Designação de Tarefas – Resumo

Atenção: Em caso de dúvidas, consulte a seção "O Problema de Designação de Tarefas" do Capítulo 5 do livro "Introdução à Pesquisa Operacional" do Eduardo Leopoldino de Andrade que consta em nossa bibliografia básica.

Um caso particular do Problema do Transporte nos permite abordar uma situação que, aparentemente, nada tem em comum com o caso mais geral.

Considere a seguinte situação: você tem m máquinas $M_1, M_2, \cdots, M_m$ e n tarefas $T_1, T_2, \cdots, T_n$ que devem ser realizadas por essas máquinas, sendo que cada máquina pode ser alocada para realizar qualquer uma das tarefas, mas deve ser alocada a apenas uma. Além disso, cada máquina M_i tem um custo c_{ij} para executar a tarefa T_j. O objetivo é minimizar o custo total da execução das tarefas.

Trataremos apenas do caso $m = n$, isto é, aquele no qual a quantidade de máquinas é igual a quantidade de tarefas a serem executadas. Entretanto, qualquer outro caso pode ser adaptado.

Caso haja mais máquinas, basta adicionar tarefas inexistentes com mesmo custo para todas as máquinas, sendo que o custo fictício a ser atribuído deve ser, preferencialmente, maior que todos os custos das tarefas reais. Por outro lado, caso tenhamos mais tarefas que máquinas, basta replicar as máquinas já existentes, representando aqui a ideia de que as tarefas atribuídas a essas máquinas ficariam em uma fila de execução.

A partir de agora consideraremos apenas o caso no qual $m = n$.

Nesse caso, o Problema de Designação de Tarefas pode ser interpretado como um Problema de Transporte no qual todas as fontes (máquinas) e destinos (tarefas) tem capacidade 1, o que descreve a restrição de cada máquina só ser capaz de executar uma tarefa e de cada tarefa só poder ser alocada a uma máquina.

Como exemplo, resolveremos o seguinte problema de Designação de Tarefas. Cabe salientar que o método de otimização escolhido é distinto daqueles utilizados no Problema do Transporte e é específico para o Problema de Designação de Tarefas

Exemplo: A tabela a seguir indica o tempo (em segundos) que máquinas M_1, M_2, M_3 e M_4 levam para executar tarefas T_1, T_2, T_3 e T_4. Obtenha a designação de tarefas que minimiza o custo total da operação.

	$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{T_3}$	$\boldsymbol{T_4}$
$\boldsymbol{M_1}$	2	1	5	2
$\boldsymbol{M_2}$	4	3	2	3
$\boldsymbol{M_3}$	3	2	4	2
$\boldsymbol{M_4}$	3	1	5	3

Solução: Para simplificar a representação, como as capacidades são todas iguais a 1, elas não serão representadas. Começamos o processo de solução encontrando a solução inicial pelo método dos custos mínimos:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{2}$ 0
M_2	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{3}$ 0
M_3	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 1
M_4	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{3}$ 0

O processo de otimização é simples: calcularemos valores Δ_{ij} correspondentes à variação no custo total que ocorreria ao trocar o 1 da linha i para a coluna j e fazer também a respectiva troca do 1 que estava anteriormente nessa coluna. Por exemplo, ao trocar o 1 da 1ª linha, que está na 2ª coluna, para a 4ª coluna, estaremos calculando Δ_{14}. Essa mudança provoca uma mudança do 1 da 3ª linha que estava originalmente ocupando a 4ª coluna, para a 2ª coluna:

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{2}$ 0
M_2	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{3}$ 0
M_3	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 1
M_4	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{3}$ 0

Essa troca, faria o custo da linha 1 aumentar de 1 para 2 (+1), enquanto o da linha 3 permaneceria o mesmo (+0), dando um $\Delta_{14} = 1 + 0 = +1$, o que mostra que essa troca não diminui o custo. Calculando os demais Δs, temos:

$$\Delta_{11} = -1$$

$$\Delta_{13} = +5$$

$$\Delta_{14} = +1$$

$$\Delta_{21} = +4$$

$$\Delta_{22} = +5$$

$$\Delta_{24} = +3$$

$$\Delta_{31} = +1$$

$$\Delta_{32} = +1$$

$$\Delta_{33} = +3$$

$$\Delta_{42} = -1$$

$$\Delta_{43} = +4$$

$$\Delta_{44} = +1$$

Isso mostra que podemos trocar o 1 da primeira linha para a 1ª coluna ou o 1 da quarta linha para a 2ª coluna (mudanças que são equivalentes):

	$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{T_3}$	$\boldsymbol{T_4}$
$\boldsymbol{M_1}$	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{2}$ 0
$\boldsymbol{M_2}$	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{3}$ 0
$\boldsymbol{M_3}$	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 1
$\boldsymbol{M_4}$	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{3}$ 0

	$\boldsymbol{T_1}$	$\boldsymbol{T_2}$	$\boldsymbol{T_3}$	$\boldsymbol{T_4}$
$\boldsymbol{M_1}$	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{1}$ 0	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{2}$ 0
$\boldsymbol{M_2}$	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{3}$ 0
$\boldsymbol{M_3}$	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{2}$ 1
$\boldsymbol{M_4}$	$\boxed{3}$ 0	$\boxed{1}$ 1	$\boxed{5}$ 0	$\boxed{3}$ 0

Calcula-se novamente os Δ_{ij}, e o processo é repetido, sendo que o critério de parada é não haver Δ_{ij} negativo.

Exercícios:

1) Conclua a solução do exemplo dado.
2) Utilizando o algoritmo descrito acima, encontre a designação de tarefas que minimiza o custo total, dados os seguintes custos de alocação da máquina M_i para a realização da tarefa T_j em cada caso:

   a.

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	5	3	5	3
M_2	1	5	5	1
M_3	3	1	4	4
M_4	3	5	2	5

   b.

	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	3	4	3	4
M_2	4	5	4	3
M_3	5	3	3	5
M_4	3	3	5	5