

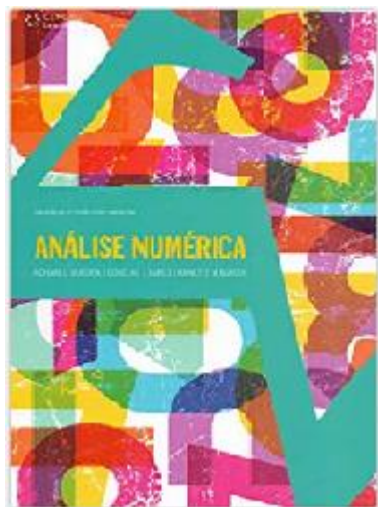
## TEORIA: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES (I)

---



Nossos **objetivos** nesta aula são:

- Conhecer o problema de resolução de equações.
- Conhecer e praticar com o Algoritmo da Bisseção para a soluções de problemas.



Para esta semana, usamos como referência as **Seção 2.1 (Método da Bisseção)** do nosso livro da referência básica:

BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. 10.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

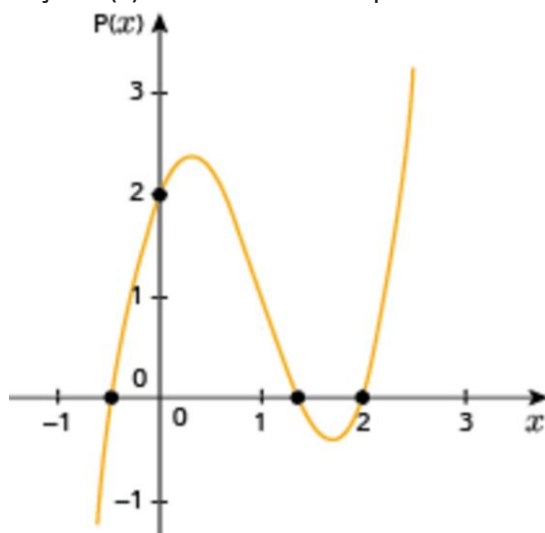
*Não deixem de ler esta seção depois desta aula!*

---

## PROBLEMA DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

---

- O problema de **resolução de equações** de uma variável consiste em, **dada uma função de uma variável  $f(x)$** , encontrar um **valor  $r$  tal que  $f(r)=0$** . Este valor é chamado **raiz de  $f(x)$** .
- Por exemplo, a função  $P(x)$  mostrada abaixo possui três raízes:



## EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

---

1. Encontre todas as raízes da função:

$$f(x) = x^5 + x - 2x^4 - 2$$

Resolução:

$$x^5 + x - 2x^4 - 2 = 0$$

$$x(x^4 + 1) - 2(x^4 + 1) = 0$$

$$(x^4 + 1) \cdot (x - 2) = 0$$

Considerando o conjunto dos números complexos, ou seja,  $-1 = i^2$

**Raízes: 2,  $-\sqrt{i}$ ,  $+\sqrt{i}$**

2. Encontre todas as raízes da função:

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 25x - 6$$

Resolução:

$$4x^3 - 3x^2 - 25x - 6 = 0$$

Teorema das raízes racionais:

Divisores de  $a_0$ :  $p \in \{+-1, +-2, +-3, +-6\}$

Divisores de  $a_n$ :  $q \in \{+-1, +-2, +-4\}$

$p/q \in \{+-1, +-2, +-, 3, +-6, +-1/2, +-1/4, +-3/2, +-3/4\}$

$$f(-2) = 0 \text{ (raiz)}$$

$$f(x) = q(x).Q(x) = 0, \text{ sendo } Q(x) = (x+2), \text{ portanto, } f(x) = q(x).(x+2)=0$$

### Método prático de Briot Ruffini

		Coeficientes do polinômio			
		4	-3	-25	-6
-2	↓	-8	+22	6	
	x	4	-11	-3	0

raiz

resto

$q(x) = 4x^2 - 11x - 3$

Aplicando Báskara, raízes =  $\{-1/4, 3\}$

$$(x-3)(x+1/4).(x+2)=0$$

Raízes:  $\{-2, -1/4, 3\}$

### 3. Encontre todas as raízes da função:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

### Método Cardano-Tartaglia

#### Solução Geral

Para a equação cúbica geral  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , o método de Cardano-Tartaglia garante a existência de três soluções complexas, as quais podem ser escritas da seguinte forma em termos dos coeficientes  $a, b, c$  e  $d$ :

$$x_1 = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_2 = -\frac{b}{3a} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$x_3 = -\frac{b}{3a} + \left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

em que  $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$  e  $q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}$ .

