# Fluxos em Redes

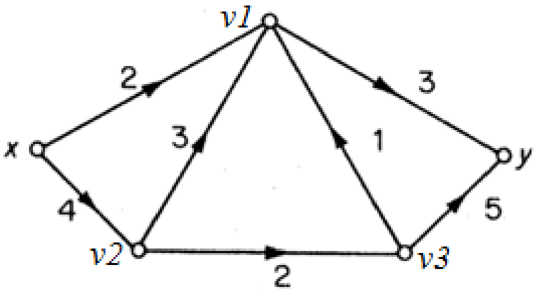
Teoria dos Grafos - 2017

Prof. Roberto C. de Araujo

Um grafo é chamado de ***dirigido*** ou ***orientado*** (ou, simplesmente, dígrafo) se suas arestas possuem uma orientação. Neste caso, uma aresta *uv* é tratada como diferente de uma aresta *vu*.

## 1. Redes

Uma ***rede*** $R= (D,c)$ é definida por um dígrafo $D= (V,A)$ contendo dois conjuntos não vazios $X,Y\subseteq V$, com $X\cap Y= \phi$, e uma função $c$, chamada ***capacidade***, definida sobre os arcos de $D$. Normalmente, $X$ e $Y$ são conjuntos unitários; $X$ é chamado de ***fonte*** e $Y$, de ***destino***. A capacidade de um arco pode ser considerada como a quantidade máxima com que um certo produto pode ser transportado através do arco.




**Notação**.

1. Se $S\subseteq V$, denotamos $S^C$ o conjunto $V\backslash S$.
2. O conjunto de arcos denotado como $(S, S^C)$ denota o conjunto de todos os arcos *xy* tais que $x\in S$ e $y\in S^C$.
3. Dados um conjunto $K\subseteq A$ e uma função f sobre A, denotamos por $f(K)$ a soma
$$f(K) = \textstyle\sum_{a\in K} f(a)$$
4. Dados $S\subseteq V$ e uma função $f$ sobre A
    - $f^+(S) = f(S, S^C)$
    - $f^-(S) = f(S^C,S)$

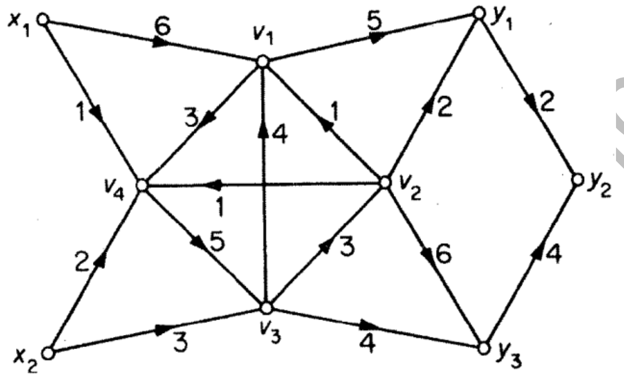
## 2. Fluxo sobre redes

Um fluxo em uma rede $R=(D,c)$ é uma função $f$ de valores inteiros definida sobre os arcos de D definida de tal forma que:

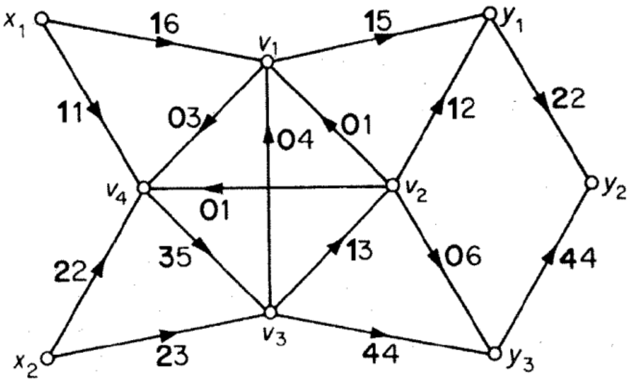
$0\leq f(a) \leq c(a)$, para todo $a \in$ AD

$f^-(v) = f^+(v)$, para todo $v \in$ AD-(X$\cup$Y)

O valor $f(a)$ de um arco $a$ pode ser interpretado como a quantidade de produtos sendo transportada através do arco $a$. Exemplo de uma rede R:

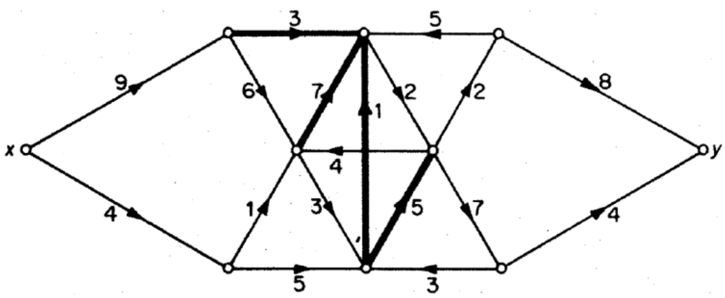



Exemplo de um fluxo sobre R (em cada arco, o dígito a esquerda é seu fluxo e o à direita é sua capacidade):




## 3. Cortes

Seja R uma rede tal que $X= \{x\}$ e $Y= \{y\}$. Um ***corte*** $K$ em R é um conjunto de arcos da forma $K=(S, S^C)$ tal que $x\in S$ e $y\in S^C$. A ***capacidade*** de um corte $K$, denotado por cap($K$), é a soma das capacidades dos arcos de K. O corte representado abaixo tem capacidade 16:




**Teorema**. Em uma rede, o valor de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo