

Universidade Presbiteriana Mackenzie



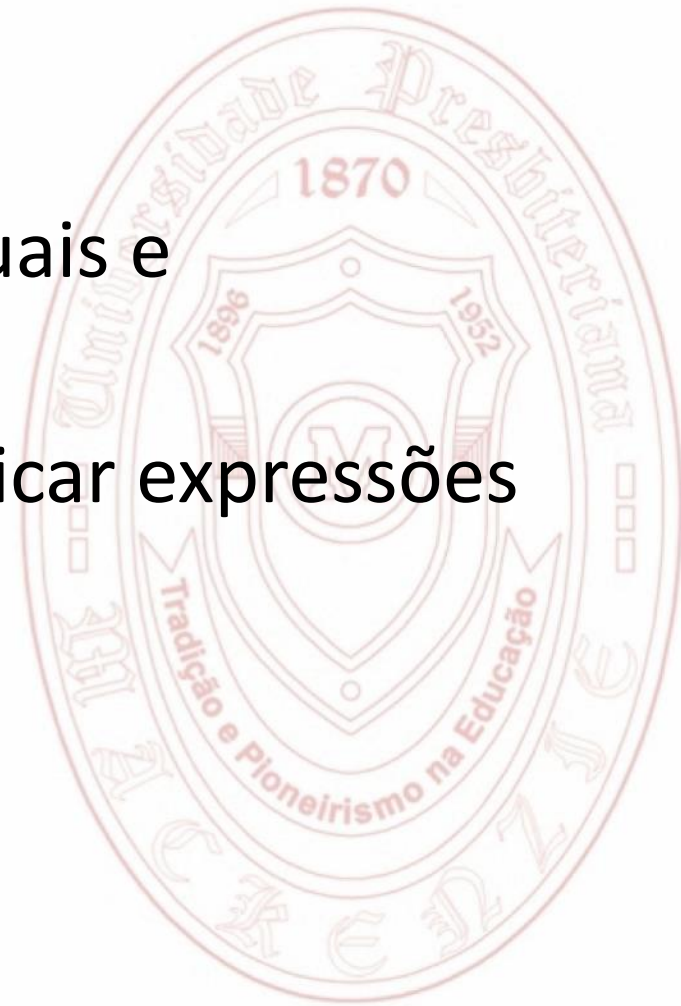
Teoremas

Prof. Fabio Kawaoka Takase

Faculdade de Computação e Informática

Objetivos

- Apresentar representações duais e complementares.
- Utilizar teoremas para simplificar expressões booleanas.



Referência Bibliográfica

- Referência para esta aula:
- **Capítulo 3** de TOCCI, Ronald J.; WIDMER, Neal S.; MOSS, Gregory L. **Sistemas Digitais: princípios e aplicações**. 11ª Ed. Editora Pearson, 2011.
- **Capítulo 2** de PIMENTA, T.C. **Circuitos Digitais**. São Paulo: Elsevier, 2017.

Teoremas

- Álgebra booleana é uma ferramenta matemática utilizada para análise e projeto de circuitos digitais.
- A expressão booleana resultante de uma tabela-verdade não se apresenta de imediato em um formato simplificado.
- As regras e teoremas booleanos podem ser usados para simplificar a expressão de um circuito lógico e a sua implementação.
- No domínio da matemática, um teorema é uma proposição que pode ser demonstrada por meio de um processo lógico.

Expressão Dual

- Propriedade importante da álgebra de boole.
- A expressão se mantém válida pela troca dos operadores E e OU.
- A expressão dual pode ser obtida seguindo o procedimento:
 1. Trocam-se $.$ por $+$ e $+$ por $.$;
 2. Trocam-se 0 por 1 e 1 por 0;
 3. Mantêm-se as prioridades da expressão original pela adição ou remoção de parêntesis.

Expressão Dual

- Exemplos:

$$F = A.B + C.D + B.1$$

$$F_{\text{dual}} = (A+B).(C+D).(B+0)$$

$$X = KLM + NT(R+S)$$

$$X_{\text{dual}} = (K+L+M).(N+T+RS)$$



Expressão Complementar

- Servem para obter o valor complementar ou negado da expressão original.
- A expressão complementar pode ser obtida seguindo o procedimento:
 1. Trocam-se $.$ por $+$ e $+$ por $.$;
 2. Trocam-se 0 por 1 e 1 por 0;
 3. Mantêm-se as prioridades da expressão original pela adição ou remoção de parêntesis.
 4. Complementam-se todas as variáveis.