Raízes:

$$\{x_1 = 1,365230013,$$

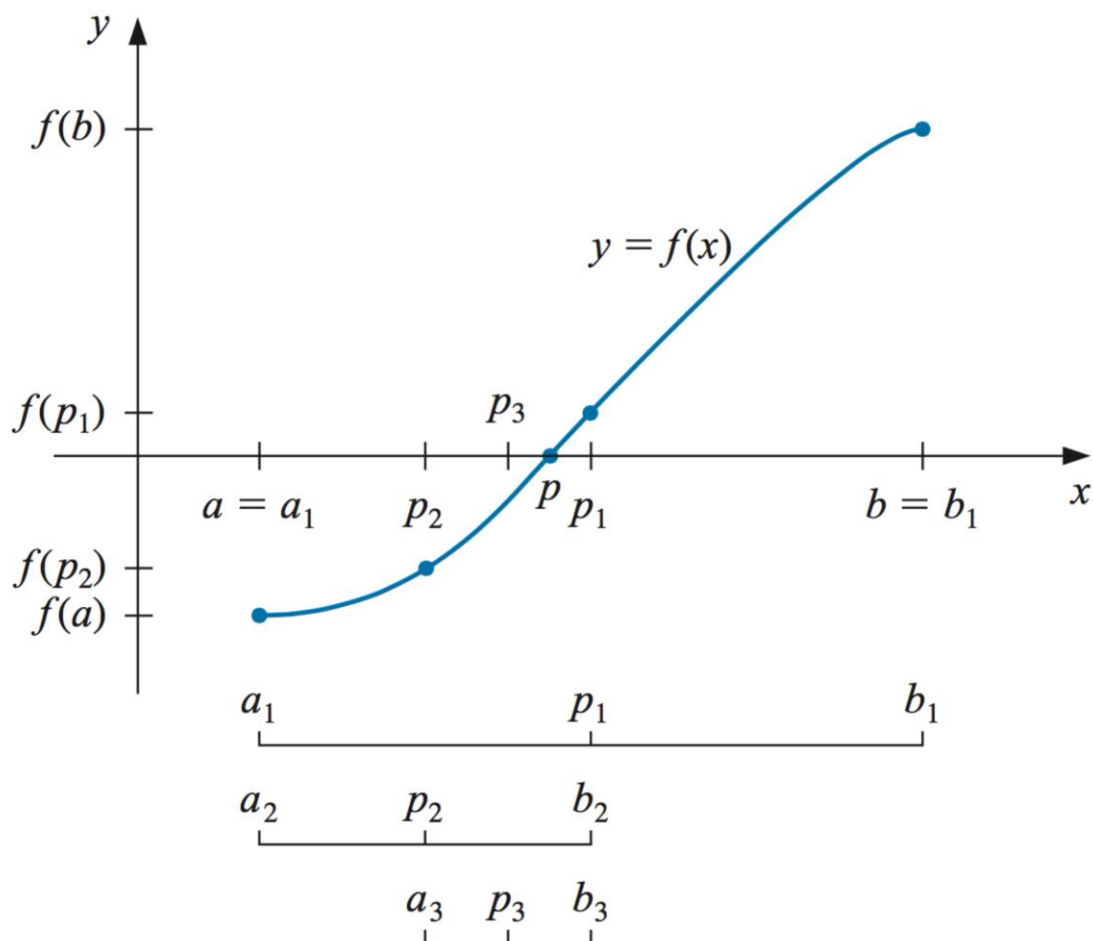
$$x_2 = -2,68262+0,35826i,$$

$$x_3 = -2,68262- 0,35826i\}$$

## MÉTODO DA BISSECÇÃO

---

- Trata-se de um dos métodos mais elementares para se resolver equações.
- Inicialmente, **delimita-se um intervalo  $[a,b]$**  que **contenha a raiz** procurada. **Divide-se o intervalo ao meio ( $p_i$ )** e define-se se a **busca** pela continua pelo **lado esquerdo ou direito da divisão** dependendo do sinal do produto  $f(a)f(p_i)$  ou  $f(b)f(p_i)$ . Vamos sempre procurar do **lado que tiver o produto negativo**, pois a função muda de sinal neste intervalo.
- O esquema iterativo é mostrado na figura abaixo:



- Como se trata de um **esquema iterativo**, é necessário fornecer uma **tolerância  $\epsilon$** . A partir desta tolerância, existem diversas alternativas para critérios de parada:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon,$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0,$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon.$$

### EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

4. Encontre uma aproximação para uma raiz da equação no intervalo  $[1,2]$  com tolerância  $\varepsilon=0.1$ .

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

Utilize, como critério de parada,  $|f(p_N)| < \varepsilon$ .

**Solução:**

Como  $f(1) = -5$  e  $f(2) = 14$ ,

Para a primeira iteração do método da bissecção, usamos o fato de que no ponto médio de  $[1, 2]$  temos  $f(1,5) = 2,375 > 0$ . Isso indica que devemos escolher o intervalo  $[1, 1,5]$  para nossa segunda iteração. A seguir, encontramos que  $f(1,25) = -1,796875$ , de modo que nosso intervalo se torna  $[1,25, 1,5]$ , cujo ponto médio é 1,375. Ao continuar dessa maneira, encontramos os valores na Tabela.

