no seu notebook. Obtenha as medidas de tempo para cada um dos testes efetuados.

3) Obtenha as soluções exatas dos seus exemplos pelo Método de Eliminação de Gauss e compare com os resultados das aproximações (no próprio notebook).

4) Responda a seguinte questão (no próprio notebook): o que acontece com a aproximação se diminuirmos a tolerância ?

Detalhes burocráticos:

- O exercício pode ser feito individualmente ou em duplas. Identificar os seus nomes no início do notebook.

- Exercícios com cópias parciais ou totais terão nota zero.

- A entrega deve ser feita em link a ser disponibilizado no Moodle.

EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

1. Obtenha aproximações para os sistemas abaixo, considerando-se uma tolerância de ε=0.01. A aproximação inicial fica a seu critério.

a.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 \phantom{{}-2x_3} &= 9, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7, \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25, \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11, \\ -x_3 + 5x_4 &= -11. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6. \end{aligned}$$