Expressão Complementar

- Exemplos:

$$F = A.B + C.D + B.1$$

$$F' = (A' + B').(C' + D').(B' + 0)$$

$$S = AB'C + C(D' + E)$$

$$S' = (A' + B + C').(C' + DE')$$



Elemento Unitário (Aniquilador)

T1.a: $X + 1 = 1$, para qualquer X

T1.b: $X.0 = 0$, para qualquer X

Elemento Nulo (Identidade)

T2.a: $X + 0 = X$

T2.b: $X.1 = X$



Idempotência

T3.a: $X + X = X$

T3.b: $X.X = X$



Complementaridade

T4.a: $X + \bar{X} = 1$

T4.b: $X \cdot \bar{X} = 0$



Comutativa

T5.a: $X + Y = Y + X$

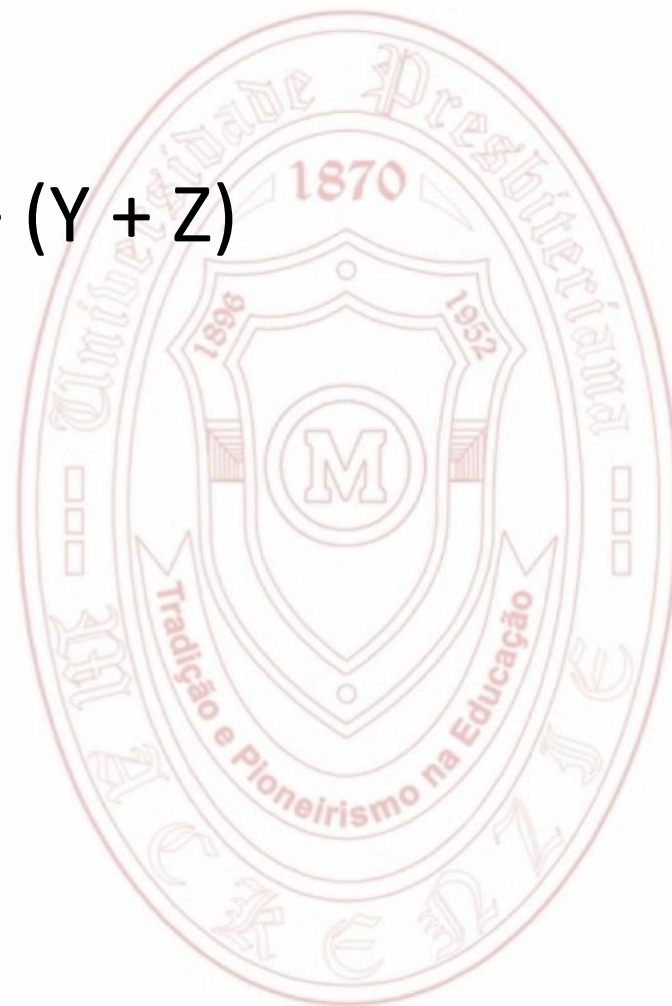
T5.b: $X.Y = Y.X$



Associativa

T6.a: $X + Y + Z = (X+Y)+Z = X + (Y + Z)$

T6.b: $X.Y.Z = (X.Y).Z = X.(Y.Z)$



De Morgan

$$\text{T7.a: } \overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$\text{T7.b: } \overline{\bar{X} \cdot \bar{Y}} = \bar{\bar{X}} + \bar{\bar{Y}}$$



Distributiva

T8.a: $X(Y+Z)=XY + XZ$

T8.b: $X + Y.Z = (X+Y)(X+Z)$



Combinação

$$T9.a: X \cdot Y + X \cdot \bar{Y} = X$$

$$T9.b: (X + Y) \cdot (X + \bar{Y}) = X$$



Absorção ou Cobertura

T10.a: $X + X.Y = X$

T10.b: $X (X+Y) = X$



Eliminação

T11.a: $X + \bar{X} \cdot Y = X + Y$

T11.b: $X \cdot (\bar{X} + Y) = X \cdot Y$



Consenso ou Fantasma

$$T12.a: X.Y + \bar{X}.Z = X.Y + \bar{X}.Z + Y.Z$$

$$T12.b: (X + Y).(\bar{X} + Z) = (X + Y).(\bar{X} + Z).(Y + Z)$$

Conversão

T13.a: $X.Y + \bar{X}.Z = (X + Z).(\bar{X} + Y)$

T13.b: $(X + Y).(\bar{X} + Z) = X.Z + \bar{X}.Y$

Exemplo

Um sistema de irrigação deve operar quando:

1. Inverno e baixa umidade do solo.
2. Temperatura alta, verão e baixa umidade do solo.
3. Temperatura alta, alta umidade do solo e verão.
4. Temperatura baixa, verão e baixa umidade do solo.
5. Temperatura alta e baixa umidade do solo.

Exemplo

Dado que:

I = Inverno e I' = verão

U = baixa umidade do solo e U' = alta umidade do solo

T = baixa temperatura e T' = alta temperatura

Construa a expressão booleana para Irrigar

Irrigar = _____

Exemplo

Prove que

$$Irrigar = T'.I' + U$$



Obrigado

Prof. Fabio Kawaoka Takase
fabio.takase@mackenzie.br