$n$	$a_n$	$b_n$	$p_n$	$f(p_n)$	
1	1,0	2,0	$b_2=p_1$ 1,5	2,375	$f(a_1).f(p_1)<0$
2	$a_2=a_1$ 1,0	$b_3=b_2$ 1,5	$a_3=p_2$ 1,25	-1,79687	$f(a_2).f(p_2)>0$
3	1,25	1,5	$b_4=p_3$ 1,375	0,16211	$f(a_3).f(p_3)<0$
4	$a_4=a_3$ 1,25	$b_5=b_4$ 1,375	$a_5=p_4$ 1,3125	-0,84839	$f(a_4).f(p_4)>0$
5	1,3125	1,375	$a_6=p_5$ 1,34375	-0,35098	$f(a_5).f(p_5)>0$
6	1,34375	1,375	1,359375	-0,09641	

Para  $n=1$  temos que  $a_1=1 \Rightarrow f(1)=-5$  e  $p_1=1,5 \Rightarrow f(1,5)=+2,375$ , então  $f(1).f(1,5)<0$

O algoritmo para em  $n=6$ , pois atingiu-se o critério de parada  $|f(p_6)| = 0,09641 < 0,1$  no qual temos  $p_6 = 1,359375$ .

Temos que pelo exercício 03 que a raiz real é 1,365230013, temos um erro absoluto de  $|1,365230013 - 1,359375| = 0,005855013$  ( $0,5855013 \cdot 10^{-2}$ )  $< 0,1$

Apesar de conceitualmente claro, o método da bissecção tem desvantagens significativas. Sua convergência é lenta (isto é,  $N$  pode crescer muito antes que  $|p - p_N|$  se torne pequeno o suficiente), e uma boa aproximação intermediária pode ser descartada de modo inadvertido. Entretanto, o método tem a propriedade importante de sempre convergir para uma solução e, por isso, é utilizado muitas vezes como o iniciador de métodos mais eficientes.

## EXERCÍCIO COM DISCUSSÃO EM DUPLAS

---

### 5. Escreva o Método da Bissecção numa versão algorítmica.

Para determinar uma solução de  $f(x) = 0$ , dada a função contínua  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , onde  $f(a)$  e  $f(b)$  têm sinais opostos:

**ENTRADA** extremidades  $a, b$ ; tolerância  $TOL$ ; número máximo de iterações  $N_0$ .

**SAÍDA** solução aproximada  $p$  ou mensagem de erro.

**Passo 1** Faça  $i = 1$ ;

$$FA = f(a).$$

**Passo 2** Enquanto  $i \leq N_0$ , execute os Passos 3 a 6.

**Passo 3** Faça  $p = a + (b - a)/2$ ; (Calcule  $p_i$ )

$$FP = f(p).$$

**Passo 4** Se  $FP = 0$  ou  $(b - a)/2 < TOL$ , então

SAÍDA ( $p$ ); (Procedimento concluído com sucesso.)

PARE.

**Passo 5** Faça  $i = i + 1$ .

**Passo 6** Se  $FA \cdot FP > 0$ , então faça  $a = p$ ; (Calcule  $a_i, b_i$ )

$$FA = FP$$

senão faça  $b = p$ . ( $FA$  não muda)

**Passo 7** SAÍDA ('O método falhou após  $N_0$  iterações,  $N_0 =$ ',  $N_0$ );

(O procedimento não foi bem-sucedido.)

PARE.

Quando um computador é utilizado para gerar aproximações, é boa prática definir um limite superior para o número de iterações. Isso elimina a possibilidade da ocorrência de um laço infinito, uma situação que pode ocorrer quando a sequência diverge (e também quando a codificação do programa é incorreta). Isso foi efetuado no Passo 2 do Algoritmo , no qual o limite  $N_0$  foi definido e o procedimento encerrado se  $i > N_0$ .

Observe que, para iniciarmos o algoritmo de bissecção, devemos determinar um intervalo  $[a, b]$  com  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Em cada passo, o comprimento do intervalo que contém um zero de  $f$  é reduzido por um fator 2 e, desse modo, é vantajoso escolher o menor intervalo inicial  $[a, b]$  possível.

## EXERCÍCIOS EXTRA-CLASSE

---

1. Utilize o Método da Bissecção para encontrar uma raiz das equações abaixo com tolerância  $\epsilon=0.00001$ . Utilize o mesmo critério de parada usado em aula.
  - a.  $x - 2^{-x} = 0$  for  $0 \leq x \leq 1$
  - b.  $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$  for  $0 \leq x \leq 1$
  - c.  $2x \cos(2x) - (x + 1)^2 = 0$  for  $-3 \leq x \leq -2$  and  $-1 \leq x \leq 0$
  - d.  $x \cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$  for  $0.2 \leq x \leq 0.3$  and  $1.2 \leq x \leq 1.3$
2. Implemente o Método da Bissecção em Python como uma função `bisseccao(f,a,b,epsilon)`, que recebe a função `f`, o intervalo `[a,b]` e uma tolerância `epsilon` e devolve uma aproximação de uma raiz de `f` no intervalo `[a,b]` com tolerância `epsilon`